

TESIS DOCTORAL

**APLICACIÓN DEL MÉTODO DE
DIFERENCIAS FINITAS
GENERALIZADAS A PROBLEMAS
DE ELASTO-DINÁMICA**

Álvaro Casasús Acevedo

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

2011



E.T.S. de Ingenieros Industriales UNED

**Departamento de Ingeniería de Construcción y
Fabricación**

**DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA
DE CONSTRUCCIÓN Y
FABRICACIÓN, E.T.S. DE
INGENIEROS INDUSTRIALES
UNED**

**APLICACIÓN DEL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS
GENERALIZADAS A PROBLEMAS DE ELASTO-DINÁMICA**

Álvaro Casasús Acevedo

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

Directores:

Dr. D. Juan José Benito Muñoz

Dr. D. Francisco Ureña Prieto

Agradecimientos

En primer lugar quisiera mostrar mi agradecimiento a mis dos directores de tesis D. Juan José Benito Muñoz y D. Francisco Ureña Prieto, primero por haberme brindado la oportunidad de realizar esta tesis dentro del campo de investigación de los métodos numéricos, y segundo por su apoyo durante toda la redacción de la misma, apoyo sin el cual no hubiese sido posible su realización.

En segundo lugar quisiera agradecer a mi padre Rafael el haber hecho posible que yo llegase hasta aquí, apoyándome en todo momento, incluso cuando la situación no era muy alentadora, y mostrando gran ilusión por verme alcanzar el máximo grado académico.

Así mismo agradezco a mi empresa Amberg Infraestructuras, por un lado el haberme facilitado la impresión de la tesis, y por otro por las facilidades ofrecidas para su redacción.

Por último mi agradecimiento es para Rocío, por haber cuidado estoicamente de mis hijos durante las numerosas horas de redacción de la tesis.

No puedo terminar este capítulo de agradecimientos sin agradecer la ayuda recibida del Ministerio de Ciencia e Innovación de España en el proyecto TISMANCA, Ref.: CGL2008-01757/CLI.

Glosario de términos

U_0 Valor exacto de la función en el nodo central de la estrella.

U_j Valor exacto de la función en el nodo j de la estrella.

h_j Coordenada x del nodo

k_j Coordenada y del nodo j respecto del nodo central.

x_0 Coordenada x del nodo central de la estrella.

y_0 Coordenada y del nodo central de la estrella.

x_j Coordenada x del nodo j de la estrella.

y_j Coordenada y del nodo j de la estrella.

u_0 Valor aproximado de la función en el nodo central de la estrella.

u_j Valor aproximado de la función en el nodo j de la estrella.

$w(h_j)$ Función de ponderación de los nodos de la estrella en 1D.

$w(h_j, k_j)$ Función de ponderación de los nodos de la estrella en 2D.

$B_2(u)$ Funcional de la estrella hasta 2º orden en x .

$B_5(u)$ Funcional de la estrella hasta 2º orden en x e y .

$B_4(u)$ Funcional de la estrella hasta 4º orden en x .

$B_{14}(u)$ Funcional de la estrella hasta 4º orden en x e y .

A Matriz de los coeficientes.

D_u Vector de las derivadas parciales incógnitas del problema.

b Vector de los términos independientes.

L Matriz resultante de la descomposición de Cholesky de **A**.

u_0^n Valor aproximado de la función en el nodo central en el paso temporal n .

u_j^n Valor aproximado de la función en el nodo j en el paso temporal n .

Δt Paso temporal.

E Módulo de elasticidad.

ν Coeficiente de Poisson.

I Momento de inercia.

m Masa.

ρ Densidad del medio.

G Módulo de corte.

$$\lambda = \frac{2G\nu}{1-2\nu}$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} = -f_0^n \vartheta_0 + \sum_{j=1}^{j=N} f_j^n \vartheta_j$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial y} = -f_0^n \varrho_0 + \sum_{j=1}^{j=N} f_j^n \varrho_j$$

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} = -f_0^n m_0 + \sum_{j=1}^{j=N} f_{xj}^n m_j$$

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial x \partial y} = -f_0^n \eta_0 + \sum_{j=1}^{j=N} f_j^n \eta_j$$

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2} = -f_0^n \varsigma_0 + \sum_{j=1}^{j=N} f_j^n \varsigma_j$$

$$\frac{\partial^4 f_0}{\partial x^4} = -f_0 \gamma_0 + \sum_{j=1}^{j=N} f_j \gamma_j$$

$$\frac{\partial^4 f_0}{\partial x^2 \partial y^2} = -f_0 \vartheta_0 + \sum_{j=1}^{j=N} f_j \vartheta_j$$

$$\frac{\partial^4 f_0}{\partial y^4} = -f_0 \varphi_0 + \sum_{j=1}^{j=N} f_j \varphi_j$$

TE_t Error cometido en la parte temporal de la aproximación.

TE_x Error cometido en la parte espacial de la aproximación.

TTE Error total cometido con la aproximación.

ϵ Coeficiente de amplificación del análisis de Von Neumann.

κ Número de onda.

\mathbf{k} Vector número de onda.

\mathbf{x}_0 Vector de las coordenadas del nodo central de la estrella.

\mathbf{x}_j Vector de las coordenadas del nodo j de la estrella.

\mathbf{h}_j Vector de las coordenadas del nodo j respecto del nodo central de la estrella.

IIS Índice de regularidad de la estrella.

IIC Índice de regularidad de la malla.

α Velocidad de propagación de las ondas P.

β Velocidad de propagación de las ondas S.

U_x Desplazamiento exacto de la onda en la dirección x .

U_y Desplazamiento exacto de la onda en la dirección y .

u_{x0}^n Desplazamiento aproximado de la onda en el nodo central en la dirección x para el paso temporal n .

u_{y0}^n Desplazamiento aproximado de la onda en el nodo central en la dirección y para el paso temporal n .

u_{xj}^n Desplazamiento aproximado de la onda en el nodo j en la dirección x para el paso temporal n .

u_{yj}^n Desplazamiento aproximado de la onda en el nodo j en la dirección y para el paso temporal n .

ω Frecuencia angular.

$$i = \sqrt{-1}$$

$\delta_x(x)$ Factor de amortiguamiento en la dirección x .

$\delta_y(y)$ Factor de amortiguamiento en la dirección y .

$\sigma_{xx,0}^n$ Valor aproximado del esfuerzo normal en el nodo central en la dirección de x , en el paso temporal n .

$\sigma_{yy,0}^n$ Valor aproximado del esfuerzo normal en el nodo central en la dirección de y , en el paso temporal n .

$\sigma_{xy,0}^n$ Valor aproximado del esfuerzo cortante en el nodo central en el plano xy , en el paso temporal n .

$\sigma_{xx,j}^n$ Valor aproximado del esfuerzo normal en el nodo j en la dirección de x , en el paso temporal n .

$\sigma_{yy,j}^n$ Valor aproximado del esfuerzo normal en el nodo j en la dirección de y , en el paso temporal n .

$\sigma_{xy,j}^n$ Valor aproximado del esfuerzo cortante en el nodo j en el plano xy , en el paso temporal n .

Índice de figuras

3.1. Dominio discretizado de forma irregular	15
3.2. Formación de estrellas dentro del dominio	15
3.3. Superposición de subdominios de funciones de ponderación.	18
4.1. Error global frente a número de nodos de la estrella	51
4.2. Criterio de la distancia	53
4.3. Criterio del octante y del cuadrante	54
4.4. Cuadrado de lado unidad con 121 nodos distribuidos irregularmente.	55
5.1. Viga sometida a una distribución de carga dependiente del tiempo	59
5.2. Equilibrio de un elemento diferencial de viga.	60
5.3. Esquema de los nodos de la viga con los nodos ficticios	64
5.4. Malla regular 21 nodos. $IIC = 1$	70
5.5. Malla irregular 21 nodos. $IIC = 0,96$	70
5.6. Malla irregular 21 nodos. $IIC = 0,78$	71
5.7. Malla irregular 21 nodos. $IIC = 0,62$	71
5.8. Malla irregular 21 nodos. $IIC = 0,46$	72
5.9. Solución aproximada en el último paso. $\Delta t = 0,005$	73
5.10. Solución aproximada en el último paso $n = 100$	73
5.11. Solución aproximada en el último paso $n = 200$	74
5.12. Solución aproximada en el último paso $n = 500$	74
5.13. Solución aproximada en el último paso $n = 1000$	75
5.14. Solución aproximada en el último paso $n = 1000$, $\Delta t = 0,005$	76
5.15. Solución aproximada en el último paso $n = 1000$, $\Delta t = 0,005$	78
5.16. Solución aproximada en el último paso $n = 1000$, $\Delta t = 0,001$	79
5.17. Solución aproximada en el último paso $n = 1000$, $\Delta t = 0,001$	79
6.1. Equilibrio de un elemento diferencial de placa delgada	82
6.2. Nodos ficticios en el contorno de la placa	86
6.3. Malla regular 36 nodos $IIC = 1$	92
6.4. Malla irregular 36 nodos $IIC = 0,92$	93
6.5. Malla irregular 36 nodos $IIC = 0,83$	93
6.6. Malla irregular 36 nodos $IIC = 0,76$	94
6.7. Malla irregular 36 nodos $IIC = 0,58$	94
6.8. Solución aproximada en el último paso $\Delta t = 0,001$; $n = 1000$	96
6.9. Solución aproximada en el último paso $n = 100$	97
6.10. Solución aproximada en el último paso $n = 200$	98

6.11. Solución aproximada en el último paso $n = 600$	99
6.12. Solución aproximada en el último paso $n = 1200$	100
6.13. Solución aproximada en el último paso $\Delta t = 0,001$; $n = 1000$	101
6.14. Solución aproximada en el último paso $\Delta t = 0,001$; $n = 500$	102
9.1. Contornos absorbentes en la frontera de un dominio	131
10.1. Malla 1. $IIC = 1$, Malla 2. $IIC = 0,65$, Malla 3. $IIC = 0,89$	148
10.2. Dispersión de las ondas P en malla irregular $IIC = 0,89$	150
10.3. Malla regular de 861 nodos	151
10.4. Solución aproximada de U_x para $n = 100$	151
10.5. Malla regular de 861 nodos con PML	152
10.6. Solución aproximada con PML	152
10.7. Malla regular de 861 nodos con PML	153
10.8. Solución aproximada con PML después de 5 pasos temporales	153
10.9. Solución aproximada con PML después de 20 pasos temporales	153
10.10. Solución aproximada con PML después de 100 pasos temporales . . .	154
10.11. Malla regular de 861 nodos con PML y domino heterogéneo	154
10.12. Solución aproximada con PML	155

Índice de cuadros

4.1. Error global cometido variando la función de ponderación	54
5.1. Influencia del paso temporal en el error global	71
5.2. Influencia del índice de regularidad en el error global	72
5.3. Error global frente al número de pasos	72
5.4. Influencia del paso temporal en el error global	75
5.5. Influencia del índice de regularidad en el error global	76
5.6. Influencia del paso temporal en el error global	77
5.7. Influencia del índice de regularidad en el error global	77
6.1. Influencia del paso temporal en el error global	95
6.2. Influencia del índice de regularidad en el error global	95
6.3. Error global frente a número de iteraciones	95
6.4. Influencia del paso temporal en el error global	98
6.5. Influencia del índice de regularidad en el error global	99
6.6. Influencia del paso temporal en el error global	101
6.7. Influencia del índice de regularidad en el error global	102
10.1. Error global para $IIC = 0,65$; $n = 500$; $\alpha = 1$; $\beta = 0,5$	148
10.2. Error global para $IIC = 0,89$; $n = 500$; $\alpha = 1$; $\beta = 0,5$	148
10.3. Error global para diferentes soluciones analíticas	149
10.4. Propiedades de cada región del dominio	154

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Ajuste de curvas mediante mínimos cuadrados	4
2. Objetivos de la tesis	7
3. El Método de Diferencias Finitas Generalizadas (MDFG)	9
3.1. Ajuste de curvas mediante mínimos cuadrados móviles	9
3.1.1. Conceptos básicos	9
3.1.2. Formulación general de método	11
3.2. El Método de Diferencias Finitas Generalizadas (MDFG)	14
3.2.1. Fundamento teórico	14
3.2.2. Funciones de ponderación	17
4. Fórmulas para la discretización temporal y espacial hasta 4º orden	21
4.1. Discretización en x hasta 2º orden	21
4.2. Discretización en x e y hasta 2º orden	27
4.3. Discretización en x hasta 4º orden	32
4.4. Discretización en x e y hasta 4º orden	37
4.5. Discretización temporal	48
4.6. Influencia de los parámetros fundamentales de la formulación	49
4.6.1. Influencia del número de nodos de la estrella	49
4.6.2. Influencia del criterio de selección de los nodos de la estrella	52
4.6.3. Influencia de la función de ponderación	52
4.6.4. Ejemplos académicos de resolución de EDP's de hasta 4º orden	54
5. Esquema en Diferencias Finitas Generalizadas para vigas	59
5.1. Ecuación diferencial de la viga sometida a flexión	59
5.2. Esquema en Diferencias Finitas Generalizadas	62
5.3. Convergencia, consistencia y estabilidad del método	64
5.3.1. Consistencia	64
5.3.2. Estabilidad	67
5.4. Irregularidad de la estrella y estabilidad	68
5.5. Aplicaciones	69
5.5.1. Vibraciones transversales en una viga simplemente apoyada	70
5.5.2. Vibraciones forzadas en una viga simplemente apoyada	72

5.5.3.	Vibraciones transversales en una viga biempotrada	74
5.5.4.	Vibraciones transversales en una viga biempotrada	76
5.5.5.	Vibraciones transversales en una viga empotrada - apoyada	77
6.	Esquema en Diferencias Finitas Generalizadas para placas delgadas	81
6.1.	Ecuación diferencial de la placa delgada según la teoría de Kirchhoff	81
6.2.	Esquema en Diferencias Finitas Generalizadas	84
6.3.	Convergencia, consistencia y estabilidad del método	87
6.3.1.	Consistencia	87
6.3.2.	Estabilidad	89
6.4.	irregularidad de la estrella y estabilidad	91
6.5.	Aplicaciones	92
6.5.1.	Vibraciones libres en una placa delgada apoyada	93
6.5.2.	Vibraciones forzadas en una placa delgada apoyada	97
6.5.3.	Vibraciones libres en una placa delgada empotrada	99
7.	Esquema en DFG para la ecuación de ondas	103
7.1.	La ecuación de ondas	103
7.1.1.	Caso 1 dimensión	104
7.1.2.	Caso 2 dimensiones	105
7.2.	Esquema en Diferencias Finitas Generalizadas	107
7.3.	Convergencia, consistencia y estabilidad del método	108
7.3.1.	Consistencia	108
7.3.2.	Estabilidad	109
7.4.	Dispersión de la estrella	119
7.4.1.	Dispersión de las ondas P	119
7.4.2.	Dispersión de las ondas S	121
7.4.3.	Dispersión de velocidad de grupo de las ondas P	122
7.4.4.	Dispersión de velocidad de grupo de las ondas S	125
8.	Irregularidad de la estrella y dispersión	127
9.	Contornos absorbentes, Perfect Matched Layers (PML)	131
9.1.	Formulación del PML	132
9.1.1.	Aplicación del PML para $u = u(x, t)$	133
9.1.2.	Aplicación del PML para $u = u(x, y, t)$	135
9.2.	PML aplicado a la onda plana. Amortiguamiento en una dirección	136
9.3.	PML aplicado a la onda plana. Amortiguamiento en dos direcciones	138
9.4.	Formulación de la ecuación de ondas plana con PML en DFG	143
10.	Aplicaciones	147
10.1.	Resultados para distintos pasos temporales	148
10.2.	Resultados para distintas longitudes de ondas	148
10.3.	Dispersión e irregularidad	150

10.4. DFG con PML en dominios homogéneos y heterogéneos	150
11. Conclusiones	157
12. Desarrollos futuros	161
13. Bibliografía y referencias	163

1 Introducción

Cada día son más variados y complejos los problemas de mecánica cuyo análisis se trata de abordar utilizando métodos numéricos. Entre ellos hay algunos en los que la geometría se ve muy afectada, como por ejemplo en fundición, donde es muy importante la propagación de la interfase líquido – sólido, en la propagación de grietas, y se precisa la simulación de su complejo y arbitrario camino de crecimiento, los problemas de extrusión y moldeo, que implican la consideración de grandes deformaciones, etc.

Otro ejemplo en el cual la geometría del problema es determinante son los problemas de excavaciones subterráneas, en concreto la excavación de túneles, la cual se realiza por etapas de excavación, debiéndose comprobar la estabilidad de cada etapa, en estos problemas el dominio de cálculo varía de una etapa a otra.

Estos problemas no se resuelven sin grandes dificultades con los métodos numéricos más convencionales, tales como elementos finitos, volúmenes finitos o diferencias finitas, y una de las razones es la dependencia de una malla o la exigencia de regularidad en la disposición de los nodos. La modificación de la geometría o de las discontinuidades, obliga a remallar en cada paso de la evolución del problema de forma que al hacerlo, además, se respeten las irregularidades y características propias del proceso. Todo esto introduce numerosas dificultades, como es por ejemplo la relación entre mallados sucesivos, que afectan a la precisión, tiempo de ejecución, complejidad de los programas informáticos, etc.

A la vista de lo expuesto, uno de los objetivos fundamentales de los denominados métodos sin malla, es eliminar en parte las dificultades apuntadas realizando una aplicación en términos nodales únicamente.

1.1. Antecedentes

Los métodos sin malla han aparecido recientemente con el objetivo de evitar las dificultades computacionales que presentaban los métodos numéricos basados en la existencia de una malla.

Son muchos los trabajos publicados sobre propagación de ondas sísmicas, incluso centrándonos en los relativos a la utilización del método de Diferencias Finitas (FD) y dentro de ellos los que tratan aspectos relativos al tipo de malla, la estabilidad y dispersión, que son los aspectos en que fundamentalmente se centra la presente tesis.

Así, durante más de diez años se utilizaron mallas convencionales en FD, pudiéndose destacar los trabajos de Altermann y Karal [2] y Kelly et al [47].

Los esquemas Staggered-grid (S-G) en FD fueron introducidos por Madariaga [59], popularizándose su uso en problemas de propagación de ondas con los trabajos de de Virieux [100], [101] en los que se usa un esquema de segundo orden para la formulación en velocidad-tensión con ondas SH y P-SV respectivamente.

Otros esquemas han sido presentados por Levander [53] para una formulación en cuarto orden para ondas P-SV, Graves [41], Graves et al. [42], Ohnimoto and Chovet [73] que lo aplican en un esquema de segundo orden en la formulación desplazamiento-tensión. También pueden destacarse los trabajos de Kristek et al. [48], [49].

A pesar de los trabajos citados de Virieux y Levander sobre dispersión y Crase et al. [24] que obtienen condiciones de estabilidad para ondas P-SV para un orden arbitrario de aproximación, Moczo, Kristek y Halada [65], se dan cuenta de que la dispersión de los esquemas S-G en 3-D no están suficientemente investigados y lo estudian para esquemas de cuarto orden en el espacio y segundo orden en el tiempo con validez para formulaciones en desplazamiento-tensión, velocidad-tensión y desplazamiento-velocidad-tensión. También Graves et al. [42] han estudiado la estabilidad y Moczo et al. [66], [66] presentan trabajos recopilatorios de gran interés.

Las mallas parcialmente escalonadas (staggered P-S-G) fueron utilizadas por primera vez por Andrews [3] para medios anisótropos y Zhang [104] las utiliza para la formulación velocidad-tensión en 2-D. Cruz Atienza y Virieux [25] las utilizan para la simulación de una rotura de falla en 2-D.

El primero en utilizar una malla con espaciado variable fue Boore [19] para un caso vertical 1-D, Mikuzono y Miyatarke [62] usan un espaciado variable en un medio elástico en 2-D para analizar el proceso de rotura de falla. Pitarka [83] presenta un esquema de cuarto orden para la formulación en velocidad-tensión sobre una malla rectangular con espaciado variable y Wang et al [103] combina mallas con diferentes espaciados.

Los métodos que en general se pueden denominar métodos sin malla, surgieron hace aproximadamente treinta años, aunque el interés y el esfuerzo investigador ha sido mínimo hasta hace poco tiempo. Así pues, la referencia más alejada en el tiempo y que puede considerarse como punto de partida es el método de partículas (SPHM) que fue desarrollado por en 1977 por Lucy [58]. En 1982 y 1988 Monaghan [69] y [70] desarrolla una explicación más rigurosa del método.

Una camino paralelo al indicado en el desarrollo de aproximaciones sin malla, se basa en la idea de realizar una aproximación local mediante el método de mínimos cuadrados móviles de Lancaster y Salkauskas en 1981 [52] Nayroles, Touzot y Villon en 1992 [71] fueron los primeros en utilizar una aproximación de este tipo en un método de Galerkin, denominado método de los elementos difusos (DEM).

Belytschko, Lu y Gu (1994) [8] refinaron y desarrollaron una implementación alternativa del método de los elementos difusos, que mejoró la precisión al utilizar

multiplicadores de Lagrange para imponer las condiciones de contorno esenciales y un orden de cuadratura mayor en la integración. Ellos denominaron al método, Galerkin libre de elementos (EFG).

Un salto importante en el desarrollo de estos métodos se ha producido a partir de los trabajos de Duarte y Oden (1995) [13] y de Babuska y Melenk en 1995 [5] que realizan una generalización muy interesante de la aproximación por mínimos cuadrados móviles usando el concepto de partición de la unidad, que los primeros denominaron nubes hp (hp clouds) y de partición de la unidad (PUFEM) los segundos.

Otro camino en la evolución de los métodos sin malla se ha constituido mediante el desarrollo del método de diferencias finitas generalizadas (GFDM) que surge como consecuencia de la evolución del método de diferencias finitas clásicas. Los trabajos de Jensen (1972) [43] y Perrone y Kao (1975) [82] pusieron las bases del método. Liszka y Orkisz (1980) [55] y Orkisz (1998) [79] han realizado importantes contribuciones a la mejora y desarrollo del método.

Caben destacar los artículos de E. Oñate et ál. [74], [76] y [77] en los cuales se analiza el método sin malla de los Puntos Finitos (Finite Point Method FPM) aplicado a la resolución de problemas de convección, mecánica de fluidos y mecánica estructural. El FPM es una efectiva técnica sin malla que se basa en el empleo de mínimos cuadrados móviles.

El método de diferencias finitas generalizadas DFG, se basa también en la utilización de mínimos cuadrados móviles, lo que permite aplicar esquemas en diferencias finitas en dominios irregulares. Al desarrollo de este método han contribuido los trabajos de F. Ureña, J.J. Benito y L. Gavete. Así, se han obtenido fórmulas explícitas en diferencias para el caso de estrellas irregulares, analizándose la influencia de los parámetros fundamentales que aparecen en la formulación [13], se ha obtenido un método adaptativo para la mejora de la solución aproximada utilizando DFG [15], en [17] se muestra la aplicación del método adaptativo en DFG a la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de segundo orden y [14] es un resumen global de DFG que incluye las aportaciones realizadas por los autores y su aplicación a problemas elásticos.

Además también ha sido aplicado el método para la resolución de problemas de advección-difusión como se puede encontrar en las referencias [38] y [39].

El artículo [98] presenta la aplicación del MDFG a la resolución de las placas delgadas y gruesas en régimen elástico, así como la resolución de EDP's de 3º y 4º orden a través del MDFG.

Los artículos [16] y [93] muestran la aplicación del método de diferencias finitas generalizadas a la resolución de ecuaciones en derivadas parciales dependientes del tiempo.

Por otro lado hay que destacar el artículo [96] en donde F. Ureña, J.J. Benito, L. Gavete, E. Salet y A. Casasús aplican el MDFG a la resolución de la ecuación de ondas en 2 D, analizando la estabilidad y dispersión del método.

Igualmente en [97] los autores utilizan el método de las diferencias finitas generalizadas para el estudio de la propagación de ondas sísmicas en 2D.

Los métodos numéricos constituyen una herramienta irremplazable en la investigación de los movimientos sísmicos y entre ellos el actualmente dominante es el DF, es más Moczo et al. [66] opinan que está por llegar el mejor momento de la aplicación del método DF en sismología. Tras estas consideraciones parece oportuno presentar la aplicación del DFG a este tipo de problemas.

1.2. Ajuste de curvas mediante mínimos cuadrados

Entre los métodos que existe a la hora de aproximar una función está el método de interpolación, en este método partiendo de una función cuyo valor, o el de sus derivadas, se conoce en un número finito de puntos, se crea otra, fácil de construir y evaluar, cuyo valor coincide con los de la función a interpolar en los puntos conocidos. Así pues se substituye la función a aproximar por esta última, cometándose un error cuyo valor se encuentra acotado. En general la interpolación es un método sencillo y económico, pero tiene un inconveniente y es que sus resultados son muy sensibles a la elección del soporte de puntos de interpolación. Por este motivo surge el interés por la búsqueda de métodos de ajuste que sean poco sensibles a la elección de los puntos de soporte, ya que estos en general vendrán definidos “a priori”. Cabe destacar la diferencia entre el concepto de ajuste y el de interpolación, la diferencia reside en que la curva que se ajusta a una serie de puntos no tiene que pasar por ellos, mientras que la curva que los interpola sí debe pasar por ellos. En el caso que nos ocupa, el método de mínimos cuadrados, lo que se realiza es un ajuste a los puntos conocidos y no una interpolación. El planteamiento unidimensional del problema es el siguiente, dados los $n + 1$ puntos de abscisas x_0, x_1, \dots, x_n y conocidos sus correspondientes valores de una función f_0, f_1, \dots, f_n se trata de ajustar un polinomio $p(x)$ de grado $m \leq n$. Si se considera la función $p(x)$ perteneciente al conjunto de polinomios P_m tales que $m \leq n$, y se llama a $(p(x_i) - f_i)$ la desviación de $p(x)$ sobre el valor de la función en los puntos x_i , se puede minimizar el valor:

$$\max_{i=0,1,\dots,n} \{ |p(x_i) - f_i| \} \quad (1.1)$$

Problema comúnmente denominado mínimax cuyo inconveniente es que no se puede manejar con técnicas elementales. Otra posibilidad es hacer mínima la desviación absoluta, esto es:

$$\min \left\{ \sum_{i=0}^{i=n} |p(x_i) - f_i| \right\} \quad (1.2)$$

Lo que presenta la dificultad de que la función valor absoluto no es diferenciable en el cero, lo cual se puede resolver haciendo la suma de las desviaciones cuadráticas, obteniéndose el siguiente funcional:

$$E(p) = \sum_{i=0}^{i=n} [p(x_i) - f_i]^2 \quad (1.3)$$

Así pues el problema se reduce a encontrar el polinomio $p(x)$ que minimiza el funcional $E(p)$ de la suma de las desviaciones cuadráticas. Si designamos a los coeficientes del polinomio como a_0, a_1, \dots, a_m resulta que las condiciones necesarias para que el funcional sea mínimo es que su derivada parcial respecto de estos coeficientes sea igual a cero, lo cual nos ofrece un sistema de ecuaciones del cual podemos despejar los valores de los coeficientes, esto es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(p)}{\partial a_j} &= \sum_{i=0}^{i=n} 2 [p(x_i) - f_i] \frac{\partial p(x_i)}{\partial a_j} = 2 \sum_{i=0}^{i=n} x_i^j [p(x_i) - f_i] = \\ &= 2 \left[\sum_{i=0}^{i=n} x_i^j (a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_m x^m) - \sum_{i=0}^{i=n} x_i^j f_i \right] = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Operando y teniendo en cuenta que $j = 0, 1, \dots, m$ se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a_0 \sum_{i=0}^{i=n} x_i^0 + a_1 \sum_{i=0}^{i=n} x_i^1 + \dots + a_n \sum_{i=0}^{i=n} x_i^m &= \sum_{i=0}^{i=n} x_i^0 f_i \\ a_0 \sum_{i=0}^{i=n} x_i^1 + a_1 \sum_{i=0}^{i=n} x_i^2 + \dots + a_n \sum_{i=0}^{i=n} x_i^{m+1} &= \sum_{i=0}^{i=n} x_i^1 f_i \\ \dots & \dots \\ a_0 \sum_{i=0}^{i=n} x_i^m + a_1 \sum_{i=0}^{i=n} x_i^{m+1} + \dots + a_n \sum_{i=0}^{i=n} x_i^{2m} &= \sum_{i=0}^{i=n} x_i^m f_i \end{aligned} \quad (1.5)$$

Este sistema de ecuaciones siempre tiene solución y esta será única siempre y cuando los x_i puntos conocidos sean distintos. Es claro que si m coincide con n el número de coeficientes coincide con el número de puntos a ajustar y el valor mínimo del funcional es igual a cero, esto es debido a que el polinomio que minimiza el funcional $E(p)$ coincide con el polinomio interpolador y las desviaciones son nulas.

2 Objetivos de la tesis

Con la presente tesis se pretende establecer una base sólida en el desarrollo y aplicación del método denominado Diferencias Finitas Generalizadas¹ que presenta grandes posibilidades en la aplicación ofreciendo ciertas ventajas, que se irán mostrando a lo largo del desarrollo del trabajo entre las que, como ya se ha indicado inicialmente hay que destacar la capacidad de utilizar mallas irregulares directamente, evitando artificios en la realización de algunos modelos híbridos. Se desea hacer hincapié en la solidez metodológica puesto que no solo se presenta la formulación en DFG para la aplicación indicada, sino que por ejemplo se estudia de forma rigurosa su estabilidad y se analiza detalladamente la dispersión.

Así pues se comenzará por exponer los fundamentos teóricos del método de las DFG, para después obtener las expresiones que permiten la aproximación de las derivadas espaciales de hasta 2º y 4º orden en x e y .

Se muestran algunos ejemplos académicos de resolución de EDP's de hasta cuarto orden así como sistemas de EDP's.

Una vez obtenidas las expresiones aproximadas de las derivadas parciales estas se van a aplicar a la resolución de la ecuación de la viga de Euler sometida a cargas estáticas y dinámicas y de placas delgadas. En ambos casos se va a obtener el esquema explícito en DFG y se va a comprobar su convergencia, estableciendo la consistencia del método y, puesto que se trata de un método explícito, se obtendrá además un criterio de estabilidad para el paso temporal, esto último se realizará mediante un análisis de Von Neumann.

Posteriormente se aplicará el método de la DFG a la resolución de la ecuación de ondas en dos dimensiones, de igual forma se obtendrá el esquema explícito comprobando la consistencia y obteniéndose un criterio de estabilidad para el paso temporal.

También se obtienen las relaciones de dispersión en la estrella de las velocidades de fase para las ondas P y S, así como las de las velocidades de grupo.

Dada la importancia que en la aplicación del método tiene el control sobre la irregularidad de la malla, se definen unos índices de irregularidad para la estrella IIS y la malla IIC , analizándose su relación con la dispersión y el paso de tiempo utilizado en los cálculos. Por último se analizará la problemática de la resolución numérica del

¹DFG es la denominación habitualmente utilizada por nuestro grupo de investigación, aunque Orkisz y su grupo prefieren utilizar la denominación de Meshless Finite Difference Method con objeto de afianzar su clasificación dentro de los denominados Métodos sin Malla (Meshless Methods).

problema propagación de ondas en espacios infinitos, en los que el dominio se debe truncar de manera que esto no afecte a la solución en la zona de interés, para ello se introducirán como contornos absorbentes Perfect Matched Layers PML, siendo otro de los objetivos de la tesis, plantear de forma rigurosa la formulación en diferencias finitas generalizadas de la ecuación de ondas en este tipo de dominios, con objeto de su inmediata aplicación a problemas sísmicos.

Esta aplicación tiene un singular interés, ya que actualmente es habitual el uso del método de diferencias finitas en sismología y el trabajo desarrollado en esta tesis doctoral puede resultar muy útil para la modelización eficaz de dichos problemas.

Además se completará cada capítulo con aplicaciones numéricas que constatarán el buen funcionamiento del método y permitirán ir desgranando conclusiones sobre diferentes aspectos de su utilización.

3 El Método de Diferencias Finitas Generalizadas (MDFG)

A continuación se va a presentar el fundamento teórico del método de Diferencias Finitas Generalizadas, para ello se va a comenzar por exponer el método de ajuste de curvas mediante mínimos cuadrados móviles.

3.1. Ajuste de curvas mediante mínimos cuadrados móviles

3.1.1. Conceptos básicos

En capítulo 1.2 ya se ha hecho una breve descripción del método de ajuste de curvas mediante mínimos cuadrados, aquí se va a introducir una nueva idea que ofrece una variante de gran interés del método de mínimos cuadrados ya expuesto.

Con el método de mínimos cuadrados se obtiene una aproximación global de una nube de puntos dada, sin embargo si lo que se necesita es una información más local que global de un cierto punto este método puede ser modificado de la siguiente forma. Si se llama $g(x)$ a la función asociada a la curva que ajusta una serie de puntos, parece lógico que el valor de la función en un punto x se encuentre más influido por los valores f_i correspondientes a los puntos más próximos a x y menos por lo más alejados.

Una forma de conseguir esto es introduciendo unas funciones de ponderación $w_i(x)$ que hagan disminuir la influencia de los valores f_i de a medida que aumenta la distancia entre x y x_i .

Así pues introduciendo esta función en Ecuación 1.3 el funcional de las desviaciones cuadráticas queda de la siguiente forma:

$$E(p) = \sum_{i=0}^{i=n} w_i(x) [p(x_i) - f_i]^2 \tag{3.1}$$

La función $w_i(x)$ es positiva y monótonamente decreciente al aumentar la diferencia $|x - x_i|$, considerando de nuevo el polinomio $p(x)$ perteneciente a P_m , esto es:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{j=m} a_j x^j \tag{3.2}$$

Introduciendo Ecuación 3.2 en Ecuación 3.1 se obtiene:

$$E(p) = \sum_{i=0}^{i=n} w_i(x) \left[\sum_{j=0}^{j=m} a_j x^j - f_i \right]^2 \tag{3.3}$$

Y aplicando en Ecuación 3.3 la condición de mínimo:

$$\frac{\partial E(p)}{\partial a_j} = 0 \tag{3.4}$$

Se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a_0 \sum_{i=0}^{i=n} w_i x_i^0 + a_1 \sum_{i=0}^{i=n} w_i x_i^1 + \dots + a_n \sum_{i=0}^{i=n} w_i x_i^m &= \sum_{i=0}^{i=n} w_i x_i^0 f_i \\ a_0 \sum_{i=0}^{i=n} w_i x_i^1 + a_1 \sum_{i=0}^{i=n} w_i x_i^2 + \dots + a_n \sum_{i=0}^{i=n} w_i x_i^{m+1} &= \sum_{i=0}^{i=n} w_i x_i^1 f_i \\ \dots &\dots \\ a_0 \sum_{i=0}^{i=n} w_i x_i^m + a_1 \sum_{i=0}^{i=n} w_i x_i^{m+1} + \dots + a_n \sum_{i=0}^{i=n} w_i x_i^{2m} &= \sum_{i=0}^{i=n} w_i x_i^m f_i \end{aligned} \tag{3.5}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones Ecuación 3.5 se obtienen los coeficientes a_0, a_1, \dots, a_n , al ser las funciones de ponderación positivas la unicidad de la solución está garantizada y la curva de ajuste será:

$$g(x) = p(x) \tag{3.6}$$

Cabe destacar que la función $g(x)$ no será en general un polinomio, ya que los coeficientes a_j dependen de x en virtud de las funciones de ponderación $w_i(x)$.

Existen dos propiedades de interés de la función $g(x)$ resultante del ajuste por mínimos cuadrados móviles a saber:

- La función $g(x)$ presenta la propiedad de reproducción, es decir, si todos los datos corresponden a una función polinómica P_m y se utilizan polinomios $p(x) \in P_m$, en la obtención de $g(x)$, entonces dicha función $g(x)$ es también un polinomio de P_m .
- La función $g(x)$ será una función “suave” en el sentido de que podrá ser derivada tantas veces como la función de ponderación $w_i(x)$.

El principal problema que presenta el método es que para la evaluación de $g(x)$ es necesario resolver el sistema Ecuación 3.5 para cada x .

3.1.2. Formulación general de método

En el apartado 3.1.1 se ha presentado de forma elemental el método de mínimos cuadrados móviles, aquí se va a profundizar en el método mostrando además cómo se puede enmarcar dentro de los llamados métodos de partición de la unidad. El análisis se va a realizar para el plano, pudiendo hacerse este extensivo para el espacio.

Sea una función u^* de la que se quiere aproximar su valor en el punto (x, y) de su dominio, para lo que se crea una función u que la aproxima mediante:

$$u^*(x, y) \simeq u(x, y) = \sum_{j=0}^{j=m} p_j(x, y) a_j = \mathbf{p}^T(x, y) \mathbf{a} \quad (3.7)$$

En donde \mathbf{p} es el vector de las funciones independientes, y \mathbf{a} el vector de los parámetros a determinar mediante el algoritmo de aproximación.

Para abreviar la nomenclatura se va a llamar $z \equiv (x, y)$ y $z_i \equiv (x_i, y_i)$. Así pues el funcional que define la suma de errores cuadráticos ponderados se puede escribir:

$$J(a) = \sum_{i=1}^{i=n} w_i(z, z_i) [u_i - u(z_i)]^2 \quad (3.8)$$

Introduciendo Ecuación 3.7 en Ecuación 3.8 se obtiene:

$$J(a) = \sum_{i=1}^{i=n} w_i(z, z_i) [u_i - \mathbf{p}^T(z_i) \mathbf{a}]^2 \quad (3.9)$$

Lo cual se puede expresar en forma matricial como sigue:

$$J(a) = [\mathbf{u} - \mathbf{Pa}]^T \mathbf{w}(z, z_i) [\mathbf{u} - \mathbf{Pa}] \quad (3.10)$$

En donde \mathbf{u} es el vector de los $n \times 1$ valores nodales y \mathbf{P} matriz de $n \times m$ siendo n el número de puntos y m el número de términos del polinomio aproximador y \mathbf{w} la matriz diagonal de las funciones de ponderación la cual se anula fuera de un dominio denominado de influencia, en torno al nodo $z_i \equiv (x_i, y_i)$, y cuyas condiciones dependerán de los puntos situados en el dominio.

Aunque en general es posible utilizar diferentes funciones de ponderación w_i en cada punto x_i , de ahora en adelante se considerará únicamente el caso más sencillo de que se utilice siempre la misma función.

Así pues según lo indicado anteriormente se tiene que la matriz de los polinomios aproximadores y la de las funciones de ponderación serán las siguientes:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}^T(z_1) \\ \mathbf{p}^T(z_2) \\ \vdots \\ \mathbf{p}^T(z_n) \end{pmatrix} \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} w_1(z, z_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & w_n(z, z_n) \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Estableciendo la condición de estacionariedad del funcional Ecuación 3.10 respecto de \mathbf{a} se llega a la siguiente expresión:

$$\mathbf{Aa} = \mathbf{Hu} \quad (3.12)$$

Por lo tanto despejando dentro de Ecuación 3.12 se obtiene:

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Hu} \quad (3.13)$$

En donde la matriz \mathbf{A} es simétrica y de orden $m \times n$ siendo igual a:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{i=n} w_i(z, z_i) \mathbf{p}(z) \mathbf{p}^T(z_i) \quad (3.14)$$

Y la matriz \mathbf{H} de $m \times n$ es igual a:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} w(z, z_1) \mathbf{p}(z_1) \\ w(z, z_2) \mathbf{p}(z_2) \\ \vdots \\ w(z, z_n) \mathbf{p}(z_n) \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Finalmente la función que aproxima la variable de campo se puede expresar, en virtud de Ecuación 3.7 y Ecuación 3.13, de la siguiente forma:

$$u(z) = \mathbf{p}^T(z)\mathbf{A}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{i=n} \Phi_i(z)u_i = \mathbf{\Phi}^T(z)\mathbf{u} \quad (3.16)$$

En donde $\mathbf{\Phi}^T(z)$ es el vector de las funciones de aproximadoras, llamadas funciones de forma, para un punto $z \equiv (x, y)$. Como se puede ver es esencial que las funciones que integran el vector $\mathbf{p}(z)$ sean linealmente independientes, es decir, que formen una base, porque de lo contrario la matriz \mathbf{A} estaría mal condicionada.

Teniendo en cuenta la propiedad de reproducción, es decir, la propiedad de reproducir exactamente cualquier función incluida como parte de la base, si se incluye en ella los polinomios de grado cero, como por ejemplo la unidad, se tiene:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \Phi_i(z) = 1 \quad (3.17)$$

Lo que se conoce como partición de la unidad dentro de la literatura matemática. Tiene un especial interés la obtención de los valores de las funciones de forma para el caso particular de que m sea igual a 1, es decir, que la base de las funciones independientes sólo tenga un término, que se hará igual a la unidad, y que corresponde a la aproximación de mínimos cuadrados móviles de orden cero, llamada función de Shepard.

Teniendo en cuenta lo indicado anteriormente los términos que interviene en la función de forma son, para este caso particular, los siguiente:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{W}\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{i=n} w(z, z_i) \quad (3.18)$$

$$\mathbf{p}(z) = 1$$

Así pues de la Ecuación 3.15 se obtiene:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} w(z, z_1) \\ w(z, z_2) \\ \vdots \\ w(z, z_n) \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Por lo tanto el valor de las funciones de forma obtenidas de la Ecuación 3.16 es:

$$\Phi^{\mathbf{T}}(z) = \mathbf{p}(z)\mathbf{A}^{-1}\mathbf{H} = \left(\frac{w(z, z_1)}{\sum_{i=1}^{i=n} w(z, z_i)}, \frac{w(z, z_2)}{\sum_{i=1}^{i=n} w(z, z_i)}, \dots, \frac{w(z, z_n)}{\sum_{i=1}^{i=n} w(z, z_i)} \right) \quad (3.20)$$

Por último cada una de las funciones de forma resulta ser:

$$\Phi_i = \frac{w(z, z_i)}{\sum_{i=1}^{i=n} w(z, z_i)} \quad (3.21)$$

3.2. El Método de Diferencias Finitas Generalizadas (MDFG)

En este apartado se estudia el MDFG para la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de cualquier orden con coeficientes constantes.

3.2.1. Fundamento teórico

A continuación se van a exponer los fundamentos teóricos del Método de Diferencias Finitas Generalizadas, el cual se basa en la aproximación por mínimos cuadrados móviles ya vista.

Sea un problema gobernado por la siguiente ecuación de orden n en derivadas parciales:

$$L_n[\mathbf{U}] = f \quad \text{en } \Omega \quad (3.22)$$

Y con las siguientes condiciones de contorno:

$$L_{n-1}[\mathbf{U}] = g \quad \text{en } \Gamma \quad (3.23)$$

En donde \mathbf{U} es una función al menos n veces derivable, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ en donde $m = 2, 3$, dependiendo de si se está en un dominio de 2 o 3 dimensiones, de ahora en adelante y sin pérdida de generalidad vamos a centrarnos en el caso de 2 dimensiones, por

último Γ representa el contorno del dominio. Por otro lado L_n y L_{n-1} son operadores lineales en derivadas parciales de orden n y $n - 1$ respectivamente, mientras que f y g son dos funciones conocidas.

Así pues se procede a discretizar el dominio Ω en un número finito de nodos, pudiendo estar estos nodos colocados de manera irregular, tal y como se muestra en la Figura 3.1.

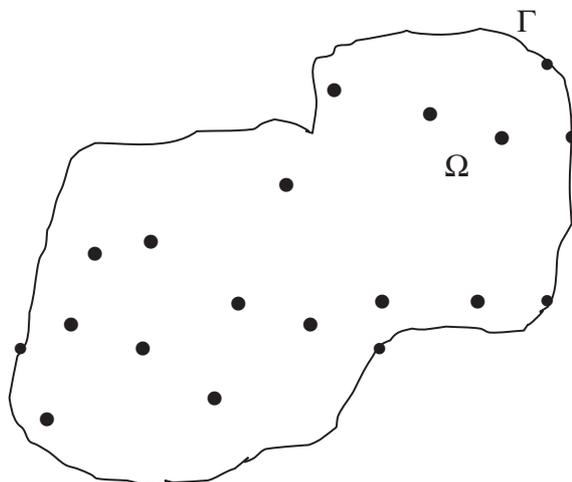


Figura 3.1: Dominio discretizado de forma irregular

A cada uno de los nodos del dominio se le asocia un número de nodos de su entorno, obteniéndose de esta forma lo que se conoce con el nombre de estrella, ver Figura 3.2, del número de nodos a asociar a cada estrella y del criterio de selección de dichos nodos se hablará más adelante.

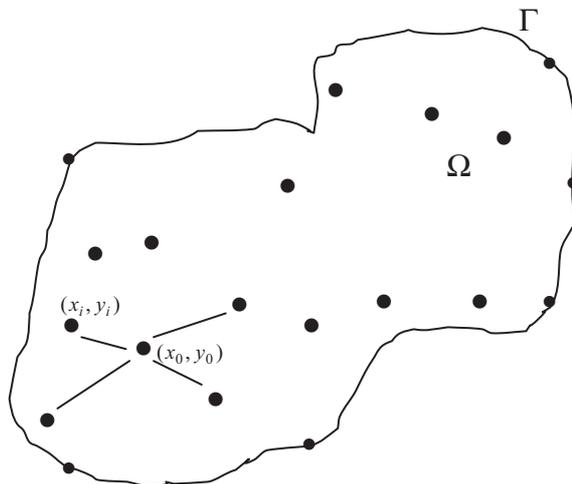


Figura 3.2: Formación de estrellas dentro del dominio

Se cumple que (x_0, y_0) son las coordenadas del nodo central de la estrella y (x_i, y_i)

son las coordenadas del nodo i de la estrella, así pues se formarán tantas estrellas como nodos contenga el dominio.

Se llama $U(x_0, y_0) \equiv U_0$ al valor de la función a aproximar en el nodo central de la estrella, y $U(x_i, y_i) \equiv U_i$ a el valor de la función en el nodo i .

Si se hace el desarrollo en serie de Taylor de cada uno de los nodos de la estrella alrededor del nodo central se obtiene:

$$U_i = U_0 + h_i \frac{\partial U_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 U_0}{\partial x \partial y} + \frac{k_i^2}{2} \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} + \dots + \frac{h_i^n}{n!} \frac{\partial^n U_0}{\partial x^n} + \dots + \frac{k_i^n}{n!} \frac{\partial^n U_0}{\partial y^n} + \dots \quad (3.24)$$

En donde:

$U_i \equiv U(x_i, y_i)$ representa el valor exacto de la función en el nodo i .

$U_0 \equiv U(x_0, y_0)$ representa el valor exacto de la función en el nodo central de la estrella.

$$\begin{aligned} h_i &= (x_0 - x_i) \\ k_i &= (y_0 - y_i) \end{aligned}$$

Truncando el desarrollo de Taylor en los términos de orden n se obtiene:

$$u_i = u_0 + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{k_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \dots + \frac{h_i^n}{n!} \frac{\partial^n u_0}{\partial x^n} + \dots + \frac{k_i^n}{n!} \frac{\partial^n u_0}{\partial y^n} \quad (3.25)$$

En donde:

$u_i \equiv u(x_i, y_i)$ representa el valor aproximado de la función en el nodo i .

$u_0 \equiv u(x_0, y_0)$ representa el valor aproximado de la función en el nodo central de la estrella.

El error cometido en cada estrella con el truncamiento será:

$$E_i = u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{k_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \dots + \frac{h_i^n}{n!} \frac{\partial^n u_0}{\partial x^n} + \dots + \frac{k_i^n}{n!} \frac{\partial^n u_0}{\partial y^n} \quad (3.26)$$

Realizando la suma de los errores cuadráticos ponderados de cada uno de los nodos de la estrella, se obtiene el siguiente funcional para cada estrella del dominio.

$$B_{\frac{n(n+3)}{2}}(u) = \left[\sum_{i=1}^{i=N} \left(u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{k_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \dots \right. \right. \\ \left. \left. \dots + \frac{h_i^n}{n!} \frac{\partial^n u_0}{\partial x^n} + \dots + \frac{k_i^n}{n!} \frac{\partial^n u_0}{\partial y^n} \right) w(h_i, k_i) \right]^2 \quad (3.27)$$

Siendo $w(h_i, k_i)$ una función de ponderación dependiente de la distancia de cada nodo al nodo central de la estrella.

Así pues estamos ante el esquema de mínimos cuadrados móviles, en el que el vector \mathbf{a} de los parámetros a determinar mediante el algoritmo de aproximación es precisamente el vector que contiene las derivadas parciales, esto es:

$$\mathbf{a}^T \equiv \mathbf{D}_{\mathbf{u}}^T = \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_0}{\partial y}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}, \dots, \frac{\partial^n u_0}{\partial x^n}, \dots, \frac{\partial^n u_0}{\partial y^n} \right) \quad (3.28)$$

Estableciendo la condición de estacionariedad del funcional $B_{\frac{n(n+3)}{2}}$ respecto de \mathbf{a} se llega a un sistema lineal de $\frac{n(n+3)}{2}$ ecuaciones:

$$\mathbf{A} \mathbf{D}_{\mathbf{u}} = \mathbf{b} \quad (3.29)$$

La matriz \mathbf{A} es una matriz simétrica y de orden $\frac{n(n+3)}{2} \times \frac{n(n+3)}{2}$ e invertible, por lo cual se obtendrá una solución única para el sistema de ecuaciones.

Una vez obtenido el vector $\mathbf{D}_{\mathbf{u}}$ se substituyen en la Ecuación 3.22 las derivadas parciales por sus valores en diferencias finitas, substituyéndose de esta manera las ecuaciones diferenciales por ecuaciones algebraicas en diferencias finitas, las cuales se resuelven de manera recurrente a partir de los valores conocidos en el contorno del dominio.

3.2.2. Funciones de ponderación

La utilización de funciones de ponderación o ventanas, es una característica común a todos los métodos sin malla. Las funciones de ponderación se usan para disponer de un soporte compacto, definiendo un subdominio (disco, rectángulo, burbuja, etc. . .) relativamente pequeño en el que su valor es distinto de cero, siendo nulo en el resto del dominio.

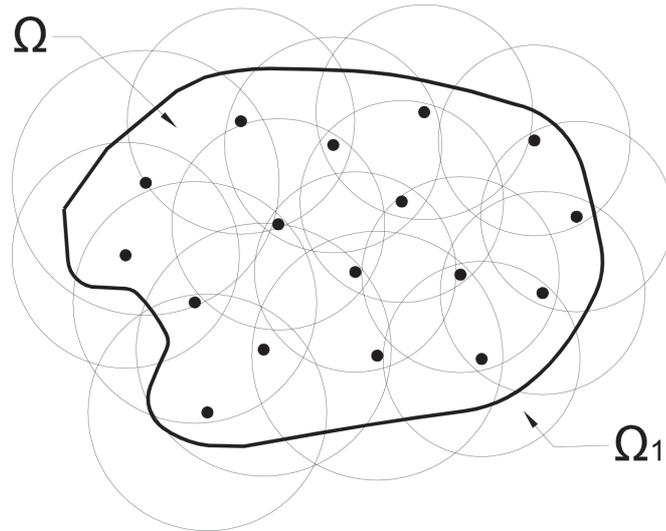


Figura 3.3: Superposición de subdominios de funciones de ponderación.

Así pues cada función de ponderación se asocia a un nodo, pudiéndose superponer con otros subdominios de tal y como aparece en la Figura 3.3, en esta figura por claridad aparecen menos solapes de los que suelen presentarse en la práctica, en donde cada nodo suele pertenecer a entre 5 y 10 subdominios.

Se presentan a continuación algunas de las funciones de ponderación más habituales, las cuales han sido utilizadas en la tesis, así pues un tipo de función de ponderación utilizada es la fracción potencial, esto es:

Potencial:

$$w(x, y) = \frac{1}{d_i^p}$$

En donde d_i es la distancia de cada nodo de la estrella al nodo central, es decir:

$$d_i = |x - x_i|$$

Otra función muy empleada es la función exponencial, esto es:

$$w(x, y) = \exp(-kd_i^2)$$

Las spline también son funciones utilizadas como funciones de ponderación, en concreto caben destacar la cúbica:

$$w(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{2}{3} - 4d_i^2 + 4d_i^3\right)^2 & d_i \leq \frac{rp}{2} \\ \left(\frac{4}{3} - 4d_i + 4d_i^2 - \frac{4}{3}d_i^3\right)^2 & \frac{rp}{2} < d_i < rp \\ 10^{-10} & d_i > rp \end{cases}$$

Y la spline cuártica:

$$w(x, y) = \begin{cases} 1 - 6 \left(\frac{d_i}{0,292}\right)^2 + 8 \left(\frac{d_i}{0,292}\right)^3 - 3 \left(\frac{d_i}{0,292}\right)^4 & d_i \leq \frac{rp}{2} \\ 0 & d_i > rp \end{cases}$$

4 Fórmulas para la discretización temporal y espacial hasta 4^o orden

A continuación se van a obtener las fórmulas en diferencias finitas generalizadas para la resolución de problemas gobernados por ecuaciones diferenciales con derivadas parciales de de hasta 4^o orden.

4.1. Discretización en x hasta 2^o orden

Sea la ecuación diferencial en derivadas parciales en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}$, con frontera Γ :

$$A_1 \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} + A_2 \frac{\partial U(x)}{\partial x} = G(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (4.1)$$

Con la siguiente condición de contorno:

$$a_1 U(x) + a_2 \frac{\partial U(x)}{\partial x} = g(x) \quad \forall x \in \Gamma \quad (4.2)$$

En donde $U(x)$ es una función al menos dos veces diferenciable en $\Omega \subset \mathbb{R}$ y A_1, A_2, a_1, a_2 son constantes.

La condición de contorno establecida es la que se denomina mixta. Por tanto si se anula a_2 en la Ecuación 4.2, se tienen las condiciones de contorno tipo Dirichlet y si se anula el coeficiente a_1 , se tienen las condiciones de tipo Neumann.

Al realizar el desarrollo de Taylor de $U(x)$ en torno al nodo central de coordenada x_0 , para cada nodo de la estrella de coordenada x_i , se tiene que:

$$U_i = U_0 + h_i \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + \dots \quad (4.3)$$

En donde:

$U_i \equiv U(x_i)$ representa el valor exacto de la función en el nodo i .

$U_0 \equiv U(x_0)$ representa el valor exacto de la función en el nodo central de la estrella.

$h_i = (x_0 - x_i)$.

Si truncamos el desarrollo de Taylor en los términos de 2º orden, y realizamos la suma de los errores cuadráticos ponderados de cada uno de los nodos de la estrella, y en todas ellas, obtenemos el siguiente funcional para cada estrella:

$$B_2(u) = \left[\sum_{i=1}^{i=N} \left(u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right) w(h_i) \right]^2 \quad (4.4)$$

En donde:

$u_i \equiv u(x_i)$ representa el valor aproximado de la función en el nodo i .

$u_0 \equiv u(x_0)$ representa el valor aproximado de la función en el nodo central de la estrella.

$w \equiv w(h_i)$ representa una función de ponderación dependiente de la distancia de cada nodo al nodo central.

Si ahora se minimiza el funcional $B_2(u)$ respecto de las derivadas parciales:

$$\frac{\partial B_2(u)}{\partial \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)} = 2 \left[\sum_{i=1}^{i=N} \left(u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right) w^2 \right] h_i = 0 \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial B_2(u)}{\partial \left(\frac{\partial u_0^2}{\partial x^2} \right)} = 2 \left[\sum_{i=1}^{i=N} \left(u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right) w^2 \right] \frac{h_i^2}{2} = 0 \quad (4.6)$$

Se obtiene el siguiente sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas:

$$\sum_{i=1}^{i=N} \left(u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right) w^2 h_i = 0 \quad (4.7)$$

$$\sum_{i=1}^{i=N} \left(u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right) w^2 \frac{h_i^2}{2} = 0 \quad (4.8)$$

Este sistema se puede representar en forma matricial de la siguiente manera:

$$\mathbf{AD}_u = \mathbf{b} \quad (4.9)$$

Donde \mathbf{D}_u es el vector de incógnitas, las cuales son precisamente las derivadas parciales que buscamos sustituir en la Ecuación 4.1:

$$\mathbf{D}_u^T = \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right) \quad (4.10)$$

Por otro lado \mathbf{b} es el vector de los términos independientes del sistema y es igual a:

$$\mathbf{b}^T = \left(\sum_{i=1}^{i=N} (u_0 - u_i) w^2 h_i, \sum_{i=1}^{i=N} (u_0 - u_i) w^2 \frac{h_i^2}{2} \right) \quad (4.11)$$

Por último \mathbf{A} es la matriz de los coeficientes cuya expresión es la siguiente:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{i=N} h_i^2 w^2 & \sum_{i=1}^{i=N} \frac{h_i^3}{2} w^2 \\ \sum_{i=1}^{i=N} \frac{h_i^3}{2} w^2 & \sum_{i=1}^{i=N} \frac{h_i^4}{4} w^2 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Se puede observar que la matriz \mathbf{A} es una matriz simétrica, y para que esta no sea singular la estrella debe poseer al menos 2 nodos sin contar el nodo central.

Para la resolución de este sistema de ecuaciones, y dado que la matriz \mathbf{A} es simétrica, se puede aplicar la descomposición de Cholesky, descomponiéndose esta matriz en producto de dos matrices, una matriz triangular por su traspuesta, esto es:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T \quad (4.13)$$

Quedando el sistema a resolver de la siguiente forma:

$$\mathbf{L}\mathbf{L}^T \mathbf{D}_u = \mathbf{b} \quad (4.14)$$

El cual se puede resolver en dos etapas:

$$\mathbf{L}\mathbf{Y} = \mathbf{b} \quad (4.15)$$

$$\mathbf{L}^T \mathbf{D}_u = \mathbf{Y} \quad (4.16)$$

La matriz \mathbf{L} se puede expresar de la siguiente manera:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

$$\mathbf{L}^T = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} \\ 0 & l_{22} \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

Se resuelve la Ecuación 4.15 por descenso, con lo que se obtiene el vector \mathbf{Y} . Una vez hallado dicho vector es posible resolver la Ecuación 4.19 y obtener las siguientes fórmulas explícitas en diferencias finitas generalizadas:

$$\mathbf{D}_u(k) = \frac{1}{l(k, k)} \left[u_0 \sum_{i=1}^{i=2} M(k, i) c_i + \sum_{j=1}^{j=N} u_j \left(\sum_{i=1}^{i=2} M(k, i) d_{ji} \right) \right] \quad (4.19)$$

En donde:

$$M(i, j) = (-1)^{1-\delta_{ij}} \frac{1}{l(i, i)} \sum_{k=j}^{k=i-1} l(i, k) M(k, j) \quad i < j \quad i, j = 1, 2 \quad (4.20)$$

$$M(i, j) = \frac{1}{l(i, i)} \quad i = j \quad i, j = 1, 2 \quad (4.21)$$

$$M(i, j) = 0 \quad i > j \quad i, j = 1, 2 \quad (4.22)$$

En la que δ_{ij} es la función delta de Kronecker y además:

$$c_i = \sum_{j=1}^{j=N} d_{ji} \quad (4.23)$$

$$d_{j1} = h_j w^2 \quad d_{j2} = \frac{h_j^2}{2} w^2 \quad (4.24)$$

Por otro lado en la Ecuación 4.19 los coeficientes de u_0 y u_i verifican la relación:

$$\sum_{i=1}^{i=2} M(k, i) c_i + \sum_{j=1}^{j=N} \sum_{i=1}^{i=2} M(k, i) d_{ji} = 0 \quad (4.25)$$

Substituyendo las fórmulas explícitas en diferencias finitas generalizadas de la Ecuación 4.19 en la Ecuación 4.1, se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{A_1}{l(2,2)} \left[u_0 \sum_{i=1}^{i=2} M(2,i)c_i + \sum_{j=1}^{j=N} u_j \left(\sum_{i=1}^{i=2} M(2,i)d_{ji} \right) \right] + \\ & + \frac{A_2}{l(1,1)} \left[u_0 \sum_{i=1}^{i=2} M(1,i)c_i + \sum_{j=1}^{j=N} u_j \left(\sum_{i=1}^{i=2} M(1,i)d_{ji} \right) \right] = G(x_0) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Se pueden entonces reordenar los términos de la manera siguiente:

$$u_0 \sum_{i=1}^{i=2} \psi_i c_i + \sum_{j=1}^{j=N} u_j \left(\sum_{i=1}^{i=2} \psi_i d_{ji} \right) = G(x_0) \quad (4.27)$$

En donde:

$$\psi_i = \frac{A_1}{l(2,2)} M(2,i) + \frac{A_2}{l(1,1)} M(1,i) \quad (4.28)$$

Pudiendo expresarse la Ecuación 4.28 de la siguiente forma:

$$u_0 \lambda_0 + \sum_{j=1}^{j=N} u_j \lambda_j = G(x_0) \quad (4.29)$$

Verificándose de nuevo:

$$\lambda_0 + \sum_{j=1}^{j=N} \lambda_j = 0 \quad (4.30)$$

Si despejamos u_0 en función u_i de obtenemos lo que llamamos ecuación de la estrella:

$$u_0 = \frac{G(x_0) - \sum_{j=1}^{j=N} u_j \left(\sum_{i=1}^{i=2} \psi_i d_{ji} \right)}{\sum_{i=1}^{i=2} \psi_i c_i} \quad (4.31)$$

Ecuación en la que no se ha impuesto ninguna restricción respecto al tipo de estrella, regular o irregular, ni tampoco al número de nodos en la estrella salvo el número mínimo mencionado de 2 nodos por estrella, lo cual resuelve los inconvenientes que se plantean en la utilización de diferencias finitas clásicas.

También el algoritmo seguido para la determinación de la ecuación de la estrella permite una programación sencilla y por lo tanto, su codificación en una subrutina que se aplique a cada nodo del dominio y, consecuentemente, a cada estrella.

Del examen de la Ecuación 5.1 se desprende que dicha ecuación depende de los siguientes factores que se pueden denominar esenciales:

- El número de nodos de la estrella.
- Las coordenadas relativas de los nodos de la estrella respecto del nodo central.
- La función de ponderación.

Si la Ecuación 4.1 fuese homogénea, la Ecuación 4.31 quedaría de la forma siguiente:

$$u_0 = \frac{\sum_{j=1}^{j=N} u_j \left(\sum_{i=1}^{i=2} \psi_i d_{ji} \right)}{\sum_{i=1}^{i=2} \psi_i c_i} \quad (4.32)$$

Finalmente se puede entonces expresar el valor de la solución en el nodo central en función de los valores de la solución en el resto de nodos de la estrella, de la siguiente forma:

$$u_0 = \sum_{j=1}^{j=N} m_j u_j \quad (4.33)$$

En donde m_j representaría las funciones de forma, siendo iguales a:

$$m_j = \frac{\sum_{i=1}^{i=2} d_{ji} \psi_i}{\sum_{i=1}^{i=2} \psi_i c_i} \quad (4.34)$$

Y teniendo en cuenta la Ecuación 4.23 se llega a que:

$$\sum_{j=1}^{j=N} m_j = 1 \quad (4.35)$$

Siendo el conjunto de funciones de forma que representan una partición de la unidad.

4.2. Discretización en x e y hasta 2º orden

Sea la ecuación diferencial en derivadas parciales en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, con frontera Γ :

$$A_1 \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + A_2 \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x \partial y} + A_3 \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} + A_4 \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} + A_5 \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = G(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (4.36)$$

Con la siguiente condición de contorno:

$$a_1 U(x, y) + a_2 \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} + a_3 \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = g(x, y) \quad \forall x, y \in \Gamma \quad (4.37)$$

En donde $U(x, y)$ es una función al menos 2 veces diferenciable en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, a_1, a_2, a_3$, son constantes.

La condición de contorno establecida es la que se denomina mixta. Por tanto si se anulan a_2 y a_3 en la Ecuación 4.37, se tienen las condiciones de contorno tipo Dirichlet y si se anula el coeficiente a_1 , se tienen las condiciones de tipo Neumann.

Al realizar el desarrollo de Taylor de $U(x, y)$ en torno al nodo central de coordenadas (x_0, y_0) , para cada nodo de la estrella de coordenadas (x_i, y_i) , se tiene que:

$$U_i = U_0 + h_i \frac{\partial U_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 U_0}{\partial x \partial y} + \frac{k_i^2}{2} \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} + \dots \quad (4.38)$$

En donde:

$$U_i \equiv U(x_i, y_i)$$

$$U_0 \equiv U(x_0, y_0)$$

$$h_i = (x_0 - x_i)$$

$$k_i = (y_0 - y_i)$$

Si truncamos el desarrollo de Taylor en los términos de 2º orden, y realizamos la suma de los errores cuadráticos ponderados de cada uno de los nodos de la estrella, y en todas ellas, obtenemos el siguiente funcional para cada estrella:

$$B_5(u) = \sum_{i=1}^{i=N} \left[\left(u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{k_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right) w(h_i, k_i) \right]^2$$

$$(4.39)$$

En donde:

$u_i \equiv u(x_i, y_i)$ representa el valor aproximado de la función en el nodo i .

$u_0 \equiv u(x_0, y_0)$ representa el valor aproximado de la función en el nodo central de la estrella.

$w \equiv w(h_i, k_i)$ representa una función de ponderación dependiente de de la distancia de cada nodo al nodo central.

Si ahora se minimiza el funcional $B_5(u)$ respecto de las derivadas parciales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_5(u)}{\partial \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)} &= 2 \sum_{i=1}^{i=N} \left[\left(u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{k_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right) w^2 \right] h_i = 0 \\ \frac{\partial B_5(u)}{\partial \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)} &= 2 \sum_{i=1}^{i=N} \left[\left(u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{k_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right) w^2 \right] k_i = 0 \\ \frac{\partial B_5(u)}{\partial \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right)} &= 2 \sum_{i=1}^{i=N} \left[\left(u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{k_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right) w^2 \right] \frac{h_i^2}{2} = 0 \\ \frac{\partial B_5(u)}{\partial \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right)} &= 2 \sum_{i=1}^{i=N} \left[\left(u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{k_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right) w^2 \right] h_i k_i = 0 \\ \frac{\partial B_5(u)}{\partial \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right)} &= 2 \sum_{i=1}^{i=N} \left[\left(u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{k_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right) w^2 \right] \frac{k_i^2}{2} = 0 \end{aligned} \tag{4.40}$$

Se obtiene el siguiente sistema de 5 ecuaciones con 5 incógnitas:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=N} \left[\left(u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{k_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right) w^2 \right] h_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^{i=N} \left[\left(u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{k_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right) w^2 \right] k_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^{i=N} \left[\left(u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{k_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right) w^2 \right] \frac{h_i^2}{2} &= 0 \\ \sum_{i=1}^{i=N} \left[\left(u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{k_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right) w^2 \right] h_i k_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^{i=N} \left[\left(u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{k_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right) w^2 \right] \frac{k_i^2}{2} &= 0 \end{aligned}$$

$$(4.41)$$

Este sistema se puede representar en forma matricial de la siguiente manera:

$$\mathbf{A}\mathbf{D}_{\mathbf{u}} = \mathbf{b} \quad (4.42)$$

Donde $\mathbf{D}_{\mathbf{u}}$ es el vector de incógnitas, las cuales son precisamente las derivadas parciales que buscamos sustituir en la Ecuación 4.36:

$$\mathbf{D}_{\mathbf{u}}^T = \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_0}{\partial y}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right) \quad (4.43)$$

Por otro lado \mathbf{b} es el vector de los términos independientes del sistema y es igual a:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{i=N} (u_0 - u_i) w^2 h_i \\ \sum_{i=1}^{i=N} (u_0 - u_i) w^2 k_i \\ \sum_{i=1}^{i=N} (u_0 - u_i) w^2 \frac{h_i^2}{2} \\ \sum_{i=1}^{i=N} (u_0 - u_i) w^2 h_i k_i \\ \sum_{i=1}^{i=N} (u_0 - u_i) w^2 \frac{k_i^2}{2} \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

Por último \mathbf{A} es la matriz de los coeficientes cuya expresión es la siguiente:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{i=N} w^2 h_i^2 & \sum_{i=1}^{i=N} w^2 h_i k_i & \sum_{i=1}^{i=N} w^2 \frac{h_i^3}{2} & \sum_{i=1}^{i=N} w^2 h_i^2 k_i & \sum_{i=1}^{i=N} w^2 \frac{h_i k_i^2}{2} \\ & \sum_{i=1}^{i=N} w^2 k_i^2 & \sum_{i=1}^{i=N} w^2 \frac{k_i h_i^2}{2} & \sum_{i=1}^{i=N} w^2 h_i k_i^2 & \sum_{i=1}^{i=N} w^2 \frac{k_i^3}{2} \\ S & & \sum_{i=1}^{i=N} w^2 \frac{h_i^4}{4} & \sum_{i=1}^{i=N} w^2 \frac{h_i^3 k_i}{2} & \sum_{i=1}^{i=N} w^2 \frac{k_i^2 h_i^2}{4} \\ & I & & \sum_{i=1}^{i=N} w^2 h_i^2 k_i^2 & \sum_{i=1}^{i=N} w^2 \frac{h_i k_i^3}{2} \\ & & M & & \sum_{i=1}^{i=N} w^2 \frac{k_i^4}{4} \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

Se puede observar que la matriz \mathbf{A} es una matriz simétrica y para que esta no sea singular la estrella debe poseer al menos 5 nodos sin contar el nodo central.

Para la resolución de este sistema de ecuaciones, y dado que la matriz \mathbf{A} es simétrica, se puede aplicar la descomposición de Cholesky, descomponiéndose esta matriz en producto de dos matrices, una matriz triangular por su traspuesta, esto es:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T \quad (4.46)$$

Quedando el sistema a resolver de la siguiente forma:

$$\mathbf{L}\mathbf{L}^T\mathbf{D}_u = \mathbf{b} \quad (4.47)$$

El cual se puede resolver en dos etapas:

$$\mathbf{L}\mathbf{Y} = \mathbf{b} \quad (4.48)$$

$$\mathbf{L}^T\mathbf{D}_u = \mathbf{Y} \quad (4.49)$$

La matriz \mathbf{L} se puede expresar de la siguiente manera:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} & 0 \\ l_{51} & l_{52} & l_{53} & l_{54} & l_{55} \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

$$\mathbf{L}^T = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} & l_{51} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & l_{42} & l_{52} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{43} & l_{53} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} & l_{54} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l_{55} \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

Se resuelve la Ecuación 4.48 por descenso, con lo que se obtiene el vector \mathbf{Y} . Una vez hallado dicho vector es posible resolver la Ecuación 4.49 y obtener las siguientes fórmulas explícitas en diferencias finitas generalizadas:

$$\mathbf{D}_u(k) = \frac{1}{l(k, k)} \left[u_0 \sum_{i=1}^{i=5} M(k, i) c_i + \sum_{j=1}^{j=N} u_j \left(\sum_{i=1}^{i=5} M(k, i) d_{ji} \right) \right] \quad (4.52)$$

En donde:

$$M(i, j) = (-1)^{1-\delta_{ij}} \frac{1}{l(i, i)} \sum_{k=j}^{k=i-1} l(i, k) M(k, j) \quad i < j \quad i, j = 1, \dots, 5 \quad (4.53)$$

$$M(i, j) = \frac{1}{l(i, i)} \quad i = j \quad i, j = 1, \dots, 5 \quad (4.54)$$

$$M(i, j) = 0 \quad i > j \quad i, j = 1, \dots, 5 \quad (4.55)$$

En la que δ_{ij} es la función delta de Kronecker y además:

$$c_i = \sum_{j=1}^{j=N} d_{ji} \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} d_{j1} &= h_j w^2 & d_{j2} &= k_j w^2 \\ d_{j3} &= \frac{h_j^2}{2} w^2 & d_{j4} &= h_j k_j w^2 \\ d_{j5} &= \frac{k_j^2}{2} w^2 \end{aligned} \quad (4.57)$$

Por otro lado en la Ecuación 4.52 los coeficientes de u_0 y u_i verifican la relación:

$$\sum_{i=1}^{i=5} M(k, i) c_i + \sum_{j=1}^{j=N} \sum_{i=1}^{i=5} M(k, i) d_{ji} \quad (4.58)$$

Substituyendo las fórmulas explícitas en diferencias finitas generalizadas de la Ecuación 4.52 en la Ecuación 4.36, se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{A_1}{l(3, 3)} \left[u_0 \sum_{i=1}^{i=5} M(3, i) c_i + \sum_{j=1}^{j=N} u_j \left(\sum_{i=1}^{i=5} M(3, i) d_{ji} \right) \right] + \\ & + \frac{A_2}{l(4, 4)} \left[u_0 \sum_{i=1}^{i=5} M(4, i) c_i + \sum_{j=1}^{j=N} u_j \left(\sum_{i=1}^{i=5} M(4, i) d_{ji} \right) \right] + \\ & \frac{A_3}{l(5, 5)} \left[u_0 \sum_{i=1}^{i=5} M(5, i) c_i + \sum_{j=1}^{j=N} u_j \left(\sum_{i=1}^{i=5} M(5, i) d_{ji} \right) \right] + \\ & \frac{A_4}{l(1, 1)} \left[u_0 \sum_{i=1}^{i=5} M(1, i) c_i + \sum_{j=1}^{j=N} u_j \left(\sum_{i=1}^{i=5} M(1, i) d_{ji} \right) \right] + \\ & \frac{A_5}{l(2, 2)} \left[u_0 \sum_{i=1}^{i=5} M(2, i) c_i + \sum_{j=1}^{j=N} u_j \left(\sum_{i=1}^{i=5} M(2, i) d_{ji} \right) \right] = G(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (4.59)$$

Se pueden entonces reordenar los términos de la manera siguiente:

$$u_0 \sum_{i=1}^{i=5} \psi_i c_i + \sum_{j=1}^{j=N} u_j \left(\sum_{i=1}^{i=5} \psi_i d_{ji} \right) = G(x_0, y_0) \quad (4.60)$$

En donde:

$$\psi_i = \frac{A_1}{l(3,3)} M(3, i) + \frac{A_2}{l(4,4)} M(4, i) + \frac{A_3}{l(5,5)} M(5, i) + \frac{A_4}{l(1,1)} M(1, i) + \frac{A_5}{l(2,2)} M(2, i) \quad (4.61)$$

Si despejamos u_0 en función u_i de obtenemos lo que llamamos ecuación de la estrella:

$$u_0 = \frac{G(x_0, y_0) - \sum_{j=1}^{j=N} u_j \left(\sum_{i=1}^{i=5} \psi_i d_{ji} \right)}{\sum_{i=1}^{i=5} \psi_i c_i} \quad (4.62)$$

Si la Ecuación 4.36 fuese homogénea, la Ecuación 4.62 quedaría de la forma siguiente:

$$u_0 = \frac{\sum_{j=1}^{j=N} u_j \left(\sum_{i=1}^{i=5} \psi_i d_{ji} \right)}{\sum_{i=1}^{i=5} \psi_i c_i} \quad (4.63)$$

4.3. Discretización en x hasta 4º orden

Sea la ecuación diferencial en derivadas parciales en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}$, con frontera Γ :

$$A_1 \frac{\partial^4 U(x)}{\partial x^4} + A_2 \frac{\partial^3 U(x)}{\partial x^3} + A_3 \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} + A_4 \frac{\partial U(x)}{\partial x} = G(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (4.64)$$

Con la siguiente condición de contorno:

$$a_1 U(x) + a_2 \frac{\partial U(x)}{\partial x} + a_3 \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} + a_4 \frac{\partial^3 U(x)}{\partial x^3} = g(x) \quad \forall x \in \Gamma \quad (4.65)$$

En donde $U(x)$ es una función al menos 4 veces diferenciable en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y $A_1, A_2, A_3, A_4, a_1, a_2, a_3, a_4$ son constantes.

La condición de contorno establecida es la que se denomina mixta. Por tanto si se anula a_2 en la Ecuación 4.37, se tienen las condiciones de contorno tipo Dirichlet y si se anula el coeficiente a_1 , se tienen las condiciones de tipo Neumann.

Al realizar el desarrollo de Taylor de $U(x)$ en torno al nodo central de coordenadas (x_0) , para cada nodo de la estrella de coordenadas (x_i) , se tiene que:

$$U_i = U_0 + h_i \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + \frac{h_i^3}{6} \frac{\partial^3 U_0}{\partial x^3} + \frac{h_i^4}{24} \frac{\partial^4 U_0}{\partial x^4} + \dots \quad (4.66)$$

En donde:

$$U_i \equiv U(x_i, y_i)$$

$$U_0 \equiv U(x_0, y_0)$$

$$h_i = (x_0 - x_i)$$

Si truncamos el desarrollo de Taylor en los términos de 2º orden, y realizamos la suma de los errores cuadráticos ponderados de cada uno de los nodos de la estrella, y en todas ellas, obtenemos el siguiente funcional para cada estrella:

$$B_4(u) = \sum_{i=1}^{i=N} \left[\left(u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{h_i^3}{6} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{h_i^4}{24} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} \right) w(h_i) \right]^2 \quad (4.67)$$

En donde:

$u_i \equiv u(x_i)$ representa el valor aproximado de la función en el nodo i .

$u_0 \equiv u(x_0)$ representa el valor aproximado de la función en el nodo central de la estrella.

$w \equiv w(h_i)$ representa una función de ponderación dependiente de de la distancia de cada nodo al nodo central.

Si ahora se minimiza el funcional $B_4(u)$ respecto de las derivadas parciales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_4(u)}{\partial \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)} &= 2 \sum_{i=1}^{i=N} \left[\left(u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{h_i^3}{6} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{h_i^4}{24} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} \right) w^2 \right] h_i = 0 \\ \frac{\partial B_4(u)}{\partial \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right)} &= 2 \sum_{i=1}^{i=N} \left[\left(u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{h_i^3}{6} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{h_i^4}{24} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} \right) w^2 \right] \frac{h_i^2}{2} = 0 \\ \frac{\partial B_4(u)}{\partial \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} \right)} &= 2 \sum_{i=1}^{i=N} \left[\left(u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{h_i^3}{6} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{h_i^4}{24} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} \right) w^2 \right] \frac{h_i^3}{6} = 0 \\ \frac{\partial B_4(u)}{\partial \left(\frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} \right)} &= 2 \sum_{i=1}^{i=N} \left[\left(u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{h_i^3}{6} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{h_i^4}{24} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} \right) w^2 \right] \frac{h_i^4}{24} = 0 \end{aligned}$$

$$(4.68)$$

Se obtiene el siguiente sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{i=N} \left[\left(u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{h_i^3}{6} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{h_i^4}{24} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} \right) w^2 \right] h_i &= 0 \\
 \sum_{i=1}^{i=N} \left[\left(u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{h_i^3}{6} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{h_i^4}{24} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} \right) w^2 \right] \frac{h_i^2}{2} &= 0 \\
 \sum_{i=1}^{i=N} \left[\left(u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{h_i^3}{6} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{h_i^4}{24} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} \right) w^2 \right] \frac{h_i^3}{6} &= 0 \\
 \sum_{i=1}^{i=N} \left[\left(u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{h_i^3}{6} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{h_i^4}{24} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} \right) w^2 \right] \frac{h_i^4}{24} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4.69}$$

Este sistema se puede representar en forma matricial de la siguiente manera:

$$\mathbf{A} \mathbf{D}_{\mathbf{u}} = \mathbf{b} \tag{4.70}$$

Donde $\mathbf{D}_{\mathbf{u}}$ es el vector de incógnitas, las cuales son precisamente las derivadas parciales que buscamos sustituir en la Ecuación 4.36:

$$\mathbf{D}_{\mathbf{u}}^T = \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}, \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} \right) \tag{4.71}$$

Por otro lado \mathbf{b} es el vector de los términos independientes del sistema y es igual a:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{i=N} (u_0 - u_i) w^2 h_i \\ \sum_{i=1}^{i=N} (u_0 - u_i) w^2 \frac{h_i^2}{2} \\ \sum_{i=1}^{i=N} (u_0 - u_i) w^2 \frac{h_i^3}{6} \\ \sum_{i=1}^{i=N} (u_0 - u_i) w^2 \frac{h_i^4}{24} \end{pmatrix} \tag{4.72}$$

Por último \mathbf{A} es la matriz de los coeficientes cuya expresión es la siguiente:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{i=N} w^2 h_i^2 & \sum_{i=1}^{i=N} w^2 \frac{h_i^3}{2} & \sum_{i=1}^{i=N} w^2 \frac{h_i^4}{6} & \sum_{i=1}^{i=N} w^2 \frac{h_i^5}{24} \\ S & \sum_{i=1}^{i=N} w^2 \frac{h_i^4}{4} & \sum_{i=1}^{i=N} w^2 \frac{h_i^5}{12} & \sum_{i=1}^{i=N} w^2 \frac{h_i^6}{48} \\ I & \sum_{i=1}^{i=N} w^2 \frac{h_i^6}{36} & \sum_{i=1}^{i=N} w^2 \frac{h_i^7}{144} \\ M & \sum_{i=1}^{i=N} w^2 \frac{h_i^8}{576} \end{pmatrix} \quad (4.73)$$

Se puede observar que la matriz \mathbf{A} es una matriz simétrica y para que esta no sea singular la estrella debe poseer al menos 4 nodos sin contar el nodo central.

Para la resolución de este sistema de ecuaciones, y dado que la matriz \mathbf{A} es simétrica, se puede aplicar la descomposición de Cholesky, descomponiéndose esta matriz en producto de dos matrices, una matriz triangular por su traspuesta, esto es:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T \quad (4.74)$$

Siendo \mathbf{L} una matriz triangular superior de dimensión 4×4 , y l_{ij} los elementos nulos de dicha matriz, con $i, j = 1, 2, 3, 4$.

Se resuelve el sistema de ecuaciones de pueden obtener las siguientes fórmulas explícitas en diferencias finitas generalizadas:

$$\mathbf{D}_u(k) = \frac{1}{l(k, k)} \left[u_0 \sum_{i=1}^{i=4} M(k, i) c_i + \sum_{j=1}^{j=N} u_j \left(\sum_{i=1}^{i=4} M(k, i) d_{ji} \right) \right] \quad (4.75)$$

En donde:

$$M(i, j) = (-1)^{1-\delta_{ij}} \frac{1}{l(i, i)} \sum_{k=j}^{k=i-1} l(i, k) M(k, j) \quad i < j \quad i, j = 1, \dots, 4 \quad (4.76)$$

$$M(i, j) = \frac{1}{l(i, i)} \quad i = j \quad i, j = 1, \dots, 4 \quad (4.77)$$

$$M(i, j) = 0 \quad i > j \quad i, j = 1, \dots, 4 \quad (4.78)$$

En la que δ_{ij} es la función delta de Kronecker y además:

$$c_i = \sum_{j=1}^{j=N} d_{ji} \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned} d_{j1} &= h_j w^2 & d_{j2} &= \frac{h_j^2}{2} w^2 \\ d_{j3} &= \frac{h_j^3}{6} w^2 & d_{j4} &= \frac{h_j^4}{24} w^2 \end{aligned} \quad (4.80)$$

Substituyendo las fórmulas explícitas en diferencias finitas generalizadas de la Ecuación 4.64 en la Ecuación 4.64, se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{A_1}{l(4,4)} \left[u_0 \sum_{i=1}^{i=4} M(4,i) c_i + \sum_{j=1}^{j=N} u_j \left(\sum_{i=1}^{i=4} M(4,i) d_{ji} \right) \right] + \\ & + \frac{A_2}{l(3,3)} \left[u_0 \sum_{i=1}^{i=4} M(3,i) c_i + \sum_{j=1}^{j=N} u_j \left(\sum_{i=1}^{i=4} M(3,i) d_{ji} \right) \right] + \\ & + \frac{A_3}{l(2,2)} \left[u_0 \sum_{i=1}^{i=4} M(2,i) c_i + \sum_{j=1}^{j=N} u_j \left(\sum_{i=1}^{i=4} M(2,i) d_{ji} \right) \right] + \\ & \frac{A_4}{l(1,1)} \left[u_0 \sum_{i=1}^{i=4} M(1,i) c_i + \sum_{j=1}^{j=N} u_j \left(\sum_{i=1}^{i=4} M(1,i) d_{ji} \right) \right] = G(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (4.81)$$

Se pueden entonces reordenar los términos de la manera siguiente:

$$u_0 \sum_{i=1}^{i=4} \psi_i c_i + \sum_{j=1}^{j=N} u_j \left(\sum_{i=1}^{i=4} \psi_i d_{ji} \right) = G(x_0, y_0) \quad (4.82)$$

En donde:

$$\psi_i = \frac{A_1}{l(4,4)} M(4,i) + \frac{A_2}{l(3,3)} M(3,i) + \frac{A_3}{l(2,2)} M(2,i) + \frac{A_4}{l(1,1)} M(1,i) \quad (4.83)$$

Si despejamos u_0 en función u_i de obtenemos lo que llamamos ecuación de la estrella:

$$u_0 = \frac{G(x_0, y_0) - \sum_{j=1}^{j=N} u_j \left(\sum_{i=1}^{i=4} \psi_i d_{ji} \right)}{\sum_{i=1}^{i=4} \psi_i c_i} \quad (4.84)$$

Si la Ecuación 4.64 fuese homogénea, la Ecuación 4.84 quedaría de la forma siguiente:

$$u_0 = \frac{\sum_{j=1}^{j=N} u_j \left(\sum_{i=1}^{i=4} \psi_i d_{ji} \right)}{\sum_{i=1}^{i=4} \psi_i c_i} \quad (4.85)$$

4.4. Discretización en x e y hasta 4º orden

Sea la ecuación diferencial en derivadas parciales en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, con frontera Γ :

$$\begin{aligned} & A_1 \frac{\partial^4 U(x, y)}{\partial x^4} + A_2 \frac{\partial^4 U(x, y)}{\partial x^3 \partial y} + A_3 \frac{\partial^4 U(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + A_4 \frac{\partial^4 U(x, y)}{\partial x \partial y^3} + A_5 \frac{\partial^4 U(x, y)}{\partial y^4} + \\ & + A_6 \frac{\partial^3 U(x, y)}{\partial x^3} + A_7 \frac{\partial^3 U(x, y)}{\partial x^2 \partial y} + A_8 \frac{\partial^3 U(x, y)}{\partial x \partial y^2} + A_9 \frac{\partial^3 U(x, y)}{\partial y^3} + A_{10} \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + \\ & + A_{11} \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x \partial y} + A_{12} \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} + A_{13} \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} + A_{14} \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = G(x, y) \end{aligned} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2 \quad (4.86)$$

Con la siguiente condición de contorno:

$$\begin{aligned} & a_1 U(x, y) + a_2 \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} + a_3 \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} + a_4 \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + a_5 \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x \partial y} + \\ & + a_6 \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} + a_7 \frac{\partial^3 U(x, y)}{\partial x^3} + a_8 \frac{\partial^3 U(x, y)}{\partial x^2 \partial y} + a_9 \frac{\partial^3 U(x, y)}{\partial x \partial y^2} + a_{10} \frac{\partial^3 U(x, y)}{\partial y^3} = g(x, y) \end{aligned} \quad \forall x, y \in \Gamma \quad (4.87)$$

En donde $U(x)$ es una función al menos 4 veces diferenciable en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{14}, a_1, a_2, \dots, a_{10}$ son constantes.

La condición de contorno establecida es la que se denomina mixta, por tanto si se anula a_2 en la Ecuación 4.87, se tienen las condiciones de contorno tipo Dirichlet y si se anula el coeficiente a_1 , se tienen las condiciones de tipo Neumann.

Al realizar el desarrollo de Taylor de $U(x)$ en torno al nodo central de coordenadas (x_0, y_0) , para cada nodo de la estrella de coordenadas (x_i, y_i) , se tiene que:

$$\begin{aligned}
 U_i = U_0 &+ h_i \frac{\partial U_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 U_0}{\partial x \partial y} + \frac{k_i^2}{2} \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} + \frac{h_i^3}{6} \frac{\partial^3 U_0}{\partial x^3} + \\
 &+ \frac{h_i^2 k_i}{2} \frac{\partial^3 U_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{h_i k_i^2}{2} \frac{\partial^3 U_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{k_i^3}{6} \frac{\partial^3 U_0}{\partial y^3} + \frac{h_i^4}{24} \frac{\partial^4 U_0}{\partial x^4} + \\
 &+ \frac{h_i^3 k_i}{6} \frac{\partial^4 U_0}{\partial x^3 \partial y} + \frac{h_i^2 k_i^2}{4} \frac{\partial^4 U_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{h_i k_i^3}{6} \frac{\partial^4 U_0}{\partial x \partial y^3} + \frac{k_i^4}{24} \frac{\partial^4 U_0}{\partial y^4}
 \end{aligned} \tag{4.88}$$

Si truncamos el desarrollo en el 4º orden y realizamos la suma de los errores cuadráticos ponderados de cada uno de los nodos de la estrella, obtenemos el siguiente funcional para cada estrella:

$$\begin{aligned}
 B_{14}(u) = \sum_{i=1}^{i=N} \left[\left(u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{k_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{h_i^3}{6} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{h_i^2 k_i}{2} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{h_i k_i^2}{2} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{k_i^3}{6} \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} + \frac{h_i^4}{24} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} + \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{h_i^3 k_i}{6} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^3 \partial y} + \frac{h_i^2 k_i^2}{4} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{h_i k_i^3}{6} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x \partial y^3} + \frac{k_i^4}{24} \frac{\partial^4 u_0}{\partial y^4} \right) w(h_i, k_i) \right]^2
 \end{aligned} \tag{4.89}$$

En donde igual que antes U representa el valor exacto de la función y u el valor aproximado.

Si ahora se minimiza el funcional respecto de las derivadas parciales:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial B_{14}(u)}{\partial \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)} = 2 \sum_{i=1}^{i=N} \left[\left(u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{k_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{h_i^3}{6} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{h_i^2 k_i}{2} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{h_i k_i^2}{2} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{k_i^3}{6} \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} + \frac{h_i^4}{24} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} + \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{h_i^3 k_i}{6} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^3 \partial y} + \frac{h_i^2 k_i^2}{4} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{h_i k_i^3}{6} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x \partial y^3} + \frac{k_i^4}{24} \frac{\partial^4 u_0}{\partial y^4} \right) w^2 \right] h_i = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial B_{14}(u)}{\partial \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)} = 2 \sum_{i=1}^{i=N} \left[\left(u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{k_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{h_i^3}{6} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{h_i^2 k_i}{2} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{h_i k_i^2}{2} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{k_i^3}{6} \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} + \frac{h_i^4}{24} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} + \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{h_i^3 k_i}{6} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^3 \partial y} + \frac{h_i^2 k_i^2}{4} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{h_i k_i^3}{6} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x \partial y^3} + \frac{k_i^4}{24} \frac{\partial^4 u_0}{\partial y^4} \right) w^2 \right] k_i = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{14}(u)}{\partial \left(\frac{\partial^4 u_0}{\partial x \partial y^3}\right)} = 2 \sum_{i=1}^{i=N} \left[\left(u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{k_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{h_i^3}{6} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{h_i^2 k_i}{2} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{h_i k_i^2}{2} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{k_i^3}{6} \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} + \frac{h_i^4}{24} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{h_i^3 k_i}{6} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^3 \partial y} + \frac{h_i^2 k_i^2}{4} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{h_i k_i^3}{6} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x \partial y^3} + \frac{k_i^4}{24} \frac{\partial^4 u_0}{\partial y^4} \right) w^2 \right] \frac{h_i k_i^3}{6} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{14}(u)}{\partial \left(\frac{\partial^4 u_0}{\partial y^4}\right)} = 2 \sum_{i=1}^{i=N} \left[\left(u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{k_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{h_i^3}{6} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{h_i^2 k_i}{2} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{h_i k_i^2}{2} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{k_i^3}{6} \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} + \frac{h_i^4}{24} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{h_i^3 k_i}{6} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^3 \partial y} + \frac{h_i^2 k_i^2}{4} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{h_i k_i^3}{6} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x \partial y^3} + \frac{k_i^4}{24} \frac{\partial^4 u_0}{\partial y^4} \right) w^2 \right] \frac{k_i^4}{24} = 0 \end{aligned} \quad (4.90)$$

Se obtiene el siguiente sistema de 14 ecuaciones con 14 incógnitas:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=N} \left(u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{k_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{h_i^3}{6} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \right. \\ \left. + \frac{h_i^2 k_i}{2} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{h_i k_i^2}{2} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{k_i^3}{6} \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} + \frac{h_i^4}{24} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} + \right. \\ \left. + \frac{h_i^3 k_i}{6} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^3 \partial y} + \frac{h_i^2 k_i^2}{4} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{h_i k_i^3}{6} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x \partial y^3} + \frac{k_i^4}{24} \frac{\partial^4 u_0}{\partial y^4} \right) w^2 h_i = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=N} \left(u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{k_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{h_i^3}{6} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \right. \\ \left. + \frac{h_i^2 k_i}{2} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{h_i k_i^2}{2} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{k_i^3}{6} \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} + \frac{h_i^4}{24} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} + \right. \\ \left. + \frac{h_i^3 k_i}{6} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^3 \partial y} + \frac{h_i^2 k_i^2}{4} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{h_i k_i^3}{6} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x \partial y^3} + \frac{k_i^4}{24} \frac{\partial^4 u_0}{\partial y^4} \right) w^2 k_i = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=N} \left(u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{k_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{h_i^3}{6} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \right. \\ \left. + \frac{h_i^2 k_i}{2} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{h_i k_i^2}{2} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{k_i^3}{6} \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} + \frac{h_i^4}{24} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} + \right. \\ \left. + \frac{h_i^3 k_i}{6} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^3 \partial y} + \frac{h_i^2 k_i^2}{4} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{h_i k_i^3}{6} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x \partial y^3} + \frac{k_i^4}{24} \frac{\partial^4 u_0}{\partial y^4} \right) w^2 \frac{h_i^2}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{i=N} \left(u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{k_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{h_i^3}{6} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \right. \\
 \left. + \frac{h_i^2 k_i}{2} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{h_i k_i^2}{2} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{k_i^3}{6} \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} + \frac{h_i^4}{24} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} + \right. \\
 \left. + \frac{h_i^3 k_i}{6} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^3 \partial y} + \frac{h_i^2 k_i^2}{4} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{h_i k_i^3}{6} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x \partial y^3} + \frac{k_i^4}{24} \frac{\partial^4 u_0}{\partial y^4} \right) w^2 \frac{k_i^4}{24} = 0
 \end{aligned} \tag{4.91}$$

Este sistema se puede representar en forma matricial de la siguiente manera:

$$\mathbf{A} \mathbf{D}_{\mathbf{u}} = \mathbf{b} \tag{4.92}$$

Donde $\mathbf{D}_{\mathbf{u}}$ es el vector de incógnitas, las cuales son precisamente las derivadas parciales que buscamos sustituir en la Ecuación 4.86:

$$\mathbf{D}_{\mathbf{u}}^T = \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_0}{\partial y}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}, \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3}, \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4}, \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^3 \partial y}, \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^2 \partial y^2}, \frac{\partial^4 u_0}{\partial x \partial y^3}, \frac{\partial^4 u_0}{\partial y^4} \right) \tag{4.93}$$

Por otro lado el vector \mathbf{b} de los términos independientes es igual a:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}^T = & \left(\sum_{i=1}^{i=N} (u_0 - u_i) w^2 h_i, \sum_{i=1}^{i=N} (u_0 - u_i) w^2 k_i, \sum_{i=1}^{i=N} (u_0 - u_i) w^2 \frac{h_i^2}{2}, \right. \\
 & \sum_{i=1}^{i=N} (u_0 - u_i) w^2 k_i h_i, \sum_{i=1}^{i=N} (u_0 - u_i) w^2 \frac{k_i^2}{2}, \sum_{i=1}^{i=N} (u_0 - u_i) w^2 \frac{h_i^3}{6}, \\
 & \sum_{i=1}^{i=N} (u_0 - u_i) w^2 \frac{h_i^2 k_i}{2}, \sum_{i=1}^{i=N} (u_0 - u_i) w^2 \frac{h_i k_i^2}{2}, \sum_{i=1}^{i=N} (u_0 - u_i) w^2 \frac{k_i^3}{6}, \\
 & \sum_{i=1}^{i=N} (u_0 - u_i) w^2 \frac{h_i^4}{24}, \sum_{i=1}^{i=N} (u_0 - u_i) w^2 \frac{h_i^3 k_i}{6}, \sum_{i=1}^{i=N} (u_0 - u_i) w^2 \frac{h_i^2 k_i^2}{4}, \\
 & \left. \sum_{i=1}^{i=N} (u_0 - u_i) w^2 \frac{h_i k_i^3}{6}, \sum_{i=1}^{i=N} (u_0 - u_i) w^2 \frac{k_i^4}{24} \right)
 \end{aligned} \tag{4.94}$$

Por último \mathbf{A} es la matriz de los coeficientes cuya expresión es la siguiente:

Se resuelve el sistema de ecuaciones de pueden obtener las siguientes fórmulas explícitas en diferencias finitas generalizadas:

$$\mathbf{D}_u(k) = \frac{1}{l(k, k)} \left[u_0 \sum_{i=1}^{i=14} M(k, i) c_i + \sum_{j=1}^{j=N} u_j \left(\sum_{i=1}^{i=14} M(k, i) d_{ji} \right) \right] \quad (4.97)$$

En donde:

$$M(i, j) = (-1)^{1-\delta_{ij}} \frac{1}{l(i, i)} \sum_{k=j}^{k=i-1} l(i, k) M(k, j) \quad i < j \quad i, j = 1, \dots, 14 \quad (4.98)$$

$$M(i, j) = \frac{1}{l(i, i)} \quad i = j \quad i, j = 1, \dots, 14 \quad (4.99)$$

$$M(i, j) = 0 \quad i > j \quad i, j = 1, \dots, 14 \quad (4.100)$$

En la que δ_{ij} es la función delta de Kronecker y además:

$$c_i = \sum_{j=1}^{j=N} d_{ji} \quad (4.101)$$

$$\begin{aligned} d_{j1} &= h_j w^2 & d_{j2} &= k_j w^2 \\ d_{j3} &= \frac{h_j^2}{2} w^2 & d_{j4} &= h_j k_j w^2 \\ d_{j5} &= \frac{k_j^2}{2} w^2 & d_{j6} &= \frac{h_j^3}{6} w^2 \\ d_{j7} &= \frac{h_j^2 k_j}{2} w^2 & d_{j8} &= \frac{h_j k_j^2}{2} w^2 \\ d_{j9} &= \frac{k_j^3}{6} w^2 & d_{j10} &= \frac{h_j^4}{24} w^2 \\ d_{j11} &= \frac{h_j^3 k_j}{6} w^2 & d_{j12} &= \frac{h_j^2 k_j^2}{4} w^2 \\ d_{j13} &= \frac{k_j h_j^3}{6} w^2 & d_{j14} &= \frac{k_j^4}{24} w^2 \end{aligned} \quad (4.102)$$

Substituyendo las fórmulas explícitas en diferencias finitas generalizadas de la Ecuación 4.97 en la Ecuación 4.86, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 & \frac{A_1}{l(10,10)} \left[u_0 \sum_{i=1}^{i=14} M(10,i)c_i + \sum_{j=1}^{j=N} u_j \left(\sum_{i=1}^{i=14} M(10,i)d_{ji} \right) \right] + \\
 & + \frac{A_2}{l(11,11)} \left[u_0 \sum_{i=1}^{i=14} M(11,i)c_i + \sum_{j=1}^{j=N} u_j \left(\sum_{i=1}^{i=14} M(11,i)d_{ji} \right) \right] + \\
 & + \frac{A_3}{l(12,12)} \left[u_0 \sum_{i=1}^{i=14} M(12,i)c_i + \sum_{j=1}^{j=N} u_j \left(\sum_{i=1}^{i=14} M(12,i)d_{ji} \right) \right] + \\
 & + \frac{A_4}{l(13,13)} \left[u_0 \sum_{i=1}^{i=14} M(13,i)c_i + \sum_{j=1}^{j=N} u_j \left(\sum_{i=1}^{i=14} M(13,i)d_{ji} \right) \right] + \\
 & + \frac{A_5}{l(14,14)} \left[u_0 \sum_{i=1}^{i=14} M(14,i)c_i + \sum_{j=1}^{j=N} u_j \left(\sum_{i=1}^{i=14} M(14,i)d_{ji} \right) \right] + \\
 & + \frac{A_6}{l(6,6)} \left[u_0 \sum_{i=1}^{i=14} M(6,i)c_i + \sum_{j=1}^{j=N} u_j \left(\sum_{i=1}^{i=14} M(6,i)d_{ji} \right) \right] + \\
 & + \frac{A_7}{l(7,7)} \left[u_0 \sum_{i=1}^{i=14} M(7,i)c_i + \sum_{j=1}^{j=N} u_j \left(\sum_{i=1}^{i=14} M(7,i)d_{ji} \right) \right] + \\
 & + \frac{A_8}{l(8,8)} \left[u_0 \sum_{i=1}^{i=14} M(8,i)c_i + \sum_{j=1}^{j=N} u_j \left(\sum_{i=1}^{i=14} M(8,i)d_{ji} \right) \right] + \\
 & + \frac{A_9}{l(9,9)} \left[u_0 \sum_{i=1}^{i=14} M(9,i)c_i + \sum_{j=1}^{j=N} u_j \left(\sum_{i=1}^{i=14} M(9,i)d_{ji} \right) \right] + \\
 & + \frac{A_{10}}{l(3,3)} \left[u_0 \sum_{i=1}^{i=14} M(3,i)c_i + \sum_{j=1}^{j=N} u_j \left(\sum_{i=1}^{i=14} M(3,i)d_{ji} \right) \right] + \\
 & + \frac{A_{11}}{l(4,4)} \left[u_0 \sum_{i=1}^{i=14} M(4,i)c_i + \sum_{j=1}^{j=N} u_j \left(\sum_{i=1}^{i=14} M(4,i)d_{ji} \right) \right] + \\
 & + \frac{A_{12}}{l(5,5)} \left[u_0 \sum_{i=1}^{i=14} M(5,i)c_i + \sum_{j=1}^{j=N} u_j \left(\sum_{i=1}^{i=14} M(5,i)d_{ji} \right) \right] + \\
 & + \frac{A_{13}}{l(1,1)} \left[u_0 \sum_{i=1}^{i=14} M(1,i)c_i + \sum_{j=1}^{j=N} u_j \left(\sum_{i=1}^{i=14} M(1,i)d_{ji} \right) \right] + \\
 & + \frac{A_{14}}{l(2,2)} \left[u_0 \sum_{i=1}^{i=14} M(2,i)c_i + \sum_{j=1}^{j=N} u_j \left(\sum_{i=1}^{i=14} M(2,i)d_{ji} \right) \right] = G(x_0, y_0)
 \end{aligned} \tag{4.103}$$

Se pueden entonces reordenar los términos de la manera siguiente:

$$u_0 \sum_{i=1}^{i=14} \psi_i c_i + \sum_{j=1}^{j=N} u_j \left(\sum_{i=1}^{i=14} \psi_i d_{ji} \right) = G(x_0, y_0) \quad (4.104)$$

En donde:

$$\begin{aligned} \psi_i = & \frac{A_1}{l(10,10)} M(10, i) + \frac{A_2}{l(11,11)} M(11, i) + \frac{A_3}{l(12,12)} M(12, i) + \frac{A_4}{l(13,13)} M(13, i) + \\ & + \frac{A_5}{l(14,14)} M(14, i) + \frac{A_6}{l(6,6)} M(6, i) + \frac{A_7}{l(7,7)} M(7, i) + \frac{A_8}{l(8,8)} M(8, i) + \\ & + \frac{A_9}{l(9,9)} M(9, i) + \frac{A_{10}}{l(3,3)} M(3, i) + \frac{A_{11}}{l(4,4)} M(4, i) + \frac{A_{12}}{l(5,5)} M(5, i) + \\ & + \frac{A_{13}}{l(1,1)} M(1, i) + \frac{A_{14}}{l(2,2)} M(2, i) \end{aligned} \quad (4.105)$$

4.5. Discretización temporal

Debido a que el objetivo de la tesis es aplicar el método de Diferencias Finitas Generalizadas a problemas de elasto-dinámica, las ecuaciones diferenciales a resolver van a ser dependientes del tiempo, por lo que habrá que realizar una discretización temporal al igual que espacial.

Para la realización de la discretización temporal de hasta 2º orden se emplearán diferencias finitas clásicas.

Si se realiza el desarrollo en serie de Taylor de la función $U(x, y, t)$ en un entorno $\pm \Delta t$ de t_1 se tiene que:

$$\begin{aligned} U(t_1 + \Delta t) &= U(t_1) + \Delta t \frac{\partial U(t_1)}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 U(t_1)}{\partial t^2} + \frac{(\Delta t)^3}{3!} \frac{\partial^3 U(t_1)}{\partial t^3} + \frac{(\Delta t)^4}{4!} \frac{\partial^4 U(t_1)}{\partial t^4} + \dots \\ U(t_1 - \Delta t) &= U(t_1) - \Delta t \frac{\partial U(t_1)}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 U(t_1)}{\partial t^2} - \frac{(\Delta t)^3}{3!} \frac{\partial^3 U(t_1)}{\partial t^3} + \frac{(\Delta t)^4}{4!} \frac{\partial^4 U(t_1)}{\partial t^4} + \dots \end{aligned} \quad (4.106)$$

En donde se ha abreviado $U(x, y, t_1) \equiv U(t_1)$. Si truncamos ambos desarrollos en los términos de 2º orden y los sumamos se obtiene:

$$u(t_1 + \Delta t) + u(t_1 - \Delta t) = 2u(t_1) + \frac{2(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u(t_1)}{\partial t^2} \quad (4.107)$$

Se ha vuelto a utilizar la misma nomenclatura, siendo $U(t_1)$ el valor exacto de la función y $u(t_1)$ el valor aproximado en t_1 .

Operando en la Ecuación 4.107 y llamando $u(t_1 + \Delta t) \equiv u^{n+1}$, $u(t_1 - \Delta t) \equiv u^{n-1}$, $u(t_1) \equiv u^n$, se llega a la conocida formulación en diferencias finitas:

$$\frac{\partial^2 u(t_1)}{\partial t^2} = \frac{u^{n-1} - 2u^n + u^{n+1}}{(\Delta t)^2} \quad (4.108)$$

Si vez de sumar se restan ambos desarrollos en serie se tiene:

$$u(t_1 + \Delta t) - u(t_1 - \Delta t) = 2\Delta t \frac{\partial u(t_1)}{\partial t} \quad (4.109)$$

Operando de nuevo en la Ecuación 4.109 y usando la misma nomenclatura se obtiene el esquema, de la primera derivada, en diferencias finitas clásicas centrales:

$$\frac{\partial u(t_1)}{\partial t} = \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta t} \quad (4.110)$$

4.6. Influencia de los parámetros fundamentales de la formulación

A continuación se van a analizar los parámetros esenciales que intervienen en el Método de Diferencias Finitas Generalizadas, estos son el número de nodos en cada estrella, criterio de selección de los nodos de la estrella y tipo de función de ponderación a elegir.

4.6.1. Influencia del número de nodos de la estrella

Una de las cuestiones que aparece al aplicar el MDFG es el número de nodos a asociar a cada estrella para obtener una mejor aproximación del resultado, sabemos que para el caso de resolver una ecuación diferencial de 2º orden necesitamos un mínimo de 5 nodos, sin contar con el nodo central, por estrella, ya que de no ser así la matriz resultaría singular y por lo tanto no podríamos resolver el sistema de ecuaciones, igualmente para una ecuación diferencial de 4º orden el número mínimo de nodos sería de 14 más el nodo central.

Por otro lado el empleo de un número excesivo de nodos implica un aumento notable de los cálculos y por lo tanto del tiempo de computación. De los estudios realizados por J.J Benito, F. Ureña y L. Gavete [14] se desprende que para la resolución de ecuaciones diferenciales de 2º orden, el número óptimo de nodos a asociar a cada estrella es de 8 nodos por estrella, sin contar el nodo central.

Aunque con un aumento de nodos asociados a cada estrella el error cometido en la solución decrece, se llega a la conclusión de que a partir de 8 nodos la reducción de error producida no es significativa para el esfuerzo computacional requerido.

Se define el error cometido aplicando el MDFG, tanto en la solución como en las derivadas parciales según la siguiente expresión:

$$Error = \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=N} [sol(i) - exac(i)]^2}{N}}}{|exac_{max}|} \times 100 \quad (4.111)$$

En donde N es el número total de nodos en el dominio considerado, $sol(i)$ representa la solución aproximada en el nodo i y $exac(i)$ la solución exacta en dicho nodo.

La Figura 4.1 muestra los resultados del error en correspondencia con el número de nodos de la estrella, sin incluir el nodo central, cuando se resuelven cuatro ecuaciones diferenciales en derivadas parciales en un dominio cuadrado de lado la unidad, y se utiliza la siguiente función de ponderación:

$$w(x, y) = exp(-5d_i^2) \quad (4.112)$$

En donde d_i representa la distancia de cada nodo de la estrella con el central de la misma estrella.

Ecuación 1^a: Es la ecuación de Laplace, y la solución exacta es:

$$U(x, y) = x^2 - y^2 \quad (4.113)$$

Ecuación 2^a: La ecuación diferencial en derivadas parciales es:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 12(x^2 - y^2) \quad (4.114)$$

Cuya solución exacta es:

$$U(x, y) = x^4 - y^4 \quad (4.115)$$

Ecuación 3^a: La ecuación diferencial en derivadas parciales es :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad (4.116)$$

Cuya la solución exacta es:

$$U(x, y) = exp x \sin x \quad (4.117)$$

Ecuación 4^a: La ecuación diferencial en derivadas parciales es:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 4 \quad (4.118)$$

Cuya la solución exacta es:

$$U(x, y) = x^2 + y^2 \quad (4.119)$$

Las condiciones de contorno para todas son del tipo Dirichlet, excepto para la 4^o que son de tipo mixtas:

$$0 \leq y \leq 1 \quad \begin{cases} U(0, y) = y^2 \\ U(1, y) = 1 + y^2 \end{cases} \quad (4.120)$$

$$0 \leq x \leq 1 \quad \begin{cases} \left. \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \\ \left. \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \right|_{y=1} = 2 \end{cases} \quad (4.121)$$

En la Figura 4.1 se presenta una gráfica en la que se puede ver, para las cuatro ecuaciones en derivada parciales señaladas, cómo disminuye el error al aumentar el número de nodos por estrella, y se puede ver que a partir de 8 nodos la disminución del error cometido se reduce drásticamente.

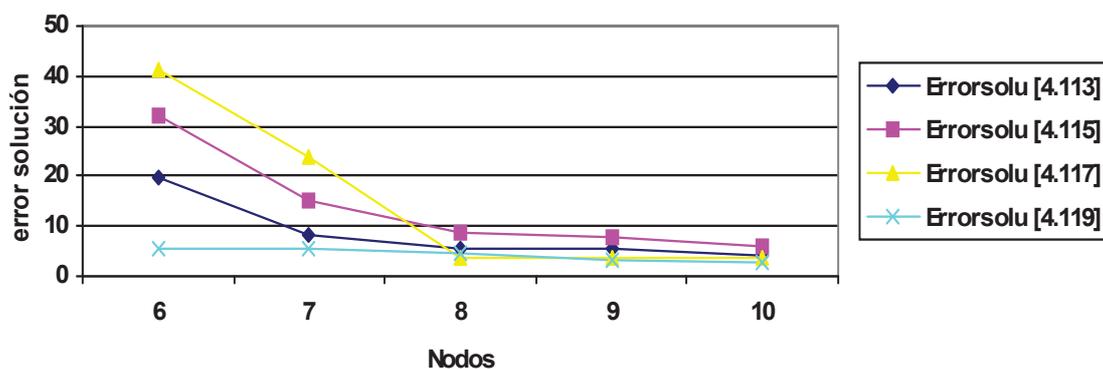


Figura 4.1: Error global frente a número de nodos de la estrella

Para el caso de ecuaciones diferenciales de 4^o orden este número óptimo de nodos a escoger sería de 24 nodos por estrella, sin incluir el nodo central.

4.6.2. Influencia del criterio de selección de los nodos de la estrella

Uno de los factores que se ha definido como esencial, ha sido el valor de las coordenadas relativas de los nodos de la estrella respecto del central, es decir, la situación de los nodos en la estrella respecto del central, es un factor importante en la ecuación de la estrella. En el método clásico de diferencias finitas, se seleccionan los cuatro nodos en los ejes de coordenadas cartesianas, centrados en el nodo central, y a igual distancia del nodo central.

Jensen [41] utilizó como criterio de selección el de la distancia de los nodos al central, seleccionando los más cercanos. Esta forma de seleccionar los nodos de una estrella se va a denominar criterio de la distancia Figura 4.2. El criterio produce distorsiones debido a que la densidad de nodos en el dominio puede ser irregular, lo que conducirá a resultados no todo lo exactos que se desearía.

Perrone y Kao [80] sugirieron otra segunda forma de seleccionar los nodos en la estrella, que se ha denominado criterio del octante Figura 4.3, y consiste en elegir un nodo por cada octante en un sistema de ejes cartesianos con origen en el nodo central. Este criterio, ante una irregular densidad de nodos, produce errores elevados. Una alternativa viable a este criterio, consiste en aplicar una distancia límite a los nodos seleccionados de tal manera que ningún nodo de la estrella supere ese límite, con lo que se corrige el efecto de la irregularidad de la densidad de nodos.

Una tercera forma de seleccionar los nodos en la estrella, propuesto por Liszka y Orkisz [55] y [79], es la que se ha denominado criterio del cuadrante, y consiste en seleccionar en cada cuadrante de un sistema de ejes cartesianos, con origen el nodo central, los 2 nodos, en el caso de ecuaciones diferenciales de orden 2, 6 para orden 4, mas cercanos al central. Este criterio corrige los problemas que plantean los criterios de la distancia y del octante, siendo por lo tanto el más adecuado.

En la Figura 4.3 se muestra un ejemplo de selección de nodos en la estrella para una ecuación diferencial de 2º orden con el criterio del octante y el del cuadrante. La selección de nodos para la estrella con el criterio del octante es: "1,2,3,4,5,6,7,8", con el criterio del cuadrante es: "1,a,3,b,4,5,7,c" con una distribución claramente más regular.

4.6.3. Influencia de la función de ponderación

La Ecuación 4.84 muestra que el valor de la solución de una ecuación diferencial en derivadas parciales en un nodo, es la media ponderada, por los coeficientes ψ_i de los valores del resto de nodos de la estrella. Como ya se estudio en el apartado 4.1, la función de ponderación forma parte de los coeficientes ψ_i antes mencionados.

Por lo tanto la elección de la función de ponderación será un factor importante para mejorar la aproximación del método, las funciones de ponderación a utilizar serán de tipo: potencial, con distintos exponentes, exponencial y spline cúbica y cuártica.

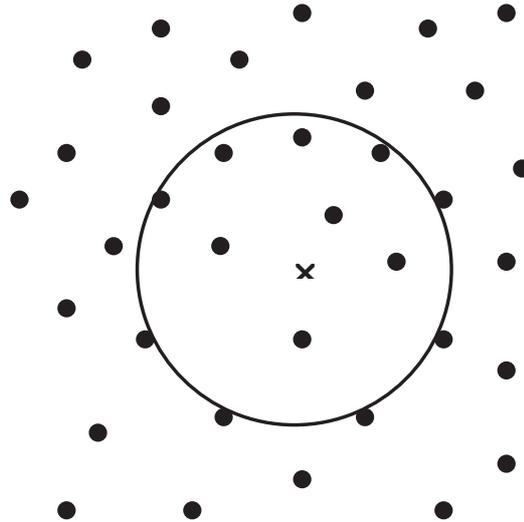


Figura 4.2: Criterio de la distancia

Así pues se realiza un análisis con las siguientes funciones de ponderación:

Potencial:

$$w(x, y) = \frac{1}{d_i^3} \quad (4.122)$$

Exponencial:

$$w(x, y) = \exp(-5d_i^2) \quad (4.123)$$

Spiline cúbica:

$$w(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{2}{3} - 4d_i^2 + 4d_i^3\right)^2 & 0 \leq d_i \leq 0,25 \\ \left(\frac{4}{3} - 4d_i + 4d_i^2 - \frac{4}{3}d_i^3\right)^2 & 0,25 \leq d_i \leq 0,50 \\ 10^{-10} & d_i > 0,5 \end{cases} \quad (4.124)$$

Spiline cuártica:

$$w(x, y) = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{d_i}{0,292}\right)^2 + 8\left(\frac{d_i}{0,292}\right)^3 - 3\left(\frac{d_i}{0,292}\right)^4 & d_i \leq 0,292 \\ 0 & d_i > 0,292 \end{cases} \quad (4.125)$$

En el Cuadro 4.1 se compara el error global cometido en cada una de las cuatro ecuaciones presentadas en el apartado 4.6.1 aplicando las cuatro diferentes funciones de ponderación presentadas.

Del Cuadro 4.1 se desprende que la mejor aproximación corresponde con aquellas funciones de ponderación que ponderan fuertemente a los nodos de acuerdo con

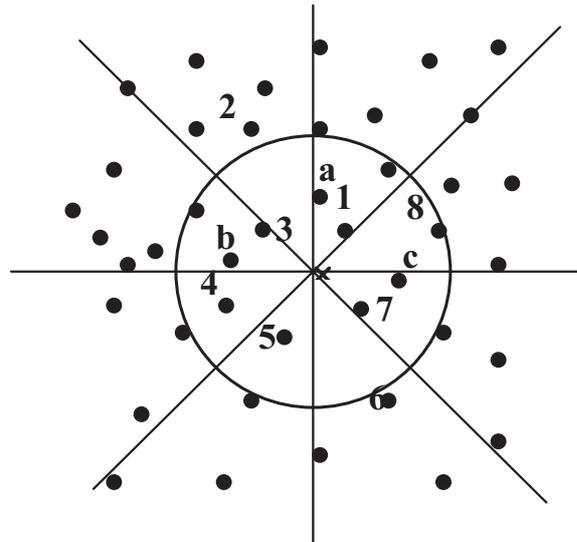


Figura 4.3: Criterio del octante y del cuadrante

	4.113	4.115	4.117	4.119
Potencial	0,0119	0,0375	0,2274	0,2603
Exponencial	0,0345	0,1578	0,8782	0,0513
Spline cúbica	0,0449	0,1509	1,195	0,325
Spline cuártica	0,0382	0,2429	0,8974	0,1146

Cuadro 4.1: Error global cometido variando la función de ponderación

su distancia al nodo central, esto es, las que ponderan mucho más a los nodos más cercanos que a los lejanos, es decir las funciones potenciales.

Si la densidad de nodos en la malla es uniforme, los resultados que se obtienen al utilizar las funciones de ponderación potencial, exponencial y spline son similares, sin embargo si la densidad de nodos no es uniforme las funciones de ponderación exponencial y spline ponderan por igual todos los nodos que están casi a la misma distancia del nodo central debido a que son funciones suaves, sin embargo las potenciales ponderan mucho más a los más cercanos. Esto implica que se obtienen mejores resultados con este último tipo de funciones de ponderación.

4.6.4. Ejemplos académicos de resolución de EDP's de hasta 4º orden

A continuación se muestran algunos ejemplos académicos más de resolución de EDP's de hasta cuarto orden así como sistemas de EDP's.

El dominio de aplicación será un cuadrado de lado la unidad, ver Figura 4.4, se usarán condiciones de contorno de tipo Dirichlet, así como estrellas de 24 nodos, el

criterio de selección de los nodos será el de los cuatro cuadrantes siendo la función de ponderación escogida será la potencial.

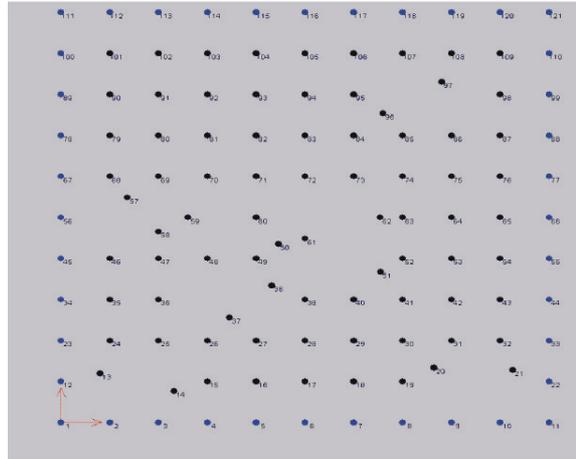


Figura 4.4: Cuadrado de lado unidad con 121 nodos distribuidos irregularmente.

El error global cometido se calculará según la Ecuación 4.111

En primer lugar se resuelve la ecuación:

$$\Delta^2 U = 0 \tag{4.126}$$

Con las condiciones de contorno siguientes:

$$0 \leq y \leq 1 \quad \begin{cases} U(0, y) = y^4 \\ U(1, y) = 1 + y^4 - 6y^2 \end{cases} \tag{4.127}$$

$$0 \leq x \leq 1 \quad \begin{cases} U(x, 0) = x^4 \\ U(x, 1) = x^4 - 6x^2 + 1 \end{cases} \tag{4.128}$$

La solución analítica es la siguiente:

$$U(x, y) = x^4 + y^4 - 6x^2y^2 \tag{4.129}$$

El error global cometido usando Diferencias Finitas Generalizadas para su aproximación es igual a:

$$Error = 0,00001471 \%$$

El segundo ejemplo presentado corresponde a la resolución de la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad (4.130)$$

Con las condiciones de contorno siguientes:

$$0 \leq y \leq 1 \quad \begin{cases} U(0, y) = y^3 \\ U(1, y) = 1 + y^3 - 3y^2 - 3y \end{cases} \quad (4.131)$$

$$0 \leq x \leq 1 \quad \begin{cases} U(x, 0) = x^3 \\ U(x, 1) = x^3 - 3x^2 - 3x + 1 \end{cases} \quad (4.132)$$

La solución analítica es la siguiente:

$$U(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2y - 3xy^2 \quad (4.133)$$

El error global cometido usando Diferencias Finitas Generalizadas para su aproximación es igual a:

$$Error = 0,0001769 \%$$

Por último se presenta un sistema de ecuaciones en derivadas parciales:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial x \partial y} = 0 \\ \frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial x \partial y} = 0 \end{cases} \quad (4.134)$$

Con las condiciones de contorno siguientes:

$$0 \leq y \leq 1 \quad \begin{cases} U_x(0, y) = \sin y & U_y(0, y) = \cos y \\ U_x(1, y) = \exp x \sin y & U_y(1, y) = \exp x \cos y \end{cases} \quad (4.135)$$

$$0 \leq x \leq 1 \quad \begin{cases} U_x(x, 0) = 0 & U_y(x, 0) = \exp x \\ U_x(x, 1) = \exp x \sin 1 & U_y(x, 1) = \exp x \cos 1 \end{cases} \quad (4.136)$$

La solución analítica es la siguiente:

$$\begin{aligned} U_x(x, y) &= \exp x \sin y \\ U_y(x, y) &= \exp x \cos y \end{aligned} \quad (4.137)$$

Finalmente los errores globales cometidos usando Diferencias Finitas Generalizadas para su aproximación son igual a:

$$\text{Error } U_x = 0,0000425 \%$$

$$\text{Error } U_y = 0,0000464 \%$$

5 Esquema en Diferencias Finitas Generalizadas para vigas

A continuación se va a aplicar el Método de Diferencias finitas Generalizadas para la resolución de problemas elasto-dinámicos en vigas de Euler.

5.1. Ecuación diferencial de la viga sometida a flexión

Suponiendo una viga recta de sección constante, sometida a una distribución de carga del tipo presentado en la Figura 5.1:

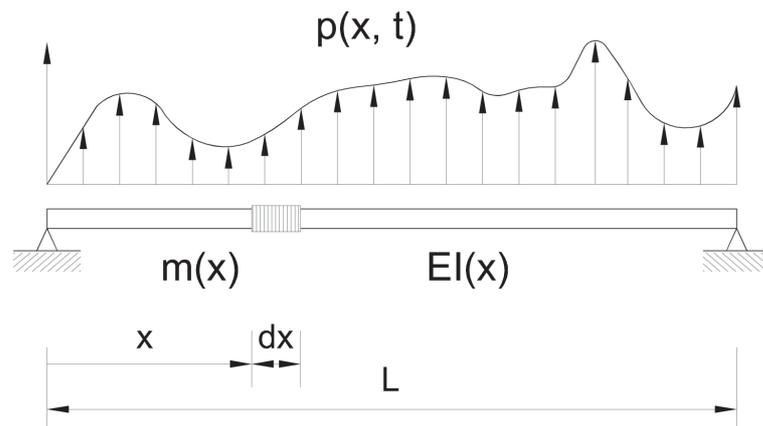


Figura 5.1: Viga sometida a una distribución de carga dependiente del tiempo

Estableciendo el equilibrio dinámico de un elemento diferencial de la viga, según se muestra en la Figura 5.2 se tiene que:

$$Q + p dx - \left(Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) - f_I dx = 0 \quad (5.1)$$

$$f_I dx = m dx \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (5.2)$$

$$M_f + Qdx - \left(M_f + \frac{\partial M_f}{\partial x} dx \right) = 0 \tag{5.3}$$

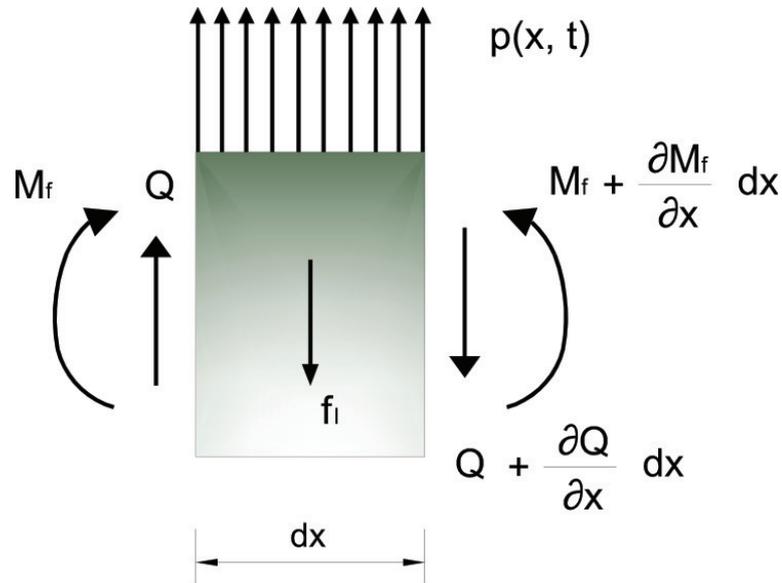


Figura 5.2: Equilibrio de un elemento diferencial de viga.

Introduciendo la Ecuación 5.2 y la Ecuación 5.3 en la Ecuación 5.1 y operando se llega a la siguiente expresión:

$$\frac{\partial^2 M_f}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = p(x, t) \tag{5.4}$$

Teniendo en cuenta la relación lineal entre el momento flector y la curvatura de la deformada se tiene:

$$\frac{M_f}{EI} = \frac{1}{r} \tag{5.5}$$

En donde:

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \tag{5.6}$$

Que para pequeñas deformaciones se puede aproximar mediante:

$$\frac{1}{r} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (5.7)$$

Así pues introduciendo la Ecuación 5.7 en la Ecuación 5.5 y esta en la Ecuación 5.4 se obtiene la ecuación diferencial que rige el comportamiento dinámico de la viga:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right] + m \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = p(x, t) \quad (5.8)$$

Que para una viga de sección constante se convierte en:

$$EI \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = p(x, t) \quad 0 < x < L \quad t > 0 \quad (5.9)$$

A esta ecuación diferencial se le añadirán unas condiciones iniciales, desplazamiento y velocidad, esto es:

$$\begin{cases} U(x, 0) = g(x) & 0 < x < L \\ \left. \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = h(x) & 0 < x < L \end{cases} \quad (5.10)$$

Y unas condiciones de contorno, las cuales dependerán del tipo de sustentación de la viga, esto es, para una viga simplemente apoyada se impondrá la condición de desplazamientos y momentos nulos en los apoyos, lo cual se expresa de la siguiente forma:

$$\begin{cases} U(0, t) = U(L, t) = 0 & t > 0 \\ \left. \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=L} = 0 & t > 0 \end{cases} \quad (5.11)$$

Para el caso de viga empotrada se establecerá desplazamiento y giro nulo en los extremos de la viga, esto es:

$$\begin{cases} U(0, t) = U(L, t) = 0 & t > 0 \\ \left. \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 & t > 0 \end{cases} \quad (5.12)$$

5.2. Esquema en Diferencias Finitas Generalizadas

A la vista de la Ecuación 5.9 necesitaremos la discretización espacial en una dimensión hasta 4^o orden, así pues en la Ecuación 4.75 se particularizará para $k = 4$, esto es:

$$\mathbf{D}_u(4) = \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} = \frac{1}{l(4,4)} \left[u_0 \sum_{i=1}^{i=4} M(4,i)c_i + \sum_{j=1}^{j=N} u_j \left(\sum_{i=1}^{i=4} M(4,i)d_{ji} \right) \right] \quad (5.13)$$

Esta expresión se puede simplificar de la siguiente forma:

$$\frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} = -u_0 \gamma_0 + \sum_{j=1}^{j=N} u_j \gamma_j \equiv -u_0^n \gamma_0 + \sum_{j=1}^{j=N} u_j^n \gamma_j \quad (5.14)$$

Siendo:

$$\gamma_0 = \sum_{j=1}^{j=4} M(4,i)c_i \quad \gamma_j = \sum_{j=1}^{j=4} M(4,i)d_{ji} \quad (5.15)$$

Hay que destacar que tanto i como j son subíndices mudos, en virtud de además se cumple que:

$$\gamma_0 = \sum_{j=1}^{j=4} \gamma_j \quad (5.16)$$

Por otro lado en la nomenclatura utilizada los subíndices marcan la parte espacial y los superíndices la temporal. Así pues teniendo en cuenta la Ecuación 4.108 se tiene que:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = \frac{u_0^{n-1} - 2u_0^n + u_0^{n+1}}{(\Delta t)^2} \quad (5.17)$$

Substituyendo la Ecuación 5.14 y la Ecuación 5.17 en la Ecuación 5.9 se obtiene la siguiente ecuación:

$$EI \left(-u_0^n \gamma_0 + \sum_{j=1}^{j=N} u_j^n \gamma_j \right) + m \left(\frac{u_0^{n-1} - 2u_0^n + u_0^{n+1}}{(\Delta t)^2} \right) = p(x_0, t) \quad (5.18)$$

Y operando se obtiene el esquema explícito en Diferencias Finitas Generalizadas:

$$u_0^{n+1} = \frac{(\Delta t)^2}{m} \left[p(x_0, t) + EI \left(u_0^n \gamma_0 - \sum_{j=1}^{j=N} u_j^n \gamma_j \right) \right] + 2u_0^n - u_0^{n-1} \quad (5.19)$$

Las condiciones iniciales teniendo en cuenta la Ecuación 5.10 se expresarían de la siguiente forma:

$$u_0^0 = g(x_0) \quad (5.20)$$

Por otro lado y teniendo en cuenta la Ecuación 5.10 y la Ecuación 4.110 se impone la condición inicial de velocidad, esto es:

$$\frac{u_0^1 - u_0^{-1}}{2\Delta t} = h(x_0) \rightarrow u_0^{-1} = u_0^1 - 2\Delta t h(x_0) \quad (5.21)$$

Ahora se imponen las condiciones de contorno, así pues para el caso de viga simplemente apoyada, según la Ecuación 5.11 se tiene que en los nodos de los extremos de la viga se cumple que:

$$u_0^0 = 0 \quad (5.22)$$

Para la segunda condición de contorno se hará uso de diferencias finitas clásicas, para ello se añadirá un nodo que, llamaremos nodo ficticio $u_{q^*}^n$, que se encontrará a la misma distancia del nodo del apoyo que el nodo de la viga más cercano a este u_q^n , ver Figura 5.3:

$$\frac{u_{q^*}^n - 2u_0^n + u_q^n}{(\Delta x)^2} = 0 \rightarrow u_{q^*}^n = -u_q^n \quad (5.23)$$

Si en vez de un apoyo se tratase de un empotramiento la segunda condición, giro nulo en el extremo, se transformaría en lo siguiente:

$$\frac{u_{q^*}^n - u_q^n}{2\Delta x} = 0 \rightarrow u_{q^*}^n = u_q^n \quad (5.24)$$



Figura 5.3: Esquema de los nodos de la viga con los nodos ficticios

5.3. Convergencia, consistencia y estabilidad del método

Al haber obtenido una ecuación en diferencias finitas explícita en el tiempo, es necesario demostrar la convergencia del método, es decir, que la ecuación en diferencias finitas se aproxima a la solución cuando los incrementos disminuyen, y el número de iteraciones tiende a infinito.

De acuerdo con el teorema de equivalencia de Lax un esquema en diferencias finitas explícito en el tiempo, consistente y bien planteado,¹ es convergente si y sólo si es estable, luego se comprobarán estas condiciones.

5.3.1. Consistencia

El esquema en diferencias finitas será consistente si se aproxima a la solución cuando los incrementos disminuyen, o lo que es lo mismo que el error tiende a cero cuando Δt e Δh tienden también a cero.

Es decir dicho de otro modo:

Un esquema en diferencias finitas es consistente con un problema diferencial cuando el error de truncamiento local se anula en el límite de incrementos nulos.

Luego se comenzará por calcular los errores cometidos tanto en el truncamiento espacial como en el temporal.

Para la parte temporal de acuerdo con la Ecuación 4.106 sumando ambas ecuaciones se tiene:

$$U(t_1 + \Delta t) + U(t_1 - \Delta t) = 2U(t_1) + \frac{2(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 U(t_1)}{\partial t^2} + \frac{2(\Delta t)^4}{4!} \frac{\partial^4 U(t_1)}{\partial t^4} + \dots \tag{5.25}$$

¹Problema bien planteado: Dado un problema de valor inicial o de Cauchy se dice que el problema está bien planteado si este admite solución única y dependiente de forma continua de sus valores iniciales.

Y despejando la segunda derivada respecto del tiempo se llega a:

$$\frac{\partial^2 U(t_1)}{\partial t^2} = \frac{U(t_1 + \Delta t) - 2U(t_1) + U(t_1 - \Delta t)}{(\Delta t)^2} - \frac{(\Delta t)^2}{12} \frac{\partial^4 U(t_1)}{\partial t^4} + \Theta [(\Delta t)^4] \quad (5.26)$$

Así pues el error cometido en la parte temporal de la ecuación con el truncamiento realizado es igual a:

$$TE_t = -\frac{(\Delta t)^2}{12} \frac{\partial^4 U(t_1)}{\partial t^4} + \Theta [(\Delta t)^4] \quad (5.27)$$

Por otro lado se analiza el error de truncamiento cometido en la parte espacial de la ecuación, para ello haremos un planteamiento similar, si al desarrollo completo de la serie de Taylor le resta el truncamiento realizado en la Ecuación 4.67 se puede llegar a la siguiente expresión:

$$\mathbf{TE}_x = \mathbf{D}_U - \mathbf{D}_u = \mathbf{A}^{-1} (\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{b}) \quad (5.28)$$

En donde \mathbf{D}_U es la solución exacta de las derivadas parciales y $\hat{\mathbf{b}}$ es el vector de términos independientes del sistema con el desarrollo completo de la serie de Taylor, esto es:

$$\hat{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{i=N} \left(U_i - U_0 - \frac{h_i^5}{5!} \frac{\partial^5 U_0}{\partial x^5} - \frac{h_i^6}{6!} \frac{\partial^6 U_0}{\partial x^6} - \dots \right) w^2 h_i \\ \sum_{i=1}^{i=N} \left(U_i - U_0 - \frac{h_i^5}{5!} \frac{\partial^5 U_0}{\partial x^5} - \frac{h_i^6}{6!} \frac{\partial^6 U_0}{\partial x^6} - \dots \right) w^2 \frac{h_i^2}{2} \\ \sum_{i=1}^{i=N} \left(U_i - U_0 - \frac{h_i^5}{5!} \frac{\partial^5 U_0}{\partial x^5} - \frac{h_i^6}{6!} \frac{\partial^6 U_0}{\partial x^6} - \dots \right) w^2 \frac{h_i^3}{6} \\ \sum_{i=1}^{i=N} \left(U_i - U_0 - \frac{h_i^5}{5!} \frac{\partial^5 U_0}{\partial x^5} - \frac{h_i^6}{6!} \frac{\partial^6 U_0}{\partial x^6} - \dots \right) w^2 \frac{h_i^4}{24} \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

Teniendo en cuenta la Ecuación 4.72 y operando se tiene que:

$$\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{i=N} \left(-\frac{h_i^5}{5!} \frac{\partial^5 U_0}{\partial x^5} - \frac{h_i^6}{6!} \frac{\partial^6 U_0}{\partial x^6} - \dots \right) w^2 h_i \\ \sum_{i=1}^{i=N} \left(-\frac{h_i^5}{5!} \frac{\partial^5 U_0}{\partial x^5} - \frac{h_i^6}{6!} \frac{\partial^6 U_0}{\partial x^6} - \dots \right) w^2 \frac{h_i^2}{2} \\ \sum_{i=1}^{i=N} \left(-\frac{h_i^5}{5!} \frac{\partial^5 U_0}{\partial x^5} - \frac{h_i^6}{6!} \frac{\partial^6 U_0}{\partial x^6} - \dots \right) w^2 \frac{h_i^3}{6} \\ \sum_{i=1}^{i=N} \left(-\frac{h_i^5}{5!} \frac{\partial^5 U_0}{\partial x^5} - \frac{h_i^6}{6!} \frac{\partial^6 U_0}{\partial x^6} - \dots \right) w^2 \frac{h_i^4}{24} \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

Como en la ecuación resuelta sólo interviene la derivada de 4^o orden se va a tener en cuenta el error espacial cometido en esta derivada, esto es:

$$\mathbf{TE}_x(4) = \mathbf{D}_U(4) - \mathbf{D}_u(4) = \mathbf{A}_{4,j}^{-1} (\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{b}) \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (5.31)$$

Teniendo en cuenta la matriz \mathbf{A} se puede observar que el grado de su determinante es $h_i^p w^q$ en donde $p = 20, q = 8$, los grados de los elementos $(\mathbf{A}^d)_{4,j}^T$ con $j = 1, 2, 3, 4$ son $h_i^r w^t$ en donde $r = 15, 14, 13, 12$ y $t = 6$, luego los grados de la cuarta fila de la matriz inversa $\mathbf{A}_{4,j}^{-1}$ con $j = 1, 2, 3, 4$ serán $h_i^s w^v$ en donde $s = -5, -6, -7, -8$ y $v = -2$. Así pues al hacer el producto $\mathbf{A}_{4,j}^{-1} (\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{b})$ se obtiene un polinomio en h de al menos grado 1.

Esto es:

$$\begin{aligned} TE_x = & A_{41}^{-1} \sum_{i=1}^{i=N} \left(-\frac{h_i^5}{5!} \frac{\partial^5 U_0}{\partial x^5} - \frac{h_i^6}{6!} \frac{\partial^6 U_0}{\partial x^6} - \dots \right) w^2 h_i + \\ & + A_{42}^{-1} \sum_{i=1}^{i=N} \left(-\frac{h_i^5}{5!} \frac{\partial^5 U_0}{\partial x^5} - \frac{h_i^6}{6!} \frac{\partial^6 U_0}{\partial x^6} - \dots \right) w^2 \frac{h_i^2}{2} + \\ & + A_{43}^{-1} \sum_{i=1}^{i=N} \left(-\frac{h_i^5}{5!} \frac{\partial^5 U_0}{\partial x^5} - \frac{h_i^6}{6!} \frac{\partial^6 U_0}{\partial x^6} - \dots \right) w^2 \frac{h_i^3}{6} + \\ & + A_{44}^{-1} \sum_{i=1}^{i=N} \left(-\frac{h_i^5}{5!} \frac{\partial^5 U_0}{\partial x^5} - \frac{h_i^6}{6!} \frac{\partial^6 U_0}{\partial x^6} - \dots \right) w^2 \frac{h_i^4}{24} \end{aligned} \quad (5.32)$$

Finalmente sumando la Ecuación 5.27 y la Ecuación 5.32 se obtiene la siguiente expresión:

$$TTE = TE_t + TE_x = -\frac{(\Delta t)^2}{12} \frac{\partial^4 U(t_1)}{\partial t^4} + \Theta [(\Delta t)^4] + \Pi [h] \quad (5.33)$$

En donde el grado de $\Pi [h]$ es igual o mayor que 1, haciendo el límite cuando h e Δt tienden a cero se llega a:

$$\lim_{(h, \Delta t) \rightarrow (0,0)} TTE = 0 \quad (5.34)$$

Con lo que queda demostrada la consistencia de la aproximación en diferencias finitas generalizadas.

5.3.2. Estabilidad

El siguiente paso para asegurar la convergencia es demostrar la *estabilidad*, estableciendo un criterio en términos de paso temporal para asegurar dicha estabilidad.

Existen diversos criterios para determinar la estabilidad de una ecuación diferencial en derivadas parciales. Entre ellos, el criterio de Von Neumann es el más fácil de aplicar para determinar si un método de integración es estable. Consiste en realizar una descomposición armónica de la solución aproximada de la forma:

$$u_0^n = \varepsilon^n \exp i\kappa x_0 \quad u_j^n = \varepsilon^n \exp i\kappa x_j \quad (5.35)$$

En donde κ representa el número de onda, que es el número de veces que la onda vibra en la unidad de distancia, se define como la inversa de la longitud de onda, e $i = \sqrt{-1}$. Por otro lado ε se conoce como coeficiente de amplificación, si $|\varepsilon| \geq 1$ la solución crecerá con el tiempo y el método es inestable. En caso contrario, la solución disminuye con el tiempo y el sistema es estable. Si se substituye la Ecuación 5.35 dentro de la Ecuación 5.19 se obtiene la siguiente expresión:

$$\varepsilon^{n+1} \exp i\kappa x_0 = \frac{(\Delta t)^2}{m} EI \left(\varepsilon^n \exp i\kappa x_0 \gamma_0 - \sum_{j=1}^{j=N} \varepsilon^n \exp i\kappa x_j \gamma_j \right) + 2\varepsilon^n \exp i\kappa x_0 - \varepsilon^{n-1} \exp i\kappa x_0 \quad (5.36)$$

Dividiendo ambos miembros de la ecuación por $\varepsilon^n \exp i\kappa x_0$ y teniendo en cuenta que $h_j = x_j - x_0$ se llega a la siguiente expresión:

$$\varepsilon = \frac{(\Delta t)^2}{m} EI \left(\gamma_0 - \sum_{j=1}^{j=N} \varepsilon^n \exp i\kappa h_j \gamma_j \right) + 2 - \varepsilon^{-1} \quad (5.37)$$

En donde operando y teniendo en cuenta que $\exp i\kappa h_j = \cos \kappa h_j + i \sin \kappa h_j$ se obtiene:

$$\varepsilon^2 - \left[A (\Delta t)^2 \left(\gamma_0 - \sum_{j=1}^{j=N} (\cos \kappa h_j + i \sin \kappa h_j) \gamma_j \right) + 2 \right] \varepsilon + 1 = 0 \quad (5.38)$$

En donde se ha llamado $A = \frac{EI}{m}$. Resolviendo la ecuación de 2º grado se llega a:

$$\varepsilon = -b \pm \sqrt{b^2 - 1} \quad (5.39)$$

En donde:

$$b = \frac{A(\Delta t)^2}{2} \left(\gamma_0 - \sum_{j=1}^{j=N} (\cos \kappa h_j + i \sin \kappa h_j) \gamma_j \right) + 1 \quad (5.40)$$

Por otro lado, y teniendo en cuenta la Ecuación 5.16, b se puede expresar de la siguiente forma:

$$b = 1 + \frac{A(\Delta t)^2}{2} \left(\sum_{j=1}^{j=N} (1 - \cos \kappa h_j) \gamma_j - i \frac{A(\Delta t)^2}{2} \sum_{j=1}^{j=N} \sin \kappa h_j \gamma_j \right) + 1 \quad (5.41)$$

La condición de estabilidad obliga a:

$$\left| -b \pm \sqrt{b^2 - 1} \right| \leq 1 \quad (5.42)$$

Operando entre la Ecuación 5.41 y la Ecuación 5.41 y simplificando aplicando criterios conservadores se llega al criterio de estabilidad:

$$\Delta t \leq \frac{1}{4\sqrt{A|\gamma_0|}} \quad (5.43)$$

5.4. Irregularidad de la estrella y estabilidad

En este apartado se va a definir un índice de regularidad para cada una de las estrellas del dominio *IIS* y un índice de regularidad para la nube de nodos *IIC*.

En primer lugar hay que tener en cuenta que el coeficiente γ_0 , que aparece en el criterio de estabilidad Ecuación 5.43, depende de los siguientes factores:

- El número de nodos de la estrella.
- Las coordenadas de cada nodo respecto del nodo central de la estrella.
- La función de ponderación elegida.

La Ecuación 5.43 resulta ser sólo función de las coordenadas de los nodos respecto del nodo central de la estrella.

Sea τ_l la media de las distancias de los nodos de la estrella l al nodo central y sea τ la media de todas las τ_i de la malla, una vez discretizado el dominio se define:

$$\gamma_0 = \frac{\bar{\gamma}_0}{\tau^4} \quad (5.44)$$

Así pues la Ecuación 5.43 se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\Delta t \leq \frac{\tau^2}{4\sqrt{A|\bar{\gamma}_0|}} \quad (5.45)$$

Para el caso de malla regular con 4 nodos por estrella la Ecuación 5.45 queda de la siguiente forma:

$$\Delta t \leq \frac{\sqrt{2}\tau^2}{18\sqrt{3A}} \quad (5.46)$$

Multiplicando el lado derecho de la Ecuación 5.46 por el factor:

$$\frac{9\sqrt{3}}{2\sqrt{2|\bar{\gamma}_0|}} \quad (5.47)$$

Se obtiene de nuevo la Ecuación 5.43, así pues se define para cada una de las estrellas del dominio el índice de regularidad según:

$$IIS = \frac{9\sqrt{3}}{2\sqrt{2|\bar{\gamma}_0|}} \quad (5.48)$$

El cual toma valores entre 0 y 1, tomando el valor de 1 para el caso de la estrella regular, si este índice decrece entonces el valor absoluto de $\bar{\gamma}_0$ crece y de acuerdo con la Ecuación 5.43 el paso temporal decrece.

El índice de irregularidad de la nube de nodos IIC es igual al mínimo valor de todos los IIS de cada una de las estrellas.

5.5. Aplicaciones

A continuación se presentan algunas aplicaciones a la resolución de vigas sometidas a vibraciones.

Se va a discretizar una viga en un número finito de nodos, de cinco formas distintas, en un primer lugar con una malla regular, y en segundo, tercero, cuarto y quinto con mallas irregulares con índices de irregularidad decrecientes, esto es:



Figura 5.4: Malla regular 21 nodos. $IIC = 1$



Figura 5.5: Malla irregular 21 nodos. $IIC = 0,96$

Como función de ponderación se va a utilizar la siguiente:

$$w(h_j) \leq \frac{1}{4|h_j|^3} \tag{5.49}$$

El error global exacto cometido se puede calcular con la expresión:

$$Error = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=N} [sol(i) - exac(i)]^2}{N}} \tag{5.50}$$

5.5.1. Vibraciones transversales en una viga simplemente apoyada

Se resuelve la siguiente ecuación diferencial de la viga vibrando libremente:

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{\pi^4} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} = 0 \quad x \in (0,1) \quad t > 0 \tag{5.51}$$

Con las condiciones de contorno siguientes:

$$\begin{cases} U(0,t) = 0 \\ U(1,t) = 0 \end{cases} \tag{5.52}$$

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0 \\ \left. \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} \right|_{x=1} = 0 \end{cases} \tag{5.53}$$

Con las condiciones iniciales siguientes:

$$\begin{cases} U(x,0) = 0 \\ \left. \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} \right|_{t=0} = \sin \pi x \end{cases} \tag{5.54}$$



Figura 5.6: Malla irregular 21 nodos. $IIC = 0,78$



Figura 5.7: Malla irregular 21 nodos. $IIC = 0,62$

La solución exacta de la Ecuación 5.51 es:

$$U(x, t) = \sin \pi x \sin t \quad (5.55)$$

En el Cuadro 5.1 de pueden ver los errores globales cometidos en la resolución de la Ecuación 5.51 sobre el dominio Figura 5.4 mediante DFG para diferentes pasos temporales:

Δt	Error Global
0,005	0,00276
0,002	0,00109
0,001	0,00017
0,0005	0,00002

Cuadro 5.1: Influencia del paso temporal en el error global

En el Cuadro 5.2 se puede ver el error global cometido en la resolución de la Ecuación 5.51 sobre los dominios de las Figuras 5.5, 5.6, 5.7 y 5.8 mediante DFG para un $\Delta t = 0,001$.

Por último en la Figura 5.9 se muestra la solución gráfica en el último paso, para un paso temporal $\Delta t = 0,005$ el número de pasos es $n = 1000$ y sobre el dominio Figura 5.4.

A continuación se resuelve la Ecuación 5.51 sobre la malla regular Figura. 5.4 y con las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{cases} U(x, 0) = 0 \\ \left. \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 1 & x = 0, 5 \\ \left. \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 & x \neq 0, 5 \end{cases} \quad (5.56)$$



Figura 5.8: Malla irregular 21 nodos. $IIC = 0,46$

IIC	Error Global
0,96	0,00107
0,78	0,00295
0,62	0,00534
0,46	0,00903

Cuadro 5.2: Influencia del índice de regularidad en el error global

Cuya solución exacta es:

$$U(x, t) = 2 \left(\sin \pi x \sin t - \frac{1}{9} \sin 3\pi x \sin 9t + \frac{1}{25} \sin 5\pi x \sin 25t - \dots \right) \quad (5.57)$$

En el Cuadro 5.3 se puede ver el error global cometido para distinto número de pasos y para $\Delta t = 0,001$.

n	Error Global
100	0,001628
200	0,001700
500	0,001816
1000	0,002252

Cuadro 5.3: Error global frente al número de pasos

Por último en las figuras 5.10, 5.11, 5.12 y 5.13 se muestra la solución gráfica en el último paso para un paso temporal $\Delta t = 0,001$ el número de pasos $n = 100$, $n = 200$, $n = 500$ y $n = 1000$ respectivamente, sobre el dominio Figura 5.4.

5.5.2. Vibraciones forzadas en una viga simplemente apoyada

Se resuelve la siguiente ecuación diferencial de la viga vibrando libremente:

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{\pi^4} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} = 15 \sin 2\pi x \sin t \quad x \in (0, 1) \quad t > 0 \quad (5.58)$$

Con las condiciones de contorno siguientes:

$$\begin{cases} U(0, t) = 0 \\ U(1, t) = 0 \end{cases} \quad (5.59)$$

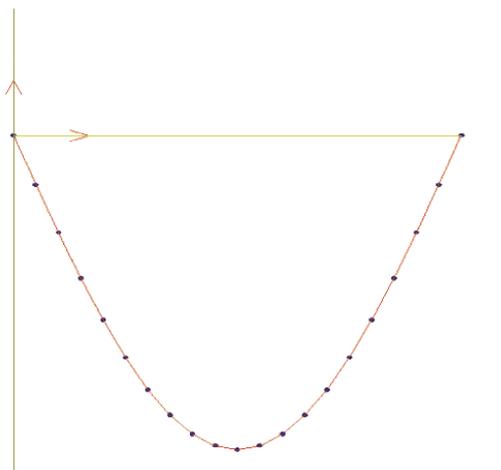


Figura 5.9: Solución aproximada en el último paso. $\Delta t = 0,005$

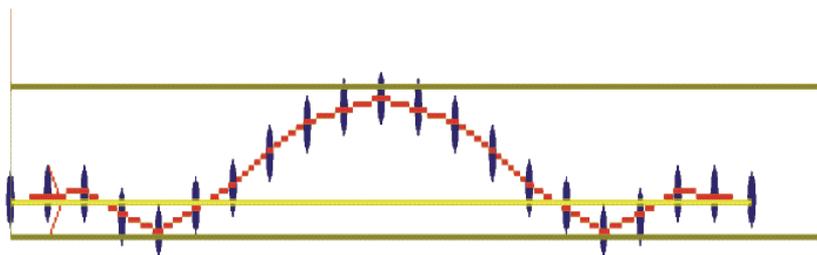


Figura 5.10: Solución aproximada en el último paso $n = 100$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0 \\ \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=1} = 0 \end{cases} \quad (5.60)$$

Con las condiciones iniciales siguientes:

$$\begin{cases} U(x,0) = 0 \\ \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} \Big|_{t=0} = \sin 2\pi x + \sin \pi x \end{cases} \quad (5.61)$$

La solución exacta de la Ecuación 5.58 es:

$$U(x,t) = (\sin 2\pi x + \sin \pi x) \sin t \quad (5.62)$$

En el Cuadro 5.4 de puede ver el error global cometido en la resolución de la Ecuación 5.58 sobre el dominio Figura 5.4 mediante DFG para diferentes pasos temporales:

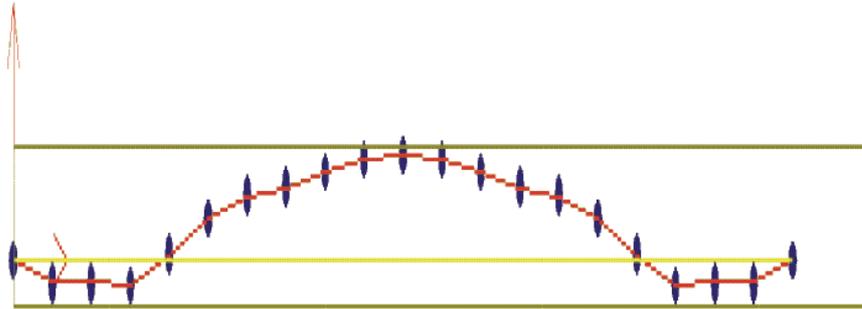


Figura 5.11: Solución aproximada en el último paso $n = 200$

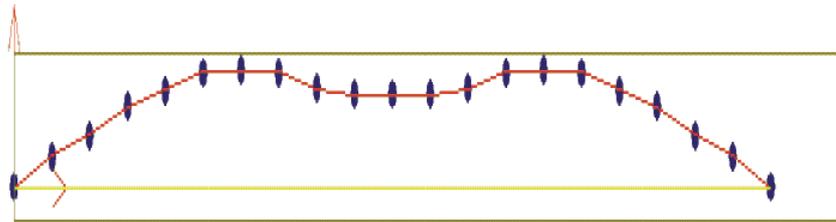


Figura 5.12: Solución aproximada en el último paso $n = 500$

En el Cuadro 5.5 se puede ver el error global cometido en la resolución de la Ecuación 5.58 sobre los dominios Fig. 5.5, 5.6, 5.7 y 5.8 mediante DFG para $\Delta t = 0,001$

Por último en la Figura 5.14 se muestra la solución gráfica en el último paso para un paso temporal $\Delta t = 0,005$ el número de pasos $n = 1000$ y sobre el dominio Figura 5.4.

5.5.3. Vibraciones transversales en una viga biempotrada

Se resuelve la siguiente ecuación diferencial de la viga vibrando libremente:

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{4,73^4} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} = 0 \quad x \in (0, 1) \quad t > 0 \tag{5.63}$$

Con las condiciones de contorno siguientes:

$$\begin{cases} U(0, t) = 0 \\ U(1, t) = 0 \end{cases} \tag{5.64}$$

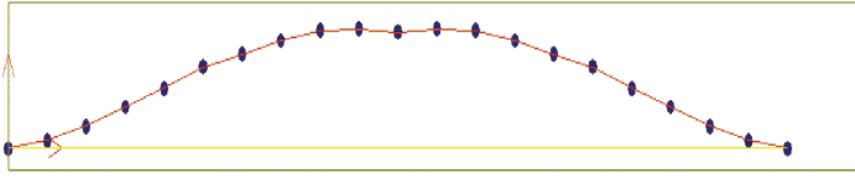


Figura 5.13: Solución aproximada en el último paso $n = 1000$

Δt	Error Global
0,005	0,01025
0,002	0,00987
0,001	0,00625
0,0005	0,00126

Cuadro 5.4: Influencia del paso temporal en el error global

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0 \\ \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=1} = 0 \end{cases} \quad (5.65)$$

Con las condiciones iniciales siguientes:

$$\begin{cases} U(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} \Big|_{t=0} = \cos 4,73x - \cosh 4,73x - 0,982501 (\sin 4,73x - \sinh 4,73x) \end{cases} \quad (5.66)$$

La solución exacta de la Ecuación 5.63 es:

$$U(x, t) = [\cos 4,73x - \cosh 4,73x - 0,982501 (\sin 4,73x - \sinh 4,73x)] \sin t \quad (5.67)$$

En el Cuadro 5.6 de puede ver el error global cometido en la resolución de la Ecuación 5.63 sobre el dominio Figura 5.4 mediante DFG para diferentes pasos temporales:

En el Cuadro 5.7 se puede ver el error global cometido en la resolución de la Ecuación 5.63 sobre los dominios Fig. 5.5, 5.6, 5.7 y 5.8 mediante DFG para $\Delta t = 0,001$.

Por último en la Figura 5.15 se muestra la solución gráfica en el último paso para un paso temporal $\Delta t = 0,005$ el número de pasos $n = 1000$ y sobre el dominio Figura 5.4.

<i>IIC</i>	Error Global
0,96	0,00744
0,78	0,00751
0,62	0,01960
0,46	0,04496

Cuadro 5.5: Influencia del índice de regularidad en el error global

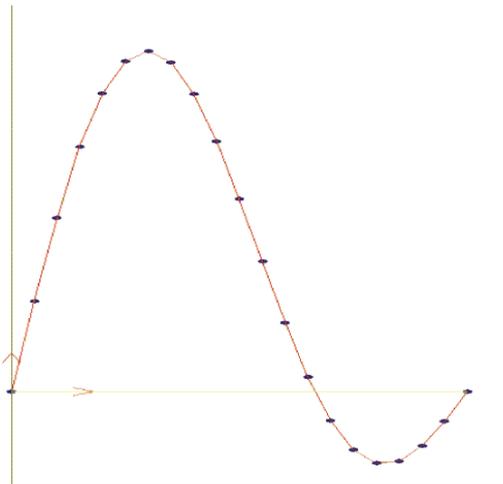


Figura 5.14: Solución aproximada en el último paso $n = 1000$, $\Delta t = 0,005$

5.5.4. Vibraciones transversales en una viga biempotrada

Se resuelve la siguiente ecuación diferencial de la viga vibrando libremente:

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{1,875^4} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} = 0 \quad x \in (0, 1) \quad t > 0 \tag{5.68}$$

Con las condiciones de contorno siguientes:

$$\begin{cases} U(0, t) = 0 \\ U(1, t) = 0 \end{cases} \tag{5.69}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \\ \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=1} = 0 \\ \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x^3} \Big|_{x=1} = 0 \end{cases} \tag{5.70}$$

Con las condiciones iniciales siguientes:

$$\begin{cases} U(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \Big|_{t=0} = \cos 1,875x - \cosh 1,875x - 0,7340327 (\sin 1,875x - \sinh 1,875x) \end{cases}$$

Δt	Error Global
0,005	0,04649
0,002	0,01960
0,001	0,00798
0,0005	0,00216

Cuadro 5.6: Influencia del paso temporal en el error global

IIC	Error Global
0,96	0,00419
0,78	0,00423
0,62	0,00763
0,46	0,00781

Cuadro 5.7: Influencia del índice de regularidad en el error global

(5.71)

La solución exacta de la Ecuación 5.68 es:

$$U(x, t) = [\cos 1,875x - \cosh 1,875x - 0,7340327 (\sin 1,875x - \sinh 1,875x)] \sin t \quad (5.72)$$

Por último en la Figura 5.16 se muestra la solución gráfica en el último paso para un paso temporal $\Delta t = 0,001$ el número de pasos $n = 1000$ y sobre el dominio Figura 5.4.

5.5.5. Vibraciones transversales en una viga empotrada - apoyada

Se resuelve la siguiente ecuación diferencial de la viga vibrando libremente:

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{3,9274} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} = 0 \quad x \in (0, 1) \quad t > 0 \quad (5.73)$$

Con las condiciones de contorno siguientes:

$$\begin{cases} U(0, t) = 0 \\ U(1, t) = 0 \end{cases} \quad (5.74)$$

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \\ \left. \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=1} = 0 \end{cases} \quad (5.75)$$

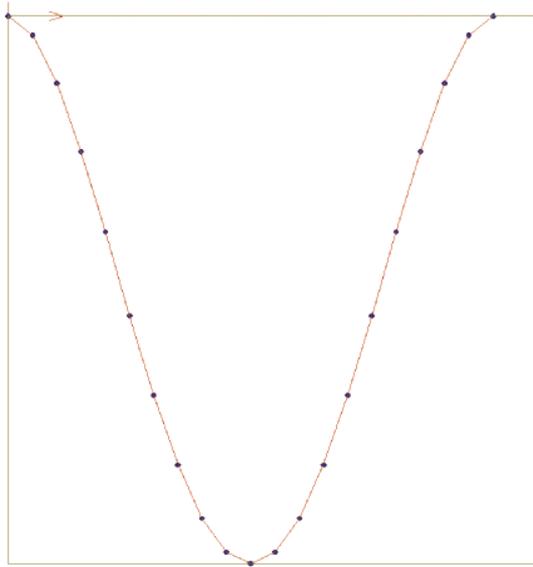


Figura 5.15: Solución aproximada en el último paso $n = 1000$, $\Delta t = 0,005$

Con las condiciones iniciales siguientes:

$$\begin{cases} U(x, 0) = 0 \\ \left. \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} \right|_{t=0} = 3,240366 [\cos 7,069x - \cosh 7,069x - 1,000002 (\sin 7,069x - \sinh 7,069x)] \end{cases} \quad (5.76)$$

La solución exacta de la Ecuación 5.73 es:

$$U(x, t) = [\cos 7,069x - \cosh 7,069x - 1,000002 (\sin 7,069x - \sinh 7,069x)] \sin 3,240366t \quad (5.77)$$

Por último en la Figura 5.17 se muestra la solución gráfica en el último paso para un paso temporal $\Delta t = 0,001$ el número de pasos $n = 1000$ y sobre el dominio Figura 5.4.

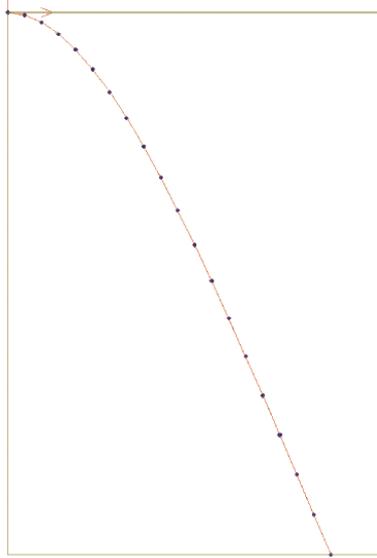


Figura 5.16: Solución aproximada en el último paso $n = 1000$, $\Delta t = 0,001$

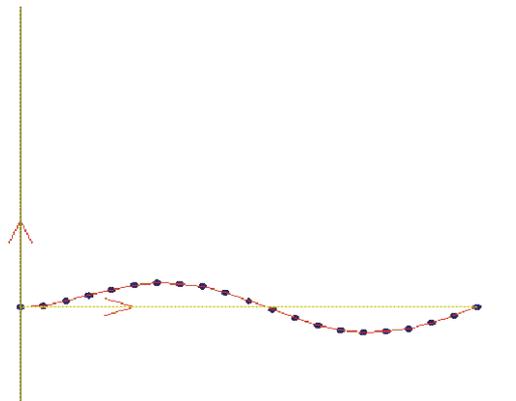


Figura 5.17: Solución aproximada en el último paso $n = 1000$, $\Delta t = 0,001$

6 Esquema en Diferencias Finitas Generalizadas para placas delgadas

A continuación se va a aplicar el Método de Diferencias finitas Generalizadas para la resolución de problemas elasto-dinámicos en placas delgadas.

6.1. Ecuación diferencial de la placa delgada según la teoría de Kirchhoff

Una placa se define como un elemento estructural en el que una de las dimensiones, el espesor, es mucho menor que las otras dos, y sobre la que actúan cargas normales al plano medio y momentos de eje comprendido en dicho plano.

Las placas de Kirchhoff son válidas para relación de espesores/ancho menores o iguales a 0,1.

Hipótesis básicas:

- Las normales al plano medio de la placa se mantienen rectas tras la deformación, y los puntos del plano medio únicamente tienen movimiento vertical.
- Dichas normales se mantienen ortogonales a la deformada del plano medio de la placa.
- La tensión normal al plano medio de la placa puede considerarse despreciable, esto es, $\sigma_z = 0, 0$.

Del equilibrio dinámico de un elemento diferencial de una placa delgada de espesor t , ver Figura 6.1, se obtiene:

Equilibrio de momentos respecto al eje y :

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (6.1)$$

Equilibrio de momentos respecto al eje x :

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \quad (6.2)$$

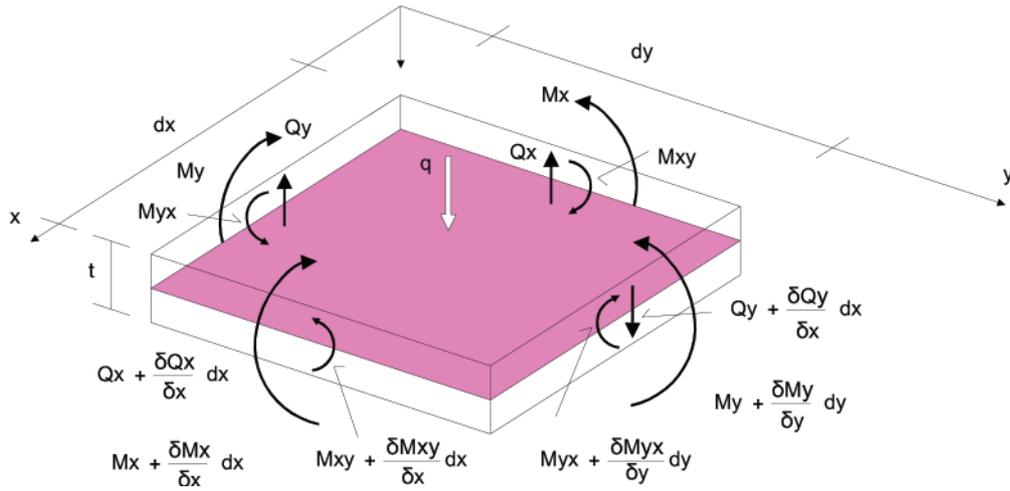


Figura 6.1: Equilibrio de un elemento diferencial de placa delgada

Equilibrio de fuerzas verticales respecto al eje z:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + f_I + q = 0 \quad (6.3)$$

Fuerzas de inercia:

$$f_I = m \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (6.4)$$

Substituyendo la Ecuación 6.1, Ecuación 6.2 y la Ecuación 6.4 dentro de la Ecuación 6.3 se obtiene:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + m \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + q = 0 \quad (6.5)$$

Por otro lado teniendo en cuenta las relaciones existentes entre momentos flectores y desplazamientos verticales se tiene que:

$$M_x = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (6.6)$$

$$M_y = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left(\nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (6.7)$$

$$M_{xy} = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}(1-\nu)\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} \quad (6.8)$$

Finalmente introduciendo la Ecuación 6.6, Ecuación 6.7 y Ecuación 6.8 dentro de la Ecuación 6.5 se obtiene la ecuación diferencial dinámica de la placa delgada de Kirchhoff, de lados a y b y espesor t .

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} + m\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\frac{q(x, y, t)}{D} \quad (6.9)$$

En donde $q(x, y, t)$ es una carga superficial perpendicular al plano de la placa, y:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (6.10)$$

A esta ecuación diferencial se le añadirán igualmente unas condiciones iniciales, desplazamiento y velocidad, esto es:

$$\begin{cases} U(x, y, 0) = g(x, y) & 0 < x < a \\ \left. \frac{\partial U(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = h(x, y) & 0 < y < b \end{cases} \quad (6.11)$$

Y unas condiciones de contorno, las cuales dependerán del tipo de sustentación de la placa, esto es, para una placa simplemente apoyada se impondrá la condición de desplazamientos y momentos nulos en los bordes de la placa, lo cual se expresa de la siguiente forma:

$$\begin{cases} U(0, y, t) = U(x, 0, t) = U(a, y, t) = U(x, b, t) = 0 \\ M_x(x, 0, t) = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right|_{y=0} = 0 \\ M_y(0, y, t) = \left. \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right|_{x=0} = 0 \\ M_x(x, b, t) = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right|_{y=b} = 0 \\ M_y(a, y, t) = \left. \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right|_{x=a} = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} t > 0 \\ 0 < x < a \quad 0 < y < b \end{matrix} \quad (6.12)$$

Para el caso de viga empotrada se establecerá desplazamiento y giro nulo en los

bordes de la placa, esto es:

$$\left\{ \begin{array}{l} U(0, y, t) = U(x, 0, t) = U(a, y, t) = U(x, b, t) = 0 \\ \theta_x(x, 0, t) = \frac{\partial U(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \\ \theta_y(0, y, t) = \frac{\partial U(x, y, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \\ \theta_x(x, b, t) = \frac{\partial U(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0 \\ \theta_y(a, y, t) = \frac{\partial U(x, y, t)}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} t > 0 \\ 0 < x < a \quad 0 < y < b \end{array} \quad (6.13)$$

6.2. Esquema en Diferencias Finitas Generalizadas

De la Ecuación 6.9 se desprende que se necesitará la discretización espacial en 2 dimensión hasta 4º orden, así pues en la Ecuación 4.97 se particularizará para $k = 10, 12, 14$, esto es:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\mathbf{u}}(10) &= \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} = \frac{1}{l(10, 10)} \left[u_0 \sum_{i=1}^{i=14} M(10, i) c_i + \sum_{j=1}^{j=N} u_j \left(\sum_{i=1}^{i=14} M(10, i) d_{ji} \right) \right] \\ \mathbf{D}_{\mathbf{u}}(12) &= \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{1}{l(12, 12)} \left[u_0 \sum_{i=1}^{i=14} M(12, i) c_i + \sum_{j=1}^{j=N} u_j \left(\sum_{i=1}^{i=14} M(12, i) d_{ji} \right) \right] \\ \mathbf{D}_{\mathbf{u}}(14) &= \frac{\partial^4 u_0}{\partial y^4} = \frac{1}{l(14, 14)} \left[u_0 \sum_{i=1}^{i=14} M(14, i) c_i + \sum_{j=1}^{j=N} u_j \left(\sum_{i=1}^{i=14} M(14, i) d_{ji} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.14)$$

Estas expresiones se pueden simplificar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} &= -u_0 \gamma_0 + \sum_{j=1}^{j=N} u_j \gamma_j \equiv -u_0^n \gamma_0 + \sum_{j=1}^{j=N} u_j^n \gamma_j \\ \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^2 \partial y^2} &= -u_0 \vartheta_0 + \sum_{j=1}^{j=N} u_j \vartheta_j \equiv -u_0^n \vartheta_0 + \sum_{j=1}^{j=N} u_j^n \vartheta_j \\ \frac{\partial^4 u_0}{\partial y^4} &= -u_0 \varphi_0 + \sum_{j=1}^{j=N} u_j \varphi_j \equiv -u_0^n \varphi_0 + \sum_{j=1}^{j=N} u_j^n \varphi_j \end{aligned} \quad (6.15)$$

Siendo:

$$\begin{aligned}
 \gamma_0 &= \sum_{j=1}^{j=14} M(10, i)c_i & \gamma_j &= \sum_{j=1}^{j=14} M(10, i)d_{ji} \\
 \vartheta_0 &= \sum_{j=1}^{j=14} M(12, i)c_i & \vartheta_j &= \sum_{j=1}^{j=14} M(12, i)d_{ji} \\
 \varphi_0 &= \sum_{j=1}^{j=14} M(14, i)c_i & \varphi_j &= \sum_{j=1}^{j=14} M(14, i)d_{ji}
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

Y cumpliéndose:

$$\begin{aligned}
 \gamma_0 &= \sum_{j=1}^{j=N} \gamma_j \\
 \vartheta_0 &= \sum_{j=1}^{j=N} \vartheta_j \\
 \varphi_0 &= \sum_{j=1}^{j=N} \varphi_j
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

Substituyendo la Ecuación 4.94 y la Ecuación 5.17 en la Ecuación 6.9 se llega a:

$$\begin{aligned}
 -u_0^n \gamma_0 + \sum_{j=1}^{j=N} u_j^n \gamma_j - 2u_0^n \vartheta_0 + \sum_{j=1}^{j=N} u_j^n \vartheta_j - u_0^n \varphi_0 + \sum_{j=1}^{j=N} u_j^n \varphi_j + \\
 + m \frac{u_0^{n-1} - 2u_0^n + u_0^{n+1}}{(\Delta t)^2} = -\frac{q(x_0, y_0, t)}{D}
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

En la cual operando se puede expresar como sigue:

$$u_0^{n+1} = \frac{(\Delta t)^2}{m} \left(u_0^n \Upsilon_0 - \sum_{j=1}^{j=N} u_j^n \Upsilon_j - \frac{q(x_0, y_0, t)}{D} \right) + 2u_0^n - u_0^{n-1} \tag{6.19}$$

En donde:

$$\begin{aligned}
 \Upsilon_0 &= \gamma_0 + 2\vartheta_0 + \varphi_0 \\
 \Upsilon_j &= \gamma_j + 2\vartheta_j + \varphi_j
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

Las condiciones iniciales, teniendo en cuenta la Ecuación 6.11 se expresarían de la siguiente forma:

$$u_0^0 = g(x_0, y_0) \tag{6.21}$$

Por otro lado se impone la condición inicial de velocidad, con su expresión en diferencias finitas clásicas, según la Ecuación 6.11 esto es:

$$\frac{u_0^1 - u_0^{-1}}{2\Delta t} = h(x_0, y_0) \rightarrow u_0^{-1} = u_0^1 - 2h(x_0, y_0)\Delta t \tag{6.22}$$

Ahora se imponen las condiciones de contorno, así pues para el caso de placa delgada simplemente apoyada, según la Ecuación 6.12 se tiene que en los nodos del contorno de la placa se cumple que:

$$u_0^n = 0 \tag{6.23}$$

Para la segunda condición de contorno se hará uso de diferencias finitas clásicas, para ello se añadirán una serie de nodos $u_{q^*}^n$, que se llamarán nodos ficticios, que se encontrará a la misma distancia del nodo del contorno que el nodo de la placa más cercano a este, ver Figura 6.2.

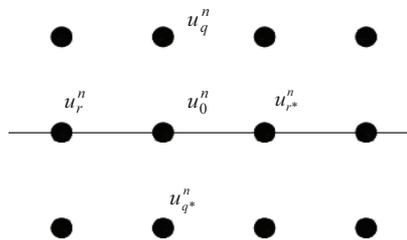


Figura 6.2: Nodos ficticios en el contorno de la placa

De tal forma que aplicando la condición de momento nulo en el contorno se obtiene:

$$M_x = \frac{u_q^n - 2u_0^n + u_{q^*}^n}{k^2} + \nu \frac{u_r^n - 2u_0^n + u_{r^*}^n}{h^2} = 0 \rightarrow \frac{u_q^n + u_{q^*}^n}{k^2} \Rightarrow u_q^n = -u_{q^*}^n \tag{6.24}$$

Del mismo modo si se tratase de placa empotrada la condición de contorno se traduciría en lo siguiente:

$$\theta_x = \frac{u_q^n - u_{q^*}^n}{2k} = 0 \rightarrow u_q^n = u_{q^*}^n \tag{6.25}$$

De igual forma se procedería para el resto de momento y giros así como nodos y contornos de la placa.

6.3. Convergencia, consistencia y estabilidad del método

De igual manera se va a calcular la convergencia del método, se verá si el problema es consistente para luego establecer la estabilidad.

6.3.1. Consistencia

Se van a calcular los errores cometidos tanto en el truncamiento espacial como en el temporal.

Para la parte temporal el error cometido está ya calculado en la Ecuación 5.27.

Por otro lado se analiza el error de truncamiento cometido en la parte espacial de la ecuación, para ello haremos un planteamiento similar, si al desarrollo completo de la serie de Taylor le resta el truncamiento realizado en la Ecuación 4.89 se puede llegar a la siguiente expresión:

$$\mathbf{TE}_x = \mathbf{D}_U - \mathbf{D}_u = \mathbf{A}^{-1} (\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{b}) \quad (6.26)$$

En donde \mathbf{D}_U es la solución exacta de las derivadas parciales y $\hat{\mathbf{b}}$ es el vector de términos independientes del sistema con el desarrollo completo de la serie de Taylor, esto es:

$$\hat{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{i=N} \left(U_i - U_0 - \frac{h_i^5}{5!} \frac{\partial^5 U_0}{\partial x^5} - \frac{h_i^4 k_i}{5!} \frac{\partial^5 U_0}{\partial x^4 \partial y} - \frac{h_i^3 k_i^2}{5!} \frac{\partial^5 U_0}{\partial x^3 \partial y^2} - \dots \right) w^2 h_i \\ \sum_{i=1}^{i=N} \left(U_i - U_0 - \frac{h_i^5}{5!} \frac{\partial^5 U_0}{\partial x^5} - \frac{h_i^4 k_i}{5!} \frac{\partial^5 U_0}{\partial x^4 \partial y} - \frac{h_i^3 k_i^2}{5!} \frac{\partial^5 U_0}{\partial x^3 \partial y^2} - \dots \right) w^2 k_i \\ \sum_{i=1}^{i=N} \left(U_i - U_0 - \frac{h_i^5}{5!} \frac{\partial^5 U_0}{\partial x^5} - \frac{h_i^4 k_i}{5!} \frac{\partial^5 U_0}{\partial x^4 \partial y} - \frac{h_i^3 k_i^2}{5!} \frac{\partial^5 U_0}{\partial x^3 \partial y^2} - \dots \right) w^2 \frac{h_i^2}{2} \\ \sum_{i=1}^{i=N} \left(U_i - U_0 - \frac{h_i^5}{5!} \frac{\partial^5 U_0}{\partial x^5} - \frac{h_i^4 k_i}{5!} \frac{\partial^5 U_0}{\partial x^4 \partial y} - \frac{h_i^3 k_i^2}{5!} \frac{\partial^5 U_0}{\partial x^3 \partial y^2} - \dots \right) w^2 h_i k_i \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{i=N} \left(U_i - U_0 - \frac{h_i^5}{5!} \frac{\partial^5 U_0}{\partial x^5} - \frac{h_i^4 k_i}{5!} \frac{\partial^5 U_0}{\partial x^4 \partial y} - \frac{h_i^3 k_i^2}{5!} \frac{\partial^5 U_0}{\partial x^3 \partial y^2} - \dots \right) w^2 \frac{k_i^4}{24} \end{pmatrix} \quad (6.27)$$

Teniendo en cuenta la Ecuación 4.94 y operando se tiene que:

$$\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{i=N} \left(-\frac{h_i^5}{5!} \frac{\partial^5 U_0}{\partial x^5} - \frac{h_i^4 k_i}{5!} \frac{\partial^5 U_0}{\partial x^4 \partial y} - \frac{h_i^3 k_i^2}{5!} \frac{\partial^5 U_0}{\partial x^3 \partial y^2} - \dots \right) w^2 h_i \\ \sum_{i=1}^{i=N} \left(-\frac{h_i^5}{5!} \frac{\partial^5 U_0}{\partial x^5} - \frac{h_i^4 k_i}{5!} \frac{\partial^5 U_0}{\partial x^4 \partial y} - \frac{h_i^3 k_i^2}{5!} \frac{\partial^5 U_0}{\partial x^3 \partial y^2} - \dots \right) w^2 k_i \\ \sum_{i=1}^{i=N} \left(-\frac{h_i^5}{5!} \frac{\partial^5 U_0}{\partial x^5} - \frac{h_i^4 k_i}{5!} \frac{\partial^5 U_0}{\partial x^4 \partial y} - \frac{h_i^3 k_i^2}{5!} \frac{\partial^5 U_0}{\partial x^3 \partial y^2} - \dots \right) w^2 \frac{h_i^2}{2} \\ \sum_{i=1}^{i=N} \left(-\frac{h_i^5}{5!} \frac{\partial^5 U_0}{\partial x^5} - \frac{h_i^4 k_i}{5!} \frac{\partial^5 U_0}{\partial x^4 \partial y} - \frac{h_i^3 k_i^2}{5!} \frac{\partial^5 U_0}{\partial x^3 \partial y^2} - \dots \right) w^2 h_i k_i \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{i=N} \left(-\frac{h_i^5}{5!} \frac{\partial^5 U_0}{\partial x^5} - \frac{h_i^4 k_i}{5!} \frac{\partial^5 U_0}{\partial x^4 \partial y} - \frac{h_i^3 k_i^2}{5!} \frac{\partial^5 U_0}{\partial x^3 \partial y^2} - \dots \right) w^2 \frac{k_i^4}{24} \end{pmatrix} \quad (6.28)$$

Como en la ecuación resuelta sólo interviene la derivada de 4º orden respecto de x , respecto de y respecto de x e y dos veces, esto corresponde con las posiciones 10ª, 12ª y 14ª, así pues:

$$\begin{aligned} \mathbf{TE}_x(10, 12, 14) &= \mathbf{D}_U(10) - \mathbf{D}_u(10) + \mathbf{D}_U(12) - \mathbf{D}_u(12) + \mathbf{D}_U(14) - \mathbf{D}_u(14) = \\ &= \mathbf{A}_{10,j}^{-1} (\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{b}) + \mathbf{A}_{12,j}^{-1} (\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{b}) + \mathbf{A}_{14,j}^{-1} (\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{b}) \\ & \quad j = 1, 2, \dots, 14 \end{aligned} \quad (6.29)$$

Teniendo en cuenta la matriz Ecuación 6.40 se puede observar que el grado de su determinante es $h_i^p k_i^h w^q$ en donde $p = h = 40$, $q = 28$, y por ejemplo el grado del elemento $(\mathbf{A}^d)_{10,1}^T$ es igual a $h_i^r k_i^n w^t$ en donde $r = 38$, $n = 37$, $q = 26$, luego el grado de $\mathbf{A}_{10,j}^{-1}$ es igual a $h_i^{-2} k_i^{-3} w^{-2}$ que multiplicando por el primer elemento del vector $\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{b}$ queda un polinomio en $h_i k_i$ de grado mayor o igual a 1, siguiendo el mismo razonamiento con todos los elementos de la Ecuación 6.29 se llega a la conclusión de que dicha ecuación está formada por polinomios en $h_i k_i$ de al menos grado 1.

Finalmente sumando la Ecuación 5.27 y la Ecuación 6.29 se obtiene la siguiente expresión:

$$TTE = TE_t + TE_x = -\frac{(\Delta t)^2}{12} \frac{\partial^4 U(t_1)}{\partial t^4} + \Theta [(\Delta t)^4] + \Pi [h, k] \quad (6.30)$$

En donde el grado de $\Pi [h]$ es igual o mayor que 1, haciendo el límite cuando h e Δt tienden a cero se llega a:

$$\lim_{(h,k,\Delta t) \rightarrow (0,0,0)} TTE = 0 \quad (6.31)$$

Con lo que queda demostrada la consistencia de la aproximación en diferencias finitas generalizadas.

6.3.2. Estabilidad

El siguiente paso para asegurar la convergencia es demostrar la estabilidad, estableciendo un criterio en términos de paso temporal para asegurar dicha estabilidad.

Aplicando de nuevo el criterio de Von Neumann para determinar la estabilidad del método se realiza una descomposición armónica de la solución aproximada de la forma:

$$u_0^n = \varepsilon^n \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0 \quad u_j^n = \varepsilon^n \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_j \quad (6.32)$$

En donde \mathbf{k} representa el vector número de onda, que es el número de veces que la onda vibra en la unidad de distancia, se define como la inversa de la longitud de onda en cada una de las direcciones.

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \end{pmatrix} \quad (6.33)$$

Y además:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_j = \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + h_j \\ y_0 + k_j \end{pmatrix} \quad \mathbf{h}_j = \begin{pmatrix} h_j \\ k_j \end{pmatrix} \quad (6.34)$$

Por otro lado, como ya se ha comentado, ε se conoce como coeficiente de amplificación, si $|\varepsilon| \geq 1$ la solución crecerá con el tiempo y el método es inestable. En caso contrario, la solución disminuye con el tiempo y el sistema es estable. Si se substituye la Ecuación 6.32 dentro de la Ecuación 6.19 se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{n+1} \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0 = & \frac{(\Delta t)^2}{m} \left(\varepsilon^n \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0 \Upsilon_0 - \sum_{j=1}^{j=N} \varepsilon^n \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_j \Upsilon_j \right) + \\ & + 2\varepsilon^n \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0 - \varepsilon^{n-1} \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (6.35)$$

Dividiendo ambos miembros de la ecuación por $\varepsilon^n \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0$ se llega a la siguiente expresión:

$$\varepsilon = \frac{(\Delta t)^2}{m} \left(\Upsilon_0 - \sum_{j=1}^{j=N} \varepsilon^j \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j \Upsilon_j \right) + 2 - \varepsilon^{n-1} \quad (6.36)$$

En donde operando y teniendo en cuenta que $\exp i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j = \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j + i \sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j$ se obtiene:

$$\varepsilon^2 - \left[\frac{(\Delta t)^2}{m} \left(\Upsilon_0 - \sum_{j=1}^{j=N} (\cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j + i \sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \Upsilon_j \right) + 2 \right] \varepsilon + 1 = 0 \quad (6.37)$$

Resolviendo la ecuación de 2º grado se llega a:

$$\varepsilon = -b \pm \sqrt{b^2 - 1}$$

En donde:

$$b = \frac{(\Delta t)^2}{2m} \left(\Upsilon_0 - \sum_{j=1}^{j=N} (\cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j + i \sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \Upsilon_j \right) + 1 \quad (6.38)$$

Por otro lado y b se puede expresar de la siguiente forma:

$$b = 1 + \frac{(\Delta t)^2}{2m} \sum_{j=1}^{j=N} (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \Upsilon_j - i \sum_{j=1}^{j=N} \sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j \Upsilon_j \quad (6.39)$$

La condición de estabilidad obliga a:

$$|-b \pm \sqrt{b^2 - 1}| \leq 1 \quad (6.40)$$

Operando entre la Ecuación 6.40 y la Ecuación 6.39 y simplificando aplicando criterios conservadores se llega al criterio de estabilidad:

$$\Delta t \leq \frac{\sqrt{m}}{4\sqrt{|\Upsilon_0|}} \quad (6.41)$$

6.4. irregularidad de la estrella y estabilidad

En este apartado se va a definir un índice de regularidad para cada una de las estrellas del dominio IIS y un índice de regularidad para la nube de nodos IIC .

En primer lugar hay que tener en cuenta que el coeficiente Υ_0 , que aparece en el criterio de estabilidad Ecuación 6.41, depende de los siguientes factores:

- El número de nodos de la estrella.
- Las coordenadas de cada nodo respecto del nodo central de la estrella.
- La función de ponderación elegida.

La Ecuación 6.41 resulta ser sólo función de las coordenadas de los nodos respecto del nodo central de la estrella.

Sea τ_l la media de las distancias de los nodos de la estrella l al nodo central y sea τ la media de todas las τ_i de la malla, una vez discretizado el dominio se define:

$$\Upsilon_0 = \frac{\bar{\Upsilon}_0}{\tau^4} \quad (6.42)$$

Así pues la Ecuación 6.41 se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\Delta t \leq \frac{\tau^2 \sqrt{m}}{4\sqrt{|\bar{\Upsilon}_0|}} \quad (6.43)$$

Para el caso de malla regular con 24 nodos por estrella el criterio Ecuación 6.43 queda de la siguiente forma:

$$\Delta t \leq \frac{9\tau^2 \sqrt{m}}{\sqrt{13} [(1 + \sqrt{2}) + 2\sqrt{5}]^2} \quad (6.44)$$

Multiplicando el lado derecho de la Ecuación 6.44 por el factor:

$$\frac{\sqrt{13} [(1 + \sqrt{2}) + 2\sqrt{5}]^2}{36\sqrt{|\bar{\Upsilon}_0|}} \quad (6.45)$$

Se obtiene de nuevo la Ecuación 6.41 , así pues se define para cada una de las estrellas del dominio el índice de regularidad según:

$$IIS = \frac{\sqrt{13} [(1 + \sqrt{2}) + 2\sqrt{5}]^2}{36\sqrt{|\bar{\Upsilon}_0|}} \quad (6.46)$$

El cual toma valores entre 0 y 1, tomando el valor de 1 para el caso de la estrella regular, si este índice decrece entonces el valor absoluto de $\bar{\Upsilon}_0$ crece, y de acuerdo con la Ecuación 6.41 el paso temporal máximo que asegura la estabilidad del método decrece.

El índice de irregularidad de la nube de nodos IIC es igual al mínimo valor de todos los IIS de cada una de las estrellas.

6.5. Aplicaciones

A continuación se presentan algunas aplicaciones a la resolución de placas delgadas sometidas a vibraciones.

Se va a discretizar una placa en un número finito de nodos, de cinco formas distintas, en un primer lugar con una malla regular, y en segundo, tercero, cuarto y quinto con mallas irregulares con índices de regularidad decrecientes, ver Figuras 6.3, 6.4, 6.5, 6.6 y 6.7.

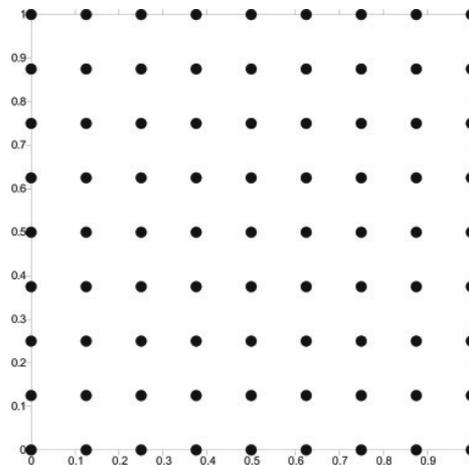


Figura 6.3: Malla regular 36 nodos $IIC = 1$

Como función de ponderación se va a utilizar la siguiente:

$$w(h_i, k_i) = \frac{1}{\sqrt{(h_j^2 + k_j^2)^3}} \quad (6.47)$$

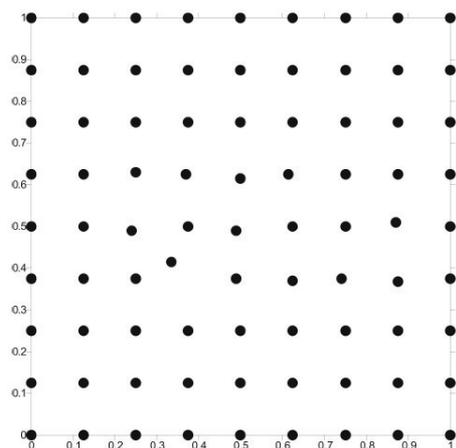


Figura 6.4: Malla irregular 36 nodos $IIC = 0,92$

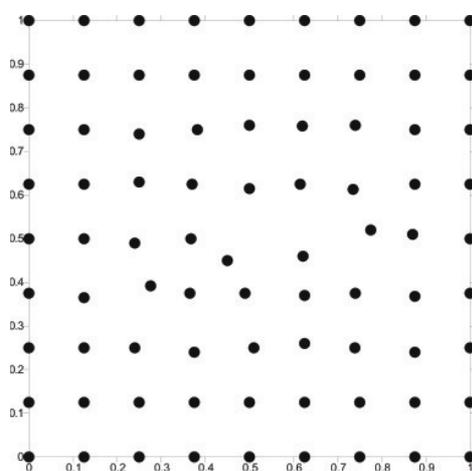


Figura 6.5: Malla irregular 36 nodos $IIC = 0,83$

El error global cometido se puede calcular con la expresión:

$$Error = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=N} [sol(i) - exac(i)]^2}{N}}$$

6.5.1. Vibraciones libres en una placa delgada apoyada

La ecuación a resolver es la siguiente:

$$\frac{1}{4\pi^4} \left[\frac{\partial^4 U(x, y, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 U(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U(x, y, t)}{\partial y^4} \right] + \frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (6.48)$$

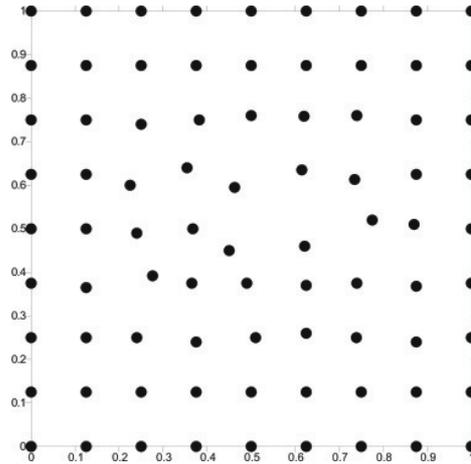


Figura 6.6: Malla irregular 36 nodos $IIC = 0,76$

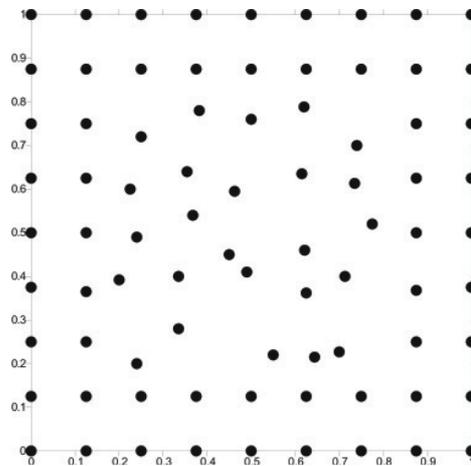


Figura 6.7: Malla irregular 36 nodos $IIC = 0,58$

Con las siguientes condiciones de contorno:

$$x, y \in [0, 1] \quad \begin{cases} U(x, y, t)|_{\Gamma} = 0 \\ \frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial y^2} \Big|_{x=0} = 0 & \frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial y^2} \Big|_{x=1} = 0 \\ \frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial x^2} \Big|_{y=0} = 0 & \frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial x^2} \Big|_{y=1} = 0 \end{cases} \quad (6.49)$$

Y las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} U(x, y, 0) = 0 \\ \frac{\partial U(x, y, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \sin \pi x \sin \pi y \end{cases} \quad (6.50)$$

La solución exacta de la ecuación en cuestión es:

$$U(x, y, t) = \sin \pi x \sin \pi y \sin t \quad (6.51)$$

En el Cuadro 6.1 se puede ver el error global cometido en la resolución de la Ecuación 6.48 sobre el dominio de la Figura 6.3 mediante DFG para diferentes pasos temporales.

Δt	Error Global
0,01	0,08254
0,005	0,03513
0,002	0,01339
0,001	0,00212

Cuadro 6.1: Influencia del paso temporal en el error global

En el Cuadro 6.2 se puede ver el error global cometido en la resolución de la Ecuación 6.48 sobre el dominio de la Figura 6.4, 6.5, 6.6 y 6.7 mediante DFG para diferentes pasos $\Delta t = 0,001$.

IIC	Error Global
0,92	0,00224
0,83	0,00224
0,76	0,00231
0,58	0,00251

Cuadro 6.2: Influencia del índice de regularidad en el error global

El Cuadro 6.3 muestra la variación del error global cometido frente al número de pasos iterados con $\Delta t = 0,001$.

n	Error Global
100	0,011220
200	0,018580
500	0,026900
1000	0,033630

Cuadro 6.3: Error global frente a número de iteraciones

Por último en la Figura 6.8 se muestra la solución gráfica en el último paso para un paso temporal $\Delta t = 0,001$ el número de pasos $n = 1000$ y sobre el dominio Figura 6.3.

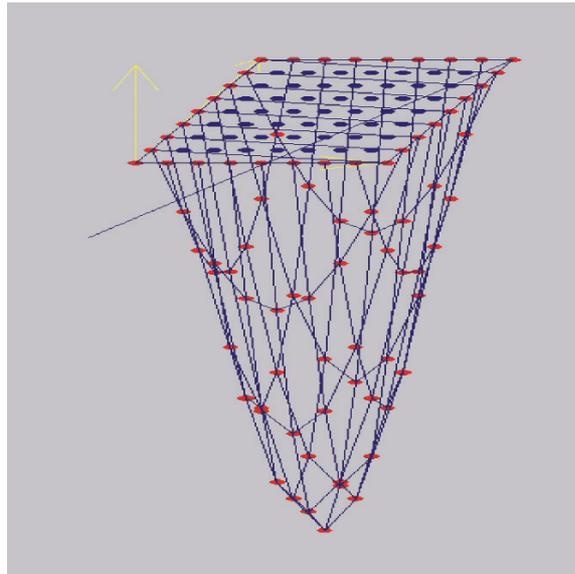


Figura 6.8: Solución aproximada en el último paso $\Delta t = 0,001$; $n = 1000$

Si ahora se cambian las condiciones iniciales asumiendo, debido por ejemplo a un impacto, una velocidad inicial en el punto $x = 0,5$ $y = 0,5$ de la placa, se tiene las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} U(x, y, 0) = 0 \\ \left. \frac{\partial U(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 1 & x = y = 0,5 \\ \left. \frac{\partial U(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 & x, y \neq 0,5 \end{cases} \quad (6.52)$$

Ahora la solución exacta de la ecuación viene dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} U(x, y, t) = 2 \left[\sin \pi x \sin \pi y \sin t - \frac{1}{9} \sin 3\pi x \sin 3\pi y \sin 9t + \right. \\ \left. + \frac{1}{25} \sin 5\pi x \sin 5\pi y \sin 25t + \dots \right] \end{aligned} \quad (6.53)$$

Las Figuras 6.9, 6.10, 6.11 y 6.12 muestran la solución aproximada de la Ecuación 6.48, con las condiciones Ecuación 6.52, y sobre el dominio discretizado con malla regular Figura 6.1 para el último paso, con un número de pasos igual a $n = 100$, $n = 200$, $n = 600$ y $n = 1200$ respectivamente.

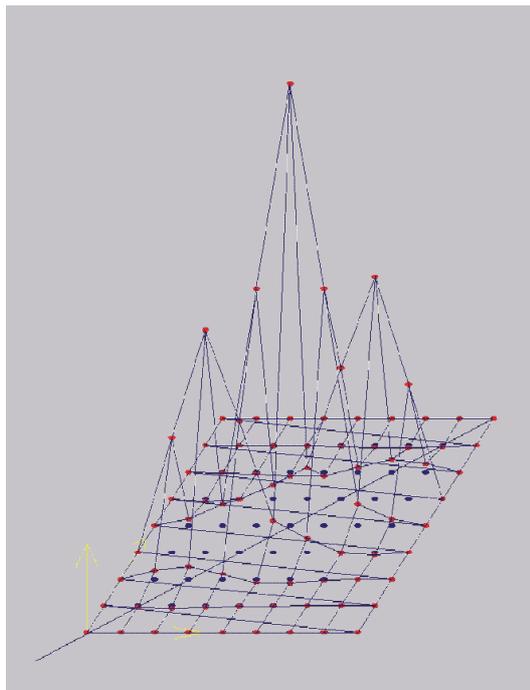


Figura 6.9: Solución aproximada en el último paso $n = 100$

6.5.2. Vibraciones forzadas en una placa delgada apoyada

La ecuación a resolver es la siguiente:

$$\frac{1}{4\pi^4} \left[\frac{\partial^4 U(x, y, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 U(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U(x, y, t)}{\partial y^4} \right] + \frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial t^2} = 15 \sin t \sin 2\pi x \sin 2\pi y \quad (6.54)$$

Con las siguientes condiciones de contorno:

$$x, y \in [0, 1] \quad \begin{cases} U(x, y, t)|_{\Gamma} = 0 \\ \frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial y^2} \Big|_{x=0} = 0 & \frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial y^2} \Big|_{x=1} = 0 \\ \frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial x^2} \Big|_{y=0} = 0 & \frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial x^2} \Big|_{y=1} = 0 \end{cases} \quad (6.55)$$

Y las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} U(x, y, 0) = 0 \\ \frac{\partial U(x, y, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \sin \pi x \sin \pi y + \sin 2\pi x \sin 2\pi y \end{cases} \quad (6.56)$$

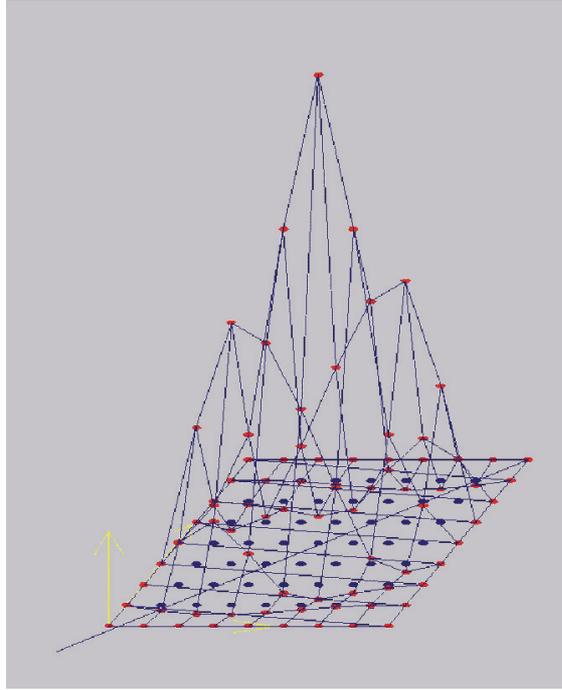


Figura 6.10: Solución aproximada en el último paso $n = 200$

La solución exacta de la ecuación en cuestión es:

$$U(x, y, t) = (\sin \pi x \sin \pi y + \sin 2\pi x \sin 2\pi y) \sin t \quad (6.57)$$

En el Cuadro 6.4 se puede ver el error global cometido en la resolución de la Ecuación 6.54 sobre el dominio de la Figura 6.3 mediante DFG para diferentes pasos temporales.

Δt	Error Global
0,01	0,53070
0,005	0,14640
0,002	0,07837
0,001	0,01444

Cuadro 6.4: Influencia del paso temporal en el error global

En el Cuadro 6.5 se puede ver el error global cometido en la resolución de la Ecuación 6.54 sobre el dominio de la Figura 6.4, 6.5, 6.6 y 6.7 mediante DFG para diferentes pasos $\Delta t = 0,001$.

Por último en la Figura 6.13 se muestra la solución gráfica en el último paso para un paso temporal $\Delta t = 0,001$ el número de pasos $n = 1000$ y sobre el dominio Figura 6.3.

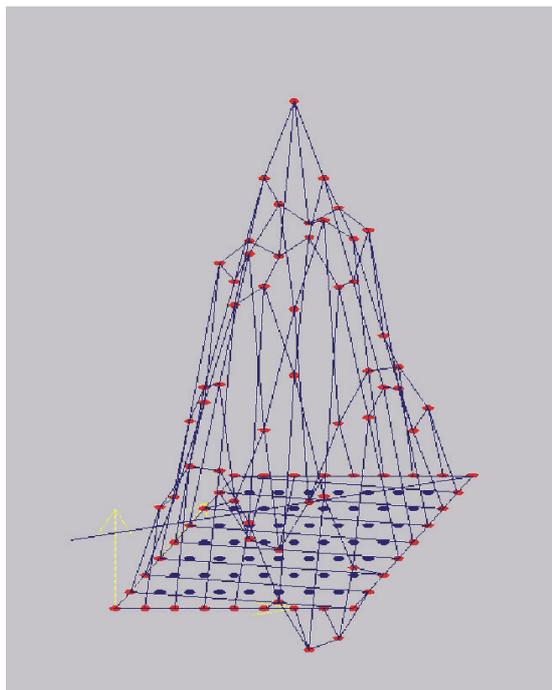


Figura 6.11: Solución aproximada en el último paso $n = 600$

IIC	Error Global
0,92	0,01412
0,83	0,01437
0,76	0,01442
0,58	0,01447

Cuadro 6.5: Influencia del índice de regularidad en el error global

6.5.3. Vibraciones libres en una placa delgada empotrada

La ecuación a resolver es la siguiente:

$$\frac{1}{4\pi^4} \left[\frac{\partial^4 U(x, y, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 U(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U(x, y, t)}{\partial y^4} \right] + \frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (6.58)$$

Con las siguientes condiciones de contorno:

$$x, y \in [0, 1] \quad \begin{cases} U(x, y, t)|_{\Gamma} = 0 \\ \frac{\partial U(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{x=0} = 0 & \frac{\partial U(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{x=1} = 0 \\ \frac{\partial U(x, y, t)}{\partial x} \Big|_{y=0} = 0 & \frac{\partial U(x, y, t)}{\partial x} \Big|_{y=1} = 0 \end{cases} \quad (6.59)$$

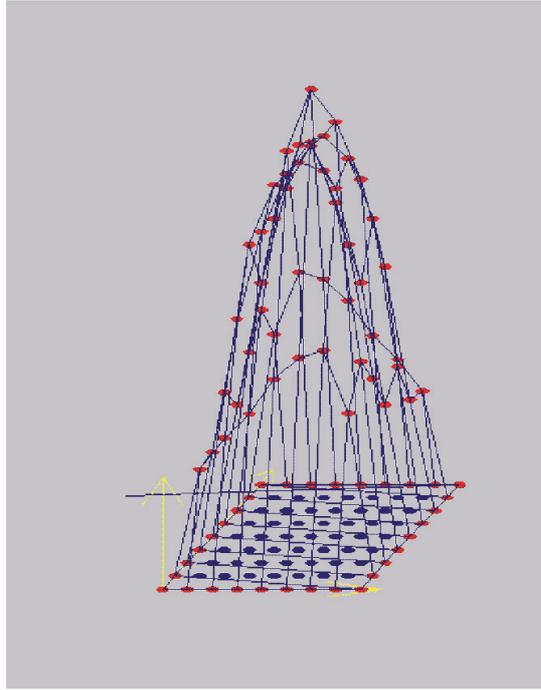


Figura 6.12: Solución aproximada en el último paso $n = 1200$

Y las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} U(x, y, 0) = 0 \\ \frac{\partial U(x, y, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = [\cos 4, 73x - \cosh 4, 73x - 0, 982501 (\sin 4, 73x - \sinh 4, 73x)] \times \\ \times [\cos 4, 73y - \cosh 4, 73y - 0, 982501 (\sin 4, 73y - \sinh 4, 73y)] \end{cases} \quad (6.60)$$

La solución exacta de la ecuación en cuestión es:

$$U(x, y, t) = [\cos 4, 73x - \cosh 4, 73x - 0, 982501 (\sin 4, 73x - \sinh 4, 73x)] \times \\ \times [\cos 4, 73y - \cosh 4, 73y - 0, 982501 (\sin 4, 73y - \sinh 4, 73y)] \sin t \quad (6.61)$$

En el Cuadro 6.6 se puede ver el error global cometido en la resolución de la Ecuación 6.58 sobre el dominio de la Figura 6.3 mediante DFG para diferentes pasos temporales.

En el Cuadro 6.7 se puede ver el error global cometido en la resolución de la Ecuación 6.58 sobre el dominio de la Figura 6.4, 6.5, 6.6 y 6.7 mediante DFG para diferentes pasos $\Delta t = 0,001$.

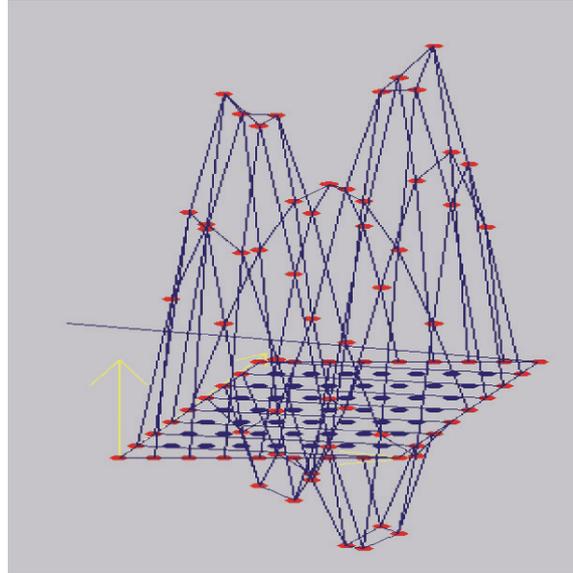


Figura 6.13: Solución aproximada en el último paso $\Delta t = 0,001$; $n = 1000$

Δt	Error Global
0,005	0,36490
0,002	0,03519
0,001	0,00492
0,0005	0,00064

Cuadro 6.6: Influencia del paso temporal en el error global

Por último en la Figura 6.14 se muestra la solución gráfica en el último paso para un paso temporal $\Delta t = 0,001$ el número de pasos $n = 500$ y sobre el dominio Figura 6.3.

IIC	Error Global
0,92	0,00492
0,83	0,00494
0,76	0,00496
0,58	0,00504

Cuadro 6.7: Influencia del índice de regularidad en el error global

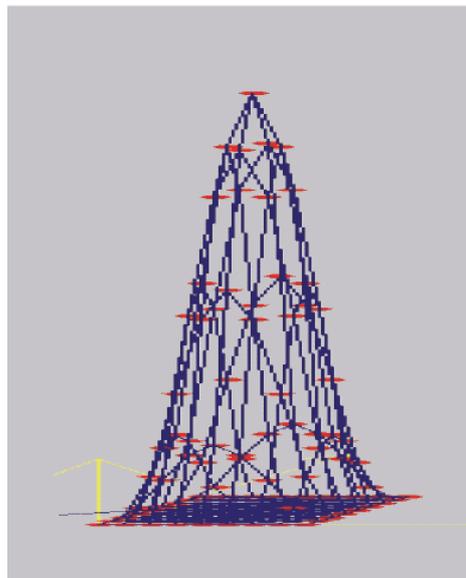


Figura 6.14: Solución aproximada en el último paso $\Delta t = 0,001$; $n = 500$

7 Esquema en DFG para la ecuación de ondas

En este apartado se va a estudiar la resolución de la ecuación de ondas en dos dimensiones haciendo uso de diferencias finitas generalizadas, e igualmente se va a analizar la convergencia del método.

7.1. La ecuación de ondas

En primer lugar se considera la ecuación de equilibrio dinámico, esto es:

$$\rho \ddot{U}_j = \sigma_{ij,i} + f_j \quad i, j = x, y, z \quad (7.1)$$

En donde f representa una fuerza por unidad de volumen, que podría ser el peso propio del material. Por otro lado teniendo en cuenta las ecuaciones de Lamé en forma compacta se tiene:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \epsilon_{ij} \\ \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \end{cases} \quad (7.2)$$

La expresión que relacionan las deformaciones unitarias con los desplazamientos es la siguiente:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{j,i}) \quad (7.3)$$

Y substituyendo la Ecuación 7.1 dentro de las ecuaciones de Lamé Ecuación 7.2 se llega a la siguiente expresión, que relaciona los desplazamientos con las tensiones:

$$\sigma_{ij} = \lambda U_{k,k} \delta_{ij} + G (U_{i,j} + U_{j,i}) \quad (7.4)$$

Por último sustituimos la Ecuación 7.4 dentro de la ecuación de equilibrio Ecuación 7.1, y se obtiene la ecuación de equilibrio en desplazamientos:

$$\begin{aligned} \rho \ddot{U}_j &= [\lambda U_{k,k} \delta_{ij} + G (U_{i,j} + U_{j,i})]_{,i} + f_j = \\ &\lambda U_{k,kj} \delta_{ij} + G (U_{i,ji} + U_{j,ii}) + f_j \end{aligned} \quad (7.5)$$

Aquí el único subíndice descriptivo es la j siendo la i y k subíndices mudos, luego reemplazando la i por la k y operando se obtiene la ecuación de Navier:

$$\rho \ddot{U}_j = (\lambda + G) U_{k,kj} + G U_{j,kk} + f_j \quad (7.6)$$

O bien:

$$\rho \ddot{U}_j = (\lambda + G) e_{,j} + G \nabla^2 U_j + f_j \quad (7.7)$$

En donde:

$$e = U_{k,k} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \quad (\lambda + G) e_{,j} + G \nabla^2 U_j + f_j \quad (7.8)$$

La Ecuación 7.6 de Navier en virtud de $\nabla^2 \mathbf{U} = \nabla (\nabla \mathbf{U}) - \nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{U}$ se puede expresar como sigue:

$$\rho \ddot{\mathbf{U}} = (\lambda + 2G) \nabla (\nabla \mathbf{U}) - G \nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{U} + \rho \mathbf{f} \quad (7.9)$$

7.1.1. Caso 1 dimensión

En el caso de una sola dimensión existirán sólo desplazamientos en una dirección, esto es:

$$U_x = U_x(x, t) \quad U_y = U_z = 0 \quad (7.10)$$

En cuanto a deformaciones teniendo en cuenta la Ecuación 7.3 se tendrá:

$$\epsilon_{xx} = U_{x,x} \quad \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = \epsilon_{xy} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{xz} = 0 \quad (7.11)$$

Y en cuanto a tensiones teniendo en cuenta la Ecuación 7.4 se tendrá:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = (\lambda + 2G) \epsilon_{xx} = (\lambda + 2G) U_{x,x} \\ \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \lambda \epsilon_{xx} = \lambda U_{x,x} \\ \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{xz} = 0 \end{cases} \quad (7.12)$$

Por último substituyendo en la ecuación de Navier, para $j = 1$ y teniendo en cuenta Ecuación 7.10 se obtiene la ecuación de la onda para 1 dimensión, esto es:

$$\rho \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} = (\lambda + 2G) \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + f_x \quad (7.13)$$

Si se hace $f_x = 0$ y llamando $\alpha = \sqrt{\frac{\lambda+2G}{\rho}}$ que coincide con la velocidad de las ondas P, se llega a la ecuación:

$$\frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} \quad (7.14)$$

7.1.2. Caso 2 dimensiones

Este caso las variables son independientes de z por lo tanto la ecuación Ecuación 7.1 de equilibrio quedaría como sigue:

$$\begin{cases} \sigma_{xx,x} + \sigma_{yx,y} + f_x = \rho \ddot{U}_x \\ \sigma_{xy,x} + \sigma_{yy,y} + f_y = \rho \ddot{U}_y \\ \sigma_{xz,x} + \sigma_{yz,y} + f_z = \rho \ddot{U}_z \end{cases} \quad (7.15)$$

Este sistema de ecuaciones en derivadas parciales se puede separar en dos sistemas desacoplados, uno formado por las dos primeras ecuaciones, movimiento en el plano (in-plane motion P, SV) y el otro formado por la última ecuación, movimiento en el antiplano (antiplane motion, SH), esto es:

- Movimiento en el plano

En primer lugar se determinan los desplazamientos:

$$U_x = U_x = (x, y, t) \quad U_y = U_y = (x, y, t) \quad U_z = 0 \quad (7.16)$$

En cuanto a las deformaciones se tiene que:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} = U_{x,x} \quad \epsilon_{yy} = U_{y,y} \quad \epsilon_{zz} = 0 \quad \epsilon_{xy} = \frac{1}{2} (U_{x,y} + U_{y,x}) \\ \epsilon_{yz} = \epsilon_{xz} = 0 \end{aligned} \quad (7.17)$$

Por último se determinan las tensiones, esto es:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \lambda (U_{x,x} + U_{y,y}) + 2GU_{x,x} \\ \sigma_{yy} = \lambda (U_{x,x} + U_{y,y}) + 2GU_{y,y} \\ \sigma_{xy} = G (U_{x,y} + U_{y,x}) \end{cases} \quad (7.18)$$

Y aplicando la ecuación de Navier se llega a:

$$\begin{aligned} \rho \ddot{U}_j = (\lambda + G) U_{k,kj} + GU_{j,kk} + f_j \\ j, k = x, y \end{aligned} \quad (7.19)$$

Desarrollando la Ecuación 7.19 se obtiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + (\alpha^2 - \beta^2) \frac{\partial^2 U_y}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 U_y}{\partial t^2} = \beta^2 \frac{\partial^2 U_y}{\partial x^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2} + (\alpha^2 - \beta^2) \frac{\partial^2 U_x}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (7.20)$$

En donde α representa la velocidad de las ondas P, ya visto, y β la velocidad de las ondas S, esto es:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} \quad \beta = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad \alpha^2 - \beta^2 = \frac{\lambda + G}{\rho} \quad (7.21)$$

α y β son las velocidades de compresión y de corte respectivamente, ondas P y ondas S, cumpliéndose que:

$$\alpha > \beta$$

7.2. Esquema en Diferencias Finitas Generalizadas

En este capítulo se van a resolver la Ecuación 7.20 haciendo uso del método de diferencias finitas generalizadas

Observando dicha ecuación se desprende que del vector \mathbf{D}_u , Ecuación 8.6, harán falta los elementos 3, 4 y 5, para su resolución, esto es:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}_u(3) &= \frac{\partial u_0^2}{\partial x^2} = \frac{1}{l(3,3)} \left[u_0 \sum_{i=1}^{i=5} M(3,i)c_i + \sum_{j=1}^{j=N} u_j \left(\sum_{i=1}^{i=5} M(3,i)d_{ji} \right) \right] \\
 \mathbf{D}_u(4) &= \frac{\partial u_0^2}{\partial x \partial y} = \frac{1}{l(4,4)} \left[u_0 \sum_{i=1}^{i=5} M(4,i)c_i + \sum_{j=1}^{j=N} u_j \left(\sum_{i=1}^{i=5} M(4,i)d_{ji} \right) \right] \\
 \mathbf{D}_u(5) &= \frac{\partial u_0^2}{\partial y^2} = \frac{1}{l(5,5)} \left[u_0 \sum_{i=1}^{i=5} M(5,i)c_i + \sum_{j=1}^{j=N} u_j \left(\sum_{i=1}^{i=5} M(5,i)d_{ji} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{7.22}$$

Esto se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u_{x0}}{\partial x^2} &= -u_{x0}^n m_0 + \sum_{j=1}^{j=N} u_{xj}^n m_j & \frac{\partial^2 u_{y0}}{\partial x^2} &= -u_{y0}^n m_0 + \sum_{j=1}^{j=N} u_{yj}^n m_j \\
 \frac{\partial^2 u_{x0}}{\partial x \partial y} &= -u_{x0}^n \eta_0 + \sum_{j=1}^{j=N} u_{xj}^n \eta_j & \frac{\partial^2 u_{y0}}{\partial x \partial y} &= -u_{y0}^n \eta_0 + \sum_{j=1}^{j=N} u_{yj}^n \eta_j \\
 \frac{\partial^2 u_{x0}}{\partial y^2} &= -u_{x0}^n \varsigma_0 + \sum_{j=1}^{j=N} u_{xj}^n \varsigma_j & \frac{\partial^2 u_{y0}}{\partial y^2} &= -u_{y0}^n \varsigma_0 + \sum_{j=1}^{j=N} u_{yj}^n \varsigma_j
 \end{aligned} \tag{7.23}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta la discretización temporal:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u_{x0}}{\partial t^2} &= \frac{u_{x0}^{n-1} - 2u_{x0}^n + u_{x0}^{n+1}}{(\Delta t)^2} \\
 \frac{\partial^2 u_{y0}}{\partial t^2} &= \frac{u_{y0}^{n-1} - 2u_{y0}^n + u_{y0}^{n+1}}{(\Delta t)^2}
 \end{aligned} \tag{7.24}$$

Substituyendo la Ecuación 7.23 y la Ecuación 7.61 dentro de la Ecuación 7.20 se

llega a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\frac{u_{x0}^{n-1} - 2u_{x0}^n + u_{x0}^{n+1}}{(\Delta t)^2} &= \alpha^2 \left(-u_{x0}^n m_0 + \sum_{j=1}^{j=N} u_{xj}^n m_j \right) + \beta^2 \left(-u_{x0}^n \varsigma_0 + \sum_{j=1}^{j=N} u_{xj}^n \varsigma_j \right) + \\
&\quad + (\alpha^2 - \beta^2) \left(-u_{y0}^n \eta_0 + \sum_{j=1}^{j=N} u_{yj}^n \eta_j \right) \\
\frac{u_{y0}^{n-1} - 2u_{y0}^n + u_{y0}^{n+1}}{(\Delta t)^2} &= \beta^2 \left(-u_{y0}^n m_0 + \sum_{j=1}^{j=N} u_{yj}^n m_j \right) + \alpha^2 \left(-u_{y0}^n \varsigma_0 + \sum_{j=1}^{j=N} u_{yj}^n \varsigma_j \right) + \\
&\quad + (\alpha^2 - \beta^2) \left(-u_{x0}^n \eta_0 + \sum_{j=1}^{j=N} u_{xj}^n \eta_j \right)
\end{aligned} \tag{7.25}$$

Despejando se obtiene la forma explícita en el tiempo, esto es:

$$\begin{aligned}
u_{x0}^{n+1} &= 2u_{x0}^n - u_{x0}^{n-1} + (\Delta t)^2 \left[\alpha^2 \left(-u_{x0}^n m_0 + \sum_{j=1}^{j=N} u_{xj}^n m_j \right) + \beta^2 \left(-u_{x0}^n \varsigma_0 + \sum_{j=1}^{j=N} u_{xj}^n \varsigma_j \right) \right. \\
&\quad \left. + (\alpha^2 - \beta^2) \left(-u_{y0}^n \eta_0 + \sum_{j=1}^{j=N} u_{yj}^n \eta_j \right) \right] \\
u_{y0}^{n+1} &= 2u_{y0}^n - u_{y0}^{n-1} + (\Delta t)^2 \left[\beta^2 \left(-u_{y0}^n m_0 + \sum_{j=1}^{j=N} u_{yj}^n m_j \right) + \alpha^2 \left(-u_{y0}^n \varsigma_0 + \sum_{j=1}^{j=N} u_{yj}^n \varsigma_j \right) \right. \\
&\quad \left. + (\alpha^2 - \beta^2) \left(-u_{x0}^n \eta_0 + \sum_{j=1}^{j=N} u_{xj}^n \eta_j \right) \right]
\end{aligned} \tag{7.26}$$

7.3. Convergencia, consistencia y estabilidad del método

De igual manera se va a calcular la convergencia del método, se verá si el problema es consistente para luego establecer la estabilidad.

7.3.1. Consistencia

Como ya se ha comprobado en capítulos anteriores el método es consistente al tender tanto el error espacial como el temporal a cero cuando ambos incrementos tienden

también a cero.

$$\lim_{(h,k,\Delta t) \rightarrow (0,0,0)} TTE = 0 \quad (7.27)$$

7.3.2. Estabilidad

En este apartado se va a establecer un criterio general de estabilidad para la ecuación de ondas resuelta por el MDFG para ello, como en veces anteriores, se utilizará el criterio de Von Neumann realizándose una descomposición armónica de la solución aproximada:

$$\begin{aligned} u_{x0}^n &= A\varepsilon^n \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0 & u_{xj}^n &= A\varepsilon^n \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_j \\ u_{y0}^n &= B\varepsilon^n \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0 & u_{yj}^n &= B\varepsilon^n \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_j \end{aligned} \quad (7.28)$$

En donde:

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \end{pmatrix}$$

Además se cumple que:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_j = \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + h_j \\ y_0 + k_j \end{pmatrix} \quad \mathbf{h}_j = \begin{pmatrix} h_j \\ k_j \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon = \exp i\omega\Delta t$$

Substituyendo la Ecuación 7.28 en la solución aproximada en diferencias finitas Ecuación 7.26 obtenida anteriormente se obtiene:

$$\begin{aligned} A\varepsilon^{n+1} \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0 &= 2A\varepsilon^n \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0 - A\varepsilon^{n-1} \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0 + \\ &+ (\Delta t)^2 \left[\alpha^2 \left(-A\varepsilon^n \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0 m_0 + \sum_{j=1}^{j=N} A\varepsilon^n \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_j m_j \right) + \right. \\ &\quad \left. + \beta^2 \left(-A\varepsilon^n \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0 \varsigma_0 + \sum_{j=1}^{j=N} A\varepsilon^n \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_j \varsigma_j \right) \right. \\ &\quad \left. + (\alpha^2 - \beta^2) \left(-B\varepsilon^n \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0 \eta_0 + \sum_{j=1}^{j=N} B\varepsilon^n \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_j \eta_j \right) \right] \end{aligned} \quad (7.29)$$

$$\begin{aligned}
& B\varepsilon \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0 = 2B\varepsilon^n \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0 - B\varepsilon^{n-1} \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0 + \\
& + (\Delta t)^2 \left[\beta^2 \left(-B\varepsilon^n \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0 m_0 + \sum_{j=1}^{j=N} B\varepsilon^n \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_j m_j \right) + \right. \\
& \quad \left. + \alpha^2 \left(-B\varepsilon \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0 \varsigma_0 + \sum_{j=1}^{j=N} B\varepsilon \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_j \varsigma_j \right) \right. \\
& \quad \left. + (\alpha^2 - \beta^2) \left(-A\varepsilon^n \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0 \eta_0 + \sum_{j=1}^{j=N} A\varepsilon^n \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_j \eta_j \right) \right]
\end{aligned} \tag{7.30}$$

Dividiendo la Ecuación 7.29 y la Ecuación 7.30 por $\varepsilon^n \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
& A\varepsilon = 2A - A\varepsilon^{-1} + (\Delta t)^2 \left[\alpha^2 \left(-Am_0 + \sum_{j=1}^{j=N} A \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j m_j \right) + \right. \\
& \left. + \beta^2 \left(-A\varsigma_0 + \sum_{j=1}^{j=N} A \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j \varsigma_j \right) + (\alpha^2 - \beta^2) \left(-B\eta_0 + \sum_{j=1}^{j=N} B \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j \eta_j \right) \right]
\end{aligned} \tag{7.31}$$

$$\begin{aligned}
& B\varepsilon = 2B - B\varepsilon^{-1} + (\Delta t)^2 \left[\beta^2 \left(-Bm_0 + \sum_{j=1}^{j=N} B \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j m_j \right) + \right. \\
& \left. + \alpha^2 \left(-B\varsigma_0 + \sum_{j=1}^{j=N} B \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j \varsigma_j \right) + (\alpha^2 - \beta^2) \left(-A\eta_0 + \sum_{j=1}^{j=N} A \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j \eta_j \right) \right]
\end{aligned} \tag{7.32}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned}
m_0 &= \sum_{j=1}^{j=N} m_j \\
\eta_0 &= \sum_{j=1}^{j=N} \eta_j \\
\varsigma_0 &= \sum_{j=1}^{j=N} \varsigma_j
\end{aligned} \tag{7.33}$$

Se obtiene:

$$\begin{aligned}
 A\varepsilon = & 2A - A\varepsilon^{-1} + (\Delta t)^2 \left[\alpha^2 \left(- \sum_{j=1}^{j=N} Am_j + \sum_{j=1}^{j=N} A \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j m_j \right) + \right. \\
 & \left. + \beta^2 \left(- \sum_{j=1}^{j=N} A\varsigma_j + \sum_{j=1}^{j=N} A \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j \varsigma_j \right) + (\alpha^2 - \beta^2) \left(- \sum_{j=1}^{j=N} B\eta_j + \sum_{j=1}^{j=N} B \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j \eta_j \right) \right]
 \end{aligned} \tag{7.34}$$

$$\begin{aligned}
 B\varepsilon = & 2B - B\varepsilon^{-1} + (\Delta t)^2 \left[\beta^2 \left(- \sum_{j=1}^{j=N} Bm_j + \sum_{j=1}^{j=N} B \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j m_j \right) + \right. \\
 & \left. + \alpha^2 \left(- \sum_{j=1}^{j=N} B\varsigma_j + \sum_{j=1}^{j=N} B \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j \varsigma_j \right) + (\alpha^2 - \beta^2) \left(- \sum_{j=1}^{j=N} A\eta_j + \sum_{j=1}^{j=N} A \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j \eta_j \right) \right]
 \end{aligned} \tag{7.35}$$

Despejando B de la Ecuación 7.35 se obtiene:

$$\begin{aligned}
 B = & \frac{A(\Delta t)^2(\alpha^2 - \beta^2) \sum_{j=1}^{j=N} (1 - \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \eta_j}{\varepsilon - 2 + \frac{1}{\varepsilon} + (\Delta t)^2 \alpha^2 \sum_{j=1}^{j=N} (1 - \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \varsigma_j + (\Delta t)^2 \beta^2 \sum_{j=1}^{j=N} (1 - \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) m_j}
 \end{aligned} \tag{7.36}$$

Substituyendo la Ecuación 7.36 en la Ecuación 7.34 y operando se obtiene:

$$\begin{aligned}
 & \left[\varepsilon - 2 + \frac{1}{\varepsilon} + (\Delta t)^2 \alpha^2 \sum_{j=1}^{j=N} (1 - \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) m_j + (\Delta t)^2 \beta^2 \sum_{j=1}^{j=N} (1 - \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \varsigma_j \right] \times \\
 & \times \left[\varepsilon - 2 + \frac{1}{\varepsilon} + (\Delta t)^2 \beta^2 \sum_{j=1}^{j=N} (1 - \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) m_j + (\Delta t)^2 \alpha^2 \sum_{j=1}^{j=N} (1 - \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \varsigma_j \right] = \\
 & = \left[(\Delta t)^2 (\alpha^2 - \beta^2) \sum_{j=1}^{j=N} (1 - \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \eta_j \right]^2
 \end{aligned} \tag{7.37}$$

Pero:

$$\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} = \exp -i\omega\Delta t + \exp i\omega\Delta t = 2 \cos \omega\Delta t \quad (7.38)$$

Con lo que substituyendo la Ecuación 7.38 dentro de la Ecuación 7.37 y operando se llega a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} & (1 - \cos \omega\Delta t)^2 - 2(1 - \cos \omega\Delta t) \frac{(\Delta t)^2}{4} (\alpha^2 + \beta^2) \left[\sum_{j=1}^{j=N} (m_j + \varsigma_j) (1 - \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \right] + \\ & \frac{(\Delta t)^4}{4} \left[\alpha^2 \sum_{j=1}^{j=N} m_j (1 - \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \left[\beta^2 \sum_{j=1}^{j=N} m_j (1 - \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) + \alpha^2 \sum_{j=1}^{j=N} \varsigma_j (1 - \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \right] + \right. \\ & \left. + \beta^2 \sum_{j=1}^{j=N} \varsigma_j (1 - \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \left[\beta^2 \sum_{j=1}^{j=N} m_j (1 - \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) + \alpha^2 \sum_{j=1}^{j=N} \varsigma_j (1 - \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \right] - \right. \\ & \left. - (\alpha^2 - \beta^2)^2 \left[\sum_{j=1}^{j=N} \eta_j (1 - \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \right]^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (7.39)$$

Por otro lado teniendo en cuenta que:

$$1 - \exp i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j = 1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j - i \sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j \quad (7.40)$$

Substituyendo la Ecuación 7.40 dentro de la Ecuación 7.39:

$$\begin{aligned}
 & (1 - \cos \omega \Delta t)^2 - 2(1 - \cos \omega \Delta t) \frac{(\Delta t)^2}{4} (\alpha^2 + \beta^2) \\
 & \left[\sum_{j=1}^{j=N} (m_j + \varsigma_j) (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j - i \sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \right] + \\
 & + \frac{(\Delta t)^4}{4} \left[\alpha^2 \sum_{j=1}^{j=N} m_j (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j - i \sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \left[\beta^2 \sum_{j=1}^{j=N} m_j (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j - i \sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \alpha^2 \sum_{j=1}^{j=N} \varsigma_j (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j - i \sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \right] + \beta^2 \sum_{j=1}^{j=N} \varsigma_j (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j - i \sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \times \right. \\
 & \left. \times \left[\beta^2 \sum_{j=1}^{j=N} m_j (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j - i \sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) + \alpha^2 \sum_{j=1}^{j=N} \varsigma_j (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j - i \sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \right] - \right. \\
 & \left. - (\alpha^2 - \beta^2)^2 \left[\sum_{j=1}^{j=N} \eta_j (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j - i \sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \right]^2 \right] = 0
 \end{aligned} \tag{7.41}$$

La ecuación anterior se puede dividir en dos partes, la parte real y la parte imaginaria, esto es:

- Parte real

$$\begin{aligned}
 & (1 - \cos \omega \Delta t)^2 - 2(1 - \cos \omega \Delta t) \frac{(\Delta t)^2}{4} (\alpha^2 + \beta^2) \left[\sum_{j=1}^{j=N} (m_j + \varsigma_j) (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \right] + \\
 & \frac{(\Delta t)^4}{4} \left[\alpha^2 \sum_{j=1}^{j=N} m_j (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \left[\beta^2 \sum_{j=1}^{j=N} m_j (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) + \alpha^2 \sum_{j=1}^{j=N} \varsigma_j (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \right] + \right. \\
 & \left. + \beta^2 \sum_{j=1}^{j=N} \varsigma_j (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \left[\beta^2 \sum_{j=1}^{j=N} m_j (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) + \alpha^2 \sum_{j=1}^{j=N} \varsigma_j (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \right] - \right. \\
 & \left. - (\alpha^2 - \beta^2)^2 \left[\sum_{j=1}^{j=N} \eta_j (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \right]^2 \right] = 0
 \end{aligned} \tag{7.42}$$

Operando en la Ecuación 7.42 se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
& (1 - \cos \omega \Delta t)^2 - 2(1 - \cos \omega \Delta t) \frac{(\Delta t)^2}{4} (\alpha^2 + \beta^2) \left[\sum_{j=1}^{j=N} (m_j + \varsigma_j) (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \right] + \\
& + \frac{(\Delta t)^4}{4} \left[\left[\alpha^2 \sum_{j=1}^{j=N} m_j (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) + \beta^2 \sum_{j=1}^{j=N} \varsigma_j (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \right] \times \right. \\
& \quad \times \left[\beta^2 \sum_{j=1}^{j=N} m_j (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) + \alpha^2 \sum_{j=1}^{j=N} \varsigma_j (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \right] - \\
& \quad - \left[\alpha^2 \sum_{j=1}^{j=N} m_j (\sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) + \beta^2 \sum_{j=1}^{j=N} \varsigma_j (\sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \right] \times \\
& \quad \times \left[\beta^2 \sum_{j=1}^{j=N} m_j (\sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) + \alpha^2 \sum_{j=1}^{j=N} \varsigma_j (\sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \right] - \\
& \quad \left. - (\alpha^2 - \beta^2)^2 \left[\left(\sum_{j=1}^{j=N} \eta_j (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \right)^2 - \left(\sum_{j=1}^{j=N} \eta_j (\sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \right)^2 \right] \right] = 0
\end{aligned} \tag{7.43}$$

Llamando:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \sum_{j=1}^{j=N} m_j (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) & a_4 &= \sum_{j=1}^{j=N} \varsigma_j \sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j \\
a_2 &= \sum_{j=1}^{j=N} m_j \sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j & a_5 &= \sum_{j=1}^{j=N} \eta_j (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \\
a_3 &= \sum_{j=1}^{j=N} \varsigma_j (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) & a_6 &= \sum_{j=1}^{j=N} \eta_j \sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j
\end{aligned} \tag{7.44}$$

Y Substituyendo en la Ecuación 7.43:

$$\begin{aligned}
& (1 - \cos \omega \Delta t)^2 - 2(1 - \cos \omega \Delta t) \frac{(\Delta t)^2}{4} (\alpha^2 + \beta^2) (a_1 + a_3) + \\
& + \frac{(\Delta t)^4}{4} \left[(\alpha^2 a_1 + \beta^2 a_3) (\beta^2 a_1 + \alpha^2 a_3) - (\alpha^2 a_2 + \beta^2 a_4) (\beta^2 a_2 + \alpha^2 a_4) - \right. \\
& \quad \left. - (\alpha^2 - \beta^2)^2 (a_5^2 - a_6^2) \right] = 0
\end{aligned} \tag{7.45}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j = \kappa (h_j \cos \varphi - k_j \sin \varphi) = \kappa d_j \quad (7.46)$$

Se trata de una ecuación de 2º grado en $1 - \cos \omega \Delta t$, resolviendo se llega a la siguiente expresión:

$$(1 - \cos \omega \Delta t) = \frac{(\Delta t)^2}{4} \left[(\alpha^2 + \beta^2) (a_1 + a_3) + \sqrt{[(\alpha^2 + \beta^2) (a_1 + a_3)]^2 +} \right. \\ \left. + 4 \left[-(\alpha^2 a_1 + \beta^2 a_3) (\beta^2 a_1 + \alpha^2 a_3) + (\alpha^2 a_2 + \beta^2 a_4) (\beta^2 a_2 + \alpha^2 a_4) + \right. \right. \\ \left. \left. + (\alpha^2 - \beta^2)^2 (a_5^2 - a_6^2) \right] \right] \quad (7.47)$$

Por otro lado:

$$0 \leq 1 - \cos \omega \Delta t \leq 2$$

Luego aplicando esta condición en la Ecuación 7.47 se obtiene:

$$0 \leq \frac{(\Delta t)^2}{4} \left[(\alpha^2 + \beta^2) (a_1 + a_3) + \sqrt{[(\alpha^2 + \beta^2) (a_1 + a_3)]^2 +} \right. \\ \left. + 4 \left[-(\alpha^2 a_1 + \beta^2 a_3) (\beta^2 a_1 + \alpha^2 a_3) + (\alpha^2 a_2 + \beta^2 a_4) (\beta^2 a_2 + \alpha^2 a_4) + \right. \right. \\ \left. \left. + (\alpha^2 - \beta^2)^2 (a_5^2 - a_6^2) \right] \right] \leq 2 \quad (7.48)$$

Por lo tanto:

$$0 \leq \Delta t \leq \sqrt{\frac{8}{(\alpha^2 + \beta^2) (a_1 + a_3) \sqrt{[(\alpha^2 + \beta^2) (a_1 + a_3)]^2 - 4 [(\alpha^2 a_1 + \beta^2 a_3) \times} \\ \times (\beta^2 a_1 + \alpha^2 a_3) - (\alpha^2 a_2 + \beta^2 a_4) (\beta^2 a_2 + \alpha^2 a_4) - (\alpha^2 - \beta^2)^2 (a_5^2 - a_6^2)]}} \leq 2 \quad (7.49)$$

Simplificando haciendo uso de criterios conservadores se va a hacer mínima la expresión de la derecha, esto es:

$$\begin{aligned}
 0 \leq \Delta t \leq & \sqrt{\frac{8}{\underbrace{(\alpha^2 + \beta^2)(a_1 + a_3)}_{Max} \sqrt{\underbrace{\left[(\alpha^2 + \beta^2)(a_1 + a_3) \right]^2}_{Max} - 4 \underbrace{\left[(\alpha^2 a_1 + \beta^2 a_3) \right]}_{Min} \times}} \\
 & \frac{8}{\underbrace{\left[(\beta^2 a_1 + \alpha^2 a_3) - (\alpha^2 a_2 + \beta^2 a_4) \right]}_{Min} \left[(\beta^2 a_2 + \alpha^2 a_4) - (\alpha^2 - \beta^2)^2 (a_5^2 - a_6^2) \right]} \leq 2
 \end{aligned} \tag{7.50}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
 0 \leq a_1 &= \sum_{j=1}^{j=N} m_j (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \leq 2m_0 \\
 -m_0 \leq a_2 &= \sum_{j=1}^{j=N} m_j \sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j \leq m_0 \\
 0 \leq a_3 &= \sum_{j=1}^{j=N} \varsigma_j (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \leq 2\varsigma_0 \\
 -\varsigma_0 \leq a_4 &= \sum_{j=1}^{j=N} \varsigma_j \sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j \leq \varsigma_0 \\
 0 \leq a_5 &= \sum_{j=1}^{j=N} \eta_j (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \leq 2\eta_0 \\
 -\eta_0 \leq a_6 &= \sum_{j=1}^{j=N} \varsigma_j \sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j \leq \eta_0
 \end{aligned} \tag{7.51}$$

Ahora se analiza cada término para hacerlos máximos o mínimos, esto es:

$$(\alpha^2 + \beta^2) (a_1 + a_3) \leq 2 (\alpha^2 + \beta^2) (m_0 + \varsigma_0)$$

El siguiente término debe ser mínimo:

$$(\alpha^2 a_1 + \beta^2 a_3) (\beta^2 a_1 + \alpha^2 a_3) + (\alpha^2 a_2 + \beta^2 a_4) (\beta^2 a_2 + \alpha^2 a_4) - (\alpha^2 - \beta^2)^2 (a_5^2 - a_6^2)$$

Pero según la Ecuación 7.51 cumple:

$$\text{mín } a_1 = 0 \rightarrow \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j = 1 \rightarrow a_2 = 0$$

$$\text{mín } a_3 = 0 \rightarrow \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j = 1 \rightarrow a_4 = 0$$

Por otro lado:

$$\text{máx } a_5 = 2\eta_0 \rightarrow \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j = 1 \rightarrow a_6 = 0$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} & (\alpha^2 a_1 + \beta^2 a_3) (\beta^2 a_1 + \alpha^2 a_3) + (\alpha^2 a_2 + \beta^2 a_4) (\beta^2 a_2 + \alpha^2 a_4) - \\ & - (\alpha^2 - \beta^2)^2 (a_5^2 - a_6^2) \geq (\alpha^2 - \beta^2)^2 4\eta_0^2 \end{aligned}$$

Y substituyendo en la Ecuación 7.50 se llega al siguiente criterio de estabilidad:

$$0 \leq \Delta t \leq \sqrt{\frac{4}{(\alpha^2 + \beta^2) \left[(|m_0| + |\varsigma_0|) + \sqrt{(|m_0| + |\varsigma_0|)^2 + 4\eta_0^2} \right]}} \quad (7.52)$$

- Parte imaginaria

Operando de nuevo en la Ecuación 7.41 se obtiene:

$$\begin{aligned} & 2(1 - \cos \omega \Delta t) \frac{(\Delta t)^2}{4} (\alpha^2 + \beta^2) \left[\sum_{j=1}^{j=N} (m_j + \varsigma_j) \sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j \right] - \\ & - (\Delta t)^2 \left[\left[\alpha^2 \sum_{j=1}^{j=N} m_j (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) + \beta^2 \sum_{j=1}^{j=N} \varsigma_j (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \right] \times \right. \\ & \times \left[\beta^2 \sum_{j=1}^{j=N} m_j (\sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) + \alpha^2 \sum_{j=1}^{j=N} \varsigma_j (\sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \right] + \left[\alpha^2 \sum_{j=1}^{j=N} m_j \sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j + \right. \\ & + \beta^2 \sum_{j=1}^{j=N} \varsigma_j \sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j \left. \right] \left[\left[\beta^2 \sum_{j=1}^{j=N} m_j (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) + \alpha^2 \sum_{j=1}^{j=N} \varsigma_j (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \right] + \right. \\ & \left. \left. + 2(\alpha^2 - \beta^2)^2 \left[\sum_{j=1}^{j=N} \eta_j (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \sum_{j=1}^{j=N} \eta_j (\sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \right] \right] \right] = 0 \end{aligned} \quad (7.53)$$

Utilizando la misma nomenclatura que en la Ecuación 7.44 se llega a la siguiente expresión:

$$2(1 - \cos \omega \Delta t) = \frac{(\Delta t)^2}{(\alpha^2 + \beta^2)(a_2 + a_4)} \left[(\alpha^2 a_1 + \beta^2 a_3)(\beta^2 a_2 + \alpha^2 a_4) + (\alpha^2 a_2 + \beta^2 a_4)(\beta^2 a_1 + \alpha^2 a_3) + 2(\alpha^2 - \beta^2)^2 a_5 a_6 \right] \quad (7.54)$$

Como se cumple que:

$$0 \leq 2(1 - \cos \omega \Delta t) \leq 4$$

Por lo tanto:

$$0 \leq \frac{(\Delta t)^2}{(\alpha^2 + \beta^2)(a_2 + a_4)} \left[(\alpha^2 a_1 + \beta^2 a_3)(\beta^2 a_2 + \alpha^2 a_4) + (\alpha^2 a_2 + \beta^2 a_4)(\beta^2 a_1 + \alpha^2 a_3) + 2(\alpha^2 - \beta^2)^2 a_5 a_6 \right] \leq 4 \quad (7.55)$$

Así pues despejando el incremento temporal se tiene que:

$$0 \leq \Delta t \leq \sqrt{\frac{4(\alpha^2 + \beta^2)(a_2 + a_4)}{(\alpha^2 a_1 + \beta^2 a_3)(\beta^2 a_2 + \alpha^2 a_4) + (\alpha^2 a_2 + \beta^2 a_4) \times \frac{4(\alpha^2 + \beta^2)(a_2 + a_4)}{\times (\beta^2 a_1 + \alpha^2 a_3) + 2(\alpha^2 - \beta^2)^2 a_5 a_6}}} \quad (7.56)$$

Ahora se trata, igual que antes, de minimizar el valor de la derecha, para lo cual se van a seguir los mismos criterios anteriores, esto es:

$$0 \leq \Delta t \leq \sqrt{\frac{\underbrace{4(\alpha^2 + \beta^2)(a_2 + a_4)}_{Min}}{\underbrace{(\alpha^2 a_1 + \beta^2 a_3)(\beta^2 a_2 + \alpha^2 a_4) + (\alpha^2 a_2 + \beta^2 a_4) \times}_{Max}}} \times \frac{\underbrace{4(\alpha^2 + \beta^2)(a_2 + a_4)}_{Min}}{\underbrace{4(\alpha^2 + \beta^2)(a_2 + a_4)(\beta^2 a_1 + \alpha^2 a_3) + 2(\alpha^2 - \beta^2)^2 a_5 a_6}_{Min}} \quad (7.57)$$

Volviendo a tener en cuenta la Ecuación 7.51 resulta que:

$$\text{mín} \left[4 \left(\alpha^2 + \beta^2 \right) (a_2 + a_4) \right] = 0$$

Luego la parte imaginaria no aporta un nuevo criterio de estabilidad, resultando como definitiva la condición de la Ecuación 7.52.

7.4. Dispersión de la estrella

La dispersión consiste en la separación de ondas de distintas frecuencias al atravesar estas un material.

7.4.1. Dispersión de las ondas P

Si en la Ecuación 7.47 se obtiene:

$$\begin{aligned} \cos \omega \Delta t = 1 - \frac{(\Delta t)^2}{4} & \left[\left(\alpha^2 + \beta^2 \right) (a_1 + a_3) + \sqrt{\left[\left(\alpha^2 + \beta^2 \right) (a_1 + a_3) \right]^2 +} \right. \\ & \left. + 4 \left[- \left(\alpha^2 a_1 + \beta^2 a_3 \right) \left(\beta^2 a_1 + \alpha^2 a_3 \right) + \left(\alpha^2 a_2 + \beta^2 a_4 \right) \left(\beta^2 a_2 + \alpha^2 a_4 \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\alpha^2 - \beta^2 \right)^2 \left(a_5^2 - a_6^2 \right) \right] \right] \end{aligned} \quad (7.58)$$

Llamando:

$$\begin{aligned} \phi = 1 - \frac{(\Delta t)^2}{4} & \left[\left(\alpha^2 + \beta^2 \right) (a_1 + a_3) + \sqrt{\left[\left(\alpha^2 + \beta^2 \right) (a_1 + a_3) \right]^2 +} \right. \\ & \left. + 4 \left[- \left(\alpha^2 a_1 + \beta^2 a_3 \right) \left(\beta^2 a_1 + \alpha^2 a_3 \right) + \left(\alpha^2 a_2 + \beta^2 a_4 \right) \left(\beta^2 a_2 + \alpha^2 a_4 \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\alpha^2 - \beta^2 \right)^2 \left(a_5^2 - a_6^2 \right) \right] \right] \end{aligned} \quad (7.59)$$

Se puede despejar la frecuencia de la siguiente forma:

$$\cos \omega \Delta t = \phi \rightarrow \omega = \frac{1}{\Delta t} \arccos \phi \quad (7.60)$$

Además se sabe que:

$$\omega = 2\pi \frac{c^{grid}}{\lambda^{grid}} \quad (7.61)$$

En donde c^{grid} y λ^{grid} son la velocidad de fase (α^{grid} ó β^{grid}) la longitud de onda (λ_p^{grid} ó λ_s^{grid}) en la estrella respectivamente.

Así pues se definen las siguientes relaciones:

$$s = \frac{2}{\lambda_s^{grid} \sqrt{(r^2 + 1) \left[(|m_0| + |\zeta_0|) + \sqrt{(|m_0| + |\zeta_0|)^2 + 4\eta_0^2} \right]}} \quad (7.62)$$

$$s_p = \frac{2}{\lambda_p^{grid} \sqrt{(r^2 + 1) \left[(|m_0| + |\zeta_0|) + \sqrt{(|m_0| + |\zeta_0|)^2 + 4\eta_0^2} \right]}} \quad (7.63)$$

$$p = \frac{\beta \Delta t \sqrt{(r^2 + 1) \left[(|m_0| + |\zeta_0|) + \sqrt{(|m_0| + |\zeta_0|)^2 + 4\eta_0^2} \right]}}{2} \quad (7.64)$$

Por otro lado la razón de velocidades es:

$$r = \frac{\alpha}{\beta} \quad (7.65)$$

Dividiendo la Ecuación 7.62 entre la Ecuación 7.63 se tiene:

$$\frac{s}{s_p} = \frac{\lambda_p^{grid}}{\lambda_s^{grid}} = \frac{2\pi\alpha}{2\pi\beta} = r \rightarrow s_p = \frac{s}{r} \quad (7.66)$$

Ahora teniendo en cuenta la Ecuación 7.61 y la Ecuación 7.60 resulta que:

$$\omega = \frac{1}{\Delta t} \arccos \phi \rightarrow \omega = 2\pi \frac{c^{grid}}{\lambda^{grid}} \rightarrow \frac{1}{\Delta t} \arccos \phi = 2\pi \frac{\alpha^{grid}}{\lambda^{grid}} \quad (7.67)$$

Despejando en la Ecuación 7.64 Δt se tiene:

$$\Delta t = \frac{2p}{\beta \sqrt{(r^2 + 1) (|m_0| + |s_0|) + \sqrt{(|m_0| + |s_0|)^2 + 4\eta_0^2}}} \quad (7.68)$$

Y despejando de la Ecuación 7.63 λ_p^{grid} se tiene:

$$\lambda_p^{grid} = \frac{2}{s_p \sqrt{(r^2 + 1) \left[(|m_0| + |s_0|) + \sqrt{(|m_0| + |s_0|)^2 + 4\eta_0^2} \right]}} \quad (7.69)$$

Operando y teniendo en cuenta la Ecuación 7.65 y la Ecuación 7.66 se obtiene:

$$\lambda_p^{grid} = \frac{2\alpha}{\beta s \sqrt{(r^2 + 1) \left[(|m_0| + |s_0|) + \sqrt{(|m_0| + |s_0|)^2 + 4\eta_0^2} \right]}} \quad (7.70)$$

Finalmente substituyendo la Ecuación 7.68 y la Ecuación 7.69 dentro de la Ecuación 7.67 se llega a:

$$\frac{1}{\frac{2p}{\beta \sqrt{(r^2+1) \left[(|m_0|+|s_0|)+\sqrt{(|m_0|+|s_0|)^2+4\eta_0^2} \right]}}} \text{arc cos } \phi = \quad (7.71)$$

$$= 2\pi \frac{\alpha^{grid}}{\frac{2\alpha}{\beta s \sqrt{(r^2+1) \left[(|m_0|+|s_0|)+\sqrt{(|m_0|+|s_0|)^2+4\eta_0^2} \right]}}} \quad (7.72)$$

Y operando de obtiene la relación de dispersión para las ondas P:

$$\frac{\alpha^{grid}}{\alpha} = \frac{\text{arc cos } \phi}{2\pi s p} \quad (7.73)$$

7.4.2. Dispersión de las ondas S

Se sabe que:

$$\omega = 2\pi \frac{\beta^{grid}}{\lambda^{grid}} \quad (7.74)$$

De la Ecuación 7.62 se obtiene:

$$\lambda_s^{grid} = \frac{2}{s\sqrt{(r^2+1)\left[(|m_0|+|s_0|) + \sqrt{(|m_0|+|s_0|)^2+4\eta_0^2} \right]}} \quad (7.75)$$

Si se substituyendo la Ecuación 7.68 y la Ecuación 7.69 y la Ecuación 7.75 dentro de la Ecuación 7.74 se llega a:

$$\frac{1}{\beta\sqrt{(r^2+1)\left[(|m_0|+|s_0|) + \sqrt{(|m_0|+|s_0|)^2+4\eta_0^2} \right]}} \frac{1}{2p} \text{arc cos } \phi = \quad (7.76)$$

$$= 2\pi \frac{\beta^{grid}}{2s\sqrt{(r^2+1)\left[(|m_0|+|s_0|) + \sqrt{(|m_0|+|s_0|)^2+4\eta_0^2} \right]}} \quad (7.77)$$

Operando se obtiene la relación de dispersión para las ondas S:

$$\frac{\beta^{grid}}{\beta} = \frac{\text{arc cos } \phi}{2\pi sp} \quad (7.78)$$

7.4.3. Dispersión de velocidad de grupo de las ondas P

Por definición la velocidad de grupo para las ondas P se obtiene al derivar respecto de κ en la Ecuación 7.60, esto es:

$$\alpha_{group}^{grid} = \frac{\partial \omega}{\partial \kappa} = \frac{\partial}{\partial \kappa} \left(\frac{1}{\Delta t} \text{arc cos } \phi \right) = \frac{1}{\Delta t} \frac{-1}{\sqrt{1-\phi^2}} \frac{\partial \phi}{\partial \kappa} \quad (7.79)$$

Por otro lado llamando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial \kappa} &= a_{1,\kappa} = \sum_{j=1}^{j=N} m_j d_j \sin \kappa d_j & \frac{\partial a_4}{\partial \kappa} &= a_{4,\kappa} = \sum_{j=1}^{j=N} \varsigma_j d_j \cos \kappa d_j \\ \frac{\partial a_2}{\partial \kappa} &= a_{2,\kappa} = \sum_{j=1}^{j=N} m_j d_j \cos \kappa d_j & \frac{\partial a_5}{\partial \kappa} &= a_{5,\kappa} = \sum_{j=1}^{j=N} \eta_j d_j \sin \kappa d_j \\ \frac{\partial a_3}{\partial \kappa} &= a_{3,\kappa} = \sum_{j=1}^{j=N} \varsigma_j d_j \sin \kappa d_j & \frac{\partial a_6}{\partial \kappa} &= a_{6,\kappa} = \sum_{j=1}^{j=N} \eta_j d_j \cos \kappa d_j \end{aligned} \quad (7.80)$$

En donde se ha tenido en cuenta:

$$\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j = \kappa (h_j \cos \varphi - k_j \sin \varphi) = \kappa d_j$$

Por otro lado se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \kappa} = \frac{\partial}{\partial \kappa} \left[1 - \frac{(\Delta t)^2}{4} \left[(\alpha^2 + \beta^2) (a_1 + a_3) + \sqrt{[(\alpha^2 + \beta^2) (a_1 + a_3)]^2 -} \right. \right. \\ \left. \left. - 4 \left[(\alpha^2 a_1 + \beta^2 a_3) (\beta^2 a_1 + \alpha^2 a_3) - (\alpha^2 a_2 + \beta^2 a_4) (\beta^2 a_2 + \alpha^2 a_4) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - (\alpha^2 - \beta^2)^2 (a_5^2 - a_6^2) \right] \right] \right] \end{aligned} \quad (7.81)$$

Derivando, sacando factor común β^2 y teniendo en cuenta que $r = \frac{\alpha}{\beta}$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \kappa} = -\frac{\beta^2 (\Delta t)^2}{4} \left[(r^2 + 1) (a_{1,\kappa} + a_{3,\kappa}) + \frac{(r^2 + 1) (a_{1,\kappa} + a_{3,\kappa}) + 2 (r^2 + 1) \times} \right. \\ \left. \frac{\times (a_{1,\kappa} + a_{3,\kappa}) (a_1 + a_3) - 4 (r^2 a_{1,\kappa} + a_{3,\kappa}) (a_1 + r^2 a_3) - (a_{1,\kappa} + r^2 a_{3,\kappa}) (r^2 a_1 + a_3) +} \right. \\ \left. \frac{- 4 \left[(r^2 a_1 + a_3) (a_1 + r^2 a_3) - (r^2 a_2 + a_4) (a_2 + r^2 a_4) - \right. \right.} \\ \left. \left. \frac{+ (r^2 a_{2,\kappa} + a_{4,\kappa}) (a_2 + r^2 a_4) + (a_{2,\kappa} + r^2 a_{4,\kappa}) (r^2 a_2 + a_4) + 2 (r^2 - 1)^2 (a_5 a_{5,\kappa} - a_6 a_{6,\kappa})}{- (r^2 - 1)^2 (a_5^2 - a_6^2)} \right] \right] \end{aligned} \quad (7.82)$$

Llamando:

$$\begin{aligned}
 Y = & -\frac{\beta^2 (\Delta t)^2}{4} \left[(r^2 + 1) (a_{1,\kappa} + a_{3,\kappa}) + \frac{(r^2 + 1) (a_{1,\kappa} + a_{3,\kappa}) + 2 (r^2 + 1) \times}{2\sqrt{[(r^2 + 1) (a_1 + a_3)]^2 -}} \right. \\
 & \times \frac{(a_{1,\kappa} + a_{3,\kappa}) (a_1 + a_3) - 4 (r^2 a_{1,\kappa} + a_{3,\kappa}) (a_1 + r^2 a_3) - (a_{1,\kappa} + r^2 a_{3,\kappa}) (r^2 a_1 + a_3) +}{-4 [(r^2 a_1 + a_3) (a_1 + r^2 a_3) - (r^2 a_2 + a_4) (a_2 + r^2 a_4) -} \\
 & \left. + \frac{(r^2 a_{2,\kappa} + a_{4,\kappa}) (a_2 + r^2 a_4) + (a_{2,\kappa} + r^2 a_{4,\kappa}) (r^2 a_2 + a_4) + 2 (r^2 - 1)^2 (a_5 a_{5,\kappa} - a_6 a_{6,\kappa})}{-(r^2 - 1)^2 (a_5^2 - a_6^2)} \right] \quad (7.83)
 \end{aligned}$$

Y substituyendo en la Ecuación 7.82:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \kappa} = -\frac{\beta^2 (\Delta t)^2}{4} Y \quad (7.84)$$

Si se substituye ahora en la Ecuación 7.79:

$$\alpha_{group}^{grid} = \frac{\partial \omega}{\partial \kappa} = \frac{\partial}{\partial \kappa} \left(\frac{1}{\Delta t} \arccos \phi \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \phi^2}} \frac{\beta^2 \Delta t}{4} Y \quad (7.85)$$

Llamando de nuevo a:

$$\begin{aligned}
 F = & \left[(r^2 + 1) (a_1 + a_3) + \sqrt{[(r^2 + 1) (a_1 + a_3)]^2 -} \right. \\
 & \left. -4 [(r^2 a_1 + a_3) (a_1 + r^2 a_3) - (r^2 a_2 + a_4) (a_2 + r^2 a_4) - \right. \\
 & \left. \left. - (r^2 - 1)^2 (a_5^2 - a_6^2) \right] \right] \quad (7.86)
 \end{aligned}$$

Finalmente teniendo en cuenta la Ecuación 7.68 y substituyendo la Ecuación 7.86

en la Ecuación 7.83 y luego operando, se llega a la siguiente expresión:

$$\alpha_{group}^{grid} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\beta Y}{\sqrt{F - \left(\frac{pF}{\sqrt{2(r^2+1)} \left[(|m_0|+|s_0|) + \sqrt{(|m_0|+|s_0|)^2 + 4\eta_0^2} \right]} \right)}} \quad (7.87)$$

Finalmente teniendo en cuenta que $\beta = \frac{\alpha}{r}$, se llega la expresión:

$$\frac{\alpha_{group}^{grid}}{\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{2}r} \frac{Y}{\sqrt{F - \left(\frac{pF}{\sqrt{2(r^2+1)} \left[(|m_0|+|s_0|) + \sqrt{(|m_0|+|s_0|)^2 + 4\eta_0^2} \right]} \right)}} \quad (7.88)$$

7.4.4. Dispersión de velocidad de grupo de las ondas S

En virtud de $r = \frac{\alpha}{\beta}$, se llega la expresión:

$$\frac{\beta_{group}^{grid}}{\beta} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{Y}{\sqrt{F - \left(\frac{pF}{\sqrt{2(r^2+1)} \left[(|m_0|+|s_0|) + \sqrt{(|m_0|+|s_0|)^2 + 4\eta_0^2} \right]} \right)}} \quad (7.89)$$

8 Irregularidad de la estrella y dispersión

Los coeficientes m_0 , ς_0 y η_0 que aparecen en el criterio de estabilidad dependen de los siguientes factores:

- El número de nodos de la estrella.
- Las coordenadas de cada nodo respecto del nodo central de la estrella.
- La función de ponderación elegida.

Si se toma como función de ponderación:

$$w(h_j, k_j) = \frac{1}{\sqrt{(h_j^2 + k_j^2)^3}}$$

Y teniendo en cuenta la expresión:

$$\frac{1}{\sqrt{(r^2 + 1) \left[(|m_0| + |\varsigma_0|) + \sqrt{(|m_0| + |\varsigma_0|)^2 + 4\eta_0^2} \right]}} \quad (8.1)$$

Resulta que esta depende de la razón de velocidades $r = \frac{\alpha}{\beta}$ y de las coordenadas relativas de cada nodo de la estrella respecto del nodo central de la misma.

Por otro lado los coeficientes m_0 , ς_0 y η_0 son igualmente funciones de la función de ponderación de tal manera que al disminuir las coordenadas relativas de los nodos de la estrella, aumentan dichos coeficientes, lo cual ocurre cuando se aumenta el número de nodos de la malla.

Para un mismo número de nodos en la malla el mínimo valor de los coeficientes mencionados se obtiene para la malla regular.

Sea τ_l la media de las distancias de los nodos de la estrella l al nodo central y sea τ la media de todas las τ_i de la malla, una vez discretizado el dominio se define:

$$\mathbf{h}_i = \tau \begin{pmatrix} \bar{h}_i \\ \bar{k}_i \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \bar{h}_i = \frac{h_i}{\tau} \\ \bar{k}_i = \frac{k_i}{\tau} \end{cases} \quad (8.2)$$

Por otro lado

$$\bar{m}_0 = \frac{m_0}{\tau^2} \quad \bar{\eta}_0 = \frac{\eta_0}{\tau^2} \quad \bar{\varsigma}_0 = \frac{\varsigma_0}{\tau^2} \quad (8.3)$$

Así pues con la Ecuación 8.2 y la Ecuación 8.3 se definen unos índices de regularidad de la malla, el cual substituyendo en la expresión la Ecuación 8.1 resulta:

$$\frac{1}{\sqrt{\sqrt{(r^2 + 1) \left[(|\bar{m}_0| + |\bar{\varsigma}_0|) + \sqrt{(|\bar{m}_0| + |\bar{\varsigma}_0|)^2 + 4\bar{\eta}_0^2} \right]}}} \quad (8.4)$$

Así pues teniendo en cuenta esto, la condición de estabilidad de la Ecuación 7.52 se puede reescribir de la siguiente manera:

$$0 \leq \Delta t \leq \frac{2\tau}{\sqrt{\beta^2 (r^2 + 1) \left[(|\bar{m}_0| + |\bar{\varsigma}_0|) + \sqrt{(|\bar{m}_0| + |\bar{\varsigma}_0|)^2 + 4\bar{\eta}_0^2} \right]}}} \quad (8.5)$$

Para el caso de estrella regular de 8 nodos más el central la expresión anterior quedaría de la siguiente forma:

$$\bar{m}_0 = \frac{\frac{20}{12h^2}}{\left[\frac{h}{2}(1 + \sqrt{2})\right]^2} = \frac{20}{3(1 + \sqrt{2})^2} \quad \bar{\eta}_0 = 0 \quad \bar{\varsigma}_0 = \frac{20}{3(1 + \sqrt{2})^2}$$

Substituyendo de nuevo en la Ecuación 7.52 se llega a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} 0 \leq \Delta t \leq & \frac{2\tau}{\beta\sqrt{(r^2 + 1)} \sqrt{\left[\left(\frac{40}{3(1 + \sqrt{2})^2} \right) + \sqrt{\left(\frac{240}{3(1 + \sqrt{2})^2} \right)^2} \right]}} = \\ & = \frac{\tau}{\beta\sqrt{(r^2 + 1)}} \frac{2\sqrt{3}(1 + \sqrt{2})}{4\sqrt{5}} \end{aligned} \quad (8.6)$$

Finalmente multiplicando el segundo término de la Ecuación 8.6 por el factor:

$$\frac{\sqrt{5}(1 + \sqrt{2})}{\sqrt{3}\sqrt{(|\bar{m}_0| + |\bar{\varsigma}_0|) + \sqrt{(|\bar{m}_0| + |\bar{\varsigma}_0|)^2 + 4\bar{\eta}_0^2}}} \quad (8.7)$$

Se obtiene de nuevo la Ecuación 7.52. Así pues se tiene el indicador de regularidad de la malla, este es:

$$IIS = \frac{\sqrt{5}(1 + \sqrt{2})}{\sqrt{3}\sqrt{(|\bar{m}_0| + |\bar{\zeta}_0|) + \sqrt{(|\bar{m}_0| + |\bar{\zeta}_0|)^2 + 4\bar{\eta}_0^2}}} \quad (8.8)$$

El cual será la unidad para una malla regular. Se adoptará como indicador de regularidad de una malla *IIC* al mínimo valor de los indicadores de irregularidad obtenidos en cada una de las estrellas de la malla. El control de la regularidad de la malla es importante, ya que al disminuir *IIC* tendrá que disminuir el paso temporal, sin embargo mediante un proceso adaptativo de la malla se podrán ir añadiendo nodos de manera selectiva y conseguir índices de regularidad más próximos a la unidad, y por lo tanto pasos de tiempo mayores y menores relaciones de dispersión, lo que a su vez redundará en menor error cometido con la aproximación.

9 Contornos absorbentes, Perfect Matched Layers (PML)

Cuando se quiere modelizar numéricamente con diferencias o elementos finitos un problema definido sobre un espacio infinito surge el problema de que el modelo debe ser finito y, por tanto, debe incluir contornos inexistentes en el problema real. Algunos problemas planteados poseen un truncamiento natural al tener estas soluciones que decaen rápidamente con el espacio, por lo que el truncamiento resulta irrelevante siempre que se disponga de una malla lo suficientemente grande, existen otros problemas como el de Poisson en el cual la solución del mismo varía cada vez más lentamente a medida que aumenta la distancia, en este tipo de problemas un cambio de coordenadas del tipo $\tilde{x} = \tan x$ en donde $x \in (-\infty, \infty)$ y $\tilde{x} \in (-1, 1)$ solucionaría el problema del truncamiento.

Sin embargo uno de los problemas más difíciles a la hora de trincar una malla resulta ser el problema de ondas, ya que este decae muy lentamente con la distancia, así pues se hace necesaria la existencia de unos contornos que de alguna forma absorban las ondas sin reflejarlas y que de esta manera no se alteren los resultados en la zona de interés debido a la reflexión de las ondas en los contornos.

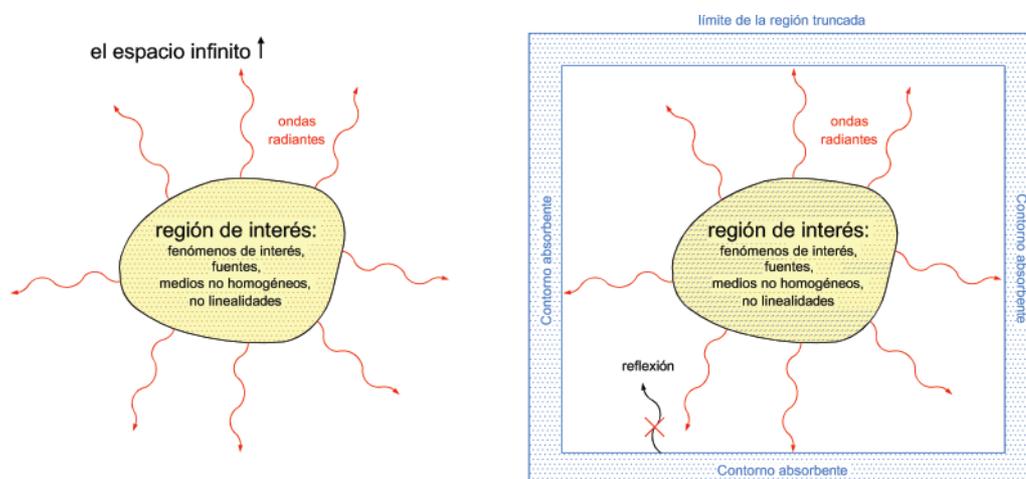


Figura 9.1: Contornos absorbentes en la frontera de un dominio

Se han llevado a cabo un gran número de aproximaciones a los contornos absorbentes la mayoría de estas aproximaciones se basan en uno de los dos grupos siguientes de ideas:

- Una zona finita de la frontera en la que la onda se atenúa poco a poco.
- Una aproximación a la ecuación de onda, de un solo sentido, en el punto de la malla de frontera (o varios puntos - según el orden del esquema).

Dentro del primer grupo, una primera aproximación al problema de los contornos absorbentes se puede encontrar en artículos de Israeli and Orszag (1981), Korn and Stöckl (1982), Cerjan et al. (1985), Kosloff and Kosloff (1986), Sochacki et al. (1987), Bérenger (1994), Chew and Liu (1996), Collino and Tsogka (1998, 2001), Chen et al. (2000), Komatitsch and Tromp (2003), Festa and Nielsen (2003).

Los artículos de Bérenger (1994) [18] introducen el método de Perfectly Matched Layers (PML) habiéndose vuelto este últimamente muy popular ya que es probablemente, hasta ahora, la mejor herramienta para evitar la reflexión de las ondas en los borde de la malla.

9.1. Formulación del PML

Partiendo de la ecuación escalar de onda:

$$\nabla (a\nabla u) = \frac{1}{b} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\ddot{u}}{b} \tag{9.1}$$

En donde $u(x, t)$ es la amplitud de la onda escalar y $c = \sqrt{ab}$ es la velocidad de fase.

Por conveniencia separamos esta ecuación de segundo orden en dos ecuaciones de primer orden acopladas, esto es:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = b\nabla\mathbf{v} \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = a\nabla u \end{cases} \rightarrow \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b\nabla \\ a\nabla & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{D}}\mathbf{w} \tag{9.2}$$

$\hat{\mathbf{D}}$ se trata de un operador antihermítico de dimensión 4x4 en 3-D que conduce a soluciones oscilatorias, conservación de la energía y otras propiedades de las ondas.

Así pues $\mathbf{w}(x, t)$ es la solución de una ecuación de onda, propagándose por un espacio infinito, de la cual se tiene una región de interés, en el entorno de $x = 0$ y se quiere truncar la solución fuera de la zona de interés, en particular nos vamos a centrar en truncar la solución en el eje $+x$. Para esto se realizará una extensión analítica del espacio real.

Se parte de las siguientes suposiciones: el espacio es homogéneo, lineal e invariante con el tiempo.

La solución de la onda se puede poner de la siguiente forma:

$$\mathbf{w}(x, t) = \sum \mathbf{W}(y, z) \exp i(\mathbf{kx} - \omega t) \quad (9.3)$$

\mathbf{k} es el vector de onda y $\frac{\kappa}{\omega}$ la velocidad de fase de la onda que puede ser diferente a la velocidad de grupo $\frac{\partial \kappa}{\partial \omega}$ asumimos $\kappa > 0$.

La extensión analítica consiste en que a partir de una determinada x se añade una parte imaginaria lineal y creciente, de tal forma que se transforma la solución de la onda en una con un amortiguamiento exponencial, esto es:

$$\exp i\kappa (Rex + iImx) = \exp i\kappa Rex \exp -\kappa Imx \quad (9.4)$$

Así pues se tiene que:

$$\tilde{x} = x + if(x) \rightarrow \partial \tilde{x} = \left(1 + i \frac{\partial f(x)}{\partial x}\right) \partial x \rightarrow \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\delta_x(x)}{\omega}$$

Se hace:

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{1}{1 + i \frac{\delta_x(x)}{\omega}} \frac{\partial}{\partial x} \quad (9.5)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \exp i\kappa \tilde{x} &= \exp i\kappa \int \left(1 + i \frac{\partial f(x)}{\partial x}\right) dx = \exp i\kappa \int \left(1 + i \frac{\delta_x(x)}{\omega}\right) dx = \\ &= \exp i\kappa x - \frac{\kappa}{\omega} \int \delta_x(x) dx \end{aligned}$$

9.1.1. Aplicación del PML para $u = u(x, t)$

En este caso se va a aplicar PML a la onda escalar, para ello se parte del siguiente problema:

$$\nabla (a \nabla u) = \frac{1}{b} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\ddot{u}}{b}$$

El cual se separa en dos ecuaciones de primer orden acopladas, esto es:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = b \nabla \mathbf{v} \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = a \nabla u \end{cases} \quad (9.6)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u(x) \exp -i\omega t \\ v(x, t) &= v(x) \exp -i\omega t \end{aligned} \quad (9.7)$$

Entonces:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = b \nabla \mathbf{v} = b \frac{\partial}{\partial t} (u(x) \exp -i\omega t) = -i\omega u(x) \exp i\omega t = -i\omega u \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = a \nabla u = a \frac{\partial}{\partial t} (v(x) \exp -i\omega t) = -i\omega v(x) \exp i\omega t = -i\omega v \end{cases} \quad (9.8)$$

Por otro lado teniendo en cuenta la Ecuación 9.5 se tiene que:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = b \nabla \mathbf{v} = b \frac{\partial v}{\partial x} = b \frac{1}{1 + i \frac{\delta_x(x)}{\omega}} \frac{\partial v}{\partial x} = -i\omega u \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = a \nabla u = a \frac{\partial u}{\partial x} = a \frac{1}{1 + i \frac{\delta_x(x)}{\omega}} \frac{\partial u}{\partial x} = -i\omega v \end{cases} \quad (9.9)$$

Así pues operando en la Ecuación 9.9 se llega a:

$$\begin{cases} b \frac{\partial v}{\partial x} = -i\omega u \left(1 + i \frac{\delta_x(x)}{\omega}\right) = -i\omega u + \delta_x(x)u \\ a \frac{\partial u}{\partial x} = -i\omega v \left(1 + i \frac{\delta_x(x)}{\omega}\right) = -i\omega v + \delta_x(x)v \end{cases} \quad (9.10)$$

Finalmente pasando al dominio del tiempo se obtiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -i\omega u = b \frac{\partial v}{\partial x} - \delta_x(x)u \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -i\omega v = a \frac{\partial u}{\partial x} - \delta_x(x)v \end{cases} \quad (9.11)$$

9.1.2. Aplicación del PML para $u = u(x, y, t)$

En este caso la Ecuación 9.6 se transforma en:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = b \nabla \mathbf{v} = b \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = -i\omega u \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial x} = -i\omega v_x \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial y} = -i\omega v_y \end{array} \right. \quad (9.12)$$

Por otro lado teniendo en cuenta la Ecuación 9.5 se tiene que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = b \nabla \mathbf{v} = b \left(\frac{1}{1 + i \frac{\delta_x(x)}{\omega}} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = -i\omega u \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} = a \left(\frac{1}{1 + i \frac{\delta_x(x)}{\omega}} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \end{array} \right. \quad (9.13)$$

Y operando se llega a la siguiente expresión:

$$\left\{ \begin{array}{l} b \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + i \frac{\delta_x(x)}{\omega} \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = -i\omega u + \delta_x(x)u \\ a \frac{\partial u}{\partial x} = -i\omega v_x + \delta_x(x)v_x \end{array} \right. \quad (9.14)$$

La segunda ecuación no presenta problemas para pasarla al dominio del tiempo, pero la primera presenta el elemento $ib \frac{\delta_x(x)}{\omega} \frac{\partial v_y}{\partial y}$ que dificulta este paso.

Para solventar este inconveniente se crea la siguiente función:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi = ib \frac{\delta_x(x)}{\omega} \frac{\partial v_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, y) \exp -i\omega t = -i\omega \psi(x, y) \exp -i\omega t = -i\omega \psi = \\ = b \delta_x(x) \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{array} \right. \quad (9.15)$$

Así pues la Ecuación 9.14 queda de la siguiente forma:

$$b \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \psi \right) = -i\omega u + \delta_x(x)u$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = b\nabla \mathbf{v} - \delta_x(x)u + \psi$$

Finalmente resulta el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = b \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) - \delta_x(x)u + \psi \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial x} - \delta_x(x)v_x \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} = b\delta_x(x) \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{array} \right. \quad (9.16)$$

Nótese que en la dirección del eje y no se ha introducido amortiguamiento este contorno absorbente correspondería a un contorno anisotrópico. La última ecuación es una ecuación auxiliar con $\psi(0) = 0$.

De la 2ª y 3ª ecuación se deduce que puede ser sustituido por el siguiente tensor de 2x2:

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{a}{1+i\frac{\delta_x(x)}{\omega}} & 0 \\ 0 & a \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{a} + i\frac{\delta_x(x)}{a\omega} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{array} \right)$$

9.2. PML aplicado a la onda plana. Amortiguamiento en una dirección

A continuación se va a aplicar PML para una onda plana que se propaga por un espacio infinito, en este caso se va a aplicar amortiguamiento en la dirección x únicamente.

Partiendo de la ecuación de ondas planas obtenida en la Ecuación 7.26, y teniendo en cuenta y la Ecuación 9.5:

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{1}{1+i\frac{\delta_x(x)}{\omega}} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial x} \quad (9.17)$$

La ecuación de ondas se puede expresar como sigue:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} = \frac{\alpha^2}{S} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{S} \frac{\partial U_x}{\partial x} \right) + \beta^2 \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{S} \frac{\partial^2 U_y}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 U_y}{\partial t^2} = \frac{\beta^2}{S} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{S} \frac{\partial U_y}{\partial x} \right) + \alpha^2 \frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2} + \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{S} \frac{\partial^2 U_x}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (9.18)$$

Es más conveniente dividir estas dos ecuaciones de segundo orden en cinco de primer orden, esto se puede hacer introduciendo los esfuerzos:

$$\begin{cases} \frac{\partial U_x}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial U_y}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = (\lambda + 2G) \frac{\partial U_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial U_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} = G \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} = \lambda \frac{\partial U_x}{\partial x} + (\lambda + 2G) \frac{\partial U_y}{\partial y} \end{cases} \quad (9.19)$$

Ahora el sistema se encuentra en condiciones para aplicar de manera sencilla PML, igualmente esta vez se va a aplicar exclusivamente en el eje x .

$$\begin{cases} \frac{\partial U_x}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{1+i\frac{\delta_x(x)}{\omega}} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right) = -i\omega U_x \\ \frac{\partial U_y}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{1+i\frac{\delta_x(x)}{\omega}} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) = -i\omega U_y \\ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = (\lambda + 2G) \frac{1}{1+i\frac{\delta_x(x)}{\omega}} \frac{\partial U_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial U_y}{\partial y} = -i\omega \sigma_{xx} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} = G \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{1}{1+i\frac{\delta_x(x)}{\omega}} \frac{\partial U_y}{\partial x} \right) = -i\omega \sigma_{xy} \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} = \lambda \frac{1}{1+i\frac{\delta_x(x)}{\omega}} \frac{\partial U_x}{\partial x} + (\lambda + 2G) \frac{\partial U_y}{\partial y} = -i\omega \sigma_{yy} \end{cases} \quad (9.20)$$

Operando se obtiene:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + i \frac{\delta_x(x)}{\omega} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right) = \frac{\partial U_x}{\partial t} + \delta_x(x) U_x \\ \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + i \frac{\delta_x(x)}{\omega} \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) = \frac{\partial U_y}{\partial t} + \delta_x(x) U_y \\ (\lambda + 2G) \frac{\partial U_x}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial U_y}{\partial y} + i \frac{\delta_x(x)}{\omega} \frac{\partial U_y}{\partial y} \right) = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} + \delta_x(x) \sigma_{xx} \\ G \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + i \frac{\delta_x(x)}{\omega} \frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right) = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} + \delta_x(x) \sigma_{xy} \\ \lambda \frac{\partial U_x}{\partial x} + (\lambda + 2G) \left(\frac{\partial U_y}{\partial y} + i \frac{\delta_x(x)}{\omega} \frac{\partial U_y}{\partial y} \right) = \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} + \delta_x(x) \sigma_{yy} \end{cases} \quad (9.21)$$

Como ya se ha visto para poder pasar al dominio del tiempo es necesario introducir una serie de ecuaciones auxiliares, en este caso resultan ser 5 ecuaciones auxiliares,

estas son:

$$\begin{cases} \psi_1 = \frac{1}{\rho} i \frac{\delta_x(x)}{\omega} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = -i\omega \psi_1 = \frac{\delta_x(x)}{\rho} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \\ \psi_2 = \frac{1}{\rho} i \frac{\delta_x(x)}{\omega} \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = -i\omega \psi_2 = \frac{\delta_x(x)}{\rho} \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \\ \psi_3 = \lambda i \frac{\delta_x(x)}{\omega} \frac{\partial U_y}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial \psi_3}{\partial t} = -i\omega \psi_3 = \lambda \delta_x(x) \frac{\partial U_y}{\partial y} \\ \psi_4 = G i \frac{\delta_x(x)}{\omega} \frac{\partial U_x}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial \psi_4}{\partial t} = -i\omega \psi_4 = G \delta(x) \frac{\partial U_x}{\partial y} \\ \psi_5 = (\lambda + 2G) i \frac{\delta_x(x)}{\omega} \frac{\partial U_y}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial \psi_5}{\partial t} = -i\omega \psi_5 = (\lambda + 2G) \delta(x) \frac{\partial U_y}{\partial y} \end{cases} \quad (9.22)$$

Así pues finalmente resulta el siguiente sistema de 10 ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{\partial U_x}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right) + \psi_1 - \delta_x(x) U_x \\ \frac{\partial U_y}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) + \psi_2 - \delta_x(x) U_y \\ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = (\lambda + 2G) \frac{\partial U_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial U_y}{\partial y} + \psi_3 - \delta_x(x) \sigma_{xx} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} = G \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right) + \psi_4 - \delta_x(x) \sigma_{xy} \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} = \lambda \frac{\partial U_x}{\partial x} + (\lambda + 2G) \frac{\partial U_y}{\partial y} + \psi_5 - \delta_x(x) \sigma_{yy} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \frac{\delta_x(x)}{\rho} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = \frac{\delta_x(x)}{\rho} \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial t} = \lambda \delta_x(x) \frac{\partial U_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial t} = G \delta(x) \frac{\partial U_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_5}{\partial t} = (\lambda + 2G) \delta(x) \frac{\partial U_y}{\partial y} \end{cases} \quad (9.23)$$

9.3. PML aplicado a la onda plana. Amortiguamiento en dos direcciones

Ahora se introduce amortiguamiento en ambas direcciones, tanto en el eje x como en el eje y , esto es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &\rightarrow \frac{1}{1 + i \frac{\delta_x(x)}{\omega}} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} &\rightarrow \frac{1}{1 + i \frac{\delta_y(y)}{\omega}} \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

Aplicando esto a la Ecuación 9.19, se obtiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial U_x}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{1+i\frac{\delta_x(x)}{\omega}} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{1+i\frac{\delta_y(y)}{\omega}} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right) = -i\omega U_x \\ \frac{\partial U_y}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{1+i\frac{\delta_x(x)}{\omega}} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{1}{1+i\frac{\delta_y(y)}{\omega}} \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) = -i\omega U_y \\ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = \frac{\lambda+2G}{1+i\frac{\delta_x(x)}{\omega}} \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\lambda}{1+i\frac{\delta_y(y)}{\omega}} \frac{\partial U_y}{\partial y} = -i\omega \sigma_{xx} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} = G \left(\frac{1}{1+i\frac{\delta_y(y)}{\omega}} \frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{1}{1+i\frac{\delta_x(x)}{\omega}} \frac{\partial U_y}{\partial x} \right) = -i\omega \sigma_{xy} \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} = \frac{\lambda}{1+i\frac{\delta_x(x)}{\omega}} \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{(\lambda+2G)}{1+i\frac{\delta_y(y)}{\omega}} \frac{\partial U_y}{\partial y} = -i\omega \sigma_{yy} \end{cases} \quad (9.24)$$

Y operando se llega a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_x}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + i\frac{\delta_y(y)}{\omega} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \right. \\ &\left. + i\frac{\delta_x(x)}{\omega} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right) = -i\omega U_x \left(1 + i\frac{\delta_x(x)}{\omega} \right) \left(1 + i\frac{\delta_y(y)}{\omega} \right) \\ \\ \frac{\partial U_y}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + i\frac{\delta_y(y)}{\omega} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \right. \\ &\left. + i\frac{\delta_x(x)}{\omega} \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) = -i\omega U_y \left(1 + i\frac{\delta_x(x)}{\omega} \right) \left(1 + i\frac{\delta_y(y)}{\omega} \right) \\ \\ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} &= (\lambda + 2G) \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + i\frac{\delta_y(y)}{\omega} \frac{\partial U_x}{\partial x} \right) + \\ &+ \lambda \left(\frac{\partial U_y}{\partial y} + i\frac{\delta_x(x)}{\omega} \frac{\partial U_y}{\partial y} \right) = -i\omega \sigma_{xx} \left(1 + i\frac{\delta_x(x)}{\omega} \right) \left(1 + i\frac{\delta_y(y)}{\omega} \right) \\ \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} &= G \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + i\frac{\delta_x(x)}{\omega} \frac{\partial U_x}{\partial y} + \right. \\ &\left. + \frac{\partial U_y}{\partial x} + i\frac{\delta_y(y)}{\omega} \frac{\partial U_y}{\partial x} \right) = -i\omega \sigma_{xy} \frac{\delta_x(x)\delta_y(y)}{\omega^2} \left(1 + i\frac{\delta_x(x)}{\omega} \right) \left(1 + i\frac{\delta_y(y)}{\omega} \right) \\ \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} &= \lambda \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + i\frac{\delta_y(y)}{\omega} \frac{\partial U_x}{\partial x} \right) + \\ &+ (\lambda + 2G) \left(\frac{\partial U_y}{\partial y} + i\frac{\delta_x(x)}{\omega} \frac{\partial U_y}{\partial y} \right) = -i\omega \sigma_{yy} \left(1 + i\frac{\delta_x(x)}{\omega} \right) \left(1 + i\frac{\delta_y(y)}{\omega} \right) \end{aligned} \quad (9.25)$$

Siendo:

$$\left(1 + i\frac{\delta_x(x)}{\omega}\right) \left(1 + i\frac{\delta_y(y)}{\omega}\right) = 1 - \frac{\delta_x(x)\delta_y(y)}{\omega^2} + i\frac{\delta_x(x) + \delta_y(y)}{\omega}$$

Se llega a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + i\frac{\delta_y(y)}{\omega} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \right. \\ & \left. + i\frac{\delta_x(x)}{\omega} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right) = \frac{\partial U_x}{\partial t} \left(1 - \frac{\delta_x(x)\delta_y(y)}{\omega^2} \right) + (\delta_x(x) + \delta_y(y)) U_x \\ & \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + i\frac{\delta_y(y)}{\omega} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \right. \\ & \left. + i\frac{\delta_x(x)}{\omega} \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) = \frac{\partial U_y}{\partial t} \left(1 - \frac{\delta_x(x)\delta_y(y)}{\omega^2} \right) + (\delta_x(x) + \delta_y(y)) U_{xy} \\ & (\lambda + 2G) \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + i\frac{\delta_y(y)}{\omega} \frac{\partial U_x}{\partial x} \right) + \\ & + \lambda \left(\frac{\partial U_y}{\partial y} + i\frac{\delta_x(x)}{\omega} \frac{\partial U_y}{\partial y} \right) = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} \left(1 - \frac{\delta_x(x)\delta_y(y)}{\omega^2} \right) + (\delta_x(x) + \delta_y(y)) \sigma_{xx} \\ & G \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + i\frac{\delta_x(x)}{\omega} \frac{\partial U_x}{\partial y} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial U_y}{\partial x} + i\frac{\delta_y(y)}{\omega} \frac{\partial U_y}{\partial x} \right) = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} \left(1 - \frac{\delta_x(x)\delta_y(y)}{\omega^2} \right) + (\delta_x(x) + \delta_y(y)) \sigma_{xy} \\ & \lambda \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + i\frac{\delta_y(y)}{\omega} \frac{\partial U_x}{\partial x} \right) + \\ & + (\lambda + 2G) \left(\frac{\partial U_y}{\partial y} + i\frac{\delta_x(x)}{\omega} \frac{\partial U_y}{\partial y} \right) = \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} \left(1 - \frac{\delta_x(x)\delta_y(y)}{\omega^2} \right) + (\delta_x(x) + \delta_y(y)) \sigma_{yy} \end{aligned} \tag{9.26}$$

Teniendo en cuenta las 10 siguientes funciones auxiliares:

$$\psi_1 = \frac{1}{\rho} i \frac{\delta_y}{\omega} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \frac{\delta_y}{\rho} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}$$

$$\psi_2 = \frac{1}{\rho} i \frac{\delta_x}{\omega} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = \frac{\delta_x}{\rho} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}$$

$$\psi_3 = \frac{1}{\rho} i \frac{\delta_y}{\omega} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial \psi_3}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \delta_y \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x}$$

$$\psi_4 = \frac{1}{\rho} i \frac{\delta_x}{\omega} \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial \psi_4}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \delta_x \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}$$

$$\psi_5 = \lambda i \frac{\delta_y}{\omega} \frac{\partial U_x}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial \psi_5}{\partial t} = \lambda \delta_y \frac{\partial U_x}{\partial x}$$

$$\psi_6 = (\lambda + 2G) i \frac{\delta_x}{\omega} \frac{\partial U_y}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial \psi_6}{\partial t} = (\lambda + 2G) \delta_x \frac{\partial U_y}{\partial y}$$

$$\psi_7 = G i \frac{\delta_x}{\omega} \frac{\partial U_x}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial \psi_7}{\partial t} = G \delta_x \frac{\partial U_x}{\partial y}$$

$$\psi_8 = G i \frac{\delta_y}{\omega} \frac{\partial U_y}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial \psi_8}{\partial t} = G \delta_y \frac{\partial U_y}{\partial x}$$

$$\psi_9 = \lambda i \frac{\delta_y}{\omega} \frac{\partial U_x}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial \psi_9}{\partial t} = \lambda \delta_y \frac{\partial U_x}{\partial x}$$

$$\psi_{10} = (\lambda + 2G) i \frac{\delta_x}{\omega} \frac{\partial U_y}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial \psi_{10}}{\partial t} = (\lambda + 2G) \delta_x \frac{\partial U_y}{\partial y} \quad (9.27)$$

Finalmente se obtiene la siguiente expresión del PML en las dos direcciones:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U_x}{\partial t} &= \frac{1}{\rho \left(1 - \frac{\delta_x \delta_y}{\omega^2}\right)} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \psi_1 + \psi_2 \right) - \frac{(\delta_x + \delta_y)}{\left(1 - \frac{\delta_x \delta_y}{\omega^2}\right)} U_x \\
 \frac{\partial U_y}{\partial t} &= \frac{1}{\rho \left(1 - \frac{\delta_x \delta_y}{\omega^2}\right)} \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \psi_3 + \psi_4 \right) - \frac{(\delta_x + \delta_y)}{\left(1 - \frac{\delta_x \delta_y}{\omega^2}\right)} U_y \\
 \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} &= \frac{1}{\left(1 - \frac{\delta_x \delta_y}{\omega^2}\right)} \times \\
 &\times \left((\lambda + 2G) \frac{\partial U_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial U_y}{\partial y} + \psi_5 + \psi_6 \right) - \frac{(\delta_x + \delta_y)}{\left(1 - \frac{\delta_x \delta_y}{\omega^2}\right)} \sigma_{xx} \\
 \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} &= \frac{1}{\left(1 - \frac{\delta_x \delta_y}{\omega^2}\right)} \times \\
 &\times \left(G \frac{\partial U_y}{\partial x} + G \frac{\partial U_x}{\partial y} + \psi_7 + \psi_8 \right) - \frac{(\delta_x + \delta_y)}{\left(1 - \frac{\delta_x \delta_y}{\omega^2}\right)} \sigma_{xy} \\
 \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} &= \frac{1}{\left(1 - \frac{\delta_x \delta_y}{\omega^2}\right)} \times \\
 &\times \left(\lambda \frac{\partial U_x}{\partial x} + (\lambda + 2G) \frac{\partial U_y}{\partial y} + \psi_9 + \psi_{10} \right) - \frac{(\delta_x + \delta_y)}{\left(1 - \frac{\delta_x \delta_y}{\omega^2}\right)} \sigma_{yy}
 \end{aligned} \tag{9.28}$$

Por último aplicando PML a ambas direcciones y con el mismo factor de amortiguamiento se obtiene una expresión en la cual desaparecen las funciones auxiliares, esto es:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} &\rightarrow \frac{1}{1 + i \frac{\delta}{\omega}} \frac{\partial}{\partial x} \\
 \frac{\partial}{\partial y} &\rightarrow \frac{1}{1 + i \frac{\delta}{\omega}} \frac{\partial}{\partial y} \\
 \left\{ \begin{aligned}
 \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right) &= -i\omega U_x \left(1 + i \frac{\delta}{\omega} \right) = \frac{\partial U_x}{\partial t} + \delta U_x \\
 \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) &= -i\omega U_y \left(1 + i \frac{\delta}{\omega} \right) = \frac{\partial U_y}{\partial t} + \delta U_y \\
 (\lambda + 2G) \frac{\partial U_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial U_y}{\partial y} &= -i\omega \sigma_{xx} \left(1 + i \frac{\delta}{\omega} \right) = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} + \delta \sigma_{xx} \\
 G \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right) &= -i\omega \sigma_{xy} \left(1 + i \frac{\delta}{\omega} \right) = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} + \delta \sigma_{xy} \\
 \lambda \frac{\partial U_x}{\partial x} + (\lambda + 2G) \frac{\partial U_y}{\partial y} &= -i\omega \sigma_{yy} \left(1 + i \frac{\delta}{\omega} \right) = \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} + \delta \sigma_{yy}
 \end{aligned} \right. \tag{9.29}
 \end{aligned}$$

9.4. Formulación de la ecuación de ondas plana con PML en DFG

Así pues en este apartado se va a obtener la formulación explícita de la ecuación de ondas en diferencias finitas generalizadas y aplicando contornos absorbentes en los bordes del dominio.

En primer lugar se van a establecer las ecuaciones para el amortiguamiento en una sola dirección, para después obtener estas expresiones para el amortiguamiento en ambas direcciones.

Así pues teniendo en cuenta que las expresiones de diferencias finitas generalizadas ya expuestas en la Ecuación 7.26 se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_0}{\partial x} &= -\vartheta_0 u_0^n + \sum_{j=1}^{j=N} \vartheta_j u_j^n \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} &= -\varrho_0 u_0^n + \sum_{j=1}^{j=N} \varrho_j u_j^n\end{aligned}\quad (9.30)$$

Además de diferencias finitas clásicas se obtiene, como ya se ha visto la expresión de las derivadas temporales, por lo que substituyendo en la Ecuación 9.19 se obtiene:

$$\begin{aligned}u_{x,0}^n &= u_{x,0}^{n-1} + \frac{\Delta t}{\rho} \left(-\vartheta_0 \sigma_{xx,0}^{n-1} + \sum_{j=1}^{j=N} \vartheta_j \sigma_{xx,j}^{n-1} - \varrho_0 \sigma_{xy,0}^{n-1} + \sum_{j=1}^{j=N} \varrho_j \sigma_{xy,j}^{n-1} \right) + \\ &\quad + \Delta t \left(\psi_{1,0}^{n-1} - \delta_x u_{x,0}^{n-1} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_{y,0}^n &= u_{y,0}^{n-1} + \frac{\Delta t}{\rho} \left(-\vartheta_0 \sigma_{xy,0}^{n-1} + \sum_{j=1}^{j=N} \vartheta_j \sigma_{xy,j}^{n-1} - \varrho_0 \sigma_{yy,0}^{n-1} + \sum_{j=1}^{j=N} \varrho_j \sigma_{yy,j}^{n-1} \right) + \\ &\quad + \Delta t \left(\psi_{2,0}^{n-1} - \delta_x u_{y,0}^{n-1} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xx,0}^n &= \sigma_{xx,0}^{n-1} + \Delta t \left[(\lambda + 2G) \left(-\vartheta_0 u_{x,0}^{n-1} + \sum_{j=1}^{j=N} \vartheta_j u_{x,j}^{n-1} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \lambda \left(\varrho_0 u_{y,0}^{n-1} + \sum_{j=1}^{j=N} \varrho_j u_{y,j,0}^{n-1} \right) \right] + \Delta t \left(\psi_{3,0}^{n-1} - \delta_x \sigma_{xx,0}^{n-1} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xy,0}^n &= \sigma_{xy,0}^{n-1} + \Delta t G \left(-\vartheta_0 u_{y,0}^{n-1} + \sum_{j=1}^{j=N} \vartheta_j u_{y,j}^{n-1} - \varrho_0 u_{x,0}^{n-1} + \sum_{j=1}^{j=N} \varrho_j u_{x,j}^{n-1} \right) + \\
&\quad + \Delta t \left(\psi_{4,0}^{n-1} - \delta_x \sigma_{xy,0}^{n-1} \right) \\
\sigma_{yy,0}^n &= \sigma_{yy,0}^{n-1} + \Delta t \left[\lambda \left(-\vartheta_0 u_{x,0}^{n-1} + \sum_{j=1}^{j=N} \vartheta_j u_{x,j}^{n-1} \right) - \right. \\
&\quad \left. - (\lambda + 2G) \left(\varrho_0 u_{y,0}^{n-1} + \sum_{j=1}^{j=N} \varrho_j u_{y,j}^{n-1} \right) \right] + \Delta t \left(\psi_{5,0}^{n-1} - \delta_x \sigma_{yy,0}^{n-1} \right)
\end{aligned} \tag{9.31}$$

Por otro lado para las cinco funciones auxiliares se tiene que igualmente su formulación en diferencias finitas generalizadas es la siguiente:

$$\psi_{1,0}^n = \psi_{1,0}^{n-1} + \frac{\Delta t}{\rho} \delta_x \left(-\varrho_0 \sigma_{xy,0}^{n-1} + \sum_{j=1}^{j=N} \varrho_j \sigma_{xy,j}^{n-1} \right)$$

$$\psi_{2,0}^n = \psi_{2,0}^{n-1} + \frac{\Delta t}{\rho} \delta_x \left(-\varrho_0 \sigma_{yy,0}^{n-1} + \sum_{j=1}^{j=N} \varrho_j \sigma_{yy,j}^{n-1} \right)$$

$$\psi_{3,0}^n = \psi_{3,0}^{n-1} + \lambda \Delta t \delta_x \left(-\vartheta_0 u_{y,0}^{n-1} + \sum_{j=1}^{j=N} \vartheta_j u_{y,j}^{n-1} \right)$$

$$\psi_{4,0}^n = \psi_{4,0}^{n-1} + G \Delta t \delta_x \left(-\varrho_0 u_{x,0}^{n-1} + \sum_{j=1}^{j=N} \varrho_j u_{x,j}^{n-1} \right)$$

$$\psi_{5,0}^n = \psi_{5,0}^{n-1} + (\lambda + 2G) \Delta t \delta_x \left(-\varrho_0 u_{y,0}^{n-1} + \sum_{j=1}^{j=N} \varrho_j u_{y,j}^{n-1} \right)$$

En cuanto a la definición de δ_x esta puede ser la siguiente:

$$\delta_x(x) = \frac{\delta_x}{\Delta t} \left(\frac{x_i - x}{y - x} \right) Q$$

Donde tanto δ_x como Q son constantes a determinar, mientras que x_i es la coordenada x del nodo en cuestión, x es la coordenada a partir de la que comienza a aplicarse PML e y es la coordenada donde termina de aplicarse PML.

En el caso de amortiguamiento en ambas direcciones se obtiene de igual modo la expresión explícita de las DFG, según la Ecuación 9.29 y la Ecuación 9.30 se tiene que:

$$\begin{aligned}
 u_{x,0}^n &= u_{x,0}^{n-1} + \frac{\Delta t}{\rho} \left(-\vartheta_0 \sigma_{xx,0}^{n-1} + \sum_{j=1}^{j=N} \vartheta_j \sigma_{xx,j}^{n-1} - \varrho_0 \sigma_{xy,0}^{n-1} + \sum_{j=1}^{j=N} \varrho_j \sigma_{xy,j}^{n-1} \right) - \\
 &\quad - \Delta t \delta u_{x,0}^{n-1} \\
 u_{y,0}^n &= u_{y,0}^{n-1} + \frac{\Delta t}{\rho} \left(-\vartheta_0 \sigma_{xy,0}^{n-1} + \sum_{j=1}^{j=N} \vartheta_j \sigma_{xy,j}^{n-1} - \varrho_0 \sigma_{yy,0}^{n-1} + \sum_{j=1}^{j=N} \varrho_j \sigma_{yy,j}^{n-1} \right) - \\
 &\quad - \Delta t \delta u_{y,0}^{n-1} \\
 \sigma_{xx,0}^n &= \sigma_{xx,0}^{n-1} + \Delta t \left[(\lambda + 2G) \left(-\vartheta_0 u_{x,0}^{n-1} + \sum_{j=1}^{j=N} \vartheta_j u_{x,j}^{n-1} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \lambda \left(\varrho_0 u_{y,0}^{n-1} + \sum_{j=1}^{j=N} \varrho_j u_{y,j}^{n-1} \right) \right] - \Delta t \delta \sigma_{xx,0}^{n-1} \\
 \sigma_{xy,0}^n &= \sigma_{xy,0}^{n-1} + \Delta t G \left(-\vartheta_0 u_{y,0}^{n-1} + \sum_{j=1}^{j=N} \vartheta_j u_{y,j}^{n-1} - \varrho_0 u_{x,0}^{n-1} + \sum_{j=1}^{j=N} \varrho_j u_{x,j}^{n-1} \right) - \\
 &\quad - \Delta t \delta \sigma_{xy,0}^{n-1} \\
 \sigma_{yy,0}^n &= \sigma_{yy,0}^{n-1} + \Delta t \left[\lambda \left(-\vartheta_0 u_{x,0}^{n-1} + \sum_{j=1}^{j=N} \vartheta_j u_{x,j}^{n-1} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - (\lambda + 2G) \left(\varrho_0 u_{y,0}^{n-1} + \sum_{j=1}^{j=N} \varrho_j u_{y,j}^{n-1} \right) \right] - \Delta t \delta \sigma_{yy,0}^{n-1}
 \end{aligned} \tag{9.32}$$

10 Aplicaciones

A continuación se va a presentar una serie de aplicaciones del Método de Diferencias Finitas Generalizadas a la resolución de ondas bidimensionales, en las cuales se ha aplicado también Perfect Matched Layers.

En concreto se resuelve la Ecuación 7.20 para diferentes valores de las velocidades de ondas, sobre el dominio $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, con condiciones de contorno de tipo Dirichlet, y condiciones iniciales del tipo:

$$x, y \in [0, 1] \quad \begin{cases} U_x(x, y, 0) = \sin x \sin y \\ U_y(x, y, 0) = \cos x \cos y \\ \left. \frac{\partial U_x(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \\ \left. \frac{\partial U_y(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (10.1)$$

Como función de ponderación se va a utilizar la siguiente:

$$w(h_i, k_i) = \frac{1}{\sqrt{(h_j^2 + k_j^2)^3}}$$

El error global cometido se puede calcular con la expresión:

$$Error\ Global = \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=N} [sol(i) - exac(i)]^2}{N}}}{|exac_{max}|} \times 100$$

Por otro lado es el índice de regularidad de la malla IIC y es el menor de los índices de regularidad de cada estrella IIS calculados según:

$$IIS = \frac{\sqrt{5} (1 + \sqrt{2})}{\sqrt{3} \sqrt{(|\bar{m}_0| + |\bar{\sigma}_0|) + \sqrt{(|\bar{m}_0| + |\bar{\sigma}_0|)^2 + 4\bar{\eta}_0^2}}}$$

A continuación en la Figura 10.1 se presentan tres mallas de 121 nodos con distintos índices de regularidad, esto es, una malla regular $IIC = 1$, otra con $IIC = 0,65$ otra con $IIC = 0,89$.

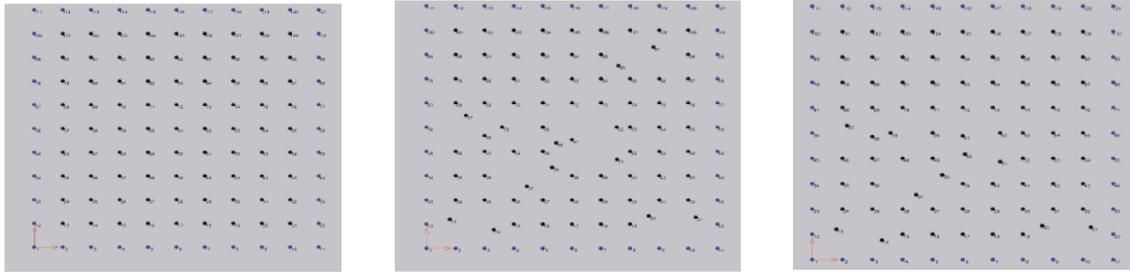


Figura 10.1: Malla 1. $IIC = 1$, Malla 2. $IIC = 0,65$, Malla 3. $IIC = 0,89$

10.1. Resultados para distintos pasos temporales

A continuación se resuelve el problema de la Ecuación 7.20 con las condiciones de contorno e iniciales de la Ecuación 10.1 sobre la malla de la figura 10.1 con $IIC = 0,65$ y con $n = 500$, en la aplicación se utilizan distintos valores de Δt para ver su influencia en el error global.

Δt	Error Global U_x	Error Global U_y
0,0316	2,078E-03	9,875E-04
0,0223	7,423E-04	3,123E-04
0,01	2,514E-04	1,217E-04
0,007	1,423E-04	1,012E-04

Cuadro 10.1: Error global para $IIC = 0,65$; $n = 500$; $\alpha = 1$; $\beta = 0,5$

A continuación se resuelve el problema de la Ecuación 7.20 con las condiciones de contorno e iniciales de la Ecuación 10.1 sobre la malla de la figura 10.1 con $IIC = 0,89$ y con $n = 500$, en la aplicación se utilizan distintos valores de Δt para ver su influencia en el error global.

Δt	Error Global U_x	Error Global U_y
0,0316	7,331E-04	5,167E-04
0,0223	2,685E-04	1,950E-04
0,01	1,102E-04	8,428E-05
0,007	9,575E-05	7,340E-05

Cuadro 10.2: Error global para $IIC = 0,89$; $n = 500$; $\alpha = 1$; $\beta = 0,5$

10.2. Resultados para distintas longitudes de ondas

A continuación se resuelve el problema de la Ecuación 7.20 para distintas longitudes de onda, esto es, el dominio se discretizará con una malla irregular de 121 nodos, ver

Figura 10.1 la cual tiene un índice de irregularidad $IIC = 0,89$ y con $n = 500$, y un $\Delta t = 0,01$.

Las distintas soluciones exactas para las ecuaciones planteadas son las siguientes:

$$\begin{aligned} U_x(x, y, t) &= \cos \sqrt{2}\beta t \sin x \sin y \\ U_y(x, y, t) &= \cos \sqrt{2}\beta t \cos x \cos y \end{aligned} \tag{10.2}$$

$$\begin{aligned} U_x(x, y, t) &= \cos 0,5\sqrt{2}\beta t \sin 0,5x \sin 0,5y \\ U_y(x, y, t) &= \cos 0,5\sqrt{2}\beta t \cos 0,5x \cos 0,5y \end{aligned} \tag{10.3}$$

$$\begin{aligned} U_x(x, y, t) &= \cos 2\sqrt{2}\beta t \sin 2x \sin 2y \\ U_y(x, y, t) &= \cos 2\sqrt{2}\beta t \cos 2x \cos 2y \end{aligned} \tag{10.4}$$

$$\begin{aligned} U_x(x, y, t) &= \cos 4\sqrt{2}\pi\beta t \sin 2\sqrt{2}\pi x \sin 2\sqrt{2}\pi y \\ U_y(x, y, t) &= \cos 4\sqrt{2}\pi\beta t \cos 2\sqrt{2}\pi x \cos 2\sqrt{2}\pi y \end{aligned} \tag{10.5}$$

$$\begin{aligned} U_x(x, y, t) &= \cos 8\pi\beta t \sin 4\sqrt{2}\pi x \sin 4\sqrt{2}\pi y \\ U_y(x, y, t) &= \cos 8\pi\beta t \cos 4\sqrt{2}\pi x \cos 4\sqrt{2}\pi y \end{aligned} \tag{10.6}$$

$$\begin{aligned} U_x(x, y, t) &= \cos 16\pi\beta t \sin 8\sqrt{2}\pi x \sin 8\sqrt{2}\pi y \\ U_y(x, y, t) &= \cos 16\pi\beta t \cos 8\sqrt{2}\pi x \cos 8\sqrt{2}\pi y \end{aligned} \tag{10.7}$$

A continuación en el Cuadro 10.3 se muestra el error global cometido en la resolución del problema de la Ecuación 7.20 con diferencias finitas generalizadas en cada una de las soluciones exactas anteriores:

Sol. Analítica	Error Global U_x	Error Global U_y
[10.2]	1,232E-05	2,443E-05
[10.3]	1,646E-06	1,778E-06
[10.4]	4,081E-04	2,001E-04
[10.5]	9,188E-02	8,647E-02
[10.6]	3,035E-01	3,275E-01
[10.7]	4,942E-01	4,999E-01

Cuadro 10.3: Error global para diferentes soluciones analíticas

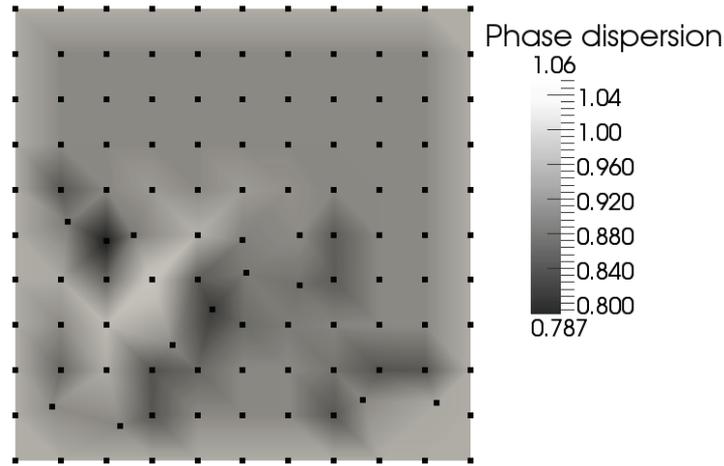


Figura 10.2: Dispersión de las ondas P en malla irregular $IIC = 0,89$

10.3. Dispersión e irregularidad

En la Figura 10.2 se ha dibujado la dispersión de las ondas P en cada nodo, para la malla irregular de 121 nodos con $IIC = 0,89$, para el caso de $\varphi = 45^\circ$.

10.4. DFG con PML en dominios homogéneos y heterogéneos

Ahora se va a resolver el problema de la Ecuación 7.20 sobre el dominio $\Omega = [0, 2] \times [0, 1]$ con condiciones de contorno de tipo Dirichlet y condiciones iniciales de la Ecuación 10.1 cuya solución analítica es la Ecuación 10.2, función de ponderación $w(h_i, k_i) = \frac{1}{\sqrt{(h_j^2 + k_j^2)^3}}$ y criterio de selección de los nodos de cada estrella del cuadrante.

En cuanto a la malla elegida es una malla regular de 861 nodos tal y como aparece en la Figura 10.3

A continuación en la Figura 10.4 se presenta la resolución aproximada de U_x para $n = 100$.

En la siguiente Figura 10.5 se muestra la inclusión de Perfect Matched Layers a el domino, en el eje x e y según:

$$\begin{aligned} 1,4 \leq x \leq 2 \\ 0,6 \leq y \leq 1 \end{aligned} \tag{10.8}$$

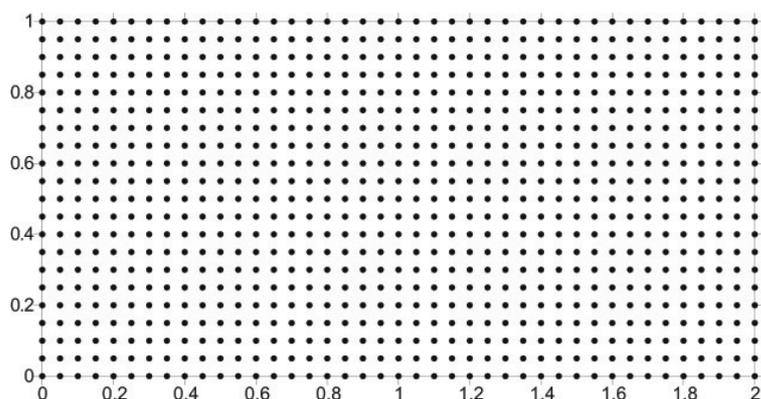


Figura 10.3: Malla regular de 861 nodos

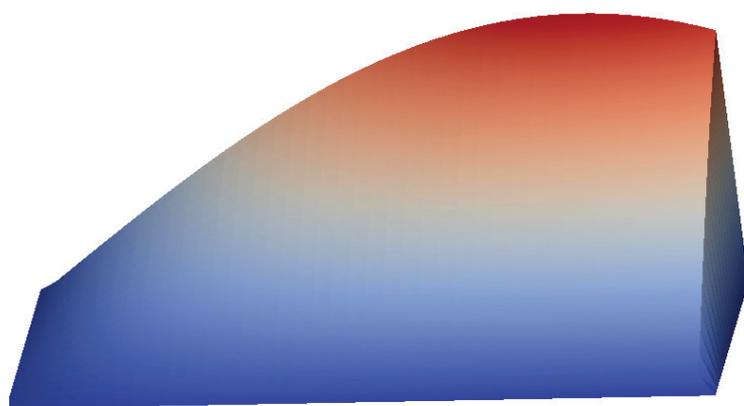


Figura 10.4: Solución aproximada de U_x para $n = 100$

En la siguiente figura 10.6 se presenta la solución aproximada de U_x para $n = 100$ utilizando el modelo con PML definido en la Ecuación 10.8 y condiciones de contorno tipo Dirichlet homogéneas.

En la siguiente Figura 10.7 se muestra la inclusión de Perfect Matched Layers a el domino, en el eje x e y según:

$$\begin{aligned}
 0 &\leq x \leq 0,6 \\
 0 &\leq y \leq 0,2 \\
 0,8 &\leq y \leq 1
 \end{aligned}
 \tag{10.9}$$

En las siguientes Figuras 10.8, 10.9 y 10.10 se presenta la resolución aproximada de U_x para $n = 5$, $n = 20$ y $n = 100$ respectivamente, utilizando el modelo con PML definido en la Ecuación 10.9 y condiciones de contorno tipo Dirichlet homogéneas.

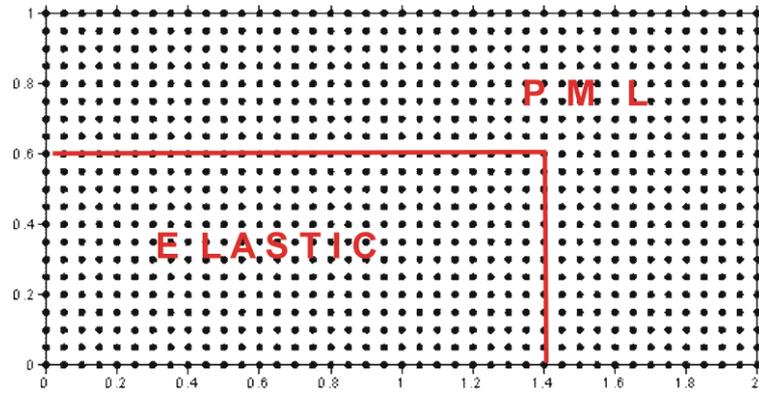


Figura 10.5: Malla regular de 861 nodos con PML

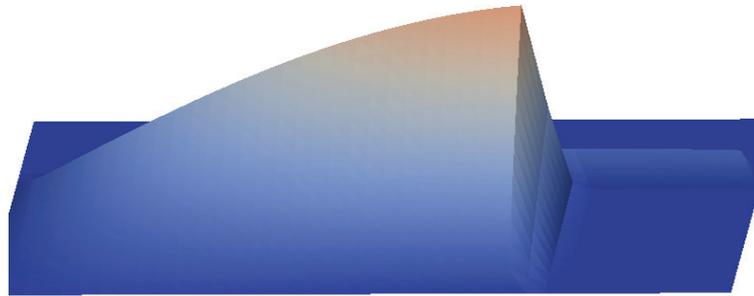


Figura 10.6: Solución aproximada con PML

Finalmente se va a resolver el problema sobre un dominio no homogéneo, las zonas con PML van a ser las mismas que en la Ecuación 10.9. Por otro lado en la Figura 10.11 y en el Cuadro 10.4 se define la geometría y se presentan las propiedades físicas de cada región del dominio heterogéneo.

La Figura 10.12 muestra la solución aproximada de para utilizando el modelo con PML en la dirección x e y con unas regiones heterogéneas de interés definidas por Z_i ; $i = 1, 2, 3$.

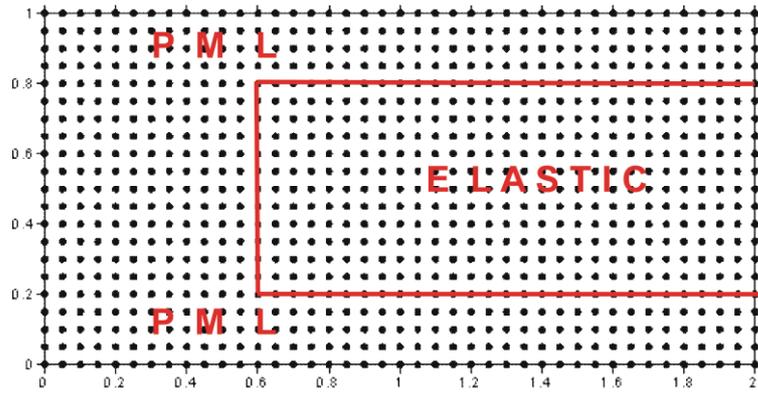


Figura 10.7: Malla regular de 861 nodos con PML

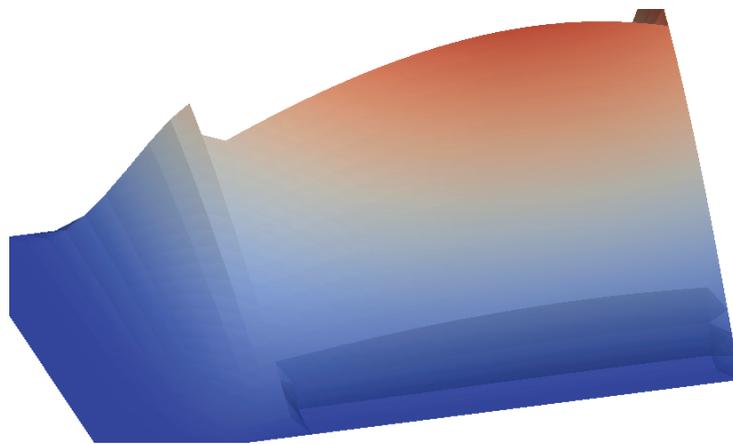


Figura 10.8: Solución aproximada con PML después de 5 pasos temporales

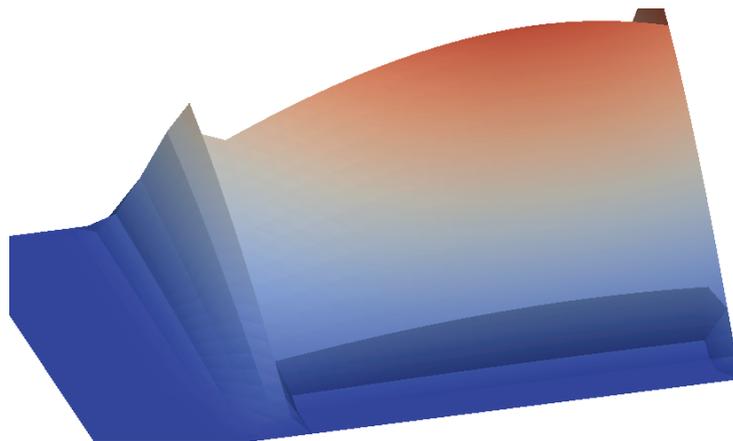


Figura 10.9: Solución aproximada con PML después de 20 pasos temporales

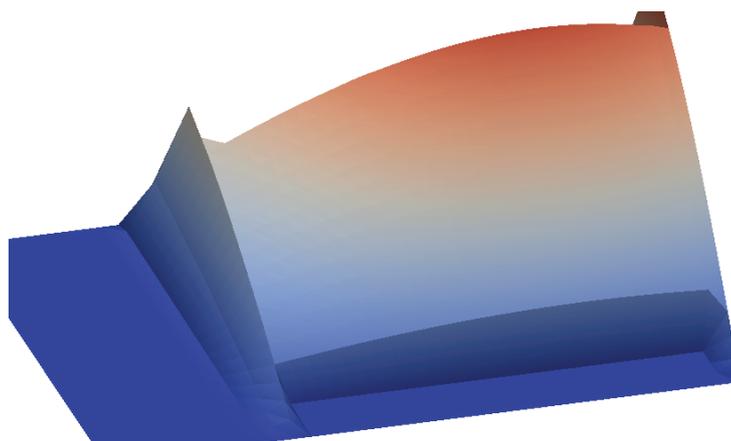


Figura 10.10: Solución aproximada con PML después de 100 pasos temporales

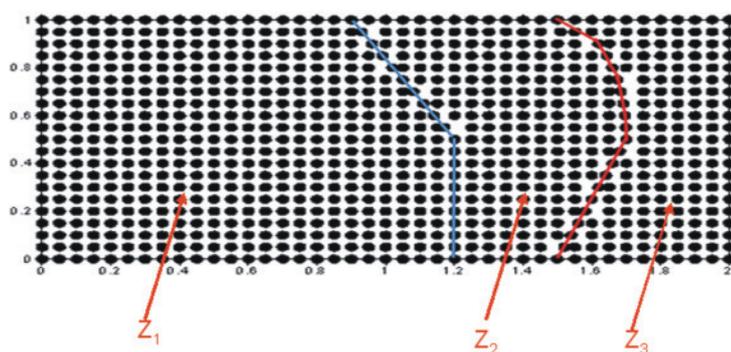


Figura 10.11: Malla regular de 861 nodos con PML y dominio heterogéneo

	λ	G	ρ	α	β
Z1	0,500	0,250	1,000	1,000	0,500
Z2	0,700	0,400	1,200	1,118	0,577
Z3	0,800	0,500	1,100	1,279	0,674

Cuadro 10.4: Propiedades de cada región del dominio

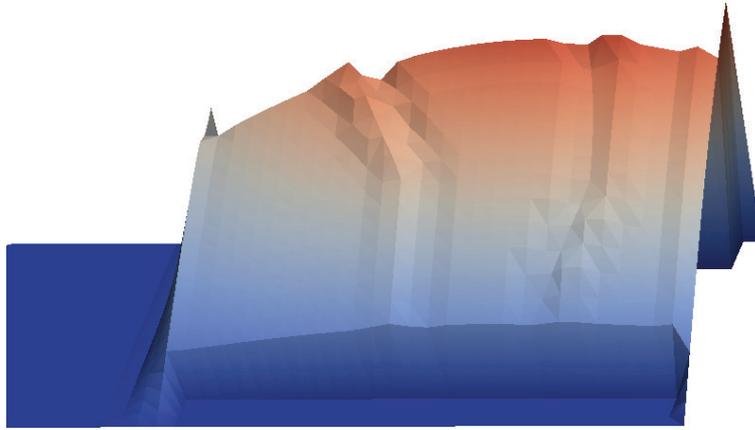


Figura 10.12: Solución aproximada con PML

11 Conclusiones

A continuación se van a exponer las principales conclusiones a las que se ha llegado con la presente tesis.

- Conclusiones generales del método

La primera conclusión de carácter general sobre la aplicación del Método de Diferencias Finitas Generalizadas a la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDPS), es que se ha podido comprobar que este mantiene la sencillez del Método de Diferencias Finitas Clásico resolviendo el mayor inconveniente de este último al poderse aplicar a mallas irregulares.

Se han obtenido las expresiones explícitas en diferencias finitas de las derivadas parciales, hasta el 4º orden, tanto en 1 como en 2 dimensiones, lo que permite obtener de forma inmediata dichos valores numéricos sin necesidad de resolver nuevos sistemas de ecuaciones.

- Conclusiones sobre los parámetros fundamentales que aparecen en la formulación

En cuanto a la mejor forma de seleccionar los nodos de las estrellas, la utilización del criterio del cuadrante ha proporcionado mejores resultados tanto para la función como para sus derivadas parciales.

En cuanto a la definición de las estrellas lo primero que hay que indicar es que dado el número de incógnitas, en el caso de EDPS de segundo orden el número mínimo de nodos por estrella debe ser de 5, mientras que para las EDPS de cuarto orden este número deberá ser de 14. No obstante se puede indicar que haciendo balance entre la exactitud y el esfuerzo computacional requerido, existe un número óptimo de nodos por estrella, que para el caso de EDPS de segundo orden es de 8, 2 nodos por cuadrante, y para el caso de cuarto orden este número es 24, 6 nodos por cuadrante.

En cuanto a las funciones de ponderación a emplear, para el caso de mallas irregulares se han obtenido mejores resultados utilizando funciones de ponderación de tipo potencial, ya que éstas ponderan mucho más a los valores nodales más cercanos al nodo central de la estrella, que a los lejanos.

- Conclusiones sobre la aplicación del método a vigas y placas

En esta tesis se aplica el método de Diferencias Finitas Generalizadas a la resolución de problemas de elasto-dinámica, dependientes, por lo tanto, del tiempo, aplicándose a las derivadas temporales diferencias finitas clásicas.

En primer lugar se ha analizado el caso de una viga sometida a cargas dinámicas obteniéndose la formulación explícita del problema en DFG, posteriormente se ha analizado la convergencia del método según teorema de equivalencia de Lax, para lo cual se demuestra que el esquema es consistente al tender los errores en la aproximación temporal y espacial a cero cuando ambos incrementos tienden también a cero. Al utilizarse un método explícito se ha obtenido la condición de estabilidad, la cual limita el paso de tiempo máximo para cada estrella. Este criterio de estabilidad establece que el paso de tiempo máximo es inversamente proporcional a una función que depende de la distribución de los nodos de la estrella.

En segundo lugar se ha analizado el caso de una placa delgada sometida a cargas dinámicas obteniéndose la formulación explícita del problema en DFG, del mismo modo se ha analizado la convergencia del método según teorema de equivalencia de Lax, demostrándose que el esquema es consistente y estableciéndose la condición de estabilidad.

De los diferentes ejemplos numéricos presentados con vigas y placas, sometidas a cargas dinámicas y con diferentes condiciones de contorno, se desprende que para una malla dada, al reducir el paso temporal en el esquema explícito, el error global cometido con la aproximación también se reduce y que para un incremento temporal dado, al aumentar la regularidad de la malla se reduce el error global.

- Conclusiones sobre la aplicación del método a problemas de ondas sísmicas

En el presente trabajo se han obtenido así mismo las expresiones explícitas en DFG para el problema de propagación de ondas sísmicas en 2-D. Se ha estudiado la estabilidad así como la dispersión de las velocidades de fase y de grupo tanto para las ondas P como para las ondas S.

La regularidad de la malla, como es lógico, afecta y de forma importante a la calidad de los resultados. Con objeto de cuantificar de alguna forma sencilla la idea de regularidad, se ha definido en esta tesis un parámetro denominado índice de regularidad, cuyo valor es la unidad en el caso de mallas totalmente regulares y va disminuyendo al ir aumentando la irregularidad, lo que permite realizar comparaciones de forma sencilla. Al disminuir dicho índice se debe disminuir el paso temporal y en general los resultados son peores, pero en una malla irregular un aumento del número de nodos no implica mejoras, ya que es muy importante su disposición en el dominio, por lo tanto cualquier algoritmo adaptativo, como por ejemplo el presentado en [15], debe considerar lo indicado y puede resultar de utilidad el manejo este índice.

En la tesis se ha analizado la dispersión de las velocidades de fase y de grupo y relacionado con la irregularidad de la estrella utilizando el índice de regularidad de la malla. La utilización de mallas irregulares, debido por ejemplo a la geometría del problema, puede suponer dispersiones elevadas en algunas estrellas, lo cual va asociado con valores pequeños del índice de regularidad lo que a su vez implica la necesidad de emplear un menor paso temporal. No obstante en lugar de disminuir el paso temporal, puede resultar conveniente aumentar el índice de regularidad,

realizando una redefinición de la malla, lo cual reduciría las dispersiones y permitiría un aumento del paso temporal.

- Conclusiones sobre la aplicación de Perfect Matched Layers

Cuando se quiere modelizar numéricamente con diferencias o elementos finitos un problema definido sobre un espacio infinito o semi-infinito, surge el problema de que el modelo debe ser finito y, por tanto, debe incluir contornos inexistentes en el problema real. En el caso estático es suficiente con alejar dichos contornos de la zona de interés hasta que su influencia en los resultados sea despreciable, pero en el caso dinámico se producen reflexiones en dichos contornos, debiéndose adoptar alguna solución que los evite. En este trabajo, para evitar reflexiones y cumplir la condición de radiación, se ha presentado la formulación de contornos absorbentes perfectamente acoplados (Perfect Matched Layers PML), para una y dos direcciones dentro de la formulación general en diferencias finitas generalizadas, obteniéndose los correspondientes esquemas explícitos en 2-D.

Los ejercicios numéricos realizados ponen de manifiesto el buen funcionamiento del método, disminuyendo rápidamente el error global al reducir el paso temporal.

También se ha estudiado la influencia del número de nodos por longitud de onda, comprobándose que el error de la aproximación aumenta al disminuir el número de puntos de discretización por longitud de onda. De estos primeros análisis se desprende que hasta el orden de 12 puntos por longitud de onda y mallas no muy irregulares, índice de regularidad cercano a la unidad, se obtienen errores del orden de una milésima.

Se ha comprobado así mismo la eficiencia de los PML's, pudiéndose apreciar en los ejercicios numéricos, como la amplitud de las ondas decrece rápidamente en el interior de estos contornos, siendo posible emplear para ellos espesores pequeños, del orden de un cuarto de la longitud de onda.

Por último, se han realizado las primeras aplicaciones a problemas heterogéneos. Debido a que la aproximación homogénea puede ser complicada de implementar para problemas sísmicos, de acuerdo con [105] se ha preferido la formulación heterogénea obteniéndose buenos resultados.

12 Desarrollos futuros

En cuanto a posibles desarrollos futuros se pueden indicar los siguientes:

- El índice de regularidad definido tiene el inconveniente de que al ser un parámetro asociado a la estrella, su valor para un determinado dominio debe ser el de la estrella más desfavorable, lo cual puede distorsionar la idea de regularidad si esta está asociada a una pequeña zona del dominio. Como trabajo futuro, se podría obtener un índice de regularidad global ponderado que adicionalmente diera una idea de la homogeneidad de la regularidad de las estrellas de una determinada malla. También se deberá extender el método adaptativo presentado en [15] a este tipo de problemas.
- Continuar con la aplicación del Método de Diferencias Finitas Generalizadas para la resolución de la ecuación de ondas propagándose en medios heterogéneos, analizándose de forma más detallada la reflexión y refracción de la onda al pasar la frontera entre medios de distintas características.
- Aplicación del Método de Diferencias Finitas Generalizadas para la resolución del caso de un impulso sobre el semi-espacio, ídem para casos de trenes de ondas incidentes provenientes de focos lejanos y otros problemas clásicos, analizándose la influencia de los diferentes parámetros que intervienen.
- Aplicación del método a la resolución de diferentes problemas sísmicos como por ejemplo la cuantificación de efecto local en el registro sísmico o la simulación de terremotos por rotura de falla incorporando el foco en el modelo.
- Realización de modelos 3D incorporando los elementos ya desarrollados para esquemas 2D, como por ejemplo los PML.
- Estudios de las formulas de Diferencias Finitas Generalizadas de un orden mayor para obtener mejores aproximaciones.
- Incorporación de modelos más reales para el comportamiento del material como por ejemplo modelos viscoelásticos.

13 Bibliografía y referencias

- [1] Alarcón E., Álvarez R. y Gómez Lera M^a. S.; Cálculo matricial de estructuras. Ed. Reverté S.A. 1986.
- [2] Alterman Z., and Karal F.C., Propagation of elastic waves in layered media by finite-difference methods , Bull. Seism. Society American 58, 367-398, 1968.
- [3] Andrews D.J., A numerical study of tectonic stress release by underground explosions, Bull. Seism. Society American 63, 1375-1391, 1973.
- [4] Atluri S.N. and Tulong Zhu; New concepts in meshless methods. International journal for numerical methods in engineering, vol 47, 537-556. Jhon Wiley & Sons, 2000.
- [5] Babuška I. y Melenk J.M.; The partition of unity method. International journal for numerical methods in engineering, vol. 40, 727-758. John Wiley & Sons, 1997.
- [6] Belytschko T., Krongauz Y., Organ D., Fleming M. y Krysl P.; Meshless methods: an overview and recent developments. Comput Methods Appl. Mech. Engng. 139: 3 - 47, 1996.
- [7] Belytschko T., Lu Y.Y. y Gu L.; Element-free Galerkin methods. International journal for numerical methods in engineering, vol. 37, 229-256, 1994.
- [8] Belytschko T., Gu L., A new implementation of the elements free Galerkin method. Computer Methods Applied Mech. Eng. 113, 397-414, 1994.
- [9] Belytschko T., Lin W.K., Singer M., Advances in Adaptive Computational Methods: On adaptivity and error criteria in mesh free methods. Ladeveze P., Oden J. T., (Eds.) Elsevier, 1998.
- [10] Benito J.J., Gavete L., Buceta A., Falcon S., Approximation of Functions in a method of Finite Points. Computational Mechanics, Idelson, Oñate, Dvorkin (Eds.), CIMNE, 1998.
- [11] Benito J.J., Gavete L.; Aproximación de Funciones en un Método de Puntos Finitos. V Encuentro Portugués de Mecánica Computacional Internacional. Cuimaraes (Portugal), 1997.
- [12] Benito J.J.; Método sin malla. Trabajo de investigación presentado para el concurso de una plaza de Catedrático de Universidad, Madrid, España. 1998.
- [13] Benito J.J., Ureña, F., Gavete L.; Influence of several factors in the generalized finite difference method. Enviado para su publicación a Applied Mathematical Modelling, University of Greenwich.

- [14] Benito J.J., Ureña F. and Gavete L. Leading-Edge Applied Mathematical Modelling Research (chapter 7), Nova Science Publishers, New York, 2008.
- [15] Benito J.J., Ureña F., Gavete L., Alvarez R., An h-adaptive method in the generalized finite difference, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 192: 735 – 759, 2003.
- [16] Benito J.J., Ureña F., Gavete L., Alonso, B., Solving parabolic and hyperbolic equations by Generalized Finite Difference Method, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 209 Issue 2: 208-233, 2007.
- [17] Benito J.J., Ureña F., Gavete L., Alonso B, Application of the Generalized Finite Difference Method to improve the approximated solution of PDES, *Computer Modelling in Engineering & Sciences* 38: 39-58, 2009.
- [18] Berenger J.P.; A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic. *J. Comput. Physics*, 114,185–200, 1994.
- [19] Boore D.M., Love waves in non uniform waveguides: finite-difference calculations, *J. Geophys. Res.* 75, 1512-1527, 1970.
- [20] Cendrowicz J., Tribillo R.; Variational approach to the static analysis of plates of an arbitrary shape, (in polish). *Archiwum Inzynierii Ladowej* 3(24), 1978.
- [21] Chew W.C., Liu Q.H.: Perfectly matched layer for elastodynamics; a new absorbing boundary condition *J. Comput. Acoustics*, 4, 341–359, 1996.
- [22] Chu W.H.; Development of a General Finite Difference Approximation for a General Domain. *Journal of Computational Physics*, 8, 3, 1971, 392-408.
- [23] Chugh A.K., Gesund H.; Automatic Generation of the Coefficient Matrix of Finite Difference Equations. *IJNME*, 8(3), 1974, 662-671.
- [24] Crase E., Wideman C.H., Noble N. and Tarantula A., Non linear elastic waveform inversion of land seismic reflection data, *J. Geophys. Res.* 97, 4685-4703, 1992.
- [25] Cruz-Atienza V.M, and Virieux J, Dynamic rupture simulation of nonplanar fault with finite-difference approach, *Geophys. J. Int.* 158, 939-954, 2004.
- [26] Cuesta J.L., Método de Diferencias Finitas Generalizadas en mallas irregulares. Proyecto Fin de Carrera, E.T.S.I. Minas, UPM, 1998.
- [27] Curtis F.G., Análisis Numérico. Ed. Alfaomega, 1991.
- [28] Dekker K.; Semi-Discretization Methods for Partial Differential Equations on Non-Rectangular Grids. *IJNME*, 15, 1980, 405-419.
- [29] Domínguez J.; Boundary Elements in Dynamics. Computational Mechanics Publications. 1993.
- [30] Dou A. y Mendizábal A.; Ecuaciones en Derivadas Parciales y su Resolución Numérica. Publicación de la E.T.S.I. Caminos Canales y Puertos de Madrid. 1973

- [31] Dow J.O. and Stewenson I.; Adaptative refinement procedure for the Finite Difference method, Numerical Methods for Partial Differential Equations, John Wiley and Sons, 8, 537-550, 1992.
- [32] Duarte C.A. y Oden J. T.; H-p clouds- An H-p meshless method. Numerical methods for partial differential equations, vol. 12, 673-705 John Wiley & Sons, 1996.
- [33] Duarte C.A. y Oden J.T.; An adptative method using clouds. TICAM report 96-07, 1996.
- [34] Duchateau P., y Zachmann D.; Ecuaciones Diferenciales Parciales. Ed. McGraw-Hill. 1988.
- [35] Forsythe G.E. and Wasow W.R.; Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations. Wiley. New York (1960).
- [36] Gavete L., Benito J.J., Falcón S. And Ruiz A.; Implementation of essential boundary conditions in a meshless method. Communications in Numerical Methods in Engineering. 2000; 16:000-000
- [37] Gavete L., Gavete M. L., Benito J.J., Improvements of generalized finite difference method and comparison other meshless method, Applied Mathematical Modelling 27, 2003. 831-847. Dynamic analysis of beams and plates using GFDM.
- [38] Gavete L., García M., Molina P., Gavete M.L., Ureña F. y Benito J.J. Implementation in Chimère of a conservative solver for the advection equation, Journal of Computational and Applied Mathematics, DOI:10.1016/j.cam.2011.04.003 (ISSN: 0377-0427).
- [39] Gavete L., Ureña F., Benito J.J y Gavete M.L. Modelling of the advection-diffusion equation with a meshless method without numerical diffusion, International Journal of Computer Mathematics, DOI: 10.1080/00207160.2011.587872.
- [40] Gordon W.H.; Development of an Error Estimation Scheme for use with an Arbitrary Irregular Grid Finite Difference Method. Ph, D, Dissert Wion. The Catholic University of America, Washington D.C., 1982.
- [41] Graves R W, Simulating seimisc wave propagation in 3-D elastic media using stag-gered-grid finite differences , Bull. Seism. Soc. Am. 93, 283-300, 1996.
- [42] Graves R W, and Day S M, Stability and accuracy analysis of coursegrain viscoelastic simulations , Bull. Seism. Soc. Am. 87, 494-515, 2003.
- [43] Jensen P.S. Finite difference techniques for variable grids. Comp. Structures 2, 17-29, 1972.
- [44] Jensen P.S.; A Survey of Some Recent Work in Variable Grid Finite Difference Methods for Partial Differential Equations. LMSC 6-78-70-24, Lockheed Missiles and Space Company, Palo Alto, California, 1970.
- [45] Jonshon S.G.: Notes on Perfectly Matched Layers (PMLs). Courses 18.369 and 18.336 at MIT.July, 2008.

- [46] Kaczkowski Z., y Tribillo R.; A generalization of the finite difference method. (in polish), *Archiwum Inzynierii Ladowej* 2(21), 287-293, 1975.
- [47] Kelly L. R., Ward R. W., Freitel S. and Alford R. M., Synthetic seismograms: a finite-difference approach, *Geophysics* 41, 2-27, 1976.
- [48] Kristek J., Moczo P. and Archuleta P. J., Efficient method to simulate planar free surface in the 3-D 4th-order staggered-grid finite difference schemes, *Studia Geophys. Geod.* 46, 355-381, 2002.
- [49] Kristek J., and Moczo P., Seismic wave propagation in viscoelastic media with material discontinuities- a 3-D 4th-order staggered grid finite-difference modeling, *Bull. Seism. Soc. Am.* 93, 2273-2280, 2003.
- [50] Krok J., Orkisz. J.; Application of the Generalized FD Approach to Stress Evaluation in the Solution. *International Conference on Computational Mechanics*, Tokyo, 1986, Springer-Verlag, Tokyo-Berlin-Heidelberg-New York, 12, 1986, 31-36.
- [51] Kurowski Z.; Automatic Generation of Triangular Meshes in 2D Domains. *Computer and Mechanics*, 1, 1978, 379-389.
- [52] Lancaster P. y Salkauskas K., Surfaces generated by moving least square methods, *Mathematics of computation*, vol 37, 141-158, 1981. [53] Levander A. R., Fourth-order finite-difference P-SV seismograms, *Geophysics* 53, 1425-1436, 1988.
- [54] Liszka T. An interpolation method for an irregular net of nodes, *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 20, 1599-1612, 1984.
- [55] Liszka T., Orkisz J.; The Finite Difference Method at Arbitrary Irregular Grids and its application in applied mechanics. *Computers & Structures*, vol. 11, 83-95. Pergamon Press, 1980.
- [56] Liska T., Orkisz J.; The Finite Difference Method for Arbitrary Irregular Meshes a Variational Approach to Applied Mechanics Problem. *2nd International Congress on Numerical Methods for Engineering*, Paris, 1980, 227-288.
- [57] Liska T., Orkisz J.; Application of the Difference Method at Arbitrary Irregular Grids to Solution of Various Problems of Applied Mechanics. *Bulgarian Academy of Science, Theoretical and Applied Mechanics*, 9, 1, 1978, 105-111.
- [58] Lucy L., A numerical approach to testing the fission hypothesis, *App. Jour.* 82, 1013-1024, 1977.
- [59] Madariaga R, Dynamics of an expanding circular fault, *Bull. Seism. Soc. Am.* 67, 163-182, 1976. [60] Melenk J.M., Babuška I.; The partition of unity finite element method: Basic Theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996.
- [61] Michavila F., Gavete L.; Programación y Cálculo Numérico. Ed. Reverté, S.A., 1985.
- [62] Mikumo T and Miyatake, Numerical modeling of realistic fault rupture process. *Seismic motion synthetics*, B. A. Bott, ed., Academic Press, 91-151, 1987.

- [63] Mitchell A. R. and Griffiths D. F.; *The Finite Difference Method in Partial Differential Equations*. Ed. Jhon Wiley & Sons. 1997.
- [64] Moreno C.G.; *Cálculo Numérico II*. Servicio de publicaciones de la Universidad Nacional de Educación a Distancia. 1999.
- [65] Moczo P., Kristek, J., Halada L.: *The finite-difference method for seismologists. An introduction*. Comenius University Bratislava, 158 pgs, 1994.
- [66] Moczo P., Kristek J., Galis M., Pazak P., Balazovjeh M.: *The finite-difference and finite element modeling of seismic wave propagation and earthquake motion*. *Acta physica slovacica*, 57(2),177–406, 2007.
- [67] Moczo P Kristek J. and Ladislav Halada; *3D Fourth-Order Staggered-Grid Finite-Difference Schemes: Stability and Grid Dispersion*. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 90, 3, pp. 587–603, June 2000.
- [68] Moczo, P., J. Kristeka, L. Halad; *The Finite-Difference Method for Seismologists An Introductio*. Comenius University Bratislava 2004. [69] Monaghan JJ, *Why particle methods work?*, *SIAM Scientific Journal of stat. Comp.*, vol. 3, 422–433, 1982.
- [70] Monaghan JJ, *And introduction to SPH*, *Comput. Phys. Comun.*, vol 48, 89–96, 1988.
- [71] Nayroles B., Touzot G. y Villon P.; *Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements*. *Computational mechanics*, Springer-Vedag, 307-318, 1992.
- [72] Oden J.T. y Duarte C.A.; *Solution of singular problems using h-p clouds*. *MA-FELAP 96*, 1996.
- [73] Ohnimito T and Chovet b A, *A free-surface boundary condition for including 3-D topography in finite difference method*, *Bull. Seism. Soc. Am.* 87, 494-515, 1997.
- [74] Oñate E., Idelson S., Zienkiewicz D.C. and Taylor R.L.; *A finite point method in computational mechanics. Applications to convective transport and fluid flow*. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 39, 3839-3866, 1996.
- [75] Oñate E.; *Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos. Análisis Elástico Lineal*. CIMNI, 1995.
- [76] Oñate E., Idelsohn S., Zienkiewicz O.C., and Taylor R.L.; *A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems*. *Comput. Meth. In Appl. Engng.*, vol 139, 1-4, pp. 315-347, 1996.
- [77] Oñate E., Perazzo F. and Miquel J.; *Advances in the stabilized finite point method for structural mechanics*. *Publication CINME n°*. 164, May 1999.
- [78] Orkisz J., *Meshless finite difference meted I. Basic approach*. *Computational Mechanics Idelshon S., Oñate E., Duorkin (Eds.)*, CINME, 1998.
- [79] Orkisz J., *Meshless finite difference method II. Adaptative approach*. *Computational Mechanics Idelsohn S., Oñate E., Duorkin (Eds.)*, CIMNE, 1998.

- [80] Orkisz J.; Adaptative Approach to the Finite Difference Method Generalized for Arbitrary Irregular Meshes. Proc. Of the XIII Polish Conference on Computer Methods in Mechanics, Poznań, Poland, 1977, 1025-1032.
- [81] Orkisz J. Finite Diference Method (Part, III) in handbook of Computational Solid Mechanics, M. Kleiber (Ed.), Spriger-Verlag, Berlin, 1998.
- [82] Perrone N. and Kao R.; A general finite difference method for arbitrary meshes. Comp. Structures 5, 45-58, 1975.
- [83] Pitarka A, 3-D elastic finite-difference modeling of seismic motion using staggered grids with non uniform spacing, Bull. Seism. Soc. Am. 89, 54-68, 1999.
- [84] Sáinz de Cueto Torres F. J. Dinámica de Estructuras. Colegio de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos. Servicio de publicaciones. Octubre 2005.
- [85] Skelton E.A., Adams S.D.M., Craster R.V.: Guided elastic waves and perfectly matched layers. Wave motion, Elsevier, 44,573–592, 2007. Seismic waves.
- [86] Taylor R.L., Zienkiewicz D.C., Oñate E. e Idelson S.; Moving least square approximations for solution of differential equations. Intenational center for numerical methods in engineering, Publ. CIMNE n^o 74, 1995.
- [87] Timoshenko S. P., D. H. Young, Teoría de Estructuras, Urmo S.A. de Ediciones, Spain.
- [88] Timoshenko S. y Goodier J.N. Teoría de la Elasticidad. Ed. Urmo. 1951. [89] Tribillo R.; Generalization of the mesh Meted. Zeszyty Naukowe Politechniki Bialostockiej, 1976, (in Polish).
- [90] Tribillo R.; Application of the Generalized Finite Difference Meted to the Plate Problem. Archiwum Inzynierii Ladowej, 21, 4, 1975, 579-586, (in Polish).
- [91] Thomson W T, Vibration Theory and Applications, Prentice Hall Publishers, 1965.
- [92] Ureña J. J. Benito, L. Gavete, Application of the Generalized Finite Difference Method to solve the advection-difusion equation, Journal of Computational and Applied Mathematics 235: 1849 – 1855, 2011.
- [93] Ureña F.; Benito J.J.; Gavete L.; Alvarez R.,Resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales dependientes del tiempo de segundo orden utilizando diferencias finitas generalizadas, Revista Internacional de Métodos Numéricos para el Cálculo y Diseño en Ingeniería,19, 3, 331-340, 2003.
- [94] Ureña F.; Benito J.J.; Gavete L.; Alvarez R.,Computational Error Approximation and H-Adaptive Algorithm for the 3-D Generalized finite Difference Method, International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics,6 , 31-39, 2005.
- [95] Ureña F., Un método adaptativo en Diferencias finitas Generalizadas. Tesis Doctoral. 2001.

- [96] Ureña F., Benito J.J., Gavete L, Salete E. y Casasús A. Estudio de la estabilidad y dispersión del problema de propagación de ondas sísmicas en 2-D utilizando el método de diferencias finitas generalizadas, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para el Cálculo y diseño en Ingeniería*, Vol 27, N^o 4 de diciembre de 2011. (ISSN: 0213-1315)
- [97] Ureña F., Benito J.J., Gavete L. y Salete E. Application of the generalized finite difference method to seismic wave propagation in 2-D, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, DOI:10.1016/j.cam.2011.04.005 (ISSN: 0377-0427).
- [98] Ureña F., Salete E., Benito J.J. y Gavete L. Solving third and fourth order partial differential equations using GFDM. Application to solve problems of plates, *International Journal of Computer Mathematics*, DOI: 10.1080/00207160.2011.587871.
- [99] Vinson J. R. *The Behaviour of Thin Walled Structures: Beams, Plates and Shells*, Kluwer Academic Publishers, Boston.
- [100] Virieux J., P-SV wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite difference method *Geophysics* 51, 889-901, 1986.
- [101] Virieux J, SH-wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite difference method *Geophysics* 49, 1933-1957, 1984.
- [102] Weaver W Jr., S. P. Timoshenko, D. H. Young, *Vibration Problems in Engineering*, Jhon Wiley & Sons, Inc, New York, 1990.
- [103] Wang Y, Xu J. and Schuster G.T., Viscoelastic wave simulation in basin by a variable-grid finite-difference method, *Bull. Seism. Soc. Am.* 91, 1641-1749, 2001. *Bull. Seism. Soc. Am.* 90, 587-603, 2000.
- [104] Zhang J, Quadruple-grid velocity-stress finite-difference method for elastic wave-propagation simulation *Geophysics J. Int.* 131, 127-134, 1997. Wave-propagation simulation *Geophysics J. Int.* 131, 127-134, 1997.
- [105] Moczo P.: *Introduction to modelling seismic wave propagation by finite difference method. Lectures notes*, Kyoto, (1998).