TESIS DOCTORAL

AUTOR:

ÁNGEL LAUREANO GARRIDO BULLÓN

LICENCIADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS, ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA PURA

TÍTULO:

FILOSOFÍA Y MATEMÁTICAS DE LA VAGUEDAD

Y DE LA INCERTIDUMBRE

(PHILOSOPHY AND MATHEMATICS OF VAGUENESS AND UNCERTAINTY)

DEPARTAMENTO DE FILOSOFÍA, FACULTAD DE FILOSOFÍA DE LA UNED

ELABORACIÓN, REDACCIÓN Y PRESENTACIÓN: EN CASTELLANO

2013

TESIS DOCTORAL

AUTOR:

ÁNGEL LAUREANO GARRIDO BULLÓN

LICENCIADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS, ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA PURA

TÍTULO:

FILOSOFÍA Y MATEMÁTICAS DE LA VAGUEDAD Y DE LA INCERTIDUMBRE

(PHILOSOPHY AND MATHEMATICS OF VAGUENESS AND UNCERTAINTY)

DEPARTAMENTO DE FILOSOFÍA, FACULTAD DE FILOSOFÍA DE LA UNED

ELABORACIÓN, REDACCIÓN Y PRESENTACIÓN: EN CASTELLANO

DIRECTOR: Dr. D. DIEGO SANCHEZ MECA

Facultad/Escuela/Instituto: FACULTAD DE FILOSOFIA

Departamento: FILOSOFIA

CODIRECTORA: Dra. Dª MARIA PIEDAD YUSTE LECIÑENA

Facultad/Escuela/Instituto: FACULTAD DE FILOSOFIA

Departamento: FILOSOFIA

AGRADECIMIENTOS.

Éste trabajo se empezó a encauzar bajo los auspicios del Proyecto de Investigación denominado “El papel de las controversias en la producción de las prácticas teóricas y en el fortalecimiento de la sociedad civil”, cuyo investigador principal fuera en su día el tristemente desaparecido profesor Quintín Racionero Carmona, por lo que ahora está siendo dirigido por la profesora Cristina De Peretti Peñaranda. La institución convocante de dicho Proyecto (el FF2011-29623) fue el MICINN del Estado Español.

Agradezco públicamente la ayuda y el siempre sabio consejo de mi primer mentor, el mencionado profesor Quintín Racionero, uno de los nuestros más grandes conocedores del pensamiento de Aristóteles, y del de Leibniz, entre otros. Nunca olvidaremos sus efusivos ánimos, su continuo apoyo y sus agudas observaciones para encauzar mejor nuestro trabajo.

Asimismo, como una ayuda siempre vital para mi investigación, he de agradecer su continua ayuda tanto al catedrático Diego Sánchez Meca, Director de esta Tesis, como a la profesora Piedad Yuste, Co-directora de la misma, quienes en todo momento me animaron y asesoraron, compartiendo muchos de los esfuerzos que conllevó su elaboración. También lo agradezco aquí a cuantos me han animado y aconsejado durante esta larga y no siempre fácil “travesía del desierto”. Nunca podré agradecer lo bastante a estas personas que me han ayudado y que creyeron en mí. Es un honor, y también a todos ellos va dedicado este humilde trabajo. Igualmente, considero de justicia reconocer, y quiero agradecerla sobremanera, la esforzada labor de los miembros de este tribunal de tesis, que han tenido que leer el extenso trabajo que ahora presento y que me han ayudado con sus observaciones.

INDICE

Algunos de los acrónimos y símbolos más frecuentes en el texto:

$\mathcal{A}$ = *Lógica Abeliana,* debida a Meyer y a Slaney. En ella, la conjunción y la implicación pueden ser interpretadas mediante la adición y la sustracción de números reales.

AE = Axioma de Elección. Es un postulado clave dentro de la teoría llamada de Zermelo-Fraenkel. El acrónimo, en inglés, sería A. C., por Axiom of Choice.

AI = Artificial Intelligence. A veces se denota por A. I.; en castellano, por IA, el acrónimo de Inteligencia Artificial.

AMO = Advanced Modeling and Optimization. Revista de investigación en algoritmos y computación, dirigida por el profesor Neculai Andrei.

AMS = American Mathematical Society (publica los MathSciNet y goza de gran prestigio científico internacional).

ASL = Association for Symbolic Logic. Organización internacional que promueve y coordina congresos, actividades, publicaciones, etc., sobre temas de Lógica.

AUA = Acta Universitatis Apulensis (Mathematics – Informatics). Revista on-line y en soporte papel de la Universidad de Alba Iulia, ciudad de Transilvania. Está dirigida por el profesor Daniel Breaz, actual rector de dicho centro universitario.

$\mathfrak{B}_n$ = *Lógica n-valuada de Bochvar.*

BL = Basic Logic. Consiste en un tipo de fuzzy Logic basada para su definición en clases de t-normas (o normas triangulares). Fue introducida por Petr Hájek.

BRAIN = Broad Research in Artificial Intelligence and Neuroscience. Revista on-line y en soporte papel de la Universidad de Bacau. Está dirigida por el profesor Bogdan Patrut.

$\mathscr{C}_2$ = La *Lógica Clásica,* bivaluada. También se denota por CL.

CB = Círculo de Berlín. Articulado en torno a la figura del físico y filósofo alemán Hans Reichenbach.

CC = Círculo de Cracovia. Representan el grupo más representativo del pensamiento católico polaco (neo-tomismo, personalismo, fenomenología, etc.), de entre los que hubo durante el interbellum y después de éste.

CI = Computational Intelligence. Denominación que en tiempos recientes se viene imponiendo a la de Inteligencia Artificial, para designar un campo de existencia algo más amplio que el anterior, con más soporte en los algoritmos y el software informático.

CL = Classical Logic, o Lógica Clásica, en acrónimo castellano LC (y que contiene a la Aristotélica, LA, pero también otras lógicas, como la Estoica, LE, etc.). Se daría, pues, una inclusión del tipo $\{$LA, LE, …$\} \subset$ LC.

CSci = Computer Sciences, o Ciencias de la Computación. Abarcando un conjunto de campos muy extenso e interconectado con otros saberes, como la Filosofía, las Matemáticas o la Lingüística.

CUP = Cambridge University Press; grupo editorial asociado a esa Universidad inglesa, de gran tradición científica.

CV = Círculo de Viena (o Wiener Kreis; WK, en acrónimo alemán). Fundado por Moritz Schlick, tuvo miembros muy notables, como Rudolf Carnap, Hans Hahn o Ludwig Wittgenstein. Pero no debe confundirse con la Escuela de Lvov-Varsovia, de características muy distintas, mucho más centrada en la Lógica y menos radical en sus posturas antimetafísicas, y desde luego, no tan anti-teológica como el grupo vienés.

DG = Directed Graph, o Grafo Dirigido. Se llama así al que tiene enlaces entre los pares de nodos que lo componen.

dblp = Importante base de datos, que informa acerca de los artículos más relevantes, no sólo acerca de Matemáticas y de Computación, sino también muchas veces de sus implicaciones filosóficas. No obstante, manifiesta una clara tendencia hacia las aplicaciones, como, por ejemplo, la Robótica. Dicha base está mantenida por la Universidad de Tréveris (Trier, Deutschland); concretamente, en el Schloss Daghtul, sede del Leibniz Zentrum für Informatik.

DG = Directed Graphs, o Grafos Dirigidos. Esto es, que sus enlaces entre nodos están "direccionados".

DL = Discussive Logic, or Discursive Logic, o Lógica Discursiva (en castellano), que es una lógica paraconsistente propuesta por Stanislaw Jaskówski en 1948.

DSM = Diego Sánchez-Meca.

ELV = Escuela de Lvov-Varsovia. Su actividad (principalmente, desde 1918 hasta 1939, el llamado periodo "interbellum") y la pujante actividad de sus miembros es un tema central de nuestro trabajo. En inglés el acrónimo sería *LWS,* por Lvov-Warsaw School. Y en polaco, *SLW,* por Szkola Lwosko-Warszawska.

EMS = European Mathematical Society (publica diversas obras y revistas. Funciona a nivel más bien europeo, pero es muy reconocida, organizando los Congresos Europeos de Matemáticas cada dos años, con la Unión Matemática Internacional. Recordemos que los Congresos Internacionales de Matemáticas se celebran cada cuatro años, y cada dos, intercalándose ente ellos, van los Congresos Europeos).

ES = Expert Systems, o Sistemas Expertos. Uno de los más famosos es el sistema MYCIN, utilizado en Medicina; sobre todo, para el diagnóstico y tratamiento de enfermedades cardiovasculares.

ESCMSE = European Society of Computational Methods in Sciences and Engineering. Institución que patrocina congresos y revistas.

EUSFLAT = European Society of Fuzzy Logic, Applications and Theory. Trata de agrupar y dinamizar los trabajos europeos en Computación e Inteligencia Artificial; en especial, los relativos a la Lógica Borrosa, sus implicaciones filosóficas y sus aplicaciones.

$\exists$ = Existe. Cuantificador Existencial.

FL = Fuzzy Logic, o Lógica Borrosa.

FLb = Fuzzy Logic in broader sense, o FL en sentido amplio.

FLn = Fuzzy Logic in narrower sense, o FL en sentido estricto, o también podría decirse `restringido´.

FOL = Fist-Order Logic, o Lógica de Primer Orden.

FS = Fuzzy Set, Conjunto Borroso, o Difuso, o Heurístico, etc.

FST = Fuzzy Set Theory, o Teoría de los Conjuntos Borrosos.

$\mathcal{G}_n$ = Es la *Lógica de Kurt Gödel,* en su versión n-valuada. Una de las `Fuzzy Logics´ más notables, junto con la de Lukasiewicz y la Lógica Producto.

GE = Graph Entropy, o entropía de los grafos.

GS = Gentzen Systems, que fueron introducidos por el matemático alemán Gerhardt Gentzen, en la década de los 1930´s. Son más eficientes que los sistemas de Hilbert cuando se trata de razonar acerca de las pruebas. Ganan, por ejemplo, en flexibilidad.

H = Entropía, en ciertos contextos; por ejemplo, cuando trabajamos con medidas borrosas, de Información, etc. Hemos de tener en cuanta que la notación habitual en Termodinámica (y en la Física en general) para la Entropía suele ser una *S.*

HC = Hipótesis del Continuo. Esencial para la fundamentación de la Teoría de Conjuntos. En inglés, el acrónimo se escribiría al revés, CH, al proceder de Contiuum Hypothesis.

HS = Hilbert Systems. Se trata de unos sistemas cuyos orígenes se pueden rastrear hasta el mismo Gottlob Frege, aunque quien los popularizó más sería el matemático de Göttingen David Hilbert. Generan teoremas a partir de un cierto número de axiomas y de una pequeña colección de reglas. Tiene como principal ventaja su generalidad.

I = Información. Es una medida borrosa de las más utilizadas; sobre todo, para la Teoría del mismo nombre, que parte de la publicación del famoso artículo de Claude E. Shannon, aunque la idea ya fuera expuesta mucho antes por el filósofo Charles Sanders Peirce.

IAS = Institut for Advanced Studies, de la Universidad de Stanford. En él trabajaron personajes de la talla de Alfred Einstein o del mismo Kurt Gödel.

IFS = Intuitionistic Fuzzy Set.

IMU = International Mathematical Union. Se trata de una asociación que entre otras actividades organiza cada cuatro años los Congresos Internacionales de Matemáticas.

IPC = Intuitionistic Propositional Calculus. Corresponde a la Lógica Intuicionista de L. E. J. Brouwer y de su discípulo, Arendt Heyting.

JL = Jan Lukasiewicz.

JSL = Journal of Symbolic Logic.

JW = Jan Wolenski.

$\mathfrak{K}_n$ = Sería la *Lógica de C. S. Kleene,* que es n-valuada.

KBS = Knowledge-Based Systems. Es decir, los Sistemas Basados en el Conocimiento.

KC = Kraft Circle. Grupo formado en Austria, considerándose como el continuador del famoso Círculo de Viena, una vez acabada la II G. M.

KKK = También se usa como acrónimo equivalente `K. K.´ (Kaiserlich und Königlich, imperial y real), relativo al Imperio Austro-Húngaro, iniciales que Robert Musil aprovecha para su sátira, atribuyéndole al país el nombre de `Kakania´.

KP = Es el sistema axiomático de Teoría de Conjuntos propuesto por Saúl A. Kripke y Richard Platek. Existe otra versión de este sistema, que incorpora los llamados `urelements´.

$\mathfrak{L}_n$ = *Lógica n-valuada* (o n-valente), *propuesta por Lukasiewicz.* Es una lógica multivaluada con *n* valores de verdad, basada en la t-norma $x * y = \text{máx}\ \{0, x + y - 1\}$. Por tanto, sería un miembro n-valuado de una familia de MVLs introducida en la década de los 1920´s por Jan Lukasiewicz.

LAZ = Lofti Asker Zadeh.

LC = Lublín Circle. Grupo de pensadores católicos, articulados alrededor de la Universidad de dicha ciudad polaca (Lublín).

LW = Ludwig Wittgenstein.

LEM = Acrónimo inglés de *Law of Excluded Middle.* También suele escribirse EML, por Excluded Middle Law, o Ley de Tercio Excluso (LTE), en castellano.

LSM = Acrónimo en polaco de la *Lwowska Szkola Matematyczne,* o Escuela Matemática de Lvov. Sus dos integrantes más conocidos fueron tal vez Hugo Steinhaus y su alumno, Stefan Banach, pero hubo muchos otros también verdaderamente notables, como Stanislaw Ulam, Juliusz Schauder, Wladyslaw Orlicz, etc.

LWS = Acrónimo de la *Lwow-Warszawa Schule,* o de Lvóv-Varsovie School, etc., que comienza "oficialmente" con la llegada de Kazimierz Twardowski a la Universidad de la primera de esas dos ciudades, a finales del siglo XIX (en 1895), y que tuvo su florecimiento durante el "interbellum", o periodo comprendido entre 1918 y 1939.

MathSciNet = Red de Ciencias Matemáticas de carácter internacional, con base en los Estados Unidos.

MC = Mecánica Cuántica, en su acrónimo castellano. También podemos referirnos a ella como *QL,* por *"Quantum Logic".*

MDPI = Institución de investigación de alto nivel y de gran prestigio internacional. Creada como una Fundación, tiene su sede central en Basel (Basilea), notable por su historia ciudad suiza, y otra nueva segunda sede en Beijing (Pekín), en la República China. Su acrónimo proviene de Molecular Diversity Preserving. Respalda la publicación on-line de numerosas revistas, como *Entropy, Symmetry, Axioms (Mathematical Logic and Mathematical Physics), Education Sciences,* etc. En todas ellas está el doctorando como miembro del Editorial Board, y de la Axioms (Mathematical Logic and

Mathematical Physics) es su Editor en Jefe. Funciona desde su creación en 1996.

MIT = Massachussets Institute of Technology. Ubicado en Cambridge, pero el de los Estados Unidos, próximo a la ciudad de Boston. Se trata de uno de los centros de estudio e investigación científica más importantes del mundo; sobre todo, en ciertos campos, como el de la Inteligencia Artificial, sus fundamentos filosóficos y sus aplicaciones.

ML = Modal Logic, o Lógica Modal. También podría haber sido el acrónimo del "Machine Learning", o Aprendizaje Automático, omnipresente en los estudios sobre Inteligencia Artificial, pero en evitación de ese doble significado, nos remitiremos al primero.

MTL = Es la `*Monoidal t-norm logic´,* basada en clases de t - normas, en lugar de estarlo sobre t - normas específicas. Fue propuesta por Lluis Godó y por Francesc Esteva.

MVL = Many-Valued Logic, o Multivalent Logic; en castellano, por tanto, el acrónimo equivalente sería LMV (de Lógicas Multivaluadas). Algunos autores piensan que sería mejor designarla como Lógica No-Estoica, o incluso, como Lógica No-Crisípea, como hiciera Grigore Moisil. También recibe otros nombres, según los autores o las traducciones; así, Lógica Polivalente, Lógica Plurivalente, Lógica Multivalente, etc.

MYCIN = Se trata de un famoso Sistema Experto, capaz de razonar sobre incertidumbre. Resulta útil para temas como el de las infecciones de la sangre, utilizando para ello factores de certidumbre tomados del intervalo real [-1, 1], así como reglas de inferencia.

NBG = Es el acrónimo de la teoría axiomática de conjuntos propuesta por Janos Neumann, Paul Bernays y Kurt Gödel.

NCL = Acrónimo del inglés *Non-Classical Logic,* pero en castellano solemos escribir LNCs (Lógicas No-Clásicas, en general).

NF = *`New Foundations´.* Sistema axiomático conjuntista propuesto por Willard V. O. Quine.

NML = *Non-monotonic Logic.*

OUP = *Oxford University Press,* grupo editorial asociado a tan clásica Universidad inglesa; famosa, sobre todo, en el ámbito de las Humanidades.

P = Es la *Lógica Producto,* basada en la t-norma: x $*$ y = x $\bullet$ y. Fue introducida por Petr Hájek y otros, en 1996. Se trataría, pues, de un añadido reciente al "canon fuzzy", aun cuando su implicación ya había aparecido en un artículo de J. A. Goguen, el año 1969.

$\mathcal{P}_n$ = Se trata de la *Lógica propuesta por Emil León Post,* en su versión n-valuada.

$\forall$ = Se lee "para todo". Es el llamado Cuantificador Universal.

PB = *Principio de Bivalencia.* En inglés, al escribirse como "Bivalence Principle", se denotaría BP.

PC ó PNC = Principio de Contradicción; también llamada Ley o Principio de No-Contradicción. En inglés, al escribirse como “(Non)Contradiction Principle”, se denotaría (N)CP.

PDP = Pablo Domínguez Prieto.

PJP = Polish Journal of Philosophy.

$\therefore$ = Por tanto, o por consiguiente, como consecuencia, etc.

QED = “Quod erat demonstrandum”, en latín. O “lo que queríamos demostrar”, en castellano. También se suele denotar, puesto al final de la prueba, con el símbolo introducido en su día por el matemático de origen húngaro Paul R. Halmos, el □; a veces, en negro.

QM = Acrónimo de “Quantum Mechanics”.

QT = Acrónimo de “Quantum Theory”.

RV = Es la “Received View”, o `*Concepción Heredada´,* que corresponde al periodo clásico de Filosofía de la Ciencia. Abarca desde la década de los 1920´s hasta la de los 1960´s.

RL = Residuated Lattices, o Retículos Residuados, en castellano. Se trata, en el caso conmutativo, de un conjunto L, dotado de operaciones binarias, $\wedge$, $\vee$, $\bullet$, $\rightarrow$, junto con una constante, e, de modo que $<L, \wedge, \vee>$ sería un retículo, y $<L, \bullet, e>$ un monoide. El `$\rightarrow$´ es el `residuum´ de $\bullet$, esto es, $x \bullet y \Leftrightarrow x \leq y \rightarrow z$, $\forall$ x, y, z $\in$ L. Son de especial interés cuando L = [0, 1] y las operaciones $\wedge$ y $\vee$ se interpretan como mín y máx, respectivamente. Es en estos casos cuando la operación $\bullet$ se denomina *uninorma.*

S = Habitual notación para la Entropía, en Física. Hay otras, como la *H,* en Teoría de la Información o en Inteligencia Artificial.

Sp = Medida de Especificidad.

SYSS = acrónimo del *"si y sólo si",* tan frecuente en los textos lógicos y matemáticos. Expresa la condición necesaria y suficiente. En inglés, se convierte en "iff", del "if and only if". Notacionalmente, se corresponde con el bicondicional, $\Leftrightarrow$.

TM = Turing Machine, o Máquina de Turing.

TR = Teorías de la Relatividad, en su acrónimo castellano. O *RT,* en el inglés.

UAI = Uncertainty in Artificial Intelligence. Organización internacional de estudios en Computación, con sede en los Estados Unidos.

UG = Undirected Graph. O Grafo No-Dirigido, en cuanto que sus enlaces entre nodos no indican dirección alguna.

UTM = Universal Turing Machine.

WFFs = Well-formed formulas; en castellano, \`fórmulas bien planteadas´, o \`fórmulas bien construidas o formadas´.

ZF = Es la *teoría de conjuntos en la versión de Ernest Zermelo y Abraham Fraenkel.* A veces, se utiliza una derivación suya, la denotada como *ZFC,* para indicar que se admite en ella el Axioma de Elección (Observación: no es la

Hipótesis del Continuo lo que se admite en ella, como podría parecernos al contener en su acrónimo la inicial C, pero es por el Axiom of Choice).

ZFM = Zentralblatt für Mathematik. La más clásica de entre las bases de datos sobre artículos que tratan de Lógica, Matemáticas y temas afines. Se coordina desde la Universidad de Karlsruhe, en Alemania, y es del máximo prestigio.

LISTA DE TABLAS, DIAGRAMAS Y FOTOGRAFÍAS:

CITAS:

"All traditional logic habitually assumes that precise symbols are being employed. It is, therefore, not applicable to this terrestrial life, but only to an imagined celestial existence… Everything is vague to a degree you do not realize until you try to specify… Per contra, a representation is vague when the relation of the representing system to the represented system is not one-to-one, but one-to-many."

[Bertrand Russell, "Vagueness", 1923]

"As the complexity of a system increases, our ability to make precise and yet significant statements about its behavior diminishes until a threshold is reached beyond which precision and significance (or relevance) become almost mutually exclusive characteristics".

[L. A. Zadeh, 1973]

"For a long time, philosophers have been conscious of the fact that any introduction of exactness is artificial and forced".

[V. Novák, 1989]

"A mathematician is a person who can find analogies between theorems; a better mathematician is one who can see analogies between proofs, and the best mathematician can notice analogies between theories".

[Stefan Banach]

"I have declared a spiritual war against all coercion which restricts the free creative activity of man."

[Jan Lukasiewicz, 1918]

"The study of the history of philosophy is perhaps the most fascinating pursuit for anyone who is eager to understand the civilization and culture of he human race, for all of the different elements of human nature that help to build up the culture of a certain epoch or a nation mirror themselves in one way or another in the philosophy of that epoch or of that nation."

[Moritz Schlick, 1931]

"My fondness for mathematics is based particularly to speculative aspects; in other words, I appreciate most of all that part of mathematics that is both philosophy".

[Bernard Bolzano]

"Logic, along with Mathematics, can be compared to a fine network, which is thrown into the vast chasm of phenomena, to get those pearls which are the scientific synthesis. It is a powerful tool, but only an instrument."

[Jan Lukasiewicz, *Creative elements of Science,* 1912]

DEDICATORIA

A la memoria de nuestro

Buen amigo y compañero,

El inolvidable Maestro,

Quintín Racionero.

También a mi esposa,

y a nuestros tres hijos.

Resumen.

Mi propósito al comenzar esta tesis ha sido doble: la búsqueda de los orígenes de las Lógicas Multivaluadas, y como caso particular de ellas, describir las “Fuzzy Logics”; asimismo, analizar los resultados que he llegado a probar sobre ciertos temas relacionados con ellas, como pueden ser las medidas borrosas, los números borrosos, o bien ciertos aspectos de la causalidad o de la matemática discreta y la teoría de la computabilidad, o sus relaciones con la Inteligencia Artificial y la filosofía, entre otras debatidas cuestiones.

Es importante el estudio de la llamada Escuela de Lvóv-Varsovia (ELV), porque sus miembros llevaron la lógica matemática de Polonia a la auténtica primera fila de la investigación mundial. Fue durante el llamado “interbellum”, o periodo entre las dos guerras mundiales, es decir, el que va desde 1918 hasta 1939. Luego se produjo la guerra, el consiguiente desastre y la inevitable diáspora.

Muchas de las más principales aportaciones de la ELV tienen una gran importancia filosófica. Así, por ejemplo: las MVLs (lógicas multivaluadas), de Jan Lukasiewicz; la Ontología, de Stanislaw Lesniewski; la Mereología, de Kazimierz Kotarbinski, o la Teoría Semántica de la Verdad, de Alfred Tarski, entre otras.

El que más nos interesará aquí será Jan Lukasiewicz, al que se viene considerando como padre de la Lógica Multivaluada. Este nuevo sistema lógico le fue sugerido por la lectura del capítulo IX del tratado *De Interpretatione,* contenido en el *Organon* del Estagirita. No olvidemos que los miembros de la ELV fueron grandes admiradores de Aristóteles, a cuya relectura aplicaron una visión crítica e innovadora. El magisterio de Lukasiewicz comenzó en la Universidad de Lvov; tras la Segunda Guerra Mundial, hubo de continuar en Dublín y en Manchester. Pero sus trabajos son principalmente de la década de los 1920´s.

Esos escritos de Lukasiewicz sufrieron un injusto olvido, del cual salieron gracias a Lofti A. Zadeh, quien habiendo estudiado primero en Teherán, siguió estudios en el MIT y recaló finalmente en la Universidad de California, Berkeley. Él sería quien se diera cuenta de su posible utilidad, ya en 1965; primero, para obtener una versión generalizada de la Teoría Clásica de Conjuntos, que ahora pasó a denominarse la “Fuzzy Set Theory”, y más

adelante (en 1975), con su aplicación al estudio de la lógica, creando la “Fuzzy Logic”, para el tratamiento de problemas con incertidumbre.

Resumiendo, que nuestro objetivo al emprender este trabajo ha sido doble: primero, el tratar de investigar las raíces histórico-filosóficas de las ideas que han venido conduciendo hacia las hoy pujantes lógicas multivaluadas, y en particular, a la lógica borrosa, así como a una fundamentación rigurosa de todas ellas, de lo que implican y de sus aplicaciones; en segundo lugar, exponer las líneas de investigación que he seguido hasta la fecha, lo cual me ha llevado a resultados publicados y reconocidos en distintas publicaciones internacionales.

Abstract.

My purpose in starting this thesis has been twofold: the search for the origins of many-valued logics, and as a particular case, the “Fuzzy Logic”, and the results I've had about certain issues, such as fuzzy measures, fuzzy numbers, or certain aspects of causality or graph theory and computability, or your dealings with Artificial Intelligence and philosophy, among others.

It is important to study the so-called Lwow-Warsaw School (ELV), because its members led mathematical logic in Poland to the forefront of global research. It was during the "interbellum" or period between the two world wars, ie ranging from 1918-1939. Then came the diaspora. Many of the main contributions of the ELV have great philosophical importance. For example: the MVLs (many-valued logics), by Jan Lukasiewicz; the Ontology, by Stanislaw Lesniewski, and Semantic Theory of Truth, by Alfred Tarski, etc. The one that interests us here is Jan Lukasiewicz, who has been considered the father of many-valued logic. This new logic system was suggested to him by reading Chapter IX of *De Interpretatione* treatise of Aristotle. Do not forget that were big fans of yours, applying a critical and innovative lecture. Jan Lukasiewicz began teaching at the University of Lvov, after the Second World War, and then was to continue in Dublin and Manchester. But his works are mainly from the early 1920's. These writings were then an unjust oblivion, which came by Lotfi A. Zadeh, who had studied in Tehran, then studied at MIT and finally ended up at the University of California, Berkeley. He who would realize their potential utility as in 1965, first to obtain a generalized version of the classical theory of sets, now renamed the “Fuzzy Set Theory”, and later (in 1975), with its application logic, creating the “Fuzzy Logic”, for treatment of problems with uncertainty.

In short, our goal in undertaking this study was twofold: first, to try to investigate the historical and philosophical roots of the ideas that have been driving the many-valued logics, and in particular, fuzzy logic, and a rigorous foundation of all of the implications and applications; second, to expose the research that I have followed to date, which has led me to results already appeared in various international publications.

1. Introducción.

Decía Bertrand Russell que:

> Hay dos clases de ciencia: la vieja, que es la oficial, y una nueva ciencia, que la mayoría de los viejos miran con horror. El resultado es una batalla constante entre las mentes viejas que admiran la ciencia de sus mayores, y las más jóvenes, que aprecian el valor del trabajo de sus coetáneos. Hasta cierto punto, esta lucha es útil, pero pasado cierto punto, se vuelve desastrosa[1].

Este lúcido comentario, muy típico del matemático y filósofo inglés, parece hecho a medida para la polémica que constituye una de las cuestiones que vamos a estudiar, pues pocas veces se han dado en la historia de las nuevas teorías científicas tan amargas e injustas descalificaciones como las que se produjeron con la aparición y despliegue de las Lógicas No-Clásicas, y muy en particular, de la Lógica Borrosa, también conocida por otros nombres, como Lógica Difusa o Lógica Heurística.

Recordemos que tal \`Fuzzy Logic´ es un caso particular de las lógicas multi-valuadas; es decir, que siendo la notación más usual de las lógicas de Lukasiewicz la de $L_n$, para el caso n-valuado, la \`Fuzzy Logic´sería el sistema L_∞; por tanto, la bivaluada o clásica (que aquí sería denotada como L_2), la trivaluada (L_3), la tetravaluada (L_4), etc., serían subconjuntos suyos, desde un

[1] RUSSELL, B., *Autobiografía,* Barcelona, Edhasa, 2010; p. 722.

punto de vista algebraico. Si se quiere expresar mediante el anidamiento de los conjuntos correspondientes de sus valores veritativos, se tendría:

$$\{0, 1\} \subset \{0, ½, 1\} \subset \{0, 1/n, 2/n,\ldots, (n\text{-}1)/n, 1\} \subset \ldots \subset [0, 1]$$

La Lógica de Łukasiewicz infinito-valorada se define sintácticamente como el conjunto de formulas deducibles a partir de los cinco conocidos axiomas, utilizando la regla del Modus Ponens como única regla de inferencia. Ya lo iremos aclarando más adelante.

En el Prefacio de su libro *“Pensamiento borroso”* (ó *“Fuzzy Thinking”*), el investigador americano Bart Kosko nos cuenta lo siguiente:

> Un día supe que la ciencia no es verdad. No recuerdo qué día, sí el momento. El Dios del siglo XX ya no era Dios. Había un error, y parecía que nadie en la ciencia dejaba de cometerlo. Decían que todo era verdadero o falso. No siempre estaban seguros de si algo era en concreto lo uno o lo otro, pero todos lo estaban de que nada había que no fuese o verdadero o falso. Podían decir si la hierba es verde, o si los átomos vibran, o si el número de lagos en Maine es par o impar. La verdad de esas afirmaciones era como la de las afirmaciones matemáticas o lógicas (verdades autoevidentes). O eran verdad del todo, o no lo eran en absoluto (Principio de no contradicción [“no (p y no p)”] y Principio del tercero excluido, o excluso [“(p o no p)”]: blanco o negro, sí o no, 1 ó 0. [2]

Como ya sabemos, la lógica trata de ser un conjunto de fórmulas bien construidas, junto con una relación de inferencia. Sin embargo, la lógica

[2] KOSKO, B., *Fuzzy Thinking.* New York, Hyperion Books, p. 23.

clásica[3] es bivalente, por esta razón, resulta muy limitada a la hora de resolver problemas con incertidumbre en los datos, que son los más usuales en el mundo real. Es bien conocido que la inteligencia artificial requiere fuertemente de la lógica. Debido a que su versión clásica muestra demasiadas insuficiencias, resulta muy necesario introducir herramientas más sofisticadas, como pueden ser las lógicas no clásicas; entre ellas, la lógica difusa, la lógica modal, la lógica no-monótona, la Paraconsistente, y así sucesivamente. Todos ellas en la misma línea: contra el dogmatismo y la visión dualista del mundo: absolutamente cierto vs absolutamente falso, negro contra blanco, bueno o

[3] Debemos distinguir entre los tipos de lógica con los que tratamos en cada caso. Disponemos de la Lógica Proposicional (LP, en acrónimo), también llamada Lógica de Orden Cero, de la cual una extensión (o ampliación) sería la Lógica de Primer Orden (LPO ó FOL, por `first-order logic´); de ésta, a su vez, lo sería la Lógica de Segundo Orden (LSO); … ; y así en adelante, hasta la "higher-order logic" (HOL), o Lógica de Orden Superior. Mientras que en la LPO sólo se cuantifican variables operando sobre individuos, en la LSO, aparte de eso, se van a cuantificar relaciones. Así, por ejemplo, en la LSO tendremos sentencias como ésta, que es el bien conocido Principio de Bivalencia: $\forall P\ \forall x\ (x \in P \vee x \notin P)$. Así que la LSO incluye la cuantificación sobre funciones y otras variables. En todas ellas se utiliza la idea del "dominio de discurso", en tanto en cuanto que conjunto de individuos que pueden ser cuantificados. No olvidemos que entre las reglas de la lógica proposicional clásica algunas de la más notables son éstas: Ley de doble negación. Leyes de idempotencia. Leyes asociativas. Leyes conmutativas. Leyes distributivas. Leyes de De Morgan. Esto nos recuerda la relación de propiedades que se han de cumplir para que un conjunto con determinadas propiedades sea un Álgebra de Boole; así, el de los sucesos estocásticos, o el álgebra de proposiciones. En cambio, existen otras leyes, como el principio de tercio excluso, que siendo admisibles en lógica clásica, sucede que en lógica intuicionista y en ciertas aplicaciones matemáticas no hay un equivalente suyo. También se deben considerar otros sistemas, como el de la Lógica Modal o el de la Lógica Temporal.

Volviendo sobre las LSO, las hay de diversos clases, como la *monádica,* LSOM, obtenida añadiéndole sólo variables para subconjuntos de un cierto dominio; o la *completa,* LSOC, en la que introducimos todo tipo de variables, y con eso, los cuantificadores se podrán referir a cualquiera de ellas. Existen cuantificadores, en las LSO, para subconjuntos o propiedades, que no pueden aparecer en las LPO. Aunque el poder expresivo de las LSO sea mayor que el de las LPO, lo que nos permite axiomatizar sistemas matemáticos más complejos, hay propiedades que no pueden ser formalizables correctamente con la LPO que sí se pueden formalizar de un modo correcto con las LSO. Sin embargo, hay una notable dificultad para la LSO, y es que algunos resultados importantes, como los Teoremas de Compacidad y de Skölem-Löwenheim no se pueden generalizar a LSO, siendo ambos tan importantes en las aplicaciones. Lo cual revierte en que sean las LSO de una menor utilidad. Ello ha conducido a ensayar lógicas intermedias, que generalizando la LPO no llegaran a la expresividad de las LSO, evitando ese problema. También podrían generalizarse a *lógicas de orden n*, pero en ese caso, habría que contar con sus previsibles dificultades.

Recordemos que el *Teorema de Compacidad* afirma que un conjunto de proposiciones lógicas de una LPO será satisfacible syss todo subconjunto finito de esas proposiciones lo es.

En cuanto al *Teorema de Skolem-Löwenheim,* éste dice que una LPO con una cantidad finita de símbolos distintos entre sí admite un modelo numerable.

malo por naturaleza, Sí vs No, 0 vs 1, lleno contra vacío, etc. Tratamos de analizar aquí algunas de ellas, siendo muy interesantes tanto la clásica como las modernas lógicas no clásicas, cuidando en particular el tema de su recepción, que ha sido bien distinta según los países.

La lógica clásica o aristotélica se ha mostrado eficaz hasta ahora en ciencias de las llamadas "duras", como la matemática o la física, pero resulta insuficiente cuando los predicados contienen imprecisión, incertidumbre o vaguedad, que es tal como funciona el razonamiento humano; la lógica borrosa ayuda a que los programas informáticos puedan interpretar juicios de ese tipo. Sus implicaciones filosóficas y de renovación de las ideas matemáticas fueron aumentando con el tiempo, y ya tiene un notable alcance, como vamos a ver.

El origen de las *Many-Valued Logics* (*MVLs,* en su acrónimo inglés) parece remontarse al menos a los filósofos griegos antiguos[4]; en particular, al mismo *Aristóteles* (384-322 a. C.). Posiblemente fuera este el primero en considerar que las cosas no son únicamente de una manera o de su contraria, sino que existe toda una gama de grises, es decir, que puede haber toda una completa escala intermedia de posibles valores de verdad. Pero algunos remontan el origen de estas Lógicas mucho más atrás, hasta la Antigua India y la Antigua

[4] N. Offenberger dice al respecto que: "Si se ubica la `explosión´ originaria de la Lógica en el periodo comprendido entre el 335 y el 322 a. C. (es decir, el periodo de madurez de la actividad creativa de Aristóteles), y se la confronta con el descubrimiento `documentado´ de la Lógica Polivalente (que sucede en 1920, año de aparición del artículo `Sobre la lógica trivaluada´, de Jan Lukasiewicz), se puede fácilmente calcular que la prehistoria de la lógica multivaluada duró sus buenos 2.255 años".
ÖFFENBERGER, N., "Mehwertige Logik…", de 1989.

China, aunque no fuera formalizada hasta el siglo XX. Así, Niels Öffenberger lo planteaba ya en su obra.[5]

La hipótesis que indica que toda proposición puede ser atribuida a exactamente uno de los dos valores lógicos, verdadero o falso, es llamada el Principio de Bivalencia[6], y constituye una de las bases de la lógica clásica. Tengamos en cuenta que el principio de bivalencia incluye el LEM (Law of Excluded Middle, o principio del tercero excluido, o del tercio excluso) y el principio de no-contradicción.

El *"problema de los futuros contingentes"* es una paradoja lógica sobre la contingencia de un suceso futuro[7]. Se planteó primero por Aristóteles, pero también por *Diodorus Cronus*[8]. Lo proponía Diodoro como un problema con el nombre del "dominador", o "soberano", el "Master Argument", aunque también –

[5] ÖFFENBERGER, N., *La prehistoria de la lógica polivalente en la Antigüedad Clásica*; p. 114.

[6] Como sabemos, la llamada Lógica Clásica se rige por el mencionado *Principio de Bivalencia,* según el cual toda oración enunciativa (λόγοζ αποφαντικόζ) será o bien verdadera o bien falsa. Las primeras expresiones de este principio son debidas al Estagirita.
Algunas de las más conocidas son éstas: "Sea A ser bueno, B no ser bueno… ; a todo (sujeto) le ha de convenir o A o B, y a ninguno ambos".
ARISTÓTELES, *Analíticos Primeros,* A46, 51b; pp. 36-40.
O bien esta otra cita: "Respecto de lo que es y de lo que ha sido, es necesario que la afirmación o la negación sean verdaderas o falsas, y en lo que (se predica) universalmente de lo universal, siempre lo uno es verdadero; lo otro, falso."
ARISTÓTELES, *Peri Hermeneias,* 9, 18.ª; pp. 28-31.
Los sistemas lógicos multivaluados son aquellos que por negar el Principio de Bivalencia, poseen más de dos valores de verdad. Por esto son tenidos entre los sistemas no-clásicos de la lógica.

[7] Esta cuestión filosófica de los "futuros contingentes" es desde el punto de vista histórico una de las más veneradas y duraderas. No sólo está profundamente enraizada en la tradición aristotélica más pura, sino que ha sugestionado a diversos autores, y en algún caso, como el que nos ocupa (el de Lukasiewicz), han sido la motivación inicial que le condujo a desarrollar la MVL. Una de las aplicaciones filosóficas de dichas lógicas no clásicas sería la revisión de las leyes del pensamiento (laws of thought); sobre todo del Principio de Tercio Excluso (LEM) o/y del Principio de No-Contradicción. No debemos olvidar que el recurso a las ideas principales de las MVLs puede arrojar mucha luz sobre aquellas cuestiones que versan acerca de nuestra concepción misma de la naturaleza de la lógica. Entre algunos de esos temas de especial interés estarían los del Convencionalismo y los del Relativismo en Lógica.

[8] Diodorus Cronus era del siglo IV a. C.; esto es, pertenecía a la generación posterior a la del Estagirita. También perteneció al grupo de los Megáricos, y se ocupó de las paradojas lógicas, Filón de Alejandría, aunque quien más se asocia con ellas es el mencionado Eubúlides.

como queda dicho- lo analizaba Aristóteles, que es el único a quien se suele mencionar en relación con este tema. Lo trató en su famosa obra *De Interpretatione*[9]. Aristóteles admite en él que las leyes lógicas que se proponen no son aplicables a sucesos futuros (future events). Para ver con detalle su Paradoja de la Batalla Marina, debemos acudir a la mencionada obra, donde se refiere a ello en su Capítulo IX. Dice allí que:

Así, pues, en las cosas que son y que fueron, es necesario que la afirmación (o la negación) sea verdadera o falsa, y de las contradictorias, sobre los universales en tanto que universales siempre la una ha de ser verdadera y la otra falsa, y también sobre los singulares...

En cambio, con los singulares futuros no ocurre igual. En efecto, si toda afirmación o negación es verdadera o falsa, también todo lo por ella afirmado o negado ha de darse o no darse; pues si uno dijera que algo será y otro dijera que eso mismo no será, es evidente que uno de los dos dice necesariamente la verdad, si toda afirmación es verdadera o falsa: pues en las cosas de este tipo no se darán ambas a la vez…

Pero tampoco cabe en modo alguno decir que ninguna de las dos cosas es verdad, v.g.: que ni será ni no será. Pues primero, en ese caso, resulta que siendo falsa la afirmación, la negación no sería verdadera, y siendo esta falsa, la afirmación no es verdadera. Y además, si es verdad que decir que es blanco y negro, es preciso que ambas cosas se den, y si fuera verdad decir que se darán mañana, no será cualquier cosa al azar; por ejemplo, una batalla naval: en efecto, sería preciso que ni llegara ni no llegara a haber una batalla naval.

[9] Breve tratado también llamado *Peri Hermenias,* por su nombre en griego.

Estos y otros por el estilo son, entonces, los absurdos que resultan si es necesario que de toda afirmación y negación opuestas, ya versen de los universales enunciados como universales, ya sobre los singulares, la una sea verdadera y la otra falsa, y que nada de lo que sucede sea cualquier cosa al azar, sino que todo sea y suceda por necesidad. De modo que ni sería preciso deliberar ni preocuparse, pensando que si hacemos tal cosa, se dará tal otra, y si no, no se dará.[10]

Si existe un valor de verdad, entonces debería suceder que es de necesidad, lo cual no es posible, por ser un asunto todavía contingente.

Las proposiciones (o sentencias) del tipo de las Futuro-Contingentes son expresiones acerca del estado de los asuntos en el futuro que no son ni necesariamente verdaderas ni necesariamente falsas.

Aristóteles cree zanjado este problema asegurando que el Principio de Tercio Excluso tiene al menos una excepción, y esta será la Paradoja de la Batalla en el Mar. Sin embargo, Aristóteles no llegaría a crear nunca un sistema mediante el cual llegase a explicar o resolver esta observación aislada[11]. Estaba interesado en otras cosas, como era establecer una fundamentación rigurosa, aun a costa de hacerla demasiado rígida, de la investigación científica, unas bases que tras él han durado muchos siglos, casi hasta la

[10] ARISTÓTELES, *De Interpretatione,* cap. IX. Trad. esp., M. Candel. Madrid, Editorial Gredos. *Tratados de Lógica (Órganon),* vol. II, "Sobre la Interpretación"; pp. 50-53.

[11] FERRATER MORA, J., *Diccionario de Filosofía*, en su p. 2621, dice: "Se ha discutido si existen precedentes (de las lógicas multivaluadas) en la Antigüedad y en la Edad Media; especialmente, si existen precedentes de la lógica trivalente. Las opiniones de Aristóteles sobre ciertas proposiciones relativas al futuro, y el problema de los llamados \`futuros contingentes´, han llevado a algunos autores a estimar que el Estagirita había propuesto una lógica trivalente. Si ciertas proposiciones no son ni decididamente verdaderas ni decididamente falsas (bien que dadas dos de tales proposiciones \`p´y \`q´, resulta siempre que \`o p o q´es verdadera), parece que habría que concluír que son indeterminadas, o que poseen un valor de verdad distinto, el tercero, entre lo verdadero y lo falso". Opina Ferrater Mora que con ello se llevarían demasiado lejos las opiniones del Estagirita.

fecha. Aunque por otra parte, bien es verdad que tan paradójico problema dio origen a la denominada Lógica Modal[12].

Acerca de ello, y de acuerdo con Jan Lukasiewicz,

> If statements about the future events are already true or false, then the future is as much determined as the past and differs from the past only in so far as it has not yet come to pass.[13]

Aristóteles, en ese *De Interpretatione,* incluido en su famoso *Organon,* que –como sabemos- es una agrupación de tratados lógicos[14], se pregunta qué valor de verdad tiene hoy la proposición

Mañana habrá una batalla naval

ya que mañana puede suceder que haya una batalla naval, o que no la haya. De la proposición planteada, y de acuerdo con el principio de contradicción, sólo se puede decir si es verdadera o es falsa, y de acuerdo con el principio del tercio excluso, no hay un tercer valor entre la verdad y la falsedad que las pueda invalidar al mismo tiempo.

Para Aristóteles las proposiciones que se refieren a eventos (sucesos) futuros contingentes, o bien pueden tener más valores de verdad, y debe abandonarse entonces el principio de bivalencia, pero también en consecuencia debería hacerse con el principio de tercio excluso, o bien se

[12] Modal Logic; *ML,* en acrónimo.
[13] Lukasiewicz, 1970.
[14] Entre esas obras lógicas del Estagirita, podemos destacar los siguientes tratados: el de las *Categorías,* que trata de los términos; el *De Interpretatione,* donde estudia los enunciados; los *Analíticos Primeros,* donde se habla de silogismos, y los *Analíticos Segundos,* donde se trata de la demostración. Además, hemos de mencionar los *Tópicos* y los *Elencos Sofísticos,* que viene a analizar el silogismo dialéctico y el sofístico, respectivamente.

acepta el principio de bivalencia, y como consecuencia, ontológicamente, se adopta una postura determinista.

La estructura de ese famoso capítulo IX del *De Interpretatione*[15] sería la siguiente:

I. *Introducción.*

II. *Desarrollo de las dificultades "fatalistas"* (o del fatalismo), subdividido en:

A. Fatalismo, o Determinismo[16].

A1. De un par de proposiciones singulares de tipo futuro contingencial, ambas no pueden ser verdad.

A2. Por lo tanto, la verdad de una disyunción implica el fatalismo.

A3. Y la verdad pasada de una disyunción también implica el fatalismo.

A4. De un par de proposiciones contradictorias, futuro-contingenciales, ambas no pueden ser ciertas a la vez.

B. Absurdo del Determinismo.

B1. El fatalismo implica que todo sucede necesariamente.

B2. Pero este, obviamente, no es el caso.

III. *Resolución de las dificultades del determinismo.*

[15] O el *Peri Hermeneias,* que como queda dicho, era su nombre original en griego. La clasificación viene de acuerdo con lo que nos dice Lukasiewicz, y con la selección de escritos de éste preparada en su día por Alfredo Deaño para la *Revista de Occidente.*

[16] Es un tema tan apasionante, éste del determinismo y con él, la posibilidad o no del libre albedrío humano, que ha venido fascinando a lo largo de la historia tanto a filósofos como a teólogos, y más recientemente, incluso a científicos. La cuestión ya era tratada por la Escuela Pitagórica, y más adelante, con verdadera fruición, por pensadores cristianos y musulmanes, pasando por San Agustín, Santo Tomás de Aquino, Martín Lutero o Juan Calvino, etc., sin olvidar a los filósofos árabes, grandes estudiosos y comentaristas de la obra aristotélica, y en particular, de este tema. Podríamos hablar en ese sentido de Averroes o de los Mutazilíes.

C1. Necesidad y necesidad condicional.

C2. Predicando Necesidad colectiva y distributivamente.

C3. Aplicación a las expresiones singulares futuro-contingenciales.

Todo esto puede verse desarrollado y comentado con gran profundidad en la citada obra[17].

Recordemos que la discusión de Aristóteles en ese capítulo noveno del *Peri Hermeneias* es de tipo interpretativo. Y que Williams dijo de ella que:

> "… we can find some evidence for almost anything we hope to see, but the shape we think we find changes as we are looking at it."[18]

Ha sido un texto que ha suscitado encendidas y enconadas polémicas, tanto en la Patrística como en la filosofía cristiana medieval[19]. Incluso es posible encontrar frecuentes rastros de ella en el pensamiento judío e islámico, a través de los averroístas, de Al-Farabi, o de Maimónides. Asimismo, de los llamados averroístas latinos, como Siger de Brabant (1240-1285)[20]. Porque el

---

[17] La que figura en referencias como la de Brill, 1988.

[18] D. C. Williams.

[19] Roberto Grosseteste, Juan Duns Escoto, Guillermo de Ockham, Richard de Lavenham; o más adelante, ya en los debates de la Universidad de Lovaina, Peter de Rivo, entre diversos pensadores medievales.

[20] No olvidemos que el mayor comentarista árabe de Aristóteles fue Ibn Rusd (Averroes), que había nacido en Qurtuba (actual Córdoba), y que vivió entre los años 1126 y 1189. Su pensamiento influyó notablemente en la filosofía cristiana y en la judía. Una de las doctrinas que le ocasionaron graves contratiempos y persecución fue la de la "doble verdad"; por un lado, la de la razón, y por otro, la de la fe. Otras ideas también le pusieron, tanto a él como a sus discípulos, en medio de furiosas controversias, como las de la eternidad del mundo (por tanto, que no aparecería a partir de la nada); la unidad del entendimiento en la especie humana, teoría llamada del "monopsiquismo"; la de la negación de la inmortalidad del alma y la que postula la no existencia de libre albedrío. La Iglesia las condenó, y fueron combatidas tanto por San Buenaventura como por Santo Tomás de Aquino; éste, en su *Summa Contra Gentiles.* Pues bien: el representante más notable del llamado "averroísmo latino" sería Siger (o Sigerio) de Brabante (1235-1284). Su línea de pensamiento se suele denominar "averroísmo radical".

debate se remonta incluso más, hasta la Grecia antigua. Los argumentos que pudiéramos llamar "deterministas" o "fatalistas" se pueden hallar tanto en el *"Master Argument",* de Diodorus Cronus, como en el *De Interpretatione* del Estagirita*.* Sólo que dado que el primero sólo se encuentra en forma fragmentaria, es mejor centrarse en el segundo. Pues las derivaciones que se puedan obtener a partir de este tipo de argumentos resulta claramente conflictiva, si se miran desde el pensamiento cristiano más ortodoxo. Porque si según la Sagrada Biblia, Dios conoce[21] todos los hechos futuros, ¿deben entonces esos sucesos que Él conoce con anticipación ocurrir necesariamente? Dado también que si Él conoce el valor de verdad de todas las proposiciones, y según la "línea de fuga" propuesta por Aristóteles, e insatisfactoria para los cristianos, esas proposiciones no serían aún ni verdaderas ni falsas… Tanto desagradaba ese planteamiento a la ortodoxia religiosa que fue declarado herético por el Papa Sixto IV, en 1474. Lo cual venía derivado precisamente por haber sido dictada una conferencia en la Universidad de Lovaina por Peter de Rivo, en la que proponía una lógica trivaluada[22] para tales proposiciones (las contingentes)."[23]

Al ser la Revelación enseñanza directa de Dios, según los escolásticos, no podrían contradecirse las verdades obtenidas a través de ambos tipos de conocimiento (el racional y el revelado): toda oposición aparente debiera deberse al uso incorrecto de la razón o a una interpretación errónea de la palabra revelada, y habría siempre de fallarse en favor de la Fe. Por tanto, la Teología tendría la última palabra, como árbitro supremo, predominando sobre la Filosofía. Al provenir de Dios, lo revelado tendría un *mayor grado de verdad* que lo obtenido mediante la razón, y podríamos añadir nosotros: ése grado de verdad puede depender de la capacidad de raciocinio o del grado de sutileza del que lo piensa. En todo caso, esto sonaría bastante a una interpretación tocante a las lógicas multivaluadas.

[21] *Divine Foreknowledge,* o *Presciencia Divina.*

[22] Debemos consignar aquí, para completar la información al respecto, que como Michalski apuntaba ya en 1937, tanto Juan Duns Scoto como Guillermo de Ockham desarrollaron las tesis aristotélicas, en el sentido de llegar a admitir un tercer valor veritativo, aparte de los dos ya clásicos, el de verdad y el de falsedad. Así, distinguían entre la *propositio neutra,* la *propositio vera* y la *propositio falsa.* De ahí que Michalski concluyera que Ockham fue uno de

Pedro de Rivo (originariamente llamado Peter van den Becken), fue un controvertido filósofo flamenco, que brilló en las polémicas suscitadas en la Universidad de Lovaina, centro donde comenzó sus estudios en 1437, llegando primero a ser Maestro de Artes, en 1442; pasaría a continuación a estudiar Teología, sin que alcanzara nunca a lograr un título de Maestro en Teología. Escribió numerosas obras, no sólo sobre el pensamiento de Aristóteles, sino incluso de temas que pueden considerarse tan exóticos como el del calendario. Pero lo que le hizo más famoso fue la encendida polémica sobre los futuros contingentes. Todo ello comenzó en 1465, cuando en un debate quodlibetal Pedro de Rivo defendiera la posición de Pedro Auriol sobre el "libre albedrío". Para poder preservar la existencia de éste, Peter De Rivo negaba cualquier determinación de los futuros contingentes antes de su realización, dado que para De Rivo, como para Auriol, el no hacerlo implicaría la negación de la aplicabilidad del principio de bivalencia a las proposiciones acerca de los futuros contingentes[24]. Así, cuando decimos "el Anticristo vendrá", esto no es ni verdadero ni falso, sino simplemente "neutro". También aceptaba Pedro de Rivo algunos otros elementos del pensamiento de Pedro Auriol, como que el conocimiento divino es, si hablamos con propiedad, "foreknowledge" (o de `presciencia divina´), y no impone predestinación alguna sobre el futuro[25].

---

los verdaderos precursores de la lógica trivaluada. Afirmación con la que no estuvo de acuerdo algún otro, como los Kneale, por ejemplo.

[23] CRAIG, W. L., 2004; p. 223.

[24] Algunos autores, como los Kneale (William y Marta) piensan que las proposiciones futuro contingentes deben excluirse de la clase de las proposiciones propiamente lógicas.
KNEALE, W. y M., *The Development of Logic,* Oxford University Press, 1962. Traducido por J. Muguerza para la Ed. Tecnos.

[25] El problema del determinismo reaparece en tiempos modernos en autores como Friedrich Nietzsche, con su tratamiento del mito del eterno retorno, tan caro a muchas antiguas culturas. Porque en él se percibe una cierta poética reminiscencia del determinismo. Otro determinista moderno podría ser B. F. Skinner (1904-1990), famoso por el conductismo. Él creía en la

Decía Jan Lukasiewicz, en su artículo *Sobre el Determinismo,* que:

> Dos enunciados de los que uno es la negación del otro se llaman contradictorios. Voy a ilustrar esta noción mediante un ejemplo tomado de Aristóteles. «Mañana habrá una batalla naval» y «Mañana no habrá una batalla naval» son enunciados contradictorios. Dos famosos principios derivados de Aristóteles, el principio de contradicción y el principio de tercio excluso, hacen referencia a enunciados contradictorios. El primero de ellos enuncia que dos enunciados contradictorios no son verdaderos a la vez, es decir, que uno de ellos debe ser falso. En lo que sigue no me ocuparé de este importante principio que Aristóteles, y con él otros muchos pensadores, consideraron como el más profundo sostén de nuestro pensamiento. Me ocuparé aquí del principio de tercio excluso. Este establece que dos enunciados contradictorios no son falsos a la vez, es decir, que uno de ellos ha de ser verdadero. O bien habrá mañana una batalla naval o bien no habrá mañana una batalla naval. Tertium non datur. No hay término medio entre los argumentos de esta alternativa: no hay una tercera cosa que, siendo verdadera, invalidaría sus dos argumentos. Puede ocurrir a veces que dos personas en disputa, de las que una considera blanco lo que otra considera negro, estén ambas equivocadas, y que la verdad esté en algún punto entre esas dos aserciones. No hay contradicción, sin embargo, entre considerar una cosa como blanca y considerar esa misma cosa como negra. Sólo los enunciados que afirman que la misma cosa es y no es blanca serían contradictorios. En casos semejantes, la verdad no puede estar entre esos enunciados o fuera de ellos, sino en uno de ellos.[26]

El problema del valor de verdad de los futuros contingentes también ocupó la mente de los grandes lógicos medievales, como es el caso del filósofo

---

existencia de un determinismo educacional, pensando que la educación recibida es la que más condiciona la conducta de los seres humanos, más incluso que los genes heredados.

[26] LUKASIEWICZ, J.,1930.

escocés Juan Duns Scoto[27], o sobre todo, el de Guillermo de Ockham[28]. Porque fray Guillermo de Ockham, el filósofo inglés, distinguía entre éstos tres tipos de proposiciones: la *propositio neutra,* la *propositio vera,* y la *propositio falsa.* Sin embargo, no llegaría nuca a desarrollar un sistema lógico que se basara en ellas.

Como se sabe también[29], éste problema fue discutido por el propio Gottfried Whilhelm Leibniz, en su *Discurso de Metafísica.* Se atribuye a dicho gran pensador la paternidad de la moderna Lógica Matemática. Esto que comentamos sería hacia el año 1696. De Leibniz procede esa tantas veces mencionada frase acerca de que las controversias filosóficas pudieran todas ellas resolverse describiendo antes con claridad y con notación precisa los problemas; así, luego bastaría con sentarse a comprobar, tan sólo diciendo:

- *¡Calculemos!*

---

[27] El Doctor Subtilis, o Doctor Sutil.

[28] El Doctor Invincibilis. Puede ser discutible si existen indicios de lógica trivalente en Aristóteles, por exponer el problema de los futuros contingentes, o en Guillermo de Ockham, con su conocimiento distinto vs. conocimiento confuso. El hecho es que Guillermo de Ockham abordó esta cuestión, en su *Tratado sobre la predestinación y la presciencia divina de los futuros contingentes,* problema tan largamente debatido desde el Estagirita hasta su tiempo. Llegó a establecer una solución que es, a la vez, original y tradicional. Es tradicional en tanto que defiende la compatibilidad de la ciencia divina del futuro, e incluso de la elección divina de los futuros individuales, con la libertad humana. Y es original, porque distingue entre dos tipos de pasado; uno, que pudiéramos denominar "fuerte", y otro, que cabría denominar como "débil".

Otro pensador medieval interesante, muy anterior a Ockham, y que también se ocupó bastante en profundidad de ese problema, fue *Juan Escoto Eriúgena* (nacido en Irlanda, hacia el 815 d. C., y fallecido hacia el 877 d. C.). Creador del primer gran sistema filosófico de la Edad Media. En su obra *De Divina Praedestinatione,* que escribiera en el 851 d. C., defendía que el destino final de los individuos no depende de Dios, sino que la voluntad humana juega un importante papel. Éste libro sería condenado por diversos Concilios, como los de Valence (855), Langres (859) y Vercelli (1050). También afirmababa Escoto Eriúgena en sus escritos que no existe nada semejante a la condenación, contra lo hasta entonces mantenido por la tradición. Según él, todos los seres humanos se han de transformar finalmente (y todos por igual) en espíritus puros.

[29] Nos apunta el profesor Eloy Rada que el problema del determinismo admite también una interesante "ramificación": ¿son ciertas o no son ciertas las profecías? Porque este sería, en el fondo, el mismo problema; se trata de sucesos necesarios; al serlo, tendrían que ocurrir, luego serían verdaderos. Y con ello nos metemos de nuevo en el terreno del determinismo.

Después de Leibniz podemos considerar que la Lógica sufre un oscuro letargo u olvido, hasta que George Boole, en 1885, publica su libro *Investigación sobre las leyes del pensamiento.* En él establece la lógica como un álgebra de clases.

La Lógica Matemática, en tanto en cuanto que rama independiente de las Matemáticas se formó a finales del siglo XIX. Dado que surgimiento y posterior rápida expansión de esta Lógica, a principios ya del siglo XX, fue debida a la llamada “crisis de los fundamentos de las Matemáticas”.

Los trabajos de Bernard Bolzano, Richard Dedekind y Georg Cantor –como ya explicaremos más adelante- dieron pie a una nueva rama del conocimiento matemático, que es la *Teoría de Conjuntos* (hoy llamada clásica, tras la aparición de otras teorías alternativas, como las de los Difusos o Rugosos, entre otras). A partir de la teoría inicial cantoriana se llevó a cabo un enorme trabajo que permitiera entender los conceptos, tanto los matemáticos como los lógicos, fuertemente imbricados entre sí. En esta línea, fueron muy interesantes los trabajos de Gottlob Frege, Bertrand Russell y Alfred North Whitehead. Pero el alto grado de abstracción y la “universalidad” del concepto de conjunto llevaron inevitablemente a la aparición de dificultades, como la famosa paradoja de Russell, que plantea la siguiente pregunta: ¿El conjunto de todos los conjuntos que no se pertenecen a sí mismos, se pertenece o no se pertenece? Porque si se pertenece, no se pertenece; y si no se pertenece, se pertenece.

La aparición de este tipo de paradojas produjo una serie de reacciones en los matemáticos, en unos de atracción, y en otros, de repulsión. También llevaron a la aparición de la correspondiente literatura. Podemos mencionar como paradigmáticos los casos del francés Henri Poincaré, que las detestaba[30], o del alemán David Hilbert, que se interesaba por ellas, e incluso escribió un tratado de Lógica Matemática, junto con su ayudante, Wilhelm Ackermann.

Tratando de fundamentar sobre bases más sólidas el edificio matemático, se elaboraron dos programas.

El primero de los cuales sería el de la “argumentación finitaria” de las Matemáticas. Fue la propuesta de David Hilbert. Lo esencial de dicho sistema consistiría en tratar de construir tal formalización de las Matemáticas que hiciera posible demostrar su consistencia por medio de ese mismo sistema. Otra de las condiciones que se le exigirían es la condición de que todas las expresiones primitivas, que se verifican directamente sobre todos los naturales, sean verdaderas en dicha formalización. Fue un programa muy eficaz; sobre todo, cuando se elaboraba el método axiomático moderno. Y a pesar de no ser ejecutable, como probó Kurt Gödel, sus modificaciones siguen analizándose hasta hoy en día.

El segundo programa fue el vinculado con la crítica de algunos de los postulados utilizados ampliamente en las Matemáticas sin disponer para ello de la argumentación necesaria. Este es le caso del Principio de Tercio Excluso[31], que aparecerá una y otra vez a lo largo de este trabajo. Pero también se lidiaba con el Axioma de Elección. Este segundo programa se llamaba Intuicionismo.

[30] POINCARÉ, H., *Filosofía de la Ciencia*, colección de trabajos con selección e introducción de Eli de Gortari. México, UNAM.
[31] LEM, en su acrónimo inglés, por Law of Excluded Middle.

Se trataba de construir las Matemáticas partiendo de limitaciones estrictas sobre el uso de tales principios. El nombre que suele aparecer asociado con él es el de L. E. J. Brouwer, y el de su alumno, Arendt Heyting, pero también llegó a tierras rusas, con Andrei A. Markov y sus discípulos. Estaría vinculado con un enfoque crítico de los medios admisibles en Matemáticas, para lo cual utiliza de modo sistemático el concepto de algoritmo, mientas que los resultados matemáticos se reproducen de un modo constructivo.

Se puede considerar, acertadamente, que el resultado principal en el campo de los principios de las Matemáticas consiste en el proceso de formación de la Lógica Matemática como rama independiente. Su logro más notable es la elaboración del método axiomático moderno, que tiene las siguientes características:

1.ª) *La formulación explícita de los axiomas,* o tesis iniciales, de una u otra teoría.

2.ª) *La formulación explícita de las Reglas de Deducción*[32], admitidos para el desarrollo[33] de esta teoría.

3.ª) *La utilización de los Lenguajes Formales,* que son construidos de modo artificial, ya que nos permitan la exposición de todos los teoremas[34] de la teoría considerada.

Los ricos y diversos Lenguajes Formales, los de la Lógica Matemática y las otras Lógicas, sean estas Alternativas o Suplementarias, forman una de las

[32] Esto es, de los medios lógicos.
[33] O deducción sucesiva.
[34] O tesis.

premisas objetivas para la creación de ordenadores o computadoras universales, que actualmente emplean un amplio espectro de lenguajes formales de programación. Esos son los lenguajes artificiales antes aludidos.

En la *Lógica Matemática,* el objeto de estudio principal son los diferentes cálculos que podamos proponernos. Ese concepto de lo que es un cálculo tiene diversas componentes esenciales, como son:

1) *El lenguaje formal del cálculo.*
2) *Los axiomas de dicho cálculo.*
3) *Las Reglas de Deducción.*

Dicho concepto de *cálculo* permitirá una definición matemática adecuada del concepto de demostración.

Otro concepto fundamental de la Lógica Matemática es el de *algoritmo,* en tanto que procedimiento eficaz para resolver problemas dentro de una clase de estos, que puede ser infinita. Esta idea ya fue utilizada de un modo intuitivo desde mucho tiempo atrás. El mismo G. W. Leibniz ansiaba encontrar un *"algoritmo universal"* que pudiera resolver todos los problemas matemáticos. Pero que esta era una hermosa, aunque imposible utopía, lo probó Alonzo Church[35] en 1936.

Porque en el estudio de dichos cálculos consiste el *aspecto semántico* de la Lógica Matemática. El estudio sistemático y profundo de los cálculos

[35] Quien fuera –junto con Max Newman- el maestro de Lógica para Alan M. Turing.
En los años que siguieron a este de 1936 fueron descubriéndose muchos problemas que resultaban irresolubles desde un punto de vista algorítmico. Así, estos se debieron al esfuerzo del propio Alan Turing, de Emil L. Post, de Stephen C. Kleene, o de los rusos P. S. Novikov, A. A. Markov, y A. I. Maltsev.

constituye una parte independiente de las Matemáticas, llamada *Teoría de la Demostración.* Por su parte, el estudio del *aspecto sintáctico* de los cálculos se basa en el de los Lenguajes Formales.

La semántica clásica del lenguaje del Cálculo Proposicional constituye la *Teoría de Modelos,* un área de investigación en rápido crecimiento, pues sus métodos se aplican con éxito en otras importantes ramas de la Matemática, como el Análisis o el Álgebra[36]. Esta Teoría de los modelos fue fundada por el matemático, lógico y filósofo polaco Alfred Tarski, junto con los trabajos del ruso A. I. Máltsev.[37] Como dijeran en su día los científicos rusos Ershov y Paliutin,

> … la Lógica matemática moderna es una parte amplia y ramificada de las Matemáticas, cuya fuente de problemas son los suyos interiores, los problemas filosóficos de los principios de la Matemática y de la Lógica, así como los problemas que surgen en otras ramas de las Matemáticas, como el Algebra, el Análisis, la Cibernética y la Programación, etc.[38]

---

[36] No olvidemos que para la construcción del citado Cálculo Proposicional, pueden seguirse distintas líneas metodológicas. Entre ellas, tenemos las del método axiomático; la de la deducción natural; el método de los árboles (o \`trees´) finitamente generados; el método de Gerhardt Gentzen, de los llamados \`sequents´, junto con sus generalizaciones, y el más utilizado de todos ellos, el método algebraico. Todos los cuales requieren de un *teorema de completitud,* de donde provendrá una interpretación de tipo algebraico de este cálculo. La necesidad de ese resultado (la verificación de ese teorema) nos garantiza la corrección de toda la construcción lógica, porque así, toda afirmación que sea una tautología en dicho cálculo puede ser probada dentro de él. La afirmación recíproca se llamaría el *teorema de consistencia.*
Recordemos que en la Teoría de la Prueba un \`sequent´ sería una sentencia declarativa de provabilidad (con \`v´ al venir de prueba), susceptible de ser verdadera o falsa.

[37] No olvidemos tampoco al matemático italiano Giuseppe Peano, que tanto hizo para elaborar y divulgar los lenguajes formales de la Lógica. Tampoco se ha de omitir la labor de Ernest Zermelo, en el difícil trabajo de axiomatización de la Teoría de Conjuntos, por el que aparece para siempre su nombre asociado con el de Abraham Fraenkel.

[38] ERSHOV, Y., y PALIUTIN, E., *Lógica Matemática,* Moscow, Ed. Mir, 1990.

2. *Sobre quiénes han venido trabajando en este campo.*

Establecer la relación de los *"Dramatis Personae"* que intervienen a lo largo del tiempo podría ser, a fuer de exhaustiva, bastante larga y aburrida, pero resulta sin duda muy necesaria, y además, entra dentro de las tradiciones consagradas en este tipo de trabajos. Intentaremos, de todos modos, no ser más prolijos de lo estrictamente necesario.

Los primeros trabajos en esta línea fueron, sin duda, los de Aristóteles, y más adelante, entre los lógicos medievales, los de algunos pertenecientes a la Escolástica, como son los de Juan Duns Scoto o Guillermo de Ockham. Más adelante, entraríamos ya en la consideración de los padres jesuitas Luis de Molina y Francisco Suárez.

Y en tiempos ya más modernos, la obra, principalmente transmitida en forma oral y a través de los propios escritos de sus alumnos, de dos notables pensadores, como fueron Bernard Bolzano y Franz Brentano. Las enseñanzas de este fueron transmitidas, entre otros, al polaco Kazimierz Twardowski; desde él, a quien fuera uno de sus más brillantes alumnos, Jan Lukasiewicz[39]. Ya estaríamos hablando de la famosa Escuela de Lvóv-Varsovia *(Szkola*

[39] Según Jan Lukasiewicz, "logic is morality of thought and speech". Por ello, pensaban, tanto él como los otros miembros de la ELV, que estaban realizando una importante labor social, en tanto en cuanto que arma de defensa contra todo tipo de "irracionalismo".

Lwowsko-Warszawska)[40], fundada por el primero de ellos y a la cual el segundo perteneció como un personaje muy destacado, junto con Alfred Tarski[41], entre otros.

Fue precisamente Jan Lukasiewicz quien, en la segunda década del siglo XX, y pensando en el problema de los futuros contingentes, propuesto por Aristóteles, concibió la necesidad, para tratar de resolverlo, de introducir un tercer valor de verdad, que se debería añadir a los dos clásicos de verdadero y falso de la lógica binaria o aristotélica. Así nació la lógica tri-valuada, que luego se iría generalizando a tetra-valuada, hasta llegar a la lógica infinito-valuada que propusiera Hans Reichenbach. Aunque hemos de reconocer que el verdadero interés (o al menos el inicial) de Lukasiewicz no era el estudio de la vaguedad en sí misma, sino el problema del determinismo[42].

---

[40] La importancia del estudio de los orígenes y evolución de la ELV quedan bien reflejada en la `Review´ que el conocido investigador en lógica J.-Y. Béziau escribió acerca de la obra de I. Grattan-Guinness, *The search for mathematical roots 1870-1940,* afeándole que dedicara tan poco espacio a un grupo que resultaría clave, al ser autores de tan cruciales aportaciones: "But probably the worst defect of IGG's book is one common to JvH's (Jan van Heijenoort, *From Frege to Gödel*) work: the downplay of the Polish school. Especially through the work of Tarksi this school has dominated the logical researches of the 20th century, so it would have been interesting to talk about the origin of this school. Moreover the investigations of the Polish school were also fundamental for Gödel's incompleteness theorem. In a letter from Tarski to Neurath published about ten years ago (this correspondence does not appear in the bibliography of IGG's book), Tarski explains that Gödel and people from Vienna understood the distinction between language and metalanguage only after some discussions they had with Poles, and that this distinction was made explicit by Lukasiewicz in the early 1920s". Es siguiendo esa línea, la de tratar de difundir sus logros y de completar ciertas lagunas de información sobre la ELV, a lo que hemos dedicado nuestro humilde trabajo.
La reseña puede verse en la página web: www.jyb-logic.org/reviewigg.pdf

[41] Dijo Alfred Tarski que: "Religion (in the sense of ideology, according to Jan Wolenski) divides people; logics brings them".

[42] Los escritos de todos estos interesantes autores, así como los de sus comentaristas, pueden sernos de verdad muy útiles, y figuran por ello extensamente en la Bibliografía que aparece al final de esta tesis. Mencionemos aquí tan sólo el siguiente texto de Lukasiewicz, dado su especial interés por su relación con el determinismo:

"... it can assume one and only one of two truth-values: truth and falsity. I call this principle the principle of bivalence. In ancient times this principle was emphatically defended by Stoics and opposed by the Epicurean, both parties being fully aware of the issue involved. Because it lies at the very foundation of logic, the principle under discussion cannot be proved. One can only believe it, and he alone who consider is self-evident believe it. To me, personally, the

Tras una época de letargo y de relativa oscuridad, al menos para las ideas de las Lógicas Multivaluadas, vino la furibunda reacción adversa contra la propuesta de una Lógica Borrosa, por *Lofti A. Zadeh,* realizada a partir de su artículo sobre "Fuzzy Sets", de 1965. Este matemático-ingeniero azerí reactualizaba –fundamentalmente- los escritos e ideas de Jan Lukasiewicz, viéndole sus posibles implicaciones en Matemáticas, así como en las aplicaciones tecnológicas[43].

---

principle of bivalence does not appear to be self-evident. Therefore I am entitled not to recognize it, and to accept the view that besides truth and falsehood exist other truth-values, including at least more, the third truth-value.

What is this third-value? I have no suitable name for it. But after the preceding explanations it should not be difficult to understand what I have in mind. I maintain that there are propositions which are neither true nor false but indeterminate. All sentences about future facts which are not yet decided belong to this category. Such sentences are neither true at present moment, for they have no real correlate. If we make use of philosophical terminology which is not particularly clear we could say that ontologically there corresponds to these sentences neither being nor non-being but possibility. Indeterminate sentences, which ontologically have possibility as their correlate, take the third value.

If third value is introduced into logic we change its very foundations. A trivalent system of logic, whose first outline I was able to give in 1920 differs from ordinary bivalent logic, the only one known so far, as much as non-Euclidean systems of geometry differ from Euclidean geometry. In spite of this, trivalent logic is as consistent and free from contradictions as is bivalent logic. Whatever form, when worked out in detail, this new logic assumes, the thesis of determinism will be no part of it."

LUKASIEWICZ, J., "On determinism", 1946; p. 126.

[43] Desde el punto de vista de la teoría conjuntista, no hemos de confundir los conceptos que subyacen en nombres muy parecidos, pero con un sentido muy diferente. Así, debe distinguirse bien entre un conjunto "clásico" (en el sentido de Cantor; también llamado "crisp") y un conjunto borroso (o difuso, "fuzzy", en el sentido de Zadeh). Pero entre otros denominados de un modo similar, y que por tanto, pudieran ser equívocos, tenemos los "multisets", o multiconjuntos. Aquí los que se cuantifica ya es la multiplicidad de la pertenencia de cada elemento al conjunto base, y no su grado de pertenencia, o valor tomado por la "membership function". Esa multiplicidad vendrá dada por una función que va desde el conjunto base, *A,* hasta los naturales, $m: A \rightarrow \mathbf{N}$. De ahí que se utilice la notación (A, m), para representar al multiset como un par. Fue una terminología utilizada por primera vez por el matemático alemán Richard Dedekind, en 1988. Veamos un breve ejemplo: sea el multiconjunto $\{a, a, b, b, b, c, c, d\}$. Entonces, se traduce en el $\{(a, 2), (b, 3), (c, 2), (d, 1)\}$. Pues, en general, sería $\{(a, m(a)): a \in A\}$. Se podría hablar de la longitud o tamaño de un multiconjunto finito; ésta vendría dada por la suma de las multiplicidades de sus elementos: $L(A, m) = \Sigma_{a \in A} m(a)$. En el ejemplo anterior, L (A, m) = 8. Así, que ahora (insistimos) cada elemento, *a,* tendrá asociada su multiplicidad, *m(a),* que representa el número de veces que *a* pertenece al conjunto, y no el grado de pertenencia al mismo, como en los borrosos. Pero es generalizable el concepto a unos "fuzzy multisets", o multiconjuntos difusos. En este caso, el grado de pertenencia sería, para cada elemento, un valor entre 0 y 1 (ambos inclusive), y la longitud también la suma de ellos. Esto requeriría la introducción de un tercer valor, con lo que pasaríamos de pares a ternas, $\{(a, m(a), g(a)): a \in A\}$, donde *g(a)* sería el valor de la función de pertenencia cuando

También abrió, sin duda, unas considerables interrogantes en Filosofía; de ahí parte de las críticas. Todo ello hizo que muchos estudiosos de estos temas consagraran sus esfuerzos para fundamentar bien la teoría, de modo completo y consistente, para responder con seriedad y firmeza a los ataques, que muchas veces se emitían sin suficiente conocimiento de causa, aprovechando que era una nueva ciencia en construcción.

Dos años después del artículo de Zadeh, el americano *Joseph A. Goguen* generalizaba el concepto de conjunto borroso, relacionándolo firmemente con las estructuras algebraicas. Con ello aparece la versión conocida como la "Fuzzy Logic in narrow sense" (o en sentido estricto); FLn, bajo acrónimo.

En 1979, el investigador checo *Jan Pavelka* publicó un artículo, que aparecía subdividido en tres partes, y en el cual fundamentaba dicha FLn. Reconociendo su deuda con J. A. Goguen, desarrolló un sistema axiomático completo y consistente de lógica proposicional con Reglas de Inferencia "graded", o sea, incorporando a éstos sistemas basados en reglas los grados. Unas reglas compuestas por dos partes, del tipo "IF…, THEN…", que establecen cuándo una fórmula puede ser derivada de otras, y que define a su vez el grado de verdad minimal para que la fórmula sea derivada, basándose para ello en los

---

actúa sobre *a.* Digamos, por poner un caso, que tuviéramos el multiconjunto difuso {a, a, b, b, b, c, c, d}, con g(a) = 0.2, g (b) = 0.6, g(c) = 0.4, g(d) = 0.7. Entonces, daría lugar a las ternas: {(a, 2, 0.2), (b, 3, 0.6), (c, 2, 0.4), (d, 1, 0.7)}. Y la generalización del concepto de tamaño o longitud al "fuzzy multiset" nos llevará a que L (A, m) = $\Sigma_{a\in A}$ m(a) g(a). En nuestro caso, L (A, m) = 2 x 0.2 + 3 x 0.6 + 2 x 0.4 + 1 x 0.7 = 3.7.
Un *submulticonjunto* del multiconjunto (A, m) sería otro par, (B, n), tal que B $\subseteq$ A, y la función n: B $\rightarrow$ **N,** ahora debe verificar que n(a) $\leq$ m(a), $\forall$a.
Se trata, por cierto, de una teoría (la de los multiconjuntos y los submulticonjuntos difusos) que nosotros apuntamos aquí cómo se podría continuar, pero que aún no ha sido apenas explorada.

grados de verdad de las fórmulas que intervienen. El trabajo de Jan Pavelka introducía también notables avances en la Metateoría.

Vilém Novák –de la Universidad de Ostrava- extendió en 1990 este trabajo a la Lógica Borrosa de Primer Orden[44].

Entre 1995 y 1997, el investigador checo *Petr Hájek*[45] llevó a cabo importantes simplificaciones de esos sistemas lógicos. Al año siguiente[46] Hajek introdujo asimismo un sistema axiomático verdaderamente importante: el de la *Basic Logic*[47] que acumula, junto con las características fundamentales de las lógicas borrosas, un tipo de álgebra que se corresponde con ellas, que es la llamada $\mathfrak{BL}$*-álgebra.*

Desde la década de los 1990´s, ambos investigadores, Hájek y Novák, junto con sus equipos de colaboradores, han tenido un papel predominante en buena parte de la investigación producida en nuestro campo, y todos somos[48] deudores suyos.

Pero también existe otra versión, digamos, de la lógica borrosa: es la "Fuzzy Logic in the broad sense" o en sentido amplio[49]. Es una versión que el propio Zadeh denomina "linguistic logic", y que ha sido cultivada por muchos autores. El trabajo de Piero Bonissone, Enrique Ruspini y Wittold Pedrycz da una buena introducción a esta vertiente del tema.

[44] FLFO, en cuanto acrónimo de *First Logic of First Order*.
[45] Del verdaderamente potente grupo de investigadores que desde hace años se ha formado en el seno de la Universidad Carolina, o Charles University, de Praga.
[46] En 1998, por tanto.
[47] Denotada en acrónimo por BL.
[48] En mayor o en menor medida.
[49] FLb, en su acrónimo inglés.

El origen de la FLb se encontraría en el artículo de 1975 de Zadeh, donde propone una Lógica Borrosa como una:

…logic whose distinguishing features are (i) fuzzy truth-values expressed in linguistic terms, e.g., true, very true, more or less true, rather true, not true, false, not very true, and not very false, etc.; (ii) imprecise truth tables; and (iii) rules of inference whose validity is approximate, rather than exact. [50]

Se trata, pues, de una lógica que trata de esclarecer los mecanismos del lenguaje natural, el razonamiento de sentido común, la modelización y la optimización difusas, de buscar el mejor modo de expresarlas, y sin duda, de procesarlas, pues al final de todos estos métodos está como ansiado objetivo el de la posibilidad de la computación lógica.

Volvamos ahora sobre las tres Fuzzy Logics principales: la de Gödel, la de Lukasiewicz y la Lógica Producto[51].

Las investigaciones en las lógicas finito-valuadas de Gödel, las denotadas por G_n, para n = 2, 3, …, fueron iniciadas por Kurt Gödel en su artículo de 1932. Trataba el pensador austriaco de probar que la Lógica Intuicionista no tiene

[50] L. A. ZADEH, 1975; p. 407.

[51] Resumamos un poco aquellos que han sido los hitos más importantes dentro de la historia de las Lógicas Multivaluadas: Aristóteles, Diodorus Cronus y Guillermo de Ockham, sobre los futuros contingentes; luego, ya en los años veinte del siglo pasado: Lukasiewicz, con su lógica trivaluada, para la que se basó en el Estagirita y su noción de `posibilidad´; Post, en la misma década, planteaba las MVLs dotadas de completitud funcional; ya en la década de los treinta, Heyting propuso la lógica trivaluada en relación con el Intuicionismo, que propugnaban tanto él como su maestro, Brouwer. En 1932, Gödel planteó las lógicas finito-valuadas en cuanto aproximación a la lógica intuicionista; seis años más tarde, Bochwar lo aplicaría sobre la `lógica de las paradojas´. En 1952, Kleene estudiaba la lógica de lo `indefinido´. Ya en 1965, llegó el seminal trabajo de Zadeh sobre la Fuzzy Logic. Pavelka, en 1979, desarrollaría la Lógica Difusa Proposicional en sentido estricto. Novák, en 1990, trabajó la FOFL (o lógica difusa de primer orden). Y en 1995, Hájek plantea la Lógica Difusa Racional. La `moraleja¨que podría extraer de todo ello un experto es que no tiene sentido preguntarse cuál de todas ellas es la única (o la más) verdadera: ello dependerá de cuál sea la que mejor se adapte a nuestro problema.

matriz característica finita. Fue mucho más tarde, ya en 1958, cuando Michael Dummett axiomatizó la versión infinito-valuada de dicha lógica, que se suele escribir como G ó como G_∞. Para lo cual M. Dummett procedió a unirle un `schema axiom´, el

$$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$$

por lo que se suele hablar de Lógica de Gödel-Dummett, o incluso a veces, simplemente de la Lógica de Dummett.

Por esos años en que Gödel introducía sus lógicas infinito-valuadas, también Lukasiewicz procedía a proponer su propia lógica infinito-valuada; en 1930, concretamente. Lo hizo como una generalización de sus lógica finito-valuadas (n-valued, para un número natural $n \geq 3$), presentadas en la década anterior. Una prueba de su completitud fue alcanzada por su alumno, Mordechai Wajsberg, pero no fue publicada, y la primera versión impresa sería la de Rose y Rosser, de 1958. Una demostración algebraica fue dada por C. C. Chang, ese mismo año.

En cuanto a la tercera de las lógicas borrosas antes mencionadas, La `Product Logic´, denotada por P, esta fue definida de modo explícito por Petr Hájek y otros, en 1996, aun cuando la llamada `implicación producto´ ya había sido utilizada por J. A. Goguen en 1969.

Existen algunas otras lógicas más o menos estrechamente relacionadas con ellas, como es el caso de la `Cancellative Hoop Logic´, en acrónimo CHL, o de la `Cross Ratio Logic´, denotada CRL. Fueron desarrolladas por D. Gabbay, G. Metcalfe, F. Esteva, Ll. Godó, Petr Hájek y F. Montagna, entre otros.

El primer `proof system´ desarrollado para las lógicas borrosas fue el destinado a la Lógica G, de Gödel. Luego, los correspondientes desarrollos tanto para la de Lukasiewicz como para la Lógica Producto, han presentado más problemas.

Otros grandes investigadores han ido diseminando estas ideas y tratando de profundizarlas en otras tierras, especialmente en las de Oriente[52]. Aunque la inclinación allí ha sido más bien hacia las aplicaciones tecnológicas, debido a su espectacular éxito y al apoyo de las industrias, no sólo del gobierno, también vemos trabajos de índole fundamental y teórica. Tal es el caso de los trabajos de K. Murofushi y de Michio Sugeno, que introducen algunas de las primeras medidas borrosas. Las tecnologías "fuzzy" y su historia han sido detalladamente estudiadas por el profesor Kaoru Hirota, del Japón.

Pero tampoco ha resultado del todo impermeable a estas ideas el Occidente, como vemos, a pesar de las resistencias iniciales, que aún perduran en ciertos núcleos, pero queremos creer que residuales y arcaizantes.

Así, han contribuido también investigadores de distintos países, entre los cuales podemos mencionar algunos, con la indicación de dónde trabajan y un poco en qué línea:

- En Francia, tenemos el grupo del centro de investigación denominado IRIT y de la Universidad de Toulouse, encabezado por *Didier Dubois* y

[52] Fue el Japón en un principio, y luego, también siguen siendo Corea del Sur, la India y China. Hoy en día se ramifica por otros países emergentes, como Turquía o Brasil, con Newton da Costa, entre otros (aunque dicho investigador esté más volcado en el estudio de las lógicas paraconsistentes, en la línea marcada por Graham Priest).

Henri Prade. Ambos han recopilado y mejorado muchos resultados, tanto en Lógica Borrosa como en Medidas Difusas.

- En Austria tenemos a *Matthias Dehmer,* de la Universidad Hall del Tirol, centrado en problemas de Complejidad Computacional, pero que también trata temas conectados con la Teoría de Grafos y con la Lógica Borrosa. También Erich Peter Klement, de la Universidad de Linz (Austria), con su departamento de Knowledge-Based Mathematical Systems[53]. Por cierto, que hemos trabajado en colaboración con Matthias Dehmer y con el profesor Abbe Mowshowitz, del CUNY de la Universidad de Nueva York, en libros y artículos de repercusión internacional.
- En lo que fuera la antigua Checoslovaquia, ahora dividida entre la República Checa y Eslovaquia, tenemos que citar siempre la gran figura de *Petr Hájek* y de su grupo, en la Universidad Carolina, de Praga. Han fundamentado con seriedad y claridad tanto la nueva lógica como su Matemática asociada, en sus libros y artículos. Asimismo, hemos de citar a *Vilém Novák*[54] que junto con sus colaboradores del Institute for Research and Applications of Fuzzy Modeling han hecho grandes avances en el Soft Computing y en sus implicaciones de todo tipo.

[53] Por cierto, que en esa ciudad, y organizados por la Johannes Kepler Universitäet, se celebran los "Linz Seminar on Fuzzy Set Theory", desde hace ya muchos años. El próximo será el que haga el número treinta y cinco, tratando sobre la cuestión de los *Graded Logical Approaches and Their Applications.* Se celebran estos seminarios durante el mes de Febrero, en un antiguo monasterio convertido en centro de convenciones (St Magdalena Zentrum), reuniendo a las primeras figuras de la investigación en este campo. En cada convocatoria se ha tratado de un aspecto distinto de la teoría. Así, por ejemplo, en el de 2013 se tocó el de las *Medidas Borrosas (Non-Classical Measures and Applications),* o en el de 2010, las *Lattice-Valued Logics and Its Applications.* O en el de 2005, sobre *Fuzzy Logic and Related Structures.* Tenemos el firme propósito de intentar asistir al próximo, para poder exponer allí los principales resultados de esta Tesis, que va muy en la línea del tema por ellos propuesto.

[54] De la Universidad de Ostrava, en la República Eslovaca.

Por ejemplo, en uno de sus más recientes trabajos, Petr Hájek y Radko Mesiar[55] investigaban las cuasicópulas como posibles funciones de verdad de la conjunción "fuzzy", la cual no es necesariamente asociativa, presentando de paso algunos sistemas de axiomas para tales Lógicas Borrosas. En particular, en él estudiaban una extensión de la Lógica de Lukasiewicz (que como sabemos, es proposicional e infinito-valuada), por medio de una nueva conectiva, interpretada como una cuasicópula arbitraria, y también mediante una nueva conectiva, interpretada como el residuo de la cópula. Sus principales resultados son los concernientes a la completitud estándar. O en el de P. Jaworski, ya de 2013, donde se construye una clase de inclusiones diferenciales tales que sus soluciones sean secciones horizontales de cópulas. Aparte de lo anterior, se prueba en él que todas las secciones horizontales de una cópula se pueden obtener de ese modo.

Ya que ha salido una y otra vez, vamos a aclarar el sentido que tiene aquí el concepto lógico de *cópula,* que tanto se aplica en la Teoría de Normas Triangulares. Fue introducido por A. Sklar[56] para responder a una cuestión planteada por Maurice Fréchet acerca de la relación entre una probabilidad multidimensional y sus marginales de menor dimensión. Al principio, sólo fueron utilizadas en la teoría de espacios métricos probabilísticos. Posteriormente fueron empleadas para definir medidas de dependencia no paramétricas entre variables aleatorias, por lo que desde ese momento, han pasado a jugar un importante papel en el estudio de la probabilidad y de la estadística.

[55] En 2012.
[56] En 1959.

Para el caso bivariante, o bidimensional, una cópula sería una función,

$$C: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$$

Que verifica:

1) $\forall$ u, v $\in$ [0, 1],

$$C\ (u, 0) = 0 = C\ (0, v)$$

$$C\ (u, 1) = u$$

y

$$C\ (1, v) = v$$

2) $\forall$ u_1, u_2, v_1, v_2 $\in$ [0, 1], tales que $u_1 \leq u_2$, $v_1 \leq v_2$, se tiene que:

$$C\ (u_2, v_2) - C\ (u_2, v_1) - C\ (u_1, v_2) + C\ (u_1, v_1) \geq 0$$

La importancia de las cópulas queda reflejada en el *Teorema de Sklar:*

Sean X e Y variables aleatorias con función de distribución conjunta H, y sean sus distribuciones marginales F y G, respectivamente. Entonces, existe una *cópula,* C, tal que:

$$H\ (x, y) = C\ [F(x), G(y)] \qquad (*)$$

Para todos los x e y de la recta real.

Si F y G son funciones continuas, entonces podemos asegurar la unicidad de C. De otro modo, la cópula C viene unívocamente determinada por

$$Rg\ (F) \times Rg\ (G)$$

Donde *Rg* denota el *rango.*

Y recíprocamente, si C es una cópula y las F y G son funciones de distribución, entonces la función H definida por (*) sería una función de distribución conjunta con distribuciones marginales asociadas F y G.

Un ejemplo sencillo puede ser la cópula producto:

$$\Pi\,(u, v) = u.v$$

que caracteriza las variables aleatorias independientes cuando las funciones de distribución son continuas.

En cuanto a la noción de *cuasi-cópulas,* esta se introdujo para caracterizar las operaciones sobre funciones de distribución que pueden haber sido o no derivadas de operaciones sobre variables aleatorias.

Definida axiomáticamente, una *cuasicópula* será una función

$$Q: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$$

que verifica:

1)

$$Q(0, x) = Q\,(x, 0) = 0$$

y

$$Q(x, 1) = Q\,(1, x) = x,\ \forall\, x \in [0, 1]$$

2) Q es no decreciente en cada uno de sus argumentos.
3) La función Q cumple la *Condición de Lipschitz,* o dicho de otro modo, el ser *lipschiciana,*

$$\forall\, x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0, 1],$$

$$|Q(x_1, y_1) - Q(x_2, y_2)| \leq |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

Tanto el artículo mencionado sobre cópulas, como el anterior, ú otros similares, pueden encontrarse en la Bibliografía final.

No pretendemos en absoluto abrumar con tal cantidad de detalles técnicos, pero se ha puesto como una especie de "botón de muestra", que permita comprobar que ésta es en verdad un área de la Ciencia -y del pensamiento en general- bien viva y en rápido crecimiento, con frecuentes ramificaciones.

- En Alemania hay varios estudiosos verdaderamente notables, como *Siegfried Gottwald, Rudolf Kruse, Ulrich Höle,* o el profesor *E. T. H. Zimmermann.* Se ocupan, especialmente el primero, de temas bastante conectados con los aspectos más filosóficos y de los fundamentos de la Matemática.
- En Hungría y su área, tenemos, por ejemplo, a *Janos Fodor,* que ha profundizado en diversas MVLs, como en la de Moisil-Lukasiewicz. Otros estudiosos centroeuropeos serían *Radko Mesiar*[57] y *Endre Pap*[58]. Ambos han aportado mucho a la Teoría de las Medidas Difusas y también a la rigurosa fundamentación de la Lógica Borrosa.
- En Rumanía (colindante y siempre en contacto con las anteriores naciones, principalmente con Francia y Hungría, tenemos la Transilvania), con los discípulos de Grigore Moisil, quien no sólo introdujo en su país el estudio de las ciencias computacionales, sino que también se dedicó con profundidad al estudio de lógicas inter-

[57] En la Universidad de Bratislava (Eslovaquia).
[58] De la República Serbia.

relacionadas con las de Lukasiewicz. De ahí que hoy se les llame con el nombre globalizador de *Lógicas y Algebras de Lukasiewicz-Moisil*[59]. Entre estos notables investigadores de la línea de Moisil, podemos citar a *Gheorghe Georgescu* y *Afrodita Iorgulescu.* Otro notable científico rumano, que estuvo investigando en la Universidad de Sevilla durante un cierto periodo de tiempo, es *Gheorghe Paun,* que con sus P-sistemas y su teoría de las "membranas" ha realizado interesantes aportaciones a la Inteligencia Artificial.

Por cierto, debemos apuntar que la tradición matemática, literaria y filosófica en Rumanía ha sido siempre bastante notable[60]; en un

---

[59] Dichas Álgebras, las de Lukasiewicz y Moisil (ó LM-algebras), fueron planteadas por Grigore C. Moisil como una contrapartida algebraica de las lógicas multivaluadas de Jan Lukasiewicz. Se ha ido extendiendo enormemente luego dicha teoría, y no sólo por su interés algebraico intrínseco, sino por las aplicaciones a la Lógica y a la Teoría de Circuitos (la `Switching Theory´).

[60] La tradición matemática en Rumanía ha sido durante mucho tiempo bastante potente, y más aún si se considera dentro de la misma a personas nacidas en Transilvania, que pueden ser de la talla de un János Bolyai, nacido en Cluj (Clausenburg), o de su padre, Farkas Bolyai.

En tiempos más recientes, muchos son los nombres que vienen a la mente, como Alexandru Myller, en Iasi, o un Gheorghe Ţiţeica, de un Caius Jacob, un Dimitrie Pompeiu, o de muchos otros. Entre los más cercanos al campo lógico-matemático se puede hablar de un Anton Dumitru o de un Stephane Lupasco.

Anton Dumitru fue uno de los primeros filósofos en Rumanía realmente interesados en la Filosofía de la Ciencia. Este tema lo trata en su libro *Las Bases filosóficas de la Ciencia.* Él introdujo allí las ideas más recientes de la lógica matemática, con obras como *La nueva lógica*, y *La lógica polivalente.* Dumitru presentaba en ellas tanto el sistema axiomático de Russell y Whitehead, de los *Principia Mathematica,* como el sistema lógico de C. I. Lewis. También se estudiaba el problema de las paradojas lógico-semánticas.

Stephane Lupasco intentaba la fundación de una nueva epistemología, de acuerdo con la Mecánica Cuántica, incluyendo un tercer estado, además del de la energía y el de la materia. Para ello, abogaba por lógicas con un tercer valor veritativo, en lugar de la clásica Ley de Tercio Excluso.

Sería O. Onicescu quien el 1940 organizara un seminario de Filosofía de la Ciencia en la Universidad de Bucarest. Entre sus asistentes aparece gente brillante, como Grigore Moisil, Dan Barbilian, G. Ţiţeica y N. Georgescu-Roegen. Los resultados de este grupo se publicaron en un volumen, que llevaba por nombre *El problema del determinismo.*

En particular, sobre Grigore C. Moisil (1906-1973) podemos decir que él fue quien dio el primer curso de álgebra moderna en toda Rumania, llamándolo *La lógica y la teoría de la prueba,* en la Universidad de Iasi (Jassy). Durante ese tiempo, comenzó a escribir una serie de artículos basados en las obras de Jan Lukasiewicz sobre MVL (lógica multi-valuada). Fue el introductor de la informática en su tierra natal, trabajando en Teoría de Autómatas, funciones recursivas, Análisis Matemático, y temas similares.

principio, estuvo fuertemente basada en el modelo francés, y luego, ya fue más internacional. Podemos citar, entre otros, a Eugene Ionesco, Emil M. Cioran, Mircea Eliade, Caius Iacob, Grigore Moisil, Solomon Marcus[61], etc.

- En los Estados Unidos y en el Canadá hay algunos más, en muchos casos procedentes -ellos mismos, o bien sus antepasados- de los países del Este, venidos a los States tras la Segunda Guerra Mundial. Tal es el caso, por ejemplo, de Wittold Pedrycz, que estudia el Razonamiento Fuzzy o Difuso, entre otras áreas de la Inteligencia Artificial.
- Y otros que han ido acudiendo desde los países que están más hacia el oriente, como es el caso del Profesor *Zhenyuan Wang*[62], que con *George J. Klir*[63] ha escrito una obra, *Generalized Fuzzy Measures,* reactualizando la previa del primero de ellos, *Fuzzy Measure Theory,* ambas son unas excelentes recopilaciones de resultados, aportando nuevas ideas muy bien expresadas. También hemos de citar en los Estados Unidos a *Ronald R. Yager*[64] que ha sido uno de los principales referentes de la Inteligencia Artificial en los últimos años. O al también muy conocido Janusz Kacprcyk[65].
- En Australia existe una buena tradición de filósofos que se han venido dedicando -de uno o de otro modo- a temas de Lógicas No-Clásicas,

---

A día de hoy se ha continuado con esa tradición, que sigue dando brillantes lógicos y matemáticos, ya sean estos Radu Miron, Solomon Marcus, Gheorghe Georgescu, Dorin Andrica, Viorel Barbu, Cabiria Andreian-Cazacu,..., o los filósofos de las Matemáticas, como Mircea Flonta, Marin Turlea, etc. Los mencionamos aquí porque no siendo muy conocidos en nuestro país, sin embargo son dignos de nuestra admiración y respeto.

[61] Uno de los padres de la “lingüística computacional”.

[62] De la Universidad de Nebraska, en Omaha.

[63] Otro clásico; en este caso, perteneciente a la Universidad de Binghamton.

[64] En el Iona College, con el *Machine Intelligence Institute.*

[65] En la Universidad de Edmonton, del Canadá. Es, por cierto, el autor de algunas de las recensiones a nuestros artículos, en la MathSciNet, de la AMS.

como la Paraconsistent Logic[66], la Dialetheic Logics[67], u otros también de hondas raíces filosóficas y bastante controvertidos, como serían el de la Causalidad[68] y muy conectado con él, el de los Contrafactuales. Allí[69] tuvieron, por ejemplo, excelente acogida las ideas de *David K. Lewis* y sus obras sobre los "Counterfactuals" y la pluralidad de los mundos[70]. Y hasta su temprana muerte siguió viajando a ese continente y colaborando con sus filósofos. Aunque luego en los Estados Unidos se siguió trabajando sobre estos temas con intensidad, especialmente por parte del grupo de *Judea Pearl.* Otra investigadora australiana de relieve[71] es Susan Haack, que aparecerá más adelante en nuestro trabajo.

- En Bélgica[72] existe un grupo creado en torno al profesor *Etienne E. Kerre,* en la Universidad de Gante[73], y que se dedica a investigar un amplio espectro de temas de Lógica Borrosa.
- En Italia existen algunos buenos investigadores en Lógica Borrosa, entre los que podemos mencionar al profesor Antonio Di Nola, a Danielle Mundici, a Giangiacomo Gerla, u hoy en día a Brunella Gerla.
- Así podríamos estarnos todo el día, enumerando nombres y más nombres, de autores que seguramente merecerían ser también

[66] Graham Priest es un brillante exponente.
[67] O \`Lógica Dialeteica´.
[68] Decía Rudolf Carnap que "las leyes causales son aquellas leyes mediante las cuales es posible predecir y explicar sucesos. La totalidad de estas leyes describe la estructura causal del mundo."
CARNAP, R., *Philosophical Foundations…;* p. 287.
[69] En las Universidades australianas.
[70] Tema que nos retrotrae al propio Leibniz.
[71] Bastante crítica, por cierto, con algunos aspectos de las Lógicas Multivaluadas.
[72] Desde 1976.
[73] Ghent, en neerlandés.

mencionados aquí. Pero vamos a terminar con algunos de los más conocidos de nuestra patria[74].

Hay ciertos grupos, la mayoría centrados en torno a un “hub”, núcleo o punto de acumulación, desde el que se irradian nuevas ideas e impulsos crecientes; en el centro de cada uno de esos “núcleos motores” suele haber un investigador más o menos veterano, bien conectado y de prestigio[75].

Una iniciativa puntera[76] es la creación en la localidad de Mieres, y por parte del Gobierno del Principado de Asturias, de un Centro de Investigación para la Inteligencia Artificial y el “Soft Computing”, inicialmente alrededor de alguien tan reconocido como *Enric Trillas,* que puede ser considerado el padre de la Lógica Borrosa en España. Dicho centro ha captado muchos de los más famosos investigadores internacionales, como es el caso del profesor japonés Michio Sugeno. Sus temas de trabajo son muy amplios, aunque giran alrededor de los

---

[74] Es de justicia recordar que de España habían provenido varios de los primeros intentos para la construcción de una nueva lógica. Tal fuera el caso de Raimundo Lulio (1232-1315), que con su *Ars Magna* se anticipaba claramente a su tiempo, siendo uno de los precursores del pensamiento leibniziano en éste campo; su obra preanuncia los autómatas y la moderna computación. Lo mismo se puede decir de otros estudiosos, como es el caso de Sebastián Izquierdo (1601-1681), muy estimado y leído en la Europa de su época, no sólo por Leibniz, sino por Athanasius Kircher y muchos más. Su *Pharus Scientiarum* (Lyon, 1659) mostraba claras influencias lulianas, y a su vez, influiría en las ideas leibnizianas. Se puede decir que su *Pharus* brilla en la Historia de la Lógica; al menos, en la del siglo XVII. Su \`Disputatio de Combinatoria´ es un antecedente del \`De Arte Combinatoria´, de Leibniz, que es de 1666. Otros autores de la Península Ibérica cabrían ser mencionados también. Uno de los más notables puede que sea Juan Caramuel (1606-1682), llamado “el Leibniz español”. Izquierdo sería el que llevó a la imprenta la primera explicación del sistema binario, en su *Mathesis Biceps* (Campaniae, 1670), como nos cuenta Donald E. Knuth, anticipándose con ello treinta años al propio Leibniz.

[75] Así, tenemos el caso de Humberto Bustince o de Pedro Burillo , que trabajan bien sobre muchos de estos temas, como los “Intuitionistic Fuzzy Sets”, o los Operadores de Agregación, entre otros. El núcleo de este muy activo grupo es la Universidad Pública de Navarra. O los investigadores agrupados, esta vez en Barcelona, en torno al Consejo Superior de Investigaciones Científicas, como es el caso de Lluis Godó, Francesc Esteva, Lluis Magdalena, etc. Es un grupo muy activo, y trabajan en profundidad sobre diversos temas tanto de Inteligencia Artificial como de sus aplicaciones.

[76] Y hasta cierto punto bastante inusitada; desde luego, muy loable, aún más en un país como el nuestro, tan remiso muchas veces a innovaciones.

métodos fuzzy, así como de las implicaciones de tipo filosófico que estas llevan consigo[77].

También puede ser mencionado *Jaime Gil Aluja*, a quien se considera como el padre de la nueva teoría de la incertidumbre aplicada al desarrollo de las lógicas multivalentes en los ámbitos económico y de gestión.

Aunque le hayamos dejado para el final, no debiera omitirse un nombre señero, de ésos que aparecen en solitario de cuando en cuando en España, pasando fugazmente, como un cometa, y luego dejando de verse, sin saberse apenas nada de él ni de sus "efectos colaterales" por mucho tiempo. Es la inveterada falta de tradición y de escuelas[78] que continúen la labor de los cerebros más brillantes del "solar patrio". Nos estamos refiriendo al padre *Pablo Domínguez Prieto (1966-2009),* filósofo y teólogo español, quien escribió la primera obra de envergadura acerca de nuestra Escuela de Lvov-Varsovia, partiendo para ello de su Tesis Doctoral en Filosofía, que había presentado en la Universidad Complutense el año 1993. Dicha obra se llama *Indeterminación y Verdad. La polivalencia lógica en la Escuela de Lvov-Varsovia,* y fue

---

[77] En otras partes de España hay otras personas que trabajan sobre estoe tipo de problemas, como es el caso del equipo del Departamento de Inteligencia Artificial de la Universidad de Granada. O bien la profesora Elvira Mayordomo, que también trabaja sobre estos temas ; por ejemplo, en t-normas, t-conormas y otros operadores de agregación, como las "cópulas" (de las que antes ya hemos hablado, y cuyo nombre la polisemia puede volver algo sorprendente en español).
Por cierto, que decía Luis Botella de la lógica multivaluada: "Este tipo de lógica, que se remonta a principios del siglo XX, se basa en la noción de que la pertenencia a un conjunto es siempre cuestión de grado, incluida la pertenencia al conjunto de las afirmaciones verdaderas. Dentro de este primer grupo destacan los trabajosde Russell, que llamó la atención respecto a que los fenómenos se transforman de manera continua de A en no-A y durante buena parte de su existencia son una mezcla de ambas cosas, los aportes de Lukasiewicz, que desarrolló la lógica borrosa como extensión de la lógica binaria, y los de Black, que en 1937 representó gráficamente el primer conjunto borroso. El segundo es el de razonamiento con conjuntos borrosos o reglas borrosas, que tiene su origen en la obra de Lofti Zadeh en los años sesenta y setenta (KOSKO, B., 1993)".

[78] Comentado en su momento por el bueno de don Santiago Ramón y Cajal (1852-1934), en sus famosas *Reglas y Consejos sobre Investigación Científica.*

publicada en 1995, con un prólogo de Monseñor J. M. Zyzinski. Se puede considerar a Pablo como el precursor en el estudio de la lógica multivaluada en España, desde el punto de vista de la Filosofía, y en particular, de la gran contribución polaca a este campo. Un halo romántico viene a cerrar su breve existencia, por cuanto su afición a la montaña le hizo querer hacer `cumbre´ en el Pico del Moncayo nevado, tras terminar de darles unas conferencias a las monjas del monasterio de Tulebras. Y ésa fue su última cima, pues murió despeñado, dejando a estos estudios nuevamente huérfanos. Quede este breve comentario como un pequeño homenaje a su memoria.

Otro autor español que ha venido informando de estas nuevas corrientes de la Lógica es Julián Velarde, con su *Historia de la Lógica,* su artículo "Lógica Polivalente", o su libro de *Lógica Formal,* todo ello en torno a la Universidad de Oviedo y su servicio de publicaciones, o más adelante, a la Editorial Pentalfa[79]. También es de notable interés su obra *Gnoseología de los Sistemas Difusos,* que analiza las conexiones más filosóficas de estos temas.

Algunos clásicos y esforzados debeladores de la ignorancia y los prejuicios acumulados en contra de la Lógica en nuestro país ya fueron mencionados, como "de pasada", pero merecen ser recordados con gratitud por todos nosotros. Tal sería el caso, por ejemplo, de Juan David García Baca, Miguel Sánchez-Mazas, Alfredo Deaño, Juan José Acero (que comenzó basándose en una fuerte formación de tipo lógico-matemático, para luego pasarse a ocupar de Wittgenstein y de sus `juegos de lenguaje´), Javier

[79] Véase Bibliografía final, para más detalle sobre estos autores.

Muguerza, José Fernández-Prida[80], Eloy Rada (sabio traductor y comentarista de Newton y Leibniz), Julián Velarde, Jesús Mosterín, Quintín Racionero, Concha Roldán, Javier Echeverría (gran estudioso de la Lógica y especialmente, del mencionado Leibniz), Juan Antonio Nicolás, María José Frápoli, Vicente Muñoz Delgado, Calixto Badesa, Luis Vega, Pilar Castrillo, Lorenzo Peña, Wenceslao González, o Manuel Sacristán, entre otros. Algunos dirán que el positivismo lógico, como corriente otrora predominante, ha desaparecido, o que lo ha hecho casi del todo[81]. Pero lo que sí es verdad en cualquier caso es que al menos ha quedado un sustrato, una impronta del amor por la claridad y la precisión que tanto bien han hecho a la filosofía y a la ciencia.

Nuestro repaso histórico ha ido enumerando en lo posible las diversas nacionalidades de los que trabajan en tales campos, pero un tratamiento más detallado de cada uno de los temas, su progreso en el tiempo y su situación actual también parecerían necesarios, si dispusiéramos de más tiempo y de mayor espacio. Pero estas enumeraciones llevan a correr un riesgo: el de caer en injustas omisiones. Pedimos de antemano disculpas por ellas, si se han producido, pero peor sería no dar ninguna perspectiva, cuando de un trabajo de este tipo se trata.

[80] Que introdujo la Lógica Matemática a través de la especialidad de Ciencias de la Computación en la Facultad de Ciencias de la Complutense. Sus investigaciones giraban en torno al teorema de Skolem-Löwenhein, y más adelnte, sobre la teorías indecidibles. Estudió a fondo el tema de las funciones recursivas, que es clave en la Teoría de la Computabilidad.

[81] Tal es la opinión, por ejemplo, del profesor Juan José Acero, recogida en una entrevista que concedió a Adriana Pérez, para la revista de estudiantes de filosofía, *Cuadrante phi,* N. º 23, de Bogotá (Colombia), pp. 1-29.

Ya en el siglo XIX se habían realizado unos primeros intentos de formalizar una primitiva lógica multi-valuada o polivalente. Pueden citarse los nombres de tres o cuatro autores, principalmente[82].

El primero de ellos sería *Hugh Mc Coll (1837-1909),* quien caracterizaba su sistema como *"una lógica de tres dimensiones".* En ella, aparte de los consabidos valores de verdad y falsedad (totales), introducía los valores modales de "necesidad", "imposibilidad" y "contingencia". Mc Coll utilizaba su sistema como un cálculo de probabilidades.

El segundo sería el americano *Charles Sanders Peirce (1839-1914),* que reaparecerá en nuestro trabajo. El fue quien elaboró una por él llamada *"matemática tricotómica",* pues aparecían en ella conectivas trivaluadas; no obstante lo cual, consideraba que era dependiente de la Lógica Bivaluada.

El tercer lógico brillante a mencionar sería *Ernst Schröder (1841-1902)*, matemático alemán, muy conocido por sus trabajos sobre lo que en su época se denominaba Lógica Algebraica y hoy se llamaría Lógica Simbólica[83]. Contribuyó a difundir y a popularizar las ideas de George Boole, de Hugh Mac Coll y más adelante, las de C. S. Peirce. Su fama se consolida tras la publicación de su obra *Vorlesungen über die Algebra der Logik*[84], en tres volúmenes, edición que por cierto, hubo de sufragar de sus propios ahorros. Cuando empezó a plasmar sus escritos lógicos, aún no eran conocidos ni De Morgan ni Boole, y se basaba en los de autores alemanes, como Hankel y

[82] La diferencia en el número depende de que a Ernst Schröder se le quiera considerar o no como uno de los precursores de la MVL y no sólo como un brillante lógico más. Incluso pudiera también mencionar entre ellos al ruso Iván F. Orlov.
[83] No debe ser confundido con el casi homónimo Karl Schröter, quien se dedicó al estudio de la axiomática intuicionista.
[84] Sería traducible en español por *Lecciones sobre el Álgebra de la Lógica.*

Grassmann. No conoció las obras de los lógicos ingleses hasta 1873. Realizó muchas aportaciones a diversas áreas de las Matemáticas. Por ejemplo, enunciando con Cantor y Bernstein un famoso teorema.

Y el cuarto, un ruso, *Nikolai Alexandrievich Vasiliev* (1880-1940), quien elaboró un sistema lógico sobre un hipotético mundo en el cual fueran admisibles los "objetos contradictorios". Él la llamaba "lógica imaginaria". En realidad, se podría considerar un correlato o versión lógica de la filosofía de su contemporáneo Alexius Meinong, uno de los miembros de la Escuela de Lvóv-Varsovia. Este, a su vez, sería un precursor de la Lógica Paraconsistente y de los planteamientos dialeteicos. Vasiliev planteó la *Ley de Cuarto Excluso,* que propone como axioma dentro de su sistema trivaluado. Con ella nos deba a entender que el Principio de Tercio Excluso no era ni mucho menos universal, sino que lo sería en su lugar la Ley del (n + 1) – Excluso.

Por lo tanto, y hasta la década de los 1940´s, podemos considerar la existencia de algunos escritos, más o menos relacionados con lo que hoy llamamos Lógicas Multivaluadas[85]. Como queda ya apuntado, en el siglo XIX hubo anticipaciones de ese tipo, si bien no formalizadas al modo que lo entendemos actualmente.

Ya hemos dicho que el mismo Aristóteles, tal como nos recuerda el propio Lukasiewicz[86] admitía que las proposiciones o expresiones acerca del futuro -en general- pueden no ser ni verdaderas ni falsas: es el *problema de los futuros contingentes.*

[85] Recordemos: LMVs, ó MVLs, según el acrónimo sea en español o en inglés.
[86] Un gran intérprete (y notable admirador) suyo, aunque crítico.

Se puede afirmar que la primera vez que aparece una lógica infinito-valuada, en el sentido que ahora lo entendemos, es en un artículo de Jan Lukasiewicz, en polaco: “Zagadnienia prawdy” (El problema de la verdad), aparecido en *Ksiega pamiatowka XIzjazdu lekarzy i przyrodników polkisch*[87]*.*

Y es discutido de nuevo en el artículo de 1930 que firmaron conjuntamente Alfred Tarski y Jan Lukasiewicz, donde se refieren a la conjetura de este último según la cual su conjunto de cinco axiomas es completo para 1-tautologías de su lógica infinito-valuada[88].

Su discípulo *Mordechai Wajsberg*[89] probó la completitud de un sistema axiomático de la lógica tri-valuada de Lukasiewicz, afirmando disponer de una demostración para la completitud de la infinito-valuada, pero se trata de una prueba nunca publicada, y tanto esta como el autor fueron destruidas durante la ocupación de Polonia, en la insurrección del gueto de Varsovia y su posterior calvario por diversos campos de exterminio.

---

[87] De 1922, en pp. 84-87.

[88] Recordemos que el concepto de *tautología,* en lógica bivaluada, sería éste: se trata de una fórmula que toma uniformemente el valor veritativo V, sea cual sea la asignación de valores de verdad (v. v.) que se le asocie a sus variables proposicionales. Lo cual puede generalizarse al caso multivaluado. Bastaría con clasificar algunos de sus v. v. como \`designados´, esto es, representando \`truth-like´ v. v. Así, una *fórmula* será *tautológica, en MVL,* si ésta toma uniformemente un v. v. designado, para cualquier asignación que realicemos sobre sus variables proposicionales. Por lo que podemos hablar de que una fórmula *satisface* un conjunto de tablas de verdad, si es con respecto de ellas una tautología. También puede extenderse a MVL el concepto de *contradictoriedad.* En el caso bivalente, se dice que una fórmula es (o encierra) una contradicción, si toma uniformemente el v. v. F, sea cual fuere la asignación de v. v. que hagamos a sus variables proposicionales. Para dar el paso al ámbito multivaluado, habríamos de clasificar algunos de sus valores como \`antidesignados´, es decir, como representando \`false-like´v. v. Con lo que una fórmula encerraría una *contradicción,* en MVL, si toma uniformemente un v. v. antidesignado, para cualquier v. v. que asignemos a sus variables proposicionales.

[89] En el año 1935. Por cierto, que el nombre Mordechai es Martín en hebreo.

También abordaba Lukasiewicz[90] los principales problemas filosóficos planteados por la aparición de las Lógicas Multivaluadas[91]. Cabe reseñar como importante cuando dijo que su motivación para introducir el tercer valor de verdad fuera de tipo modal, esto es, que lo entiende en el sentido de "posible", definiendo la fórmula: *"posiblemente ϕ",* o *M ϕ,* en su simbolismo de la llamada "notación polaca", que sea $\neg \phi \rightarrow \phi$. Verificando algunas fórmulas clásicas, como $\phi \rightarrow M\ \phi$. Esto puede parecer un tanto ingenuo, dados los conocimientos actuales, por los que sabemos que la modalidad no es una conectiva veritativo-funcional. Pero hemos de pensar que aún debían pasar otros cuarenta años para llegar hasta los Modelos de Saúl Kripke. Entre los más notables contribuidores a los trabajos sobre Lógicas Multivaluadas, están los rusos N. A. Vasiliev, A. A. Zinoviev, y A. A. Bochwar, junto con los judíos polacos Emil L. Post y Alfred Tarski, aparte del tantas veces mencionado J. Lukasiewicz. Pero además de ellos, hicieron valiosos comentarios sobre las mismas otros científicos, como Hans Reichenbach, Z. Zawirski, F. Waismann, A. R. Turquette y J. B. Rosser, entre otros. Es también digno de mención el hecho de que las únicas conectivas utilizadas por Lukasiewicz en su trabajo fueran las de implicación y negación.

A continuación vamos a recordar (a través de una tabla comparativa) las distintas notaciones lógicas contemporáneas[92]:

---

[90] LUKASIEWICZ, J., "Philosophical Remarks…", otro trabajo de ese mismo año.
[91] Hay trabajos fundamentales en la introducción y búsqueda de una fundamentación completa y consistente para las Lógicas Multivaluadas.
[92] Estas son las distintas notaciones que vinieron siendo propuestas por los distintos padres de la Lógica del siglo XX. Proviene del trabajo:
ROEGEL, D., "A brief survey of 20th century logical notations".
Puede verse en la página web siguiente:
www.loria.fr/~roegel/cours/symboles-logiques-eng. pdf

Concept / Author	not	or	and	if/then	for all	exists	iff
Frege (1879)	$\top A$			$\lfloor^{B}_{A}$	$\neg\!\smile^{x}\!\!-\Phi(x)$		
Peirce (1885)	$\bar{x}$			$-\!<$	Π_i	Σ_j	
Peano (1889)	$-$	$\cup$	$\cap$	Ɔ	Ɔ$_x$		
Schröder (1890) (to check)	$\bar{a}$	$+$	$\cdot$	€	$\underset{i}{\Pi}$	$\underset{i}{\Sigma}$	
Peano (ca. 1895) [1901]	$-$	$\cup$	$\cap$	Ɔ	Ɔ$_x$	$\exists x$	
Hilbert (1904)	$\bar{a}$	o.	u.	$\vert$			
Russell (1908)	$\sim$	$\vee$	.	$\supset$	(x)	$\exists x$	$\equiv$
Russell & Whitehead (1910–1913)	$\sim$	$\vee$	.	$\supset$	(x)	$(\exists x)$	$\equiv$
Löwenheim (1915)	$\bar{a}$	$+$	$\cdot$	€	$\underset{i}{\Pi}$	$\underset{i}{\Sigma}$	
Hilbert (1917/18)	$\overline{X}$	$\times$/none	$+$	$\rightarrow$	(x)		$=$
Skolem (1920)	$\bar{a}$	$+$	$\cdot$		Π_i	Σ_i	
Post (1921)	$\sim$	$\vee$	.	$\supset$			$\equiv$
Tarski (1923)	$\sim$	$\vee$		$\supset$			
Schönfinkel (1924)	$\bar{a}$	$\vee$	&	$\rightarrow$	(x)	$(\mathrm{E}x)$	$\sim$
Ramsey (1925)	$\sim$	$\vee$	.	$\supset$	(x)	$(\exists x)$	
Hilbert (1925)	$\bar{A}$	$\vee$	&	$\rightarrow$	(x)	$(\mathrm{E}x)$	
Kolmogorov (1925)	$\bar{A}$			$\rightarrow$	(x)	$(\mathrm{E}x)$	
Hilbert (1927)	$\bar{A}$	$\vee$	&	$\rightarrow$	(x)	$(\mathrm{E}x)$	
Skolem (1928)	$\bar{a}$	$+$	$\cdot$		Π_i	Σ_i	
Herbrand (1928)	$\sim$	$\vee$	&	$\supset$	(x)	$(\exists x)$	$\equiv$
Hilbert & Ackermann (1928) [1950]	$\bar{A}$	$\vee$	&	$\rightarrow$	(x)	$(\mathrm{E}x)$	$\sim$
Łukasiewicz (1929)	Np	Apq	Kpq	Cpq	Px	Sx	Epq
Heyting (1929)	$\neg$	$\vee$	$\wedge$	$\supset$	(x)	$(\mathrm{E}x)$	$\supset\subset$
Gödel (1930)	$\bar{p}$	$\vee$	&	$\rightarrow$	(x)	$(\mathrm{E}x)$	$\sim$
Heyting (1931)	$\neg p$	$\vee$					
Gödel (1931)	$\bar{p}$ (also $\sim$)	$\vee$	&	$\rightarrow$ (also $\supset$)	(x) (also $x\Pi$)	$(\mathrm{E}x)$	$\equiv$
Herbrand (1931)	$\sim$	$\vee$	$\times$	$\rightarrow$	(x)	$(\mathrm{E}x)$	$\equiv$
Gentzen (1934)	$\neg$	$\vee$	&	$\supset$	$\forall x$	$\exists x$	$\supset\subset$
Hilbert & Bernays (1934–39)	$\bar{A}$	$\vee$	&	$\rightarrow$	(x)	$(\mathrm{E}x)$	$\sim$
Carnap (1934) [1951]	$\sim$	$\vee$	$\cdot$	$\supset$	(x)	$(\exists x)$	$\equiv$
Tarski (1940)	$\sim$	$\vee$	$\wedge$	$\rightarrow$	$\underset{x}{\mathsf{A}}$	$\underset{x}{\mathsf{E}}$	$\leftrightarrow$
Quine (ML, 1940)	$\sim$	$\vee$	.	$\supset$	(x)	$(\exists x)$	$\equiv$
Henkin (1949)	$\sim$			$\supset$	(x)	$(\exists x)$	
Henkin (1950)	$\sim$	$\vee$	none	$\supset$	(x)	$(\exists x)$	
Kleene (IM, 1952)	$\neg$	$\vee$	&	$\supset$	$\forall x$	$\exists x$	$\sim$
Carnap (1954)	$\sim$	$\vee$	.	$\supset$	(x)	$(\exists x)$	$\equiv$
Church (1956)	$\sim$	$\vee$	none	$\supset$	(x)	$(\exists x)$	$\equiv$
Suppes (IL, 1957)	$-p$	$\vee$	&	$\rightarrow$	(x)	$(\exists x)$	$\leftrightarrow$
Davis (C&U, 1958) [1982]	$-A$		&	$\supset$	(x)	$(\exists x)$	
Bernays (AST, 1958) [1968]	$\bar{p}$	$\vee$	&	$\rightarrow$	(x)	$(\mathrm{E}x)$	$\leftrightarrow$
Suppes (AST, 1960)	$-p$	$\vee$	&	$\rightarrow$	$\forall x$	$\exists x$	$\leftrightarrow$
Quine (STL, 1963)	$\sim$			$\supset$	(x)	$(\exists x)$	$\equiv$
Mendelson (1964) [1968]	$\sim$	$\vee$	$\wedge$	$\supset$	(x)	$(\mathrm{E}x)$	$\equiv$
Kleene (LM, 1967) [1971]	$\neg$	$\vee$	&	$\supset$	$\forall x$	$\exists x$	$\sim$
Smullyan (1968)	$\sim$	$\vee$	$\wedge$	$\supset$	$(\forall x)$	$(\exists x)$	$\leftrightarrow$
Blanché (1968)	$\sim$	$\vee$	.	$\supset$	(x)	$(\exists x)$	$\equiv$
Putnam (1971)	$\sim$	$\vee$	$\wedge$	$\supset$	(x)	$(\exists x)$	$\equiv$
Boolos & Jeffrey (1974) [1996]	$-p$	$\vee$	&	$\rightarrow$	$\forall x$	$\exists x$	$\leftrightarrow$
Copi (SL, 1979)	$\sim$	$\vee$	$\cdot$	$\supset$	(x)	$(\exists x)$	$\equiv$
Quine (1982)	$-p$	$\vee$	none	$\rightarrow$	$\forall x$	$\exists x$	$\leftrightarrow$
Vax (1982)	$\sim$	$\vee$	$\wedge$	$\Rightarrow$	$\forall x$	$\exists x$	$\Leftrightarrow$
Rivenc (1989)	$\neg$	$\vee$	$\wedge$	$\rightarrow$	$\forall x$	$\exists x$	$\leftrightarrow$
Gochet & Gribomont (1990)	$\neg$	$\vee$	$\wedge$	$\supset$	$\forall x$	$\exists x$	$\equiv$
Lalement (1990)	$\neg$	$\vee$	$\wedge$	$\Rightarrow$	$\forall x$	$\exists x$	$\Leftrightarrow$
Ruyer (1990)	$\neg$	$\vee$	$\wedge$	$\rightarrow$	$\forall x$	$\exists x$	$\leftrightarrow$
Smullyan (1992)	$\sim$	$\vee$	$\wedge$	$\supset$	$\forall x$	$\exists x$	$\equiv$
Largeault (1992)	$\neg$	$\vee$	&	$\rightarrow$	$\forall x$	$\exists x$	$\leftrightarrow$
Cori & Lascar (1993)	$\neg$	$\vee$	$\wedge$	$\Rightarrow$	$\forall x$	$\exists x$	$\Leftrightarrow$
Largeault (1993)	$\neg$	$\vee$	&	$\rightarrow$	$\forall x$	$\exists x$	$\leftrightarrow$
Chazal (1996)	$\neg$	$\vee$	$\wedge$	$\supset$	$\forall x$	$\exists x$	$\subset\!\supset$
Gauthier (1997)	$\sim$		$\wedge$	$\supset$	$\forall x$	$\exists x$	
Leroux (1998)	$\neg$	$\vee$	$\wedge$	$\supset$	$\forall x$	$\exists x$	$\equiv$
Encyclop. Britannica (1999)	$\sim$	$\vee$	none/$\cdot$	$\supset$	$(\forall x)$	$(\exists x)$	$\equiv$

A principios de la década de los 1940´s, el rumano Grigore Moisil inició el estudio algebraico de las lógicas multi-valuadas de Lukasiewicz.

Emil León Post[93], de modo independiente de los trabajos de Jan Lukasiewicz, había investigado también el cálculo finito-valuado. Parece que no le movía en este caso ninguna motivación de tipo filosófico; por el contrario, estaba interesado más bien en el problema de la completitud funcional.

Arendt Heyting introdujo[94] un cálculo proposicional tri-valuado en relación con la Lógica Intuicionista de su maestro, L. E. J. Brouwer, que había sido por él completada.

Fue *Kurt Gödel*[95] quien estableció una jerarquía infinita de sistemas finito-valuados. Su propósito era demostrar la existencia de cálculos proposicionales no finito-valuados que son consistentes[96] y completos para la Lógica Intuicionista. La que hoy se conoce como *"Lógica de Gödel"* es la versión infinito-valuada de sus sistemas.

También podemos citar, por razones históricas, un par de artículos parcialmente vinculados con nuestras teorías. En 1942, el matemático *Karl Menger*[97] introdujo las *normas triangulares,* o *t-normas,* pero lo llevó a cabo de un modo distinto a como actualmente se viene haciendo.

---

[93] En 1921.
[94] En 1930.
[95] En 1932 y en 1933.
[96] "Soundness" equivale a consistencia.
[97] El hijo (por cierto, homónimo) del famoso teórico de la Economía austriaco, el mismo que fuera en su día tutor del príncipe heredero, Rodolfo de Austria, el hijo del Emperador Francisco José I y de la Emperatriz Elizabeth (Sissi).

Dilworth y Ward escribieron[98] un primer artículo sobre retículos con residuos, o residuados (residuated lattices). Igualmente podríamos citar (y pueden verse en la Bibliografía) los trabajos de A. Bochvar[99] de Hans Reichenbach, o incluso el sorprendente escrito -en cierto modo, premonitorio- del checo *Zich.*

En la década de los 1950´s, tenemos el artículo de *Mc Naughton,* que en 1951 caracterizaba las funciones definibles mediante fórmulas de la Lógica infinito-valuada de Lukasiewicz. Así, por ejemplo, lo serían las aplicaciones del n-cubo unidad real, $[0, 1]^n$, en el intervalo unidad, [0, 1], que son lineales a trozos (piecewise-linear) cuando las consideramos con coeficientes enteros.

En 1957, *Mostart* y otros escriben un artículo en el que prueban por primera vez la caracterización de las normas triangulares continuas, aunque en un contexto más general, como es el de los semigrupos sobre una variedad compacta. Representa la t-norma de Lukasiewicz mediante el producto restringido por el "embedding"[100] de Lukasiewicz en la lógica producto.

El año siguiente resultó muy fructífero, pues *Rose y Rosser* dieron la primera demostración[101] sobre la completitud de la lógica multi-valuada de Lukasiewicz.

Otro año más tarde que ese artículo apareció el de *Michael Dummet,* probando la completitud; en este caso, de la lógica infinito-valuada de Gödel.

[98] En 1939.
[99] De 1938.
[100] Una forma de inclusión.
[101] Al menos, que sepamos que hubiera sido publicada.

Más trabajos pueden y deben ser reseñados, como el de *C. S. Kleene*[102], donde utiliza una lógica trivaluada en su discusión acerca de funciones recursivas. También el lógico inglés *Alonzo Church*[103] usó ciertas lógicas finito-valuadas en su demostración de la independencia axiomática de las lógicas bivaluadas. Entre los diversos investigadores que utilizaron este tipo de lógicas podemos mencionar a *Th. Skolem,* trabajando sobre la "teoría de conjuntos infinito-valuados"; también *A. Rose,* en su "Geometría 8-valuada"[104]; o *R. Taketuma,* en su estudio de un cálculo proposicional 9-valuado[105].

Otro gran lógico fue el americano *Haskel Brooks Curry (1900-1982),* el cual estudió en Harvard y terminó una tesis en la universidad alemana de Göttingen, bajo la dirección de David Hilbert, en 1930. Luego dio clases en Princeton, en Harvard y en la Universidad Estatal de Pensilvania, para terminar alcanzando la plaza profesor de Matemáticas en la de Amsterdam, ya en 1966. Llevó a cabo intensos estudios sobre Lógica Matemática, y en particular, sobre la Teoría de Sistemas y de los Procesos Formales. Asimismo, en Lógica Combinatoria, que como sabemos, se considera el fundamento de los lenguajes de programación funcionales. A esto se debe que a los programas de este tipo se les llame de Haskel, o bien de Curry, mientras que al proceso a través del cual se lleva a cabo esa formalización se denominan "procesos de currificación".

Hagamos un inciso para referirnos a la historia de un grupo atípico y verdaderamente curioso de matemáticos, principalmente franceses: el *Grupo Bourbaki.* Este sería un seudónimo tomado del nombre real de un oscuro

---

[102] Trabajo de 1952.
[103] Este, de 1936.
[104] De 1952.
[105] Que es de 1954.

general del ejército del emperador francés Napoleón III, derrotado en la guerra franco-prusiana, o bien ese nombre se escogió por `razones jocosas´, como una broma mantenida en el tiempo, por un grupo de antiguos alumnos de la École Normale Superieur de Paris. La raíz griega del apellido pretendía -de modo indirecto- también hacer referencia a la tradición de Euclides de Alejandría y a los matemáticos de la Grecia Antigua, en cuya línea en cierto modo querían continuar. Durante una parte de la segunda mitad del siglo XX, los integrantes de este grupo intentaron exponer la matemática avanzada moderna del modo más completo y axiomatizado posible, basándose para ello en la Teoría de Conjuntos[106]. Buscaban a un tiempo la mayor generalidad y el mayor rigor posibles. En parte, esta sería una reacción en la línea de David Hilbert, y en contra la deriva, que consideraban demasiado intuitiva, de Henri Poincaré.

Decían los Bourbaki:

Lo que el método axiomático se propone como objetivo esencial es precisamente lo que el formalismo lógico, por sí sólo, es incapaz de dar, esto es, la profunda inteligibilidad de las matemáticas... El método axiomático se basa en la convicción de que no sólo la matemática no es una mera concatenación al azar de silogismos, sino que tampoco es una colección de trucos, más o menos astutos, a los que se llega por una serie de afortunadas combinaciones...El método axiomático enseña a buscar las

[106] Uno de los tomos -de entre los suyos- que alcanzaran más audiencia, tal vez por ser el primero, sería precisamente el de la *Théorie des Ensembles,* editado por Hermann Editeurs, en París, el año 1968. Publicaron un total de nueve volúmenes de dichos *Éléments de Mathématique.* Observemos, por cierto, que con toda intención le pusieron el mismo nombre (a dicha serie de obras) que se le viene dando tradicionalmente a los *Elementos* de Euclides de Alejandría, y en singular, pues consideraban que era una sola ciencia (la `Matemática´, y no las `Matemáticas´).

razones profundas... a encontrar las ideas comunes a varias teorías, sepultadas bajo la acumulación de detalles propios de cada una de ellas...

BOURBAKI, N., “Foundations of Mathematics for the working mathematician”. *J. of Symbolic Logic*, vol. 14 (1-14); p. 223.

El grupo de los Bourbaki alcanzó una notable influencia en los medios matemáticos de la época, pero también contó con furibundos detractores, como ciertos analistas clásicos. Su propósito inicial había sido precisamente elaborar un manual de Análisis Matemático, a nivel universitario, que reemplazara los textos hasta entonces clásicos de C. Jordan y R. Goursat, pero terminaron emprendiendo una titánica labor, aún inacabada: la de plasmar con la mayor claridad posible los fundamentos de la Matemática Pura[107].

Una de las críticas más directas fue la dirigida contra el contenido del volumen primero, el de la *Theorie des Ensembles,* por haber adoptado como base para su desarrollo la axiomática de Zermelo, al ser esta más simple, en lugar de la posterior y más completa de la ZFC, esto es, la de Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección[108].

Entre sus componentes más notables podemos citar a Henri Cartan, Jean Dieudonné o André Weil. Más adelante, se les irían añadiendo otros brillantes matemáticos, como es el caso de Laurent Schwartz[109], Jean-Pierre Serre,

---

[107] Véase el interesante artículo, sobre “Nicolás Bourbaki”, del profesor Bombal.

[108] Esto puede verse muy amenamente explicado por Paul R. Halmos, en su artículo sobre este notable matemático (el tal Bourbaki) que entre sus propiedades, tuvo la de la no existencia, a pesar de ser presentado como miembro de la Academia de Ciencias de Poldavia y de la Universidad de Nancago (entidades imaginarias; la primera, nacionalidad del Este, híbrida entre Polonia y Moldavia, por ejemplo; o en el caso de la Universidad de Nancago, lo sería de las de Nancy y Chicago).

[109] Ver también el artículo que sobre tan curioso matemático escribió el antes mencionado profesor, Fernando Bombal.

Alexander Grothendieck, Serge Lang o Roger Godement, entre otros. Casi todos sus miembros eran franceses, si bien con alguna rara excepción, como la del matemático polaco Samuel Eilenberg.

Por tanto, lo que pretendían era prolongar la tradición de la Escuela de Göttingen, que estuviera encabezada por el mencionado David Hilbert, y su ayudante, Wilhelm Ackermann, así como seguir la línea marcada por el álgebra moderna de Emmy Noether, Emil Artin y R. van der Waerden. Pero hay que aclarar que en los sucesivos volúmenes de sus *Éléments de Mathématique* la Lógica en sí misma apenas si se trata, de modo explícito al menos, a pesar de la tendencia axiomatizadora que antes señalábamos, y que desde luego, recorre toda la obra. Pero no nos cabe duda que tales *Elementos* eran una forma de plantear la Matemática seria y consistente, que nos marcó a los matemáticos de toda una época.

Aparte de esto, hay que decir que a los Bourbaki no les agradaba demasiado todo aquello que tuviese que ver con buscar una utilidad `práctica´ de su ciencia (esto es, con la Matemática Aplicada); tal vez por no contar entre sus miembros con ningún especialista en dichas áreas, pero esa sería tal vez una de sus mayores debilidades.

Se puede decir que los Bourbaki contribuyeron a la formalización matemática, pero sin aportar demasiado a los estudios de tipo lógico y de fudamentos; mucho menos, a la lógica multivaluada, cuya existencia ni mencionan siquiera.

Volviendo ahora a la línea argumental que nos ocupa, también hemos de mencionar los trabajos del notable lógico chino *Moh Shaw-Kwei,* quien señalaba que es posible eliminar las paradojas lógicas por medio de la introducción de una lógica multivaluada[110].

Ya en la década siguiente, la de los 1960´s, siguen los artículos de *C. C. Chang,* conjuntamente con *H. J. Keider.* Trataban[111] de la teoría general de modelos del cálculo de predicados infinito-valuado que satisfacen determinadas condiciones de continuidad, como puede ser el caso -en particular- del cálculo proposicional de Jan Lukasiewicz. A continuación, y ese mismo año, fue probado por *B. Scarpellini* que dicho cálculo no es recursivamente axiomatizable.

Otros trabajos dignos de mención son los de *A. Mostowski*[112]; los de *Rutledge*[113]*,* que son una primera descripción del cálculo de predicados infinito-

---

[110] En concreto, lo que propone dicho autor es considerar el valor intermedio del sistema lógico de Bochwar (aquel que denotábamos por ½) como "paradójico", que se asignaría a proposiciones del tipo: "este enunciado es falso", que como sabemos, sería verdadera, si es falso, y sería falsa, si es verdadero. Según resume Julián Velarde, "la negación de una proposición paradójica, la diyunción de una proposición paradójica con otra paradójica o falsa, la conjunción de proposición paradójica con otra paradójica o verdadera, y la implicación de una proposición falsa por una paradójica, o de una paradójica por una falsa, todas ellas son paradójicas; resultados éstos que son los que arrojan las tablas (veritativas) de Bochwar". Véase, en su artículo "Lógica Polivalente", la p. 99.

[111] En 1962.

[112] Trabajo de 1957. *Andrzej Mostowski (1913-1975)* también había nacido en Lvov (Lemberg), como Jan Lukasiewicz. Recibió la influencia de Adolf Lindenbaum, Kazimierz Kuratowski y Alfred Tarski. El segundo de ellos sería oficialmente su director de tesis, aunque en realidad quien se la dirigiera fuese un joven profesor: Alfred Tarski. Trabajó mucho sobre los problemas de Recursividad, los de Indecibilidad, en FOL (lógica de primer orden), y en la Teoría de Modelos. Fue una de los piezas clave de la ELV. Es muy conocido su *Lema del Colapso* (que es el `*Mostowski´s Collapsing Lemma´* de la literatura). El cual establece que toda relación extensional bien fundada (well-founded), o planteada, es isomorfa a un conjunto transitivo, y dicha isomorfía es única. Se puede probar mediante el axioma de separación y el de reemplazamiento. Pero existen teorías conjuntistas suficientemente débiles como para poder probar en ellas este Lema. En ese caso, se hablaría del `Principio de Mostowski´.

[113] De 1960.

valuado; o los de *A. Horn,* presentando un resultado acerca de la completitud de la Lógica de Gödel.[114]

La fundamental noción de norma triangular fue introducida por *Schweizer y Sklar*[115]. Cinco años más tarde, *C. H. Ling* prueba nuevamente la caracterización de la continuidad para la t-norma.

Con esto alcanzamos el año de 1965, cuando *Lofti A. Zadeh* publicó su “seminal paper”, el famoso “Fuzzy Sets”, en *Information and Control.* Desde aquí ya es más conocida, o al menos, más próxima, su historia. Observemos que este escrito del azerí abordaba los Conjuntos Borrosos, pero no todavía la Lógica Borrosa, generalización emprendida más adelante por el propio Zadeh.

Pero el primer artículo sobre Fuzzy Logic parece haber sido el del americano *Joseph A. Goguen*[116]. En el mismo, los retículos residuados son tratados en el contexto de la Lógica Borrosa, o como él la llamaba, de los conceptos inexactos. Trabajando en él con los “fuzzy sets” con valores en una “lattice”, o retículo.

---

[114] En 1969. Recuérdese que en los últimos años, las Lógicas Multi-Valuadas, que habían sido introducidas por Jan Lukasiewicz y Emil León Post en la tercera década del siglo pasado, atraen fuertemente a la comunidad filosófica, matemática y de ciencias de la computación de los países más avanzados, y ello es debido a su enorme potencial en la verificación tanto del software como del hardware. Asimismo, en ell modelado del conocimiento, en los “Knowledge-Based Systems” (los KBS, o Sistemas Basados en el Conocimiento), etc. Tengamos también presente que el éxito de una lógica va a depender esencialmente de la posibilidad de disponer de un cálculo efectivo y eficaz, que sea computacionalmente adecuado para dicha lógica. Dado que sin dicho cálculo operativo, vital para sus aplicaciones a la Ciencia Computacional (la “Computer Science”, o CSci) y a la Inteligencia Artificial, esa lógica quedaría confinada a un estadio puramente teórico. Afortunadamente, en el caso de las Lógicas Multi-Valuadas tal cálculo es posible. Así, el análisis de sus cálculos ha sido realizado por autores como Takahashi, Rousseau, Carnielli o Schröter. Y en los Sistemas de Deducción Natural han trabajado Baaz, Fermüller y Zach.

[115] En 1960.

[116] Que es de 1967.

Dos años después, *Helena Rasiowa y Roman Sikorski* escribieron una monografía donde exponían mucho material acerca de las estructuras algebraicas más relevantes para las Lógicas Multi-Valuadas, especialmente sobre las llamadas *Álgebras de Heyting,* a las cuales estos autores denominan *Álgebras Pseudo-Booleanas.*

Asimismo, hemos de citar la monografía de *Robert J. Ackermann,* que introduce al estudio de las lógicas multi-valuadas[117]. O el artículo de *Pogorzelski*[118] sobre el teorema de deducción para el cálculo proposicional de Lukasiewicz infinito-valuado.

En la década de los 1970´s, aparecen publicadas en inglés las *Selected Works,* de Jan Lukasiewicz, editadas por Leon Borkowski[119]. *H. Rasiowa* trabajaba[120] sobre un cálculo de predicados infinito-dimensional. D. Scott[121], por su parte, discutía el posible significado de la multiplicidad de los valores de verdad, estableciendo una prueba alternativa de la completitud de la lógica de Lukasiewicz.

De entre las muchas publicaciones de *Lofti Zadeh* publicadas durante esos años podemos citar las que tratan del concepto de variable lingüística[122]; o del

---

[117] También de 1967. No debe confundirse este autor con Wilhelm Ackermann (1896-1962), el famoso ayudante de David Hilbert (1862-1943), quien con él escribiera un famoso tratado sobre Lógica.
[118] De 1964.
[119] La editorial era la holandesa Nort-Holland Company, NHC, en colaboración con la PWN polaca. Los nombres de los artículos de Jan Lukasiewicz que mencionaremos, aun siendo originalmente en la mayoría de los casos publicados en polaco, vendrán bajo su título en inglés, dado que nos referimos generalmente a su traducción como *Selected Works of Jan Lukasiewicz,* que Leon Borkowski realizó para dicha editorial (la holandesa NHC, en colaboración con la polaca PWN).
[120] En 1973.
[121] En 1974.
[122] De 1975.

análisis de los sistemas de gran escala, con los que introduce el Modus Ponens Generalizado y la Regla Composicional de Inferencia[123].

Chang y Lee[124] publicaron una obra acerca de la teoría continua de modelos, donde estudiaban el cálculo proposicional con máx-disyunción, mín-conjunción y la negación 1 – x, denominándolo "Fuzzy Logic".

La serie de artículos de *Jan Pavelka* significa una contribución notable al estudio de la semántica y de la sintaxis de la Lógica Borrosa, realizado a un nivel muy grande de abstracción, y llegando a establecer un teorema de completitud para su sistema de lógica del tipo de Lukasiewicz. Se trataba de un esfuerzo pionero en muchos sentidos, aunque la objeción sería[125] que con esto el sistema se vuelve innecesariamente artificial y complicado.

R. C. T. Lee[126] escribe el primer artículo acerca de la resolución en Lógica Borrosa. Ya en los 1980´s, *M. E. Ragaz*[127] presenta cierto número de resultados sobre la complejidad aritmética de la MVL de Lukasiewicz.

Font, Rodríguez y Torréns elaboraron[128] la teoría llamada de las *Álgebras de Wajsberg.* También son interesantes los trabajos de T. Calvo, de la Universidad de Alcalá de Henares, con Radko Mesiar y otros colaboradores.

En ese mismo año, *Takeuti y Titani* realizaron una importante contribución a la Lógica de Gödel, aunque no atribuyéndole ese nombre.

---

[123] De 1974.
[124] En 1966.
[125] Para Petr Hájek.
[126] En 1972.
[127] En su tesis para la ETH de Zürich.
[128] En 1984.

Durante los años siguientes, *Danielle Mundici* escribirá toda una serie de trabajos acerca de las álgebras multi-valuadas y de la lógica de Lukasiewicz, llegando a probar[129] que el conjunto de todas las 1-tautologías del cálculo proposicional de Lukasiewicz es co-NP-completo.

Son de relevancia los trabajos del finés *Jouko Väänänen (1950-),* sobre lógica y fundamentos de las matemáticas, y muy especialmente, los que refieren a teoría de conjuntos, a la teoría de modelos, o a los cuantificadores generalizados, o a lógicas infinitas.

La obra de los franceses *Didier Dubois y Henri Prade*[130] es desde luego amplísima. Aparte de su obra enciclopédica[131], tienen numerosos trabajos acerca de la Lógica Difusa, y también sobre la hoy muy importante *Teoría de las Medidas Borrosas* (o Fuzzy Measure Theory), a la que modestamente algo creemos haber contribuido.

Claudi Alsina, Enric Trillas y L. Valverde analizaron[132] las conectivas lógicas y sus consecuencias.

---

[129] En 1987.
[130] De la Universidad de Toulouse, en Francia.
[131] De 1980. Didier Dubois le decía a Humberto Bustince en una entrevista que éste le hiciera en 2012:
"Fuzzy logic is 47 years old. It means that in 2012, it already has a quite long history. The period that lasted until the late seventies was characterized by the great hopes of a few people and the disparaging attitude of many others. In the eighties, more tools and results were added to the theory, making it more respectable. Then in the late eighties came the fuzzy boom in Japan, after the pioneering works in fuzzy automatic control made in Western Europe by Abe Mamdani and his immediate followers. The nineties were the realm of fuzzy rule-based systems and more generally of neuro-fuzzy and soft computing applications. Meanwhile and quite independently many other areas had been developing such as fuzzy topology and fuzzy analysis, fuzzy aggregation operations, fuzzy relations, possibility theory, approximate reasoning, fuzzy operations research, fuzzy clustering and image processing, fuzzy databases and information retrieval. The last decade has seen the continuation of this diversification and specialization process, with a broader acceptance of fuzzy logic in general". Lógicamente, en 2013 son ya 48 los años; en cualquier caso, ronda la Lógica Borrosa una tradición de medio siglo.
[132] En sendos artículos, de 1983 y de 1985.

El libro del alemán *Siegfried Gottwald*[133] ha sido durante muchos años la principal obra de referencia sobre las Lógicas Multivaluadas. También sería digna de mención la monografía de Schweizer y Sklar, de 1988; o la de Klir y Folger, del mismo año.

Son también fundamentales las obras del matemático chino *Zhenyuan Wang*[134], que aparte de ser un notable investigador del Análisis Difuso, ha escrito dos monografías[135]. La primera de ellas sería la titulada *Fuzzy Measure Theory*[136] y luego ha hecho una versión mucho más amplia, con nuevo material y que en cierto modo, subsumiría la anterior: se trata de la *Generalized Fuzzy Measures*[137]. Contienen estos libros resultados del propio Wang y clarifican muy bien los aportes ajenos. Pueden verse más detalles en la Bibliografía.

Y una mención muy especial merece la obra del gran filósofo polaco *Jan Wolenski,* profesor de la Universidad de Cracovia, por tratarse de la referencia fundamental sobre la historia de la lógica polaca, y muy en especial, sobre nuestra Escuela de Lvóv-Varsovia[138].

Finalmente, citemos el artículo de *Vilém Novák,* de 1987, que trata sobre la Lógica Borrosa de Primer Orden[139], y que constituye su primer trabajo acerca del Cálculo de Predicados en el estilo de Jan Pavelka.

---

[133] Que es de 1988.
[134] Actualmente, profesor de la Universidad de Nebraska-Omaha, en los Estados Unidos.
[135] Ambas, junto con con George J. Klir.
[136] Aparecida en la Springer Verlag, en 1992.
[137] Esta es de 2010, publicada por la misma editorial.
[138] Es una obra inicialmente publicada en 1985, pero posteriormente revisada, y traducidos al francés una selección de sus capítulos más interesantes:
WOLENSKI, J., *L´Ecole de Lvov-Varsovie.* Paris, Libr. Philos. J. Vrin, 2011.
[139] FOFL, en su acrónimo inglés.

Desde los años 1990´s se ha desarrollado una gran actividad sobre estas cuestiones; en líneas generales, ha sido un constante “in crescendo”. De los trabajos de *Zadeh,* podemos citar los que tratan del nacimiento y la posterior evolución de la lógica borrosa[140].

En lo que respecta a *Dubois y Prade,* estos presentan una especie de “recuento” de lo conocido por la que pudiéramos denominar “comunidad fuzzy”. Así, con su trabajo sobre Teoría de la Posibilidad[141].

Existen también artículos en torno a la “Fuzzy Logic programming”, o programación siguiendo la “Fuzzy Logic”; por ejemplo, los de *F. Klawonn y R. Kruse*[142]; o el de *R. Dyckhoff et al*.[143]

De los trabajos de *Danielle Mundici* y de su grupo se puede mencionar el de 1993, y también los que escribió con *Roberto Cignoli*. En el primero de ellos Mundici estudiaba las analogías de la probabilidad sobre las MV-álgebras.

Petr Hájek obtuvo[144] una simplificación de la lógica proposicional de Pavelka. Para ello, eliminó constantes veritativas irracionales, haciendo uso de los axiomas de Lukasiewicz y de su versión de la lógica de predicados. Su grupo[145] es puntero en nuestro campo. De modo independiente, también *Vilém Novák* presentaría ese mismo año, en Yokohama, una simplificación de dicho sistema. El capítulo de *Ulrich Höhle*[146] con el cual contribuía a un conocido

[140] Como es el aparecido en 1990.
[141] De 1992.
[142] De 1995.
[143] Que es de 1966.
[144] En sus artículos de 1995.
[145] El ya mencionado, de la Universidad Carolina (o Charles University, de Praga).
[146] De 1995.

Handbook sobre los fundamentos matemáticos de la Teoría de Conjuntos Borrosos, inspiraría a Petr Hájek su *Basic Logic*[147].

La Lógica Proposicional Producto fue axiomatizada por *Petr Hájek, F. Esteva y Lluis Godó*[148]. En ese mismo año, de 1966, el propio *Hájek y Harmancová* presentaron al congreso *IPMU´96,* celebrado en Granada, un trabajo lobre la Lógica Modal Multi-valuada, y junto con Verbrugge, un paper a la revista *International Journal on Approximate Reasoning (IJAR),* sobre la lógica de la Vaguedad y la Incertidumbre (la MVL Modal Logic). También aparece por esas fechas un artículo de *M. Baaz* con valiosas contribuciones sobre la Lógica de Gödel.

R. Hähnle[149] había probado la NP-completitud de la satisfacibilidad en la Lógica de Lukasiewicz, utilizando para ello la Mixed Integer Programming.

La teoría de las *t-normas* viene bien desarrollada en el libro de *Dan Butnariu y Erich P. Klement*[150], o en el artículo de *Bernard De Baets y Radko Mesiar*[151]. O en los de éste último, del año anterior. Pero una obra fundamental[152] sería el volumen *Triangular Norms,* de Klement, Mesiar y Pap.

Publica otra monografía[153] *Siegfried Gottwald,* pero esta ya en inglés, bajo el nombre *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic,* prestando mucha atención tanto al

[147] BL-logic.
[148] En su artículo de 1996.
[149] En 1994.
[150] De 1993.
[151] De 1996.
[152] Y de lo más informativa.
[153] En 1993.

control difuso como a las ecuaciones relacionales[154]. Otra obra monográfica aparece en Stuttgart, en versión alemana[155], y al año siguiente, en inglés, publicada por Wiley. Esta *Foundations of Fuzzy Systems* es obra de Kruse, Gebhart y Klawonn, y en su análisis del control difuso, utiliza las "similarity relations", esto es, las relaciones de semejanza o de similaridad.

J. B. Paris[156] escribe un útil manual, bajo el título *The uncertain reasoner´s companion – a mathematical perspective.* En ella se consagra principalmente a las teorías de las "belief measures" (o medidas de creencia), con un capítulo dedicado a las "truth-functional beliefs" (creencias veritativo-funcionales), con información de base acerca de las t-normas continuas y de las conectivas relacionadas. Dice que la Lógica Borrosa es una teoría de los grados de verdad y no de los grados de creencia (o de "belief"). Para tener una visión más completa, se puede ver el artículo de J. B. Paris sobre la semántica de la Fuzzy Logic[157] .

Ya *Dubois, Prade y Yager* habían escrito una memorable antología[158], las *Readings in Fuzzy Sets for Intelligent Systems,* que recopila los artículos que consideraron más importantes, de entre los publicados hasta esa fecha, sobre conjuntos borrosos y lógica borrosa.

[154] Aunque también contiene abundante material acerca de las normas triangulares y de las lógicas asociadas correspondientes.
[155] En 1993.
[156] En 1994.
[157] O en su versión estricta (FLn), el que escribió junto con Hájek, ambos trabajos de 1997.
[158] En 1993.

G. J. Klir y B. Yuan prepararon[159] el volumen *Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, and Fuzzy Systems: selected Papers by Lofti A. Zadeh.* Es una recopilación de trabajos muy importante para nuestro campo de investigación.

Finalmente, hemos de mencionar, dentro de las monografías notables, las *Metamathematics of Fuzzy Logic,* de Petr Hájek, o la *Mathematical Principles of Fuzzy Logic,* de Vilém Novák, Irina Perfilieva y Jiri Mockor[160]. También es interesante, desde el punto de vista lógico-histórico-filosófico[161], la obra que lleva por título *An Introduction to Many-Valued and Fuzzy Logic (Semantics, Algebras, and Derivation Systems),* de Merrie Bergmann. O en un campo más amplio, que subsume a las MVLs, tenemos el libro de Graham Priest[162] *An Introduction to Non-Classical Logics (From If to Is).*

Dentro del sumamente reducido ámbito de la edición en español de obras acerca de la Fuzzy Logic[163], ha de citarse sin duda la obra pionera, que es la de Enric Trillas, Claudi Alsina y J. M. Terricabras, llamada *Introducción a la Lógica Borrosa*[164]*.*

Otro importante aspecto, para favorecer el estudio y difusión de las ideas y de los resultados de la Lógica Borrosa, son los numerosos Congresos

---

[159] Como editores, y que fue publicado en Singapur.
[160] De 1998 y 1999, respectivamente.
[161] Tras toda esta panoplia de serias publicaciones, parece más que cuestionable la opinión de los Kneale, quienes en su *The Development of Logic* ponían en duda el derecho de la MVL a ocupar el lugar que tendrían merecido dentro de los sistemas lógicos.
[162] Uno de los padres y principales cultivadores de las Lógicas Paraconsistentes y Dialetéicas, con abundantes publicaciones. La obra mencionada fue publicada por primera vez en 2001 y alcanzaba su tercera edición en 2010.
[163] O de casi toda la Lógica, desde un punto de vista verdaderamente serio, moderno y original. Aquí han sido pocas las acciones destinadas a sacar al país de su eterno marasmo; en este campo, especialmente. Véase nuestro comentario de la página 187.
[164] TRILLAS, E.; ALSINA, C.; TERRICABRAS, J. M., *Introducción a la Lógica Borrosa,* Barcelona, Editorial Ariel, 1995.
Publicación hoy por desgracia agotada, sin reediciones y bastante difícil de encontrar, como no sea en bibliotecas, pero aún contiene información interesante, a pesar del paso del tiempo.

Internacionales, que cada vez más, se organizan en los países avanzados[165], y a los cuales hemos sido invitado con bastante frecuencia, en ocasiones como Plenary Speaker, o en otras, como miembro del Scientific Committee, o como Chairman de alguna de sus sesiones. Estas tratan de una amplia gama de aspectos relacionados con la Fuzzy Logic, desde los más filosóficos hasta los más aplicados. Mencionarlos sería una especie de "sopa de letras", en cuanto lista casi sin fin de acrónimos[166], cuyas sedes además van cambiando de una convocatoria para la siguiente, y suelen ser cada dos o cada cuatro años: Atenas, Estambul, Alba Iulia, Brasov, Iasi, Osijek, Budapest, Berlín, Bucarest, Praga, Viena, Linz, Varsovia, Manchester, Amsterdam… En muchos de estos casos, los Congresos están totalmente dedicados[167] a la Historia y la Filosofía de la Ciencia, o a los fundamentos filosófico-matemáticos de la Fuzzy Logic.

Tras estos congresos y actividades suele haber como soporte[168] una organización o sociedad que trata de conectar a los investigadores y canalizar sus resultados. Así, en Estados Unidos, tenemos la *UAI;* la *IFSA*[169]; la *NAFIPS*[170]; o la *BISC*[171]. En Europa, tenemos la *EUSFLAT*[172], que funciona a nivel general, pero hay otras de ámbito nacional, como la *HFA*[173], o las sociedades catalana, italiana, española o la portuguesa. Y saliendo de nuestro continente, es muy notable la Sociedad de Fuzzy Logic japonesa. En los

---

165 Incluida España.
166 Así, los *FLINS, UAI, MATHMOD, FUZZY DAYS, ESCQARU, ICTAMI, CAIM,* etc.
167 O lo son en parte.
168 La mayoría de las veces.
169 International Fuzzy Systems Association.
170 North American Fuzzy Information Processing Society.
171 Berkeley Initiative in Soft Computing.
172 La European Society for Fuzzy Logic and Technology.
173 Hungarian Fuzzy Association.

últimos tiempos se han apuntado a esta carrera, por no perder una plaza en el futuro que ya está llegando, los países emergentes[174].

Las sociedades y grupos editoriales impulsan el mantenimiento y difusión de muchas importantes publicaciones, en el campo de la lógica borrosa, o sobre cuestiones de corte filosófico o técnico. Así, es muy notable la revista

FUZZY SETS AND SYSTEMS

Que está publicada por el grupo editorial holandés Elsevier. También el

INTERNATIONAL JOURNAL OF APPROXIMATE REASONING

El cual cubre, entre otros, el tema del razonamiento con incertidumbre, y el de la "vagueness".

Pero hay muchas otras (y cada vez más), entre las que podemos citar algunas, como la de:

MULTIPLE-VALUED AND SOFT COMPUTING

Con base centroeuropea, pero con proyección internacional, o la de

AXIOMS.

MATHEMATICAL LOGIC AND MATHEMATICAL PHYSICS

Radicada en Basel (Basilea, Suiza), y de la cual el doctorando fue elegido -desde que apareciera dicha publicación y hasta la fecha- su Editor en Jefe. Entre los componentes del Editorial Board tenemos el honor de contar con investigadores tan relevantes y tan conocidos en el campo de la *Fuzzy Logic* y

[174] Entre ellos, Turquía, Brasil, Argentina, México, o incluso algunos del Norte de Africa.

de la *Fuzzy Measure Theory* como: Zhenyuan Wang, Radko Mesiar (ambos, entre los más grandes especialistas en Lógica Borrosa); Eugen Mandrescu, Vadim Levit, y Emil Saucan, fuertes en Teoría de Grafos; Vasile Postoliça, Humberto Bustince, Henri Prade, Kevin A. Knuth, Hari Srivastava, Daniel Breaz, Rémi Leandre, Florin Nichita, Vadim Levit, Lászlo Zsidó, Mirela Stefanescu, Marlos Viana, Valentin Vlad, ó Matthias Dehmer, entre otros.

Recientemente, a principios de 2012, hemos recibido dos buenas noticias: que nuestra revista *AXIOMS* ha sido incluída en la base de datos más acreditada, la *Zentralblatt für Mathematik MATH,* y que también aparece ya en el *Directory of Open Access Journals.* Está a punto de pasar al MathSciNet, de la AMS, y ser incluida con su índice de impacto correspondiente en el ISI de Thomson-Reuter.

La *IEEE Computational Intelligence Society*[175] publica las

IEEE TRANSACTIONS ON FUZZY SYSTEMS

Son dignas de mención también las publicaciones de la Editorial Springer, que en origen fue germana[176] pero que ahora se ha extendido por todos los países, y es seguramente la del máximo prestigio dentro del mundo científico. Publica, entre otras dos colecciones de volúmenes, una la llamada:

STUDIES IN FUZZINESS AND SOFT COMPUTING SERIES

Y otra, la que lleva por nombre:

[175] Organización de base americana, pero de alcance universal, que agrupa a los ingenieros eléctricos y electrónicos de todo el mundo, así como a quienes se ocupan de la Fuzzy Logic: matemáticos, físicos, frilósofos, etc.
[176] Con el fundador de la Editorial, el "patriarca" Julius Springer. Hoy con sedes en Berlín, Heidelberg, London, New York, etc.

STUDIES IN COMPUTATIONAL INTELLIGENCE SERIES

Ambas colecciones han publicado numerosos y muy solventes volúmenes que tratan temas específicos la de Fuzzy Logic[177], así como sobre las implicaciones filosóficas de todas estas innovadoras teorías y de sus métodos asociados. También son de la Springer Verlag otras colecciones que siendo similares, tienen sus características y línea de contenidos propias, como:

ADVANCES IN INTELLIGENT AND SOFT COMPUTING SERIES

O bien esta otra:

ADVANCES IN SOFT COMPUTING SERIES

La última de ellas publica también selecciones de artículos de los mejores congresos, y está dirigida por Janusz Kacprzyk, que es una figura de gran relieve y autoridad en nuestro campo.

Entre naciones que buscan avances rápidos en la Ciencia, y en los temas más punteros, están algunas esencialmente entregadas como China, la India, Brasil, o algunos de los países árabes, la aparición de nuevas revistas de esta temática es cada vez más frecuente. Hay revistas sobre Fuzzy Logic y sociedades potentes en países para muchos impensables, al menos vistos desde la perspectiva occidental, como es el caso de Irán, India, Turquía, o de Túnez.

[177] Como Fuzzy Sets, Rough Sets, Fuzzy Optimization, Redes Neuronales o Algoritmos Genéticos, sobre las Lógicas Multivaluadas, etc.

Incluso en España, y bajo los auspicios del ECSC[178], con base en la antigua ciudad minera e industrial de Mieres, se publica electrónicamente la revista

PHILOSOPHY AND SOFT COMPUTING

en la que por cierto, se ha venido recomendando[179] la lectura de alguno de nuestros modestos artículos.

Se observa en las publicaciones, lo mismo que en los Congresos, una tendencia creciente a irse desplazando hacia los países orientales, especialmente a la República Popular China, Japón, Singapur, Taiwan, Corea del Sur, Indonesia, la India, etc., conforme con su imparable avance, según la potencia económica de Occidente decrece y el poder oriental se incrementa. Ese desplazamiento del centro de gravedad de la ciencia y de la tecnología se viene observando desde hace años, pero cada vez es mayor el peso de aquellas renacidas naciones dentro del concierto internacional.

Para completar todo este repaso de las distintas estructuras o sistemas propuestos en Lógica, para resolver los problemas que fueron apareciendo en los sucesivos intentos de fundamentación completa y consistente, tenemos los Sistemas de Hilbert y los Sistemas de Gentzen.

Los *Sistemas Hilbertianos* toman su nombre del conocido matemático de Götingen, David Hilbert, quien tuvo como ayudante a un también lógico notable, Wilhelm Ackermann. Ambos son los coautores de la famosa obra *Elementos de*

[178] Centro Internacional de Investigación en Soft Computing, de Mieres.
[179] Seguro que inmerecidamente.

Lógica Teórica (Gründzuge der theoretischen Logik)[180]. Dichos sistemas son una herramienta de uso generalizado en la literatura dentro de las lógicas subestructurales, las cuales incluirían la `Relevant Logic´, o Lógica Relevante, desarrollada por Anderson y Belnap en las décadas de los 1960´s y los 1970´s. La aproximación que vino a relacionar los Sistemas de Hilbert con las clases de retículos residuados está dentro de las lógicas algebraizables estudiadas por Blok y Pigozzi, en 1989.

En cuanto a los llamados *Sistemas de Gentzen,* tienen su nombre en honor del brillante lógico alemán. Porque los sistemas hilbertianos son buenos para la presentación de diversas lógicas, y también para conectarlas con las clases de lógicas, pero incluso en casos simples, como el de $A \rightarrow A$, pueden tener dificultades. El problema radica en que para cada paso de una deducción, o derivación, hemos de dilucidar qué axiomas o reglas se deben utilizar para dar el paso al siguiente. Por lo que parece ser la mejor opción la de presentar los `proof systems´, con más restricciones, sobre el modo de proceder, unos sistemas en los que las derivaciones fueran analíticas.

Hay diversas estructuras, como los `Tableaux´, la `Display Logic´, o la `Resolution´, entre otros. Todos los cuales presentan ciertas ventajas e inconvenientes.

Los Sistemas de Gentzen aúnan flexibilidad y simplicidad. Por ésta última, los sistemas serían naturales y sencillos de entender. Por la flexibilidad, pueden ser cubiertos muchos de los sistemas lógicos que manejamos. Así,

---

[180] HILBERT, D.; ACKERMANN, W., *Elementos de Lógica Teórica (Gründzuge der theoretischen Logik).* Berlin, Julius Springer Verlag, 1928.

mientras los Sistemas de Hilbert tratan de las fórmulas concretas, directamente, los de Gentzen consiguen esa mayor flexibilidad al trabajar sobre colecciones de fórmulas. Lo más habitual es que se trate de sucesiones, de conjuntos, o de los denominados `multisets´.

En la teoría de Gentzen son fundamentales los secuentes y los hipersecuentes (sequents and hypersequents). Pero tratarlos con detalle nos distanciaría bastante de nuestra meta. Tan sólo vamos a señalar que la Lógica de Lukasiewicz fue la primera en ser investigada, dentro del espectro de las de primer orden. Luego se llegó a probar[181] que el conjunto de las fórmulas válidas en ella no es recursivamente enumerable. Lo cual fue reforzado en su tesis por M. E. Ragaz, en 1981. Axiomatizaciones con infinitas reglas fueron obtenidas por L. S. Hay, así como por L. P. Belluce y C. C. Chang, en 1963. La Lógica de Lukasiewicz con constantes racionales, la planteada por V. Pavelka, fue ampliada[182] por Petr Hájek al nivel de las de primer orden, en la década de los 1990´s. También han sido estudiados fragmentos interesantes de dicha lógica, en asuntos como la decidibilidad o la satisfacibilidad[183].

---

[181] Por B. Scarpellini, en su artículo de 1962.

[182] O "extendida".

[183] El resultado sobre `decibilidad´ fue obtenido por J. D. Rutledge, en su PhD thesis, de 1959. En cuanto al referente a la `satisfacibilidad´ para el fragmento monádico (donde todos los símbolos de los predicados son unitarios o nulos), que es Π_1- completo, esto fue probado por M. E. Ragaz, también en su propa tesis. Pero subsisten problemas `abiertos´ (o sin resolver), como el de la complejidad o el de la decidibilidad de las fórmulas válidas de este fragmento. La axiomatización de la lógica Σ_1-completa de las cadenas multivaluadas fue lograda por P. Hájek, en 1998.

3. Precursores del pensamiento filosófico y científico de la época que luego vamos a estudiar (la correspondiente a la Escuela de Lvóv-Varsovia).

En primer lugar, vamos a establecer la primera y principal conexión[184]. Esta sería la línea fundamental que seguiría, de maestro a discípulo en unos casos, y de precursor en determinadas ideas a heredero de las mismas, en otros[185]:

Aristóteles → … → Juan Duns Scoto → Guillermo de Ockham → ***… → Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) → Bernard Bolzano (1781-1848) → Franz C. Brentano (1838-1917) →*** *Kazimierz Twardowski (1866-1938) → Jan Lukasiewicz (1878-1956) → … → Lofti Asker Zadeh (1921-) → …*

Antecedentes.

En cierto modo, el "padre" de la filosofía en el Imperio Austro-Húngaro primero, y después en Austria y especialmente en la región de Bohemia, fue el pensador sajón *Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)*, quien estuvo dos años en Viena, entre el 1712 y 1714, y allí escribió dos de sus obras principales:

---

[184] Aparte de la que sin duda, hubo con los pensadores clásicos, griegos o medievales.

[185] Puesto que en algunos casos, es evidente que sus periodos vitales dan intersección vacía, como sucede con Leibniz y Bolzano; en esos casos, la influencia es necesariamente de tipo indirecto.

- La *Monadología,*

  y sus

- *Principios de la Naturaleza y de la Gracia*[186].

Se aproximaba a las polémicas, entonces tan frecuentes, de un modo bastante conciliatorio. Sirva como muestra lo que decía en una de sus cartas a Nicholas Remond (de 1714):

> "He encontrado que muchas sectas están acertadas en buena parte de lo que afirman, pero no tanto en lo que rechazan".

Como es bastante conocido, Leibniz concebía el Universo como poblado por auténticas jerarquías de seres sintientes, conocidas como "mónadas", cada una de las cuales sería autosuficiente, pero conectada con el resto. Esto aúna las ventajas del monismo y del pluralismo. Para Leibniz, existe una armonía subyacente en el Universo, la cual habría sido preestablecida por Dios. Dentro de la diversidad de mundos posibles, Dios ha elegido éste, que sería el mejor de entre todos los mundos posibles[187].

---

[186] Publicado éste en 1718.

[187] Contra ese optimismo filosófico dirige Voltaire sus envenenados dardos satíricos en el *Cándido*, pero a partir de una malintencionada interpretación de las ideas de Leibniz, al que personaliza en una grotesca caricatura, el doctor Pangloss.

La verdad de los hechos tal vez sea más acorde con las palabras del matemático alemán Paul Du Bois-Reymond, cuando decía que Leibniz pensaba en Dios como lo haría un matemático: "Como se sabe, la teoría de máximos y mínimos de las funciones está en deuda con él (con Leibniz) por el progreso, gracias al descubrimiento del método de las tangentes. Pues bien, concibe a Dios en la creación del mundo como un matemático resolviendo un problema de mínimos, o más bien, en nuestra fraseología moderna, un problema en el cálculo de las variaciones, siendo la cuestión determinar, entre un número infinito de mundos posibles, aquél en el cual se minimiza la suma del mal necesario".

También dijo aquello de:

"The infinitely small is a mathematical quantity and has all its properties in common with the finite ... A belief in the infinitely small does not triumph easily. Yet when one thinks boldly and freely, the initial distrust will soon mellow into a pleasant certainty ... A majority of educated people will admit an infinite in space and time, and not just an `unboundedly large´. But they will

Con lo cual una defensa del optimismo de Leibniz podría recurrir a ciertos principios científicos que fueron emergiendo en los dos siglos posteriores, y que hoy están firmemente establecidos en la ciencia moderna. Así, podemos mencionar los llamados: *Principio de Mínima Acción*[188], *Principio de Conservación de la Masa, y Principio de Conservación de la Energía.*

Otro punto importante es la defensa que Leibniz llevó a cabo del *"libre albedrío",* frente a las opiniones de *Baruch Spinoza (1632-1677),* que como sabemos, era un apasionado defensor del determinismo[189].

---

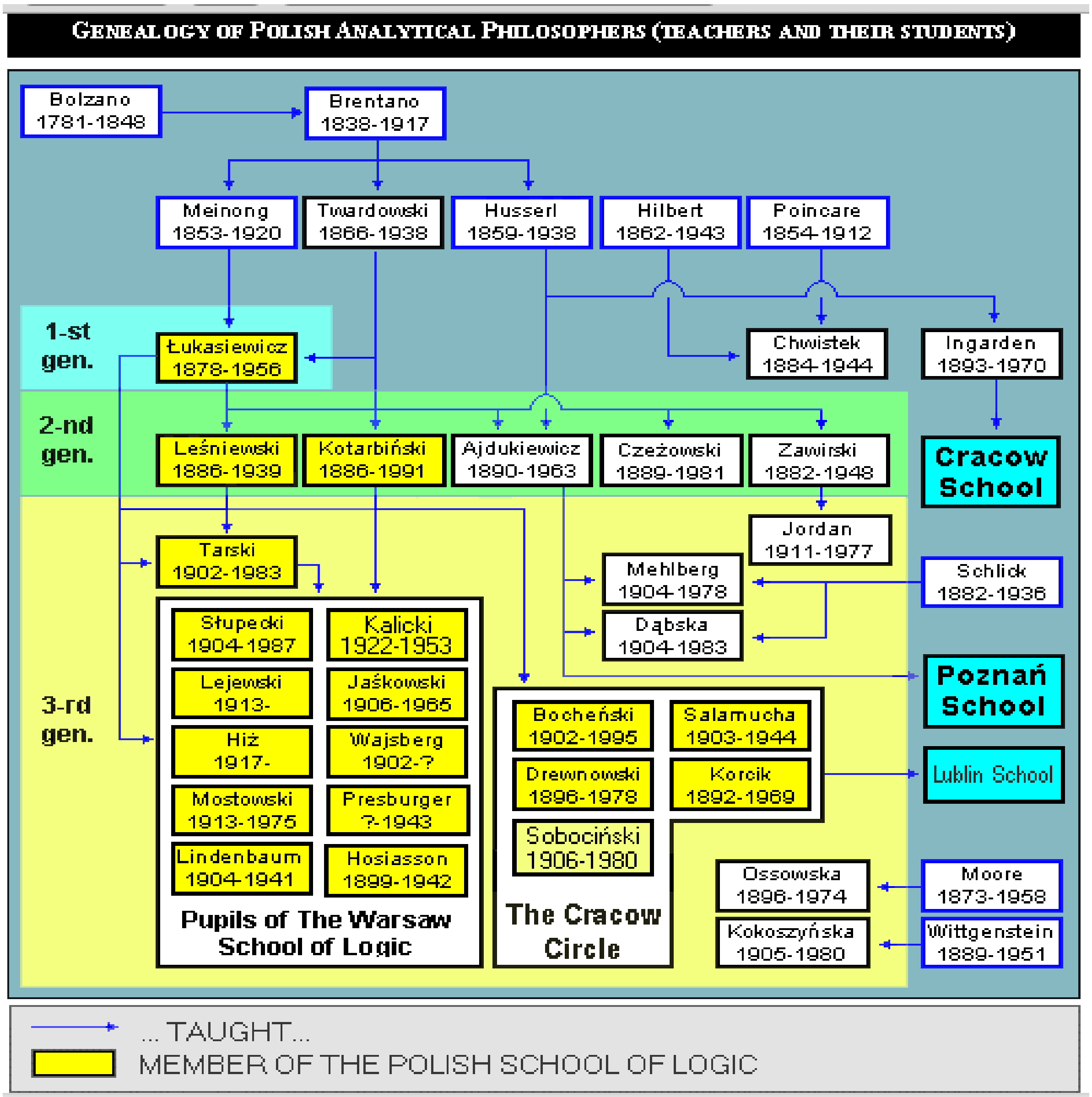
only with difficulty believe in the infinitely small, despite the fact that the infinitely small has the same right to existence as the infinitely large ..."
DU BOIS REYMOND, P., "Über die Paradoxen des Infinitär-Calcüls" ("On the paradoxes of the infinitary calculus"). *Théorie génerale des functions,* Nice, 1877.

[188] También llamado Principio de Hamilton-Maupertuis.

[189] Hablando del determinismo, debemos apuntar que su nombre viene del latín \`determinare´. A veces se le conoce como Principio de Causalidad, o simplemente, Causalidad. También se identifica en ocasiones con el fatalismo, especialmente en relación con el pensamiento árabe. No se olvide que en esta caso procede del latín \`fatalis´, que quiere decir funesto. Algunas veces asimilado a la idea de \`destino´, o de predestinación, según la cual todo cuanto sucede está prefijado de antemano, con lo que habría una concatenación de causas y efectos. Considerado desde el punto de vista lógico, el determinismo sería la doctrina de la certidumbre unívoca de todo acontecimiento.
El contraste entre esas dos personalidades filosóficas, la de Baruch Spinoza (1632-1677) y la de G. W. Leibniz (1646-1716), no puede ser más fuerte; por ejemplo, cuando abordan la cuestión de la libre elección divina. La pregunta que subyace sería ésta: ¿puede Dios elegir? A lo que Spinoza responde que no, mientras que Leibniz responde rotundamente que sí. Pues para el judío holandés, Dios sólo dispone de un mundo para elegir: el que le viene dado por su propia naturaleza. Pero Leibniz dice que Dios tenía otra posibilidad: la de no haber creado el mundo, y que una vez que optó por crearlo, tuvo abierta la posibilidad de elegir entre infinitos mundos posibles.
En el mes de Noviembre de 1676, el Cortesano (Leibniz) tuvo una famosa entrevista con el Hereje (Spinoza), en la ciudad de La Haya. Como era previsible, no estuvieron en absoluto de acuerdo. El judío Spinoza escribía su *Ética* al \`more geométrico´, donde dice –entre otras cosas- que Dios carece de libre albedrío, y nos presenta una visión del mundo mecanicista. Lo cual choca directamente contra la visión optimista de Leibniz (de estar en el mejor de los mundos posibles) y su *Monadología.*
Esa confrontación puede verse -por ejemplo- en la obra:
STEWART, M.,*The Courtier and the Heretic…,*
aunque la imagen que presenta tiene un fuerte sesgo a favor de Spinoza, y no deja por ello nada bien parado a Leibniz, como en su día ya hiciera Voltaire.
Lo que conecta a Leibniz con nuestra cadena temporal es que entre sus seguidores podemos considerar tanto a Bernard Bolzano como a J. F. Herbart, así como a los discípulos de ambos, que invocaban a Leibniz como arma para combatir tanto a Inmanuel Kant como a sus sucesores.

Veamos el grafo de las conexiones y enlaces entre los grandes pensadores que fueron los precursores de la ELV, sus propios integrantes y otros círculos y Escuelas coetáneas con ella[190]:

[190] Dicha clasificación proviene de [Polish Philosophy, 1997] Web page on Polish Philosophy. This page is edited by Francesco Coniglione and Arianna Betti in the WEB site of the Faculty of Pedagogical Sciences, Catania University, 1997, http://www.fmag.unict.it/polhome.html
Por encima del nodo correspondiente a Bolzano (y conectado con él), en dicho grafo dirigido, estaría el nodo de Leibniz. No todos ellos son austriacos, ni mucho menos, tampoco serán todos polacos (esta nación resurge en 1918), pero sí la mayoría de ellos austro-húngaros (nacionalidad englobante en aquellos tiempos, hasta el fin de la IGM y la cadena de independencias declaradas por sus territorios), pero sí que están concentrados en las tres generaciones de la ELV. Algún francés, alemán, o inglés también figura, como influyente o influido por el grupo, o por alguno de sus miembros.



Como base de todo los que vamos a estudiar a continuación, no debiéramos olvidar la lógica de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Lo primero que cabría preguntar[191] es: ¿Qué abarca concretamente esa Lógica?

[191] Se puede seguir muy bien lo que en España se ha hecho sobre este tema en los últimos treinta años con el artículo:
VELARDE, J., "Leibniz y la lógica", en la revista *El Basilisco,* de Oviedo.
También es interesante lo que sobre el pensador sajón dice tanto en su *Historia de la Filosofía* como en su *Gnoseología de los Sistemas Difusos.* Así, en la p. 19 de esta última obra, señala: "Leibniz es, creemos, quien mejor tiene sistematizadas las nociones y sus mutuas conexiones.

Para Leibniz, la Lógica es un método general que podemos aplicar a todos los campos del saber, lo que va a contribuir a la posibilidad de unificarlos (lo que se convertiría en el ideal de Leibniz).

Consideramos a Leibniz como el precursor de la Lógica Formal Moderna (lo cual no excluye al Estagirita u otros anteriores). Pero subrayemos lo de "Formal" y lo de "Moderna". Lo que justifica esa atribución tiene varias causas:

- Su idea de la *"characteristica universalis",* que da lugar a una `ideografía lógica´, lo cual preanuncia a Frege. Con ella se establece una correspondencia entre signos simples (compuestos) e ideas simples (compuestas).
- Las investigaciones de lo que llamó el *"calculus rationator".* Mediante el cual las operaciones lógicas son sustituídas por operaciones matemáticas. Pensemos que esto es lo que se hace en la llamada Lógica Matemática, y posteriormente, en las Lógicas No-Clásicas; en particular, para la Lógica Borrosa.

Para Leibniz, lo que él llama *Ciencia General* (la `Mathesis Universalis´) equivaldría a toda su Lógica. Dice que debe constar de dos partes: una, la lógica demostrativa, y otra, la lógica inventiva, que se vienen a corresponder con el doble método de *análisis* (para las verdades ya descubiertas) y *síntesis* (para las verdades por descubrir), respectivamente. Lo que Leibniz pretendía hacer posible era la representación de la Lógica por medio de un lenguaje

---

Y ello por la sencilla razón de que su filosofía es sistemática. La Lógica, y la Teoría del Conocimiento como parte suya, deben quedar perfectamente situadas en ese sistema… En vez de ver en la filosofía de Leibniz `una de las últimas defensas desesperadas de la vieja categoría del conocimiento´, hay que estudiarla como un sistema en el que no cabe separar la Lógica de la Ontología."

formal o artificial, que sólo tuviera en cuenta la estructura lógica subyacente, y no el contenido específico. Esto debiera permitirnos comprobar la veracidad o falsedad de las afirmaciones. Pero tan avanzadas eran tales propuestas que hasta más de un siglo después no llegarían a cristalizar, en trabajos como los de George Boole, Augustus De Morgan o Gottlob Frege.

También trató Leibniz con profusión el tema de la verdad y de los distintos tipos de la misma. Para llegar a lo que denominamos su *Panlogismo,* que relaciona su Lógica con su Metafísica.

Tal vez quien de modo más profundo y original haya estudiado la Lógica de Leibniz en España haya sido *Miguel Sánchez-Mazas (1925-1995).* Él trató de descifrar el sentido de la `characteristica universalis´, en su aspecto de característica numérica, completando y superando alguna de las dificultades con que se encontrara Leibniz en su desarrollo. Lo que en el fondo se pretendía era hallar un método de decisión que hiciera posible la demostración de las proposiciones, o la verificación de consecuencias, etc.

Sánchez-Mazas llega a perfeccionar (y de un modo simplificado, además) la característica leibniziana, pero en su versión numérica. Cabría llevar a cabo una aritmetización de las proposiciones, en correspondencia con el álgebra de Boole de los divisores de un número, que a su vez sea el mínimo común múltiplo de todos ellos. Pasando con esto a un nuevo modelo algebraico, que en los casos de cardinalidad finita, sería isomorfo con el anterior, mientras que nos faculta la posibilidad de una versión de cardinalidad infinita, para sistemas lógicos de infinitas variables.

El modelo de esa característica numérica, con notación moderna, sería así: partiendo del conjunto Q $\cap$ [0, 1), de los números racionales menores que el uno contenidos en el intervalo unidad, sabemos que estos coinciden con el conjunto de todas las componentes binarias, obtenidas como suma de las potencias negativas del número dos:

$$2^{-1} = ½, 2^{-2} = ¼, 2^{-3} = 1/8, …., 2^{-n} = 1/2^{n}, ….$$

Así que nos estamos refiriendo a una suma del tipo:

$$\Sigma_i \, 2^{-i} \equiv \Sigma_i \, (1 / 2)^i$$

La cual vendría a representar el conjunto de proposiciones.

Sánchez Mazas elige para ello el llamado sistema hexadecimal; es decir, para n = 4, con lo que se tendría una base $2^4 = 16$. En ella es posible llegar a representar estas tres operaciones:

- La del mínimo compuesto binario común, o supremo binario, que va a servir para la conjunción de proposiciones o la combinación de conceptos.
- La del máximo compuesto binario común, o ínfimo binario, que va a servir para la disyunción de proposiciones o la alternativa de conceptos.
- La del complemento binario, que es la diferencia aritmética entre el número máximo del conjunto y el número característico del concepto negado, y que va a servir para la negación de una proposición o de un concepto.

Esto va a tener múltiples aplicaciones, con los algoritmos numéricos diseñados por MSM, tanto en el cálculo de propiedades como en el cálculo proposicional, o la lógica deóntica, entre otras. Así, dice Sánchez Mazas,

> Se cumple plenamente … la aspiración fundamental de Leibniz de que esa característica fuera una característica real, en la que los números no se redujeran a representar otros signos, símbolos o expresiones que a su vez, remitieran a las cosas, conceptos o proposiciones, sino que pr el contrario, representan directamente a éstos últimos.[192]

Las obras de Leibniz y sus implicaciones han sido estudiadas en España por investigadores como Javier Echeverría, Julián Velarde, Ángel Currás, Quintín Racionero, Concha Roldán, Javier de Lorenzo, Eloy Rada o J. A. Nicolás, entre otros.

---

[192] SÁNCHEZ-MAZAS, M., *Obras escogidas;* p. 390, 1996.
El sentido de la obra de Miguel Sánchez Mazas está bien resumida en la reseña que sobre la misma hizo la profesora Piedad Yuste, y que apareció en la revista *Éndoxa.* De ella entresacamos el siguiente fragmento: "La lógica intensional se estructura y asienta a partir de una sola relación: la inclusión. Esta posee las propiedades reflexiva y transitiva, pero no la simétrica. El filósofo alemán trató de trasladar la silogística aristotélica al formalismo comprehensivo y expresar aritméticamente sus enunciados, emparejando números y conceptos, estableciendo un cálculo y unas reglas; pero nunca pudo lograrlo completamente. Sánchez-Mazas, revisando las páginas de Leibniz, encontró la manera de hacerlo.
El programa de Leibniz contemplaba la reducción de los conceptos a sus notas más simples; esto significa que aquellos estarían compuestos de factores, primos entre sí: Ser múltiplo de x quiere decir incluir la noción x; ser divisor de N indica estar contenido en N; así, N = x y z ... Leibniz describía los conceptos por la adición lógica de sus notas, aunque su cálculo se frustraba cuando -y así lo señaló Louis Couturat- dejaba en el aire las nociones de incompatibilidad y negación. La noción imposible, o \`non ens´, supone para Leibniz la imposibilidad de coexistencia de dos conceptos contradictorios, y su aritmetización se detiene en este punto: Es imposible ser y no-ser al mismo tiempo; no podemos añadir lógicamente ambos conceptos. En cambio, identificó el ser con la unidad. Vemos aquí un ontologismo de corte parmenídeo al unificar el ser y la totalidad. Sánchez-Mazas advierte esa dificultad e introduce, a modo de postulados, las definiciones de clase total y clase vacía, denominándolas constantes lógicas. Ser y no-ser conforman una clase determinada por su mínimo común múltiplo, y la llama Noción Falsa o Vacía. El máximo común divisor de dos nociones, incompatibles o no, será la unidad. De esta manera, la lógica intensional se corresponde inversamente -ahora sí- a la lógica extensional, donde la clase vacía está formada por la intersección de todas las otras clases y la unitaria se describe como universo del discurso".
YUSTE, P., "Reseña sobre las \`*Obras Escogidas*´ de Miguel Sánchez-Mazas". *Éndoxa. Series Filosóficas,* 2005(19), pp. 437-440; Madrid, UNED.

Por cierto, que uno de ellos, Julián Velarde, estableció una detallada comparación entre lo que Leibniz expuso del cálculo de probabilidades y la lógica inductiva de Rudolf Carnap (miembro del círculo vienés). También sondeaba las relaciones con la teoría de la posibilidad que Lofti A. Zadeh viene a derivar de su `Fuzzy Logic´. Y como sabemos, hoy en día, esa teoría de la posibilidad corre paralela a la de la probabilidad, y goza de un gran predicamento. Asimismo, abordaba Velarde el tema de quién estaría en el origen del sistema binario, del cual se considera en Occidente como padre a Leibniz precisamente (lo planteaba éste en 1678)[193]. Pero lo decía porque nuestro matemático Juan Caramuel (1606-1682) lo había propuesto ocho años antes, y no sólo el binario, sino también el ternario, el cuaternario, etc.

En cuanto a *Bernard Bolzano,* hemos de decir que nació y murió en la ciudad de Praga, entre los años antes reseñados (1781-1848). Fue no sólo matemático, sino gran filósofo y teólogo. Sus contribuciones son muy importantes, tanto al Análisis Matemático, con teoremas tales como el llamado

---

[193] Es muy interesante lo que reflexiona Velarde sobre Lógica Borrosa, en su obra:
VELARDE, J., *Gnoseología de los Sistemas Difusos,* publicada por la Universidad de Oviedo.
En sus pp. 8-9 dice que "la teoría de Zadeh sobre lo difuso invade el campo de la Teoría del Conocimiento, desde el momento en que Zadeh, con ella, pretende ofrecer un esquema conceptual más apropiado que el proporcionado por la lógica clásica, `basándose en la premisa de que las percepciones humanas envuelven, en su mayor parte, conjuntos difusos, esto es, clases de objetos en los que la transición de la pertenencia a la no pertenencia es gradual, más bien que abrupta´ … La premisa base en la que se apoya la teoría de Zadeh es de naturaleza filosófica, gnoseológica, y secundariamente, por consecuencia, metodológica. La cuestión fundamental no sería sobre el valor intrínseco del razonamiento difuso, sino sobre si la imprecisión es algo inherente en nuestro conocimiento del mundo real. Sobre tal cuestión se dan dos tesis epistemológicas, de las que derivan sus correspondientes metodologías: 1) tratar lo difuso como algo que puede y debe ser eliminado mediante el esfuerzo continuado en la búsqueda de modelos cada vez más claros y precisos; 2) lo difuso, para Zadeh, es algo inherente al conocimiento humano en general (o en buena parte), y por lo tanto, es un componente esencial de cualquier teoría. Ello no significa aceptar lo difuso como modo de encubrir nuestra propia ignorancia, dejando difusos los problemas que se pretende resolver; antes bien, su teoría de conjuntos difusos pretende ser un nuevo instrumento, más apropiado que la teoría de conjuntos clásica, para un tratamiento más preciso de los conceptos que usualmente empleamos, y en los que es inherente la imprecisión. La divergencia reside no en los objetivos de una u otra teoría (ambas persiguen la precisión de los conceptos), sino en la respuesta (tesis gnoselógica) a la cuestión de la imprecisión de nuestro conocimiento".

de Bolzano-Weierstrass o el del Valor Intermedio, como a la filosofía, con su Teoría del Conocimiento. Rechazaba tanto el idealismo de Kant como el de Hegel. Sigue el hilo conductor que venía desde el pensamiento leibniziano, como reconocerá el propio Husserl en uno de los párrafos que vienen a continuación.

Dos citas representativas sobre Franz Brentano y su filosofía podrían ser éstas:

(The *Wissenschaftslehre*) in its treatment of the logical 'theory of elements' far surpasses anything that world-literature has to offer in the way of a systematic sketch of logic. Bolzano did not, of course, expressly discuss or support any independent demarcation of pure logic in our sense, but he provided one de facto in the first two volumes of his work, in his discussions of what underlay a Wissenschaftslehre or theory of science in the sense of his conception; he did so with such purity and scientific strictness, and with such a rich store of original, scientifically confirmed and fruitful thoughts, that we must count him as one of the greatest logicians of all time.

He must be placed historically in fairly close proximity to Leibniz, with whom he shares important thoughts and fundamental conceptions, and to whom he is also philosophically akin in other respects.[194]

Otra también interesante podría ser ésta:

While the idealists were removing every trace of objectivity from Kant's semantics, there was in a corner of the Austro-Hungarian empire, ignored by the leaders of German philosophy, a Czech priest by the name of Bernard Bolzano, who was engaged in the most far-reaching and successful effort to date to take semantics out of

[194] HUSSERL, E., *Logical Investigations,* vol. I, Prolegomena to a Pure Logic 61 (Appendix), 1900.

the swamp into which it had been sinking since the days of Descartes. Bolzano was the first to recognize that transcendental philosophy and its idealistic sequel were a reductio ad absurdum of the semantics of modem philosophy. He was also the first to see that the proper prolegomena to any future metaphysics was a study not of transcendental considerations but of what we say and its laws and that consequently the prima philosophia was not metaphysics or ontology but semantics. The development of these ideas in his monumental Wissenschaftslehre and in a variety of other writings established Bolzano as the founder of the semantic tradition. Bolzano's philosophy was the kind that takes from and then gives life to science. His approach to semantics was developed in dialectical interplay with the decision to solve certain problems concerning the nature of mathematical knowledge. Kant had not even seen these problems; Bolzano solved them. And his solutions were made possible by, and were the source of, a new approach to the content and character of a priori knowledge.[195]

Un breve inciso para comentar un aspecto interesante que fue analizado por Barry Smith: el de la notable distinción entre las dos corrientes del pensamiento filosófico dentro del área germano-hablante: por un lado, la del idealismo, tan característica del Norte de Alemania; por otro, el objetivismo o realismo, más propia de Austria y del Sur de Alemania (en particular, de Baviera). Se darían, pues, con la aparición de grados diferenciadores, evidentemente, de unos pensadores respecto de otros. Pero en general, es el trascendentalismo del Norte frente al realismo del Sur. Ha de tenerse en cuenta, para poder valorar esa posición realista, que la “revolución kantiana” no fuera en absoluto bien recibida ni aceptada en la católica Austria. De hecho,

[195] COFFA, J. A., *The Semantic Tradition from Kant to Carnap. To the Vienna Station.* Ed. by L. Wessels, Cambridge University Press, 1991.

Bernhard Bolzano era denominado el “anti-Kant”, en tono laudatorio, por su discípulo Franz Prihonsky. Se esforzaron los seguidores de esta línea de pensamiento en la adecuación ontológica. Procuraron tener un estilo de escribir y de filosofar propio, en el cual la Filosofía se desarrollara como una empresa racional, tomando las Ciencias como modelo, en su lógica y su exactitud. Por su parte, la filosofía en Polonia y en las tierras checas mostró una profunda huella de la tradición austriaca, mientras que en Hungría no fue así. Esto tiene una curiosa explicación: que los jóvenes húngaros con ambiciones querían ir a estudiar al extranjero (abroad), y no consideraban que Austria lo fuera (not abroad). De ahí que cuando se iban, elegían Alemania. De ahí que su inspiración fuera kantiana y hegeliana. Volviendo a Bernhard Bolzano, la critica de éste a los planteamiento de Kant tenía su base en las antinomias cosmológicas; más concretamente, en el problema de los límites del conocimiento. Para el filósofo de Königsberg, tales fronteras existían y trataba de mostrar dónde se encuentran.

Bolzano se tomará la filosofía crítica muy en serio, planteándose la cuestión de si sería apta para fundar una lógica, una epistemología, una ética, incluso una filosofía de la religión. La respuesta viene en una obra obra de su alumno Fr. Prihonsky, escrita por iniciativa del maestro, en la que emprende un riguroso análisis de la *Crítica de la Razón Pura,* anticipándose con ello a lo que muchos años después escribirán contra las ideas kantianas los filósofos analíticos, desde G. Frege hasta Friedman. Su análisis era de gran originalidad.

Fue sin duda Bernhard Bolzano el exponente más notable dentro de esa corriente filosófica de raíz leibniziana; sobre todo, en Lógica, pero cabe decir que en todo se mostró como un teórico de originalidad excepcional[196]. También (como queda dicho) fue un acerado crítico de Kant. Y es que no sólo contribuyó a la renovación de las ideas leibnizianas, sino que cuando sus obras fueron redescubiertas[197], inspiró a Husserl a la hora de exponer su antipsicologismo.

Finalmente, pueden ser muy interesantes, entre otras, las referencias a Franz Brentano que hiciera el historiador Jaume Vicéns Vives (1910-1960), en su obra acerca de este período:

Ante los embates de la crisis ideológica [se refiere, claro está, a ´lo que hemos llamado el `interbellum´], sólo la Iglesia católica ha mantenido su posición tradicional, arraigada en los principios metafísicos que arrancan de la filosofía helénica. Por esta causa, se ha convertido en el principal reducto de cuantos quieren salvar el legado de Occidente, o sea, la concepción humanista del hombre y de las cosas, concepción que paradójicamente, estuvo en pugna con ella durante la crisis de los siglos XV y XVI. La renovación … de las escuelas filosóficas … se halla, por esta causa, muy vinculada a los esfuerzos de pensadores católicos. El movimiento al que aludimos tiene varios precursores, entre los que descuella … el austriaco Franz Brentano (1838-1917), que a pesar de haber renunciado al sacerdocio, permaneció durante su vida profundamente católico. Con el historicista Wilhelm Dilthey …, Brentano es la fuente

---

[196] *Bernard Bolzano* fue también un notable precursor de la Lógica Multivaluada, y en particular, de la Lógica Borrosa.
Esto puede verse en su magna obra:
BOLZANO, B., *Wissenschaftslehre* (*Teoría de la Ciencia).*
Establecía en ella el grado de validez (de verdad o de veracidad) de una proposición con respecto de las variables elegidas. En alemán, sería el "Grad der Gültgkeit". Su valor vendría dado por el cociente entre el número de proposiciones verdaderas y el número total de las proposiciones obtenidas. Está claro que podría tratarse de un cardinal infinito (sea cual sea la clase de las proposiciones, universalmente válidas, universalmente inválidas o neutras). Pero Bolzano lo resttringe al caso de cardinal finito, para el conjunto de posibles variantes. Un ejemplo podría ser éste: "el 2, que es un número entre 1 y 10, es primo". Su grado de validez sería 2/5. Podemos a continuación cambiar el 2. Para un proposición, el grado de validez sería, pues, un número contenido en el intervalo real cerrado unidad, el [0, 1], dentro del cual el 0 estaría reservado para las proposiciones falsas; el 1, para las verdaderas, y el grado de las `neutras´ pertenecería al intervalo abierto unidad, el (0, 1), esto es, sería una fracción propia.
[197] Después de 1880.

de la renovación filosófica del siglo XX. En sus enjundiosas y breves obras … combatió el idealismo alemán desde Kant y Hegel, y renovó el aristotelismo en una época en que se hallaba abandonado por [casi] todos los pensadores. Brentano no sólo dio nueva vida a la Ética y a la Psicología, sino que en sus obras bebieron una serie de notables discípulos. Entre ellos, descuella Edmund Husserl (1859-1937), quien recogiendo la teoría de los `objetos ideales del filósofo católico Bernhard Bolzano (1781-1848) echó las bases de la fenomenología.[198]

Tanta fue la influencia de Franz Brentano, en el pensamiento de los diversos países que conformaron ese mosaico que se llamó el Imperio Austro-Húngaro:

[198] La obra a la que nos referimos ha sido recuperada recientemente, y procede del Fondo J. Vicéns Vives, de la Universidad Pompeu Fabra de Barcelona. Pertenece a un proyecto de 1951-1952, de una obra más general, para el Instituto Gallách, y que por su prematura muerte dejó impublicada. Se trata del volumen:
VICÉNS VIVES, J., *La Crisis del Siglo XX.* Barcelona, Ediciones Acantilado, 2013; pp. 45-46.

que en el mismo manifiesto fundacional del Círculo de Viena[199], hablando de las raíces de su pensamiento, se dice que:

> As a Catholic priest, Brentano had an understanding for scholasticism; he started directly from the scholastic logic, while leaving aside Kant and the idealist system-philosophers. Brentano and his students shaved time and again their understanding of men like Bolzano and others, who were working towards a rigorous new foundation of logic.[200]

Franz Brentano había estudiado filosofía desde el año 1796 en la Universidad de Praga, y cuatro años más tarde, allí mismo, cursó Teología. A dominar esta disciplina dedicó tres años, que simultaneaba con la elaboración de una tesis sobre ciertos aspectos de la Geometría, acerca del modo más correcto de razonar matemáticamente. Dicha tesis fue leída en 1804. Sólo dos años más tarde fue ordenado sacerdote católico, y perteneció por un tiempo a la orden de los dominicos.

En 1805 aún no sabía si estudiar Matemáticas o Filosofía, y también se inclinaba por el sacerdocio. De manera que cuando en ese año se supo de la creación de una cátedra de Religión en la Facultad de Filosofía de la Universidad de Praga, eso le hizo posible aunar las tres tendencias. En febrero de ese año empezó sus clases de Matemáticas, y en abril fue ordenado

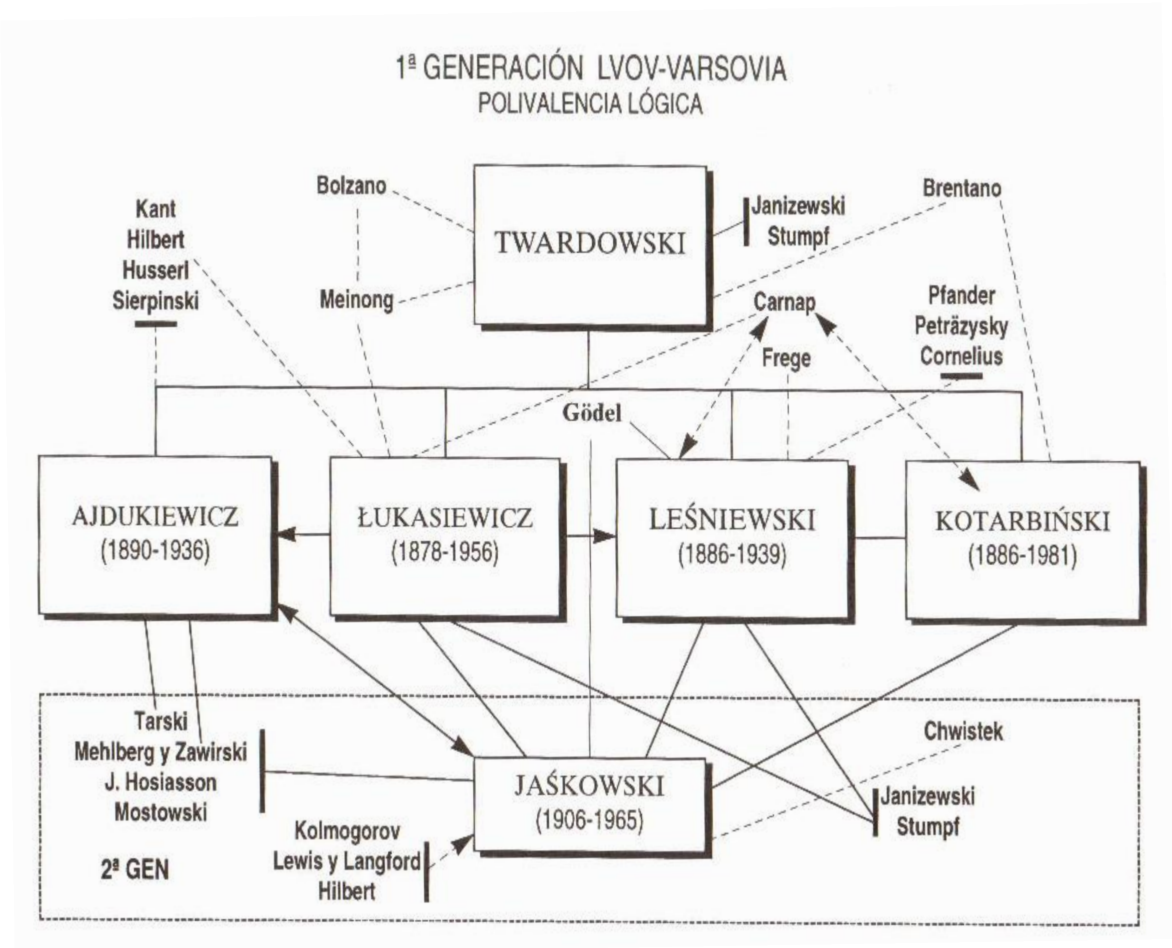
---

[199] El *Manifiesto del Wiener Kreis* (o Círculo de Viena) fue redactado conjuntamente por Otto Neurath, Rudolf Carnap y Hans Hahn, en 1929. Este fragmento aparece en la página 302 de dicho manifiesto. Publicado en francés, junto con otros escritos, por la Libr. Philos. J. Vrin, de París.

[200] Hemos de tener en cuenta, además, que los principales centros de la filosofía científica de la Europa Central de entonces, como Viena, Berlín, Praga, Göttingen, Graz y Lvov, eran precisamente aquellas ciudades en cuyas Universidades regentaban sus cátedras de filosofía los mejores alumnos de Franz Brentano. Y que esto fue así desde finales de la década de los 1890´s en adelante.

sacerdote, convirtiéndose en el capellán de los estudiantes de dicha Universidad.

Vamos a ver la clasificación que muestra las relaciones (o el grafo de conexiones o de influencias, podríamos decir, en términos matemáticos) que estableciera el ya desaparecido Pablo Domínguez Prieto en su propia tesis doctoral. En dicho grafo o diagrama podemos encontrar las mutuas dependencias entre todos éstos pensadores:



Bernardo Bolzano era un profesor brillante y dedicado, así como un orador sagrado convincente, por lo que sus sermones le consiguieron también una gran popularidad. Porque su vocación era, sobre todo, docente, y por ello se le concedió dicha cátedra de Filosofía de la Religión en su Universidad. Pero esas cátedras fueron creadas con segunda intención, de acuerdo con la Iglesia, para que sirvieran de baluarte contra las ideas críticas procedentes de la Revolución Francesa. Sólo que Bolzano tenía precisamente un talante liberal y se sentía defensor de los pobres y afligidos, por lo que no le servía especialmente a las autoridades austriacas para el fin que le habían asignado.

La popularidad de la que gozaba le granjeó la inquina de los más envidiosos y conservadores, como fuera el caso de Jakob Frint (1766-1834). Este intrigó constantemente contra él, hasta que consiguió que el Emperador le revocara. Por todo ello, fue destituido de su cátedra en diciembre de 1819. Al no resignarse, se le acusó de "herejía", le pusieron bajo arresto domiciliario y se le prohibió volver a publicar nada. Pero él se las ingeniaba para seguir publicando[201]. De este modo, fueron apareciendo sus obras, escritas en alemán, y de un fuerte contenido filosófico, no sólo matemático.

En 1810 publicó *Beitrage zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik. Erste Lieferung*, que sería la primera de una serie de escritos sobre los fundamentos de la Matemática. Como una segunda parte de la anterior, ya en 1816, aparece *Der binomische…*, mientras que el año siguiente *Rein analytischer Beweis…*[202]. Pero sus escritos sólo serían reconocidos y entendidos después de su muerte.

---

[201] Eso sí, fuera del Imperio Austro-Húngaro.
[202] O *Pura demostración matemática.*

No volvió a publicar hasta veinte años después[203], cuando apareció su *Wissenschaftlehre*, en la cual intentaba elaborar una completa teoría del conocimiento y de la ciencia. Procurando en ella establecer una fundamentación lógica válida para todas las ciencias, construyéndola a partir de abstracciones, relaciones, demostraciones, etc. Esta, su obra maestra, fue completada entre 1820 y 1830.

En buena medida retoma de sus trabajos precedentes la relación objetiva entre las consecuencias lógicas y nuestra percepción de las mismas. Como, según Bolzano, no tenemos ninguna certeza en cuanto a las verdades, el papel de las Ciencias será justificar las verdades fundamentales, que a menudo entran en contradicción con nuestras intuiciones.

Bolzano se consagra, sobre todo, a la Lógica y en particular, a su doctrina de las "proposiciones en sí mismas". Dado que él era un platónico realista, que postulaba la subsistencia intrínseca (Ansichsein) de las entidades ideales. En su *Wissenschaftlehre,* distingue entre las *Presentaciones en sí mismas* (Vorstellung an sich), las *Proposiciones en sí mismas* (Sätze an sich), y las *Verdades en sí mismas* (Warheiten an sich). Cada una de estas entidades "en sí mismas"[204] va a existir de modo independiente de la mente que las considera.

Bolzano define las presentaciones como elementos fuera de los cuales las proposiciones están constituidas. Y una verdad es simplemente una proposición cierta. Insiste Bolzano en que todas las proposiciones en sí mismas

[203] Esto sería en Sulzbach, ciudad de Baviera, el año 1837.
[204] "An sich", en alemán.

disfrutan de existencia, bien sean estas verdaderas o falsas, e independientemente de la mente que las conciba. Subraya también que las proposiciones en sí mismas deben diferenciarse de las palabras que las denotan, así como de los actos subjetivos que las conciben. Muchos son los que consideran[205] que esta fue la primera obra de lógica de verdadera importancia desde los tiempos de Leibniz[206].

En la década de los 1830´s, preparó Bolzano su obra magna, los *Grössenlehre.* Trataba en ella de interpretar las Matemáticas sobre bases lógicas. Pero sólo llegó a publicar una parte, dejando a sus alumnos la tarea de completarla.

Tres años después de su muerte, en 1854, sería uno de sus alumnos quien publicara su famoso libro *Paradoxien des Unendlichen*[207], donde por vez primera aparece el término *"Menge",* significando conjunto. Pone en él muchos ejemplos interesantes, como los relativos a las correspondencias biunívocas entre los elementos de un conjunto, e incluso de los subconjuntos.

Con razón se suele decir que Bolzano ha sido el mayor lógico entre Leibniz y Frege, anticipándose en un siglo a la obra de Alfred Tarski o la de Rudolf Carnap, por sus definiciones semánticas tanto de verdad como de consecuencia lógica.

En la Ética, su máxima fue ésta:

---

[205] Entre otros, Edmund Husserl.

[206] La visión de la lógica de Bolzano fue anticipada por el físico vienés Johann Heinrich Lambert (1728-1777), que en su *Neues Organon* expuso el carácter "a priori" de la verdad matemática. Fue este Lambert quien ideó el término "Phänomenologie", para designar el estudio de las apariencias como distinto del estudio de los términos.

[207] BOLZANO, B., *Paradoxien des Unendlichen (Paradojas del Infinito).* Concretamente, fue editada por su discípulo, Franz Prihonsky, de quien recibiera Bolzano el nombre de "anti-Kant".

> Wähle von allen dir möglichen Handlungen inmer diejenije, die, alle Folgen erwogens das Wohl des Ganzen, gleich viel in welchen Teilen, und meistern befördert.[208]

Por su contribución a los más diversos campos, se le considera uno de los más grandes "polymaths" de toda la historia de las ideas.

En la década de los 1880´s, Franz Brentano[209] llamó la atención sobre la lógica del maestro Bolzano, suscitando así el interés[210] de uno de sus alumnos, Edmund Husserl, y éste a su vez de sus discípulos, como Melchior Palágyi[211] y Hugo Bergmann.

El caso del eclipse u oscurecimiento de la obra de Bolzano, tras de su muerte, y su redescubrimiento posterior, es similar al ocurrido con la del agustino Gregorio Mendel y su descubrimiento de las leyes de la genética, pues habiéndolas anunciado en 1860, no fue reconocido hasta 1900.

Aunque[212] no llegó a tratarle personalmente, *Edmund Husserl (1859-1938)* tomó de Bernardo Bolzano (1781-1848) la inspiración para algunas de las ideas que desarrolló después en su teoría fenomenológica. Lo que más le atrajo de

---

[208] "Elegid siempre, de entre todas las acciones posibles, aquella tal que cuando todas las consecuencias sean calibradas, pueda mejor proponer el bien del conjunto, no importando en qué parte se dé".

[209] Seguramente, siguiendo las indicaciones de Robert Zimmermann.

[210] En primer lugar.

[211] *Melchior Palágyi* (1859-1924) fue un matemático, filósofo y físico eminente. Tenía ideas innovadoras sobre el espacio-tiempo 4-dimensional, expuestas ya en 1901, y en buena medida bastante similares a las que luego fueran desarrolladas por Hermann Minkowski (1864-1909) o por Henri Poincaré (1854-1912), o la gran influencia previa de las ideas de Ernst Mach (1838-1916), al cual nos referiremos en otras partes de nuestro trabajo. Entre las dos posturas, la de los que aceptaban a Bolzano, como Twardowski, Meinong o Husserl, y la de quienes le rechazaban o se levantaban críticamente contra él, Palágyi era de los segundos. En su obra *Kant und Bolzano* llegaba a criticar a éste último por haber olvidado en qué grado el lenguaje es el medio del pensamiento, así que la idea de las proposiciones o de los significados en sí mismos caería en un dualismo sin coherencia. Por cierto, que este pensador era húngaro y su nombre sería Menyhért; germanizado a Melchior.

[212] Por razones cronológicas evidentes.

su pensamiento fue lo que trataba acerca de la preservación de la naturaleza objetiva de los principios lógicos, de su esencia: el puro significado lógico de la proposición y el aspecto objetivo de la representación. Porque afirmaba Bolzano que cada proposición en sí misma disfruta de la autonomía de una mónada leibniziana, permaneciendo inalterada por los esfuerzos emprendidos por el hombre para expresarla o para pensarla. Así que habría una especie de "cielo de las ideas", alguna de las cuales llegan a ser pensadas por el hombre, mientras que otras nunca llegarán a penetrar en la mente humana. Este sería uno de los logros fundamentales de la filosofía austriaca.

Como si de una fortaleza inexpugnable se tratara, las proposiciones en sí mismas subsisten a través de la eternidad, creando para Bolzano un monumento que le pone a salvo de la persecución de sus enemigos.

La evolución interna del pensamiento de Husserl no hubiera sido posible sin dos precedentes: el de Bolzano y el de Brentano. El *"conocimiento de esencias"* le proviene del primero de ellos, mientras que la noción de *"intencionalidad"*[213] le viene del segundo. Así, es una idea motor en su filosofía la del carácter intencional de la conciencia, o de la experiencia en general. Por lo que suele decirse que la *Fenomenología* va a ser un análisis de la conciencia en su intencionalidad, esto es, un análisis de la conciencia en cuanto conciencia de algo. No olvidemos tampoco que Edmund Husserl le rindió un sentido homenaje a Bolzano, y a la importancia de su filosofía, dentro de sus *Investigaciones Lógicas.*

[213] Pieza clave para todo su pensamiento ulterior.

Tal vez debiera también citarse al menos conocido filósofo[214] *Johann Friedricht Herbart (1776-1841).* Fue un pedagogo, filósofo y psicólogo alemán. De entre los pensadores posteriores a Kant, era el más opuesto a la filosofía de Hegel; sobre todo, en temas de Estética. Discípulo de Fichte en la Universidad de Jena, Herbart unió el estudio de las Matemáticas con el de la Filosofía. Comenzó a dar clases de filosofía en Gotinga el año 1805. De allí pasó a una cátedra en la Universidad de Königsberg. Precisamente sucedió en ella al profesor Krug, que a su vez sucediera en su día a Kant. Para lo cual contó con el apoyo de Guillermo de Humboldt. Pero en 1883 volvió a la Universidad de Gotinga, permaneciendo allí hasta su muerte.

En Filosofía Herbart adoptaba una posición realista, pensando que esta comienza con la reflexión sobre conceptos empíricos, tratando de reformularlos y elaborarlos. Subdividiéndola en tres partes: la *Lógica,* la *Metafísica,* y la *Estética.* En Pedagogía Herbart estuvo influido por las ideas de Jean-Jacques Rousseau y de Johann Heinrich Pestalozzi (1746-1827), y Herbart a su vez influiría sobre John Dewey (1859-1952).

Herbart también divulgó los ideales del humanismo de Johann Wolfgang Goethe (1749-1832), bajo la cubierta intelectual de una psicología del aprendizaje. En Psicología aportó la idea de que existe un umbral mínimo de las sensaciones, por debajo del cual estas ya no se perciben. Lo cual cae dentro de la llamada Psicofísica.

Durante la segunda mitad del siglo XIX, Bolzano y su círculo contribuyeron a crear numerosas escuelas que enseñaran teología racional, buscando lograr

[214] Pero que fue muy influyente en su época.

una concordia entre checos y germanos. Para lo cual pesaba mucho la influencia de las ideas de J. F. Herbart y de sus discípulos. Promovieron de este modo una filosofía “josefinista”, que fuera única en las tierras de Bohemia. Pero a diferencia de lo que estaba sucediendo en Austria y en Hungría, el catolicismo en Bohemia, bajo el gobierno del “canciller de hierro”, Metternich, jugó un importante papel, que iba en aumento. Hasta tal punto que allí no se expandió tanto ni tan deprisa el anticlericalismo típico de otras tierras. Las ideas de la Ilustración dieron lugar, por el contrario, a un cierto tipo de “romanticismo religioso”. Y es que la “intelligentsia” bohemia seguía en buena medida las ideas leibnizianas acerca de la armonía cósmica, en la búsqueda de la unidad entre Ciencia y Religión. El pensamiento del ya mencionado filósofo J. F. Herbart, dominante desde su cátedra de la Universidad de Praga, fue clave en el período que va desde 1820 hasta 1880. Era muy admirado, tanto por católicos en general como por pedagogos en particular, postulando un realismo moderado, alejado tanto del idealismo especulativo de su maestro, Fichte, como del de Schelling.

Herbart fue un filósofo y un precursor de la psicología. Probablemente debiera ser reconocido como uno de los pioneros del siglo XIX, en el desarrollo de teorías psicológicas basadas en el aprendizaje. Pero Herbart escribió también sobre muchos temas, y se dice que fue muy influido por las ideas filosóficas de G. W. Leibniz.

U. Bottazzini y R. Tazzioli hablan del tema. En particular, Rosanna Tazzioli describía bien una de las direcciones en que esa influencia de Herbart más se evidenciaba al actuar sobre el geómetra alemán Bernhard Riemann:

Riemann estuvo casi totalmente de acuerdo con la psicología de Herbart, que inspiró tanto el modelo de Riemann del éter (el fluido elástico que se suponía llenaba todo el universo) y sus principios de `Naturphilosophie´. Según Herbart, el `acto psíquico´, o `representación´ es un acto de auto-preservación con la que el `ego´ se opone a las perturbaciones provenientes del mundo externo. Un flujo continuo de representaciones irían desde el ego hasta la conciencia, para luego hacer el camino de vuelta. Herbart estudiaba las conexiones entre las distintas representaciones en términos mecánicos, como composiciones vectoriales, de fuerzas.[215]

En sus *Neue Mathematische Principien der Naturphilosophie,* B. Riemann siguió las ideas de Herbart, suponiendo por ello que el universo estaría lleno de una sustancia (`Stoff´) que fluye continuamente a través de átomos y no llega a desaparecer del mundo material (el `Korperwelt´). A partir de esta premisa, un tanto oscura, Riemann trataba de construir un modelo matemático del espacio que rodeara dos partículas interactuando entre sí..."

Pero las ideas de Herbart sobre el espacio, o más específicamente, acerca del espacio sensorial, puede ser que hayan dado lugar a otras interesantes generalizaciones. Así, en su libro sobre el físico-filósofo Hermann von Helmholtz y la ciencia del siglo XIX, David Cahan hablaba de la influencia de Herbart en estos términos:

Herbart argues that each modality of sense is capable of a spatial representation. Color could be represented as a triangle in terms of three primary colors, tone as a continuous line, the sense of touch as a manifold defined by muscle contractions and still other spaces as associations of hand-eye movements. `To be

[215] TAZZIOLI, R., "An Overview of Riemann´Life and Work", p. 10.
Ver más datos sobre el otro trabajo, el artículo conjunto de Tazzioli y Botazzini, en la Bibiliografía final: "Naturphilosophie and its role in Riemann´s mathematics".

exact´, he wrote, `sensory space is not originally a single space. Rather, the eyes and the sense of touch independently from one another initiate the production of space; afterward both are melted together and further developed. We cannot warn often enough against the prejudice that there exists only one space, namely, phenomenal space´. Therefore, for Herbart, `space is the symbol of the possible community of things standing in a causal relationship´. He insisted that for empirical psychology space is not something real, a single container in which things are placed. Rather, it is a tool for representing the various modes of interaction with the world through our senses.[216]

J. F. Herbart estaba de acuerdo con los empiristas en que las ideas se derivan de la experiencia sensible. Pero lo eran, según él, de forma independiente. A partir de la obra *An Introduction to the History of Psychology,* de B. R. Hergenhahn, podemos asegurar que:

Herbart's system has been referred to as psychic mechanics because he believed that ideas had the power to attract or repel other ideas, depending on their compatibility. According to Herbart, all ideas struggle to gain expression in consciousness, and they compete with each other to do so … and all ideas attempt to become as clear as possible… all ideas seek to be part of the conscious mind. Herbart used the term `self-preservation´ to describe an idea's tendency to seek and maintain conscious expression. Herbart´s position represented a major departure from that of the empiricists because the empiricists believed that ideas, like Newtons particles of matter, were passively buffeted around by forces external to them… For Herbart, an

[216] CAHAN, D., *Hermann von Helmholtz and the Foundations of Nineteenth-Century Science.* Berkeley, CA, 1994*;* p. 237.

idea was like an atom with energy and a consciousness of its own - a conception very much like Leibniz's conception of the monad.[217]

Porque como sabemos, Leibniz llegó a la conclusión de que los constituyentes últimos del mundo deberían ser simples, indivisibles, y por tanto, inextensos, partículas-adimensionales, cual puntos matemáticos. Así que todo el mundo de la materia extendida estaría en realidad constituida a partir de esas sustancias inmateriales, simples... Esas serían sus famosas *mónadas*[218].

Con ello hemos querido dejar constancia de la existencia paralela de una conexión filosófica entre Herbart y Leibniz.

Pero la escuela de Herbart[219] fue monolítica, uniforme, pues sus alumnos mantuvieron inconmovibles las ideas de su maestro, no como en el caso de la escuela de Franz Brentano, cuyos componentes, aun venerándolo a éste, siguieron caminos muchas veces bastante divergentes. Entre tales discípulos

---

[217] Trad. esp., en Madrid, Editorial Paraninfo, 2001.

[218] Casi todos los escritos de Leibniz se quedarían sin publicar tras de su muerte, ya que escribió mucho y sólo había aparecido en vida su *Teodicea* (en 1710). Lo cual retrasó y redujo la influencia que de otro modo hubiera podido tener alguien que como dijo Russell, sería una de las más altas cimas que ha alcanzado el pensamiento humano. En sus obras intentaba conseguir la conciliación entre la Filosofía y la doctrina cristiana. Pero también fue un lógico considerable, que puso la teoría de la verdad como punto de partida de la filosofía, en vez de la religión. En cuanto a la `mónada´, cada una de ellas se trataría de una sustancia simple, inmaterial, provista de percepción y de apetitos. Vendría a ser una especie de `átomo de la Naturaleza´. Pero ningún par de ellas serán iguales entre sí. Además, son indestructibles. Entre todas las mónadas se viene a expresar todo el Universo.
En su lógica hay dos leyes o principios fundamentales. La primera de las cuales se llama la de Identidad de los Indiscernibles: *Si para cada propiedad, P, el objeto x tiene P si y sólo si (syss) el objeto y tiene P, entonces x e y son idénticos entre sí.* En notación formal:

$$\forall P\ (Px \leftrightarrow Py) \rightarrow x = y$$

Su recíproco: *si x es el mismo que y, entonces x e y comparten las mismas propiedades.* E. e.

$$(x = y) \rightarrow \forall P\ (Px \leftrightarrow Py)$$

Esta segunda ley se suele llamar la de Indiscernibilidad de los Idénticos. Ambas suelen englobarse bajo la denominación de *Ley o Leyes de Leibniz;* en expresión más formal, sería:

$$(x = y) \equiv (Px \leftrightarrow Py)$$

También podríamos hablar de una jerarquización de las mónadas. En el punto más alto de la escala estaría Dios; en los intermedios, las mónadas de `alta calidad´, incluyendo a los humanos; y en el escalón más bajo, las mónadas `desnudas´, que carecen de conciencia.

[219] A diferencia -como dijimos- de los grupos nucleados en torno a la figura de Franz C. Brentano, o más adelante, congregados alrededor de Kazimierz Twardowski.

de Herbart[220], podemos citar a Ziller y Allihn, que fundaron en 1860 *la Revista de Filosofía Exacta en sentido del nuevo-realismo filosófico,* para difundir las ideas de su maestro[221]. Pero fue Zimmermann quien más contribuyó al prestigio y a la difusión de las ideas herbartianas, con un libro que comparaba la monadología leibniziana con la suya:

Leibnitz und Herbart eine vergleichung ihrer Monadologien

Así que los seguidores más celebrados de Herbart en Austria serían los reformadores de la educación. Pensemos que la reforma concreta de los Institutos y de las Universidades, en la década de los 1880´s, fue llevada a cabo por los discípulos de Bolzano; concretamente, estos fueron el conde Leon Thun; Franz Exner; y el filólogo clásico Hermann Bonitz. Así que a partir de 1850, la Universidad de Praga se convierte en una plaza fuerte, o bastión, del pensamiento herbartiano. Más que por su influencia o por lo que dependan entre sí, que no es demasiado, sirva esta reflexión sobre Herbart y su escuela como un elemento de comparación[222] con Brentano y la suya. Volveremos sobre Herbart más adelante.

En cuanto al *"Filósofo Invisible",* como le llamaran a *Franz Brentano* algunos autores[223], este nombre se debió a que siendo Brentano un carismático profesor, y prefiriendo la palabra hablada a la escrita, no dejó muchos artículos u obras para la posteridad, sino que más bien se le conoce por lo que absorbieron y desarrollaron luego en sus propios sistemas algunos

[220] Desde luego, mucho menos conocidos, muy por detrás en popularidad de los discípulos de Franz Brentano.
[221] Otros miembros de la escuela de Herbart serían Drobisch, Hartenstein, Volkmann, Hendewerk y Kayserling.
[222] Coetáneo.
[223] Como Albertazzi, Libardi y Poli, 1996, 3.

de sus discípulos. Entre éstos, los hay especialmente notables, como Alexius Meinong, Edmund Husserl, Sigmund Freud, o el que nos ocupa más directamente: el polaco Kazimierz Twardowski, padre fundador de la escuela de lógica llamada de Lvóv-Varsovia, que floreció durante el periodo “interbellum”, es decir, entre las dos guerras mundiales, o sea, el que va desde 1919, final de la primera, hasta 1938, final de la segunda.

Citando la entrada sobre “Franz Brentano” de la φ *PHILOSOPHICA*[224]*:*

Franz Brentano (1838-1917) pertenece a esa clase de filósofos que tuvieron mayor influjo que fama, más importancia posterior que contemporánea. Es de justicia reconocerle el mérito y éxito de sus esfuerzos por renovar la filosofía del último cuarto del siglo XIX, especialmente en Alemania. Los frutos de ello se percibieron tanto en el nuevo interés por la metafísica aristotélica como[225] la fenomenología y los inicios de la filosofía analítica del lenguaje. Si en algo coincidían los discípulos de Brentano, era sin duda en el rigor y claridad de las exposiciones de su maestro[226], así como en su excelente conocimiento de la historia de la filosofía. El estudio de los escritos de Brentano enseña filosofía y enseña a filosofar, y proporciona además de modo único las claves de comprensión de buena parte del pensamiento filosófico del siglo XX.

Franz Brentano[227] estuvo fuertemente influido no sólo por Aristóteles, sino también por algunos de los Escolásticos. Se puede decir que era neo-

---

[224] PHILOSOPHICA, 2009. *Enciclopedia filosófica on line.* Entrada *“Franz Brentano”,* escrita por Sergio Sánchez-Migallón Granados.
[225] Sobre todo y ya en pleno siglo XX.
[226] Unos rasgos que ahormaron precisamente la fenomenología y la filosofía analítica lingüística.
[227] No debe confundirse a Franz Brentano con los otros Brentanos, Clemens y Bettina. Estos eran simplemente unos parientes del filósofo. Del primero de ellos, Clemens W. Brentano (1778-1842), son aún recordadas sus composiciones poéticas, de línea romántica, tal como la famosa Balada de Loreley. También fue novelista y formó parte del círculo constituido por J. W. Goethe, Herder, Schlegel y Fichte, entre otros. La hermana de Clemens, Bettina von Arnim

Aristotélico, pero con una visión crítica y reinterpretadora del Estagirita. De ahí provendría el impulso y la tendencia observable en su alumno, Jan Lukasiewicz. Citemos lo que al final de su vida escribió sobre sus primeros pasos filosóficos:

> First of all I had to apprentice myself to a master. But since I was born when philosophy had fallen into the most lamentable decay. I could find none better than old Aristotle. To understand him, which is not always easy, I enlisted the help of Thomas Aquinas.[228]

En un álbum de estudiante escribió también un apasionado poema, donde se retrata a sí mismo como uno de los amados discípulos –de hecho, el que más- de Aristóteles, y que dice:

> I can even today claim be of this issue.
> Welcome Eudemus you pious, welcome O brother, and you
> Goldlike in speech Theophrast, sweet as the Lesbian wine.
> Since I was given him late, youngest of all his descendants.
> Loves my father me most, more tenderly than all the others.[229]

La observación acerca de la decadencia lamentable de la filosofía de entonces no se reducía a los filósofos vivos de su entorno, cuando era estudiante, sino que se extendía a toda la tradición idealista alemana, desde Kant hasta Hegel.

(1785-1859), mantuvo una hoy día publicada y bastante conocida correspondencia con el escritor Goethe.
[228] F. BRENTANO, *Die Abkehr von Nichtrealen*.
[229] F. BRENTANO, *Aristotle and his World View*.

En 1895 planteó un esquema del modo con que la Filosofía se había ido desarrollando. Para ello consideraba tres ciclos, de cuatro etapas cada uno, desde Aristóteles hasta los post-kantianos. Dentro de cada uno de los ciclos habría habido una etapa inicial de investigación[230], y esta ha dado lugar a sucesivos períodos de degeneración, que Brentano designaba como de: *Aplicación (Ausbildung); Escepticismo (Skepsis)*, *y Misticismo (Mystik).* Estableció tres ciclos en la Historia de la Filosofía, que serían los de *Antigüedad, Edad Media, y Modernidad.* Todo esto podría resumirse en la siguiente Tabla:

FASE	*ANTIGUA*	*MEDIEVAL*	*MODERNA*
INVESTIGACIÓN	*DESDE TALES HASTA ARISTÓTELES*	*TOMÁS DE AQUINO*	*DESDE BACON HASTA LOCKE*
APLICACIÓN	*ESTOICOS Y EPICÚREOS*	*JUAN DUNS ESCOTO*	*LA ILUSTRACIÓN*
ESCEPTICISMO	*ESCÉPTICOS Y ECLÉCTICOS*	*GUILLERMO DE OCKHAM*	*DAVID HUME*
MISTICISMO	*NEOPLATÓNICOS, NEOPITAGÓRICOS*	*RAIMUNDO LULIO, NICOLÁS DE CUSA*	*IDEALISMO ALEMÁN*

[230] O “Forschung”.

Franz Brentano aspiraba a una vuelta a la filosofía perenne, deteniendo con ello el declive que observaba. Para él, esa línea de la investigación, la de la filosofía perenne, estaría, mejor que por ningún otro, representada por *Anaxágoras, Aristóteles, Santo Tomás de Aquino,* y *John Locke.*

Incluso llegó a componer Franz Brentano un largo poema en honor del mencionado filósofo *Anaxágoras (499-428 a. C.),* a quien consideraba el "padre" de toda la Filosofía.

Recordemos el hecho importante de que fuese ordenado sacerdote católico; en concreto, sabemos que por un tiempo estuvo en el convento dominico de Graz, en Austria; condición religiosa que luego dejaría de tener, por las circunstancias que ya sabemos, pero manteniendo ese espíritu, aunque desde una posición crítica y vigilante[231].

En su época se produjo un cierto "revival" aristotélico; sobre todo, en el aspecto filológico, y Brentano contribuyó a él de gran manera. De hecho, su Tesis Doctoral trataba *Sobre la múltiple significación del Ser en Aristóteles*[232].

[231] En el parágrafo 23 de su opúsculo:
BRENTANO, F., *Von Ursprung sittleicher Erkenntnis (El origen del conocimiento moral),* trad. esp. de M. García Morente. Madrid, Editorial Tecnos, 2013.
Nos dice Brentano que: "Aquí nos encontramos ya en el lugar en el que tienen su origen los buscados conceptos de lo bueno y lo malo, como asimismo, los de verdadero y falso… Llamamos a algo verdadero cuando la aceptación que se refiere a ello es correcta. Y llamamos a algo bueno cuando el amor que se refiere a ello es correcto. Lo amable con amor correcto (mit richtliger Liebe), lo digno de amor (das Liebwerth), es lo bueno en el sentido más amplio de la palabra". Por cierto, que este pequeño trabajo era, para Ortega, una auténtica `joya´, una de las obras maestras de la filosofía. La tradujo nada menos que don Manuel García Morente.
[232] BRENTANO, F., *Von der manningfachen Bedeutung des Seienden nach Aristoteles (Sobre los múltiples significados del Ser en Aristóteles).*

Se la dedicó a su maestro, Bernard Bolzano. También estaba influido[233] por los movimientos empiristas y positivistas del siglo XIX.

Recordemos también, anticipándonos un tanto en la secuencia cronológica, que a Martin Heidegger[234] le fue regalado en 1907 precisamente un ejemplar de la tesis de Brentano[235]. Desde entonces siempre reconocería Martin Heidegger que Brentano había significado un impulso crucial para su pensamiento, y que periódicamente retomaba con gusto su lectura. En esa obra descubrió Heidegger la diferencia entre el Ser, uno y simple, y los diversos Entes.

En sus populares cursos de Filosofía, Brentano consideraba en ésta dos partes diferenciadas, pero conexas entre sí: una era la *Lógica,* y la otra, la *Psicología.* Esta última fue adquiriendo tanta relevancia a partir de su clara influencia que las cátedras de Filosofía se empezaron a repartir entre los psicólogos. Por esta línea continuaron algunos de sus discípulos, como Alexius Meinong, en la Universidad de Graz, con su teoría de la mente, que influyera en Bertrand Russell, y más adelante, con las críticas de éste, que le hicieron más famoso. Como sabemos, Russell llegó a escribir sobre estos temas, en su libro *Analysis of Mind.*

---

[233] Dice J. M. Palacios, en su \`Estudio Preliminar´ a esa edición española, antes mencionada, de la obra brentaniana *El origen del conocimiento moral,* que: "las razones de Brentano constituyen otras tanta tesis capitulares de su filosofía. La primera, de índole ontológica, es su recusación de lo irreal, que le hizo abocar –como es sabido-, en la última época de su aventura filosófica, a la llamada doctrina del "reísmo", según la cual sólo de lo real –es decir, lo físico y lo psíquico- puede decirse propiamente el ser, y asimismo, puede tener representación, siendo todo lo demás (es decir, lo irreal) mera ficción del lenguaje. Y la segunda, de índole epistemológica, es su denegación de que puedan tener carácter evidente los juicios referidos a la llamada percepción externa"; pp. XXII-XXIII.

[234] Alumno de Husserl, quien a su vez lo fuera de F. Brentano.

[235] Que había sido publicada en 1862.

También tenemos el caso del psicoanalista por antonomasia, su alumno vienés Sigmund Freud, que luego dio lugar a un más que brillante discípulo, en la figura de Carl Jung.

De la otra rama, la de la Lógica, es de la que provienen Kazimierz Twardowski y la Escuela de Lvóv-Varsovia, a cuyo estudio nos vamos a dedicar en el capítulo siguiente.

Todo fenómeno de conciencia es[236] o bien una representación de algo, que no forzosamente debe ser un objeto exterior, o bien un juicio acerca de algo. Los juicios o son teóricos, y se refieren a la verdad y falsedad de las representaciones[237], y su criterio es la evidencia; de ellos tratan la epistemología y la lógica; o si no, son prácticos, y en ese caso se refieren a la bondad o a la maldad, a la corrección o a la incorrección, al amor o al odio (fenómenos emotivos), y su criterio es la «preferencia», la valoración, considerando qué sea «lo mejor», y de ellos trata la ética.

Al estudio de la intencionalidad de la conciencia Franz Brentano le llamaba *Psicología Descriptiva,* o "*fenomenología descriptiva".* De ella trata, sobre todo, en la que se considera su obra principal, que es *La psicología desde un punto de vista empírico*, de 1875.

De la Ética se ocupaba en su libro *El origen del conocimiento moral*, que es de 1889. Otras obras suyas bastante destacables serían estas: *La psicología de Aristóteles*, de 1867; *Sobre las razones del desaliento en la*

[236] Según él.
[237] Los juicios propiamente dichos.

filosofía, de 1874, y asimismo, la obra titulada *Aristóteles y su visión del mundo*, de 1911.

Un hecho no demasiado conocido es el que Brentano estuviera un tiempo con los frailes dominicos de Graz, ni que fuera sacerdote[238], aunque luego sería expulsado de la Iglesia, ni que fuera el director de la tesis que elaboró en Filosofía un entonces muy joven estudiante suyo, de nombre *Sigmund Freud*[239]*.* Después, sus caminos irían divergiendo más y más, dado que las teorías freudianas contradicen radicalmente algunas de las principales enseñanzas de Brentano.

De modo que Franz Brentano sería el renovador de algunas de las ideas de Herbart; así, la noción de "representación" la sustituye por la de *"intencionalidad",* en tanto que acto mediante el cual la conciencia se orienta hacia un objeto.

---

[238] Un hecho no demasiado conocido es que Franz Brentano publicó en Leipzig, el año 1929, una obra que llevaba por título *Vom Dasein Gottes,* la cual conoció ediciones recientes, como la de Hamburgo de 1980. También apareció en España, bajo el nombre de
BRENTANO, F., *Sobre la existencia de Dios.* Trad. esp. y pról. de A. Millán Puelles, Madrid, Ediciones Rialp.
En dicha obra podemos distinguir tres partes, esencialmente; en la primera de ellas se ocupa de dos indagaciones: en una se preguntaba si es evidente `a priori´ la existencia de Dios, analizando con detalle el Argumento Ontológico; en la segunda, si sería o no evidente que la existencia de Dios pueda ser demostrada, rebatiendo para ello tanto a Hume como a Kant. En una segunda parte exponía las pruebas propiamente dichas de la existencia divina; especialmente, se ocupaba de la Prueba Teleológica, la de Contingencia, la del Movimiento, y para terminar, de la Psicológica. Ya en la tercera parte, recogía distinto material teórico empleado y ciertas notas sobre la Causa Primera. Pero no es una obra demasiado conocida, dentro de la producción del autor, aun cuando -como dice Millán Puelles- demuestra en ella un gran vigor intelectual. Se pueden leer los comentarios que hace al respecto Sánchez Migallón (2003).
Por tanto, el que fuera expulsado del sacerdocio o de la cátedra no quiere decir en absoluto que Franz Brentano dejara nunca de ser un profundo creyente, aunque crítico y de ideas bastante innovadoras.

[239] Tesis que fue leída en 1873.

Las enseñanzas e investigaciones de Brentano se orientaban hacia la ya antes mencionada reinterpretación crítica de la obra de Aristóteles[240]; lógicamente, con ella, del aprecio por la filosofía escolástica. De ésta tomaría él la que es su principal aportación a la historia de la filosofía: el concepto de *intencionalidad,* que será luego fundamental para la fenomenología de Husserl. Según él, *sólo lo psíquico es intencional,* esto es, pone en relación la conciencia con el objeto. Esta llamada *«tesis de Brentano»,* que hace de la intencionalidad la característica fundamental de lo psíquico, permite entender de un modo positivo[241] los fenómenos de conciencia.

Se pueden considerar dos intentos destinados a establecer la Psicología como una disciplina científica independiente. Ambos tuvieron un considerable impacto en la Europa Central: son los de *J. F. Herbart* y *F. Brentano.* Ambos maestros señalaban que la psicología es una ciencia empírica, aunque la observaban desde posiciones distintas. Porque mientras Herbart partía de principios metafísicos, Brentano los rechazaba totalmente, basando su método en una concepción de la "percepción (en tanto que opuesta a la observación) interna", cual una especie de conciencia secundaria. Por su parte, Herbart negaba cualquier papel a la experimentación psicológica, mientras que Brentano animaba entusiásticamente al trabajo de laboratorio. Lo cual, de paso, abrió camino a sus dos alumnos más experimentalistas, que fueron Alexius Meinong y Carl Stumpf.

[240] Recordemos que había estudiado con Friedich Adolf Trendelenburg (1802-1872), profesor de la Universidad de Berlín, quien quiso reinterpretar a Platón a través de los comentarios de Aristóteles y un ferviente impulsor de una vuelta al Estagirita.
[241] A diferencia de la psicología de aquella época.

Las enseñanzas de Brentano dieron lugar a dos corrientes poderosas, y en cierto modo, enfrentadas entre sí: una sería la del *movimiento fenomenológico*, del que a quien más se nombra es a su discípulo Edmund Husserl, matemático y filósofo, y la otra sería la *filosofía analítica*[242]*,* corriente también llamada *(neo)positivismo lógico*[243]*.*

Su estilo era riguroso y predicaba a sus alumnos que debían aplicar métodos exactos[244], como eran los científicos, y que las ideas se debían de exponer claramente, que quien las expone con oscuridad es porque no las entiende y lo que hace es pretender ocultarlo.

---

242 No sólo polaca, pero principalmente ésta.

243 El filósofo inglés Alfred J. Ayer, quien se puede considerar que perteneciera al círculo vienés, terminaba el análisis de dicho grupo y de sus ideas de la manera siguiente: "La filosofía progresa, a su manera, y pocas de las tesis principales del Círculo de Viena sobreviven intactas. Metafísica ya no es un término de oprobio, y se ha reconocido que al menos algunos metafísicos llegaron a sus increíbles conclusiones tratando de resolver problemas conceptuales muy difíciles. El tratamiento pragmático de las teorías científicas se favorece menos que el realismo científico. Tanto la distinción analítico-sintética como el concepto mismo de los datos sensoriales se han cuestionado, y aún entre los que todavía creen que los datos sensoriales o algo similar sirven para algún propósito útil hay pocos (si es que hay alguien) que creen que cada proposición empírica puede reformularse en sus términos. Por otro lado, todavía existe considerable apoyo para la conexión entre el significado y la posibilidad de verificación, y más aún para la conexión del significado con las condiciones de la verdad. Finalmente, pienso que puede decirse que el espíritu del positivismo vienés sobrevive: en el reacomodo de la filosofía con la ciencia, en sus técnicas lógicas, en su insistencia en la claridad, en su rechazo de lo que yo puedo describir mejor como una excrecencia repulsiva de la filosofía, le dio una nueva dirección a la materia que no parece posible que se pierda". Esto se puede predicar también con ciertos matices de la Escuela de Lvóv-Varsovia, pero con sus notables diferencias respecto del citado Círculo: aquélla, más volcada en las Lógicas, menos anti-teológica, etc.
Todo el movimiento filosófico que se fue desarrollando en torno al Círculo de Viena y el Círculo de Berlín, así como a la Escuela de Lvov-Varsovia, ha sido denominado de diversas formas: así, en el mundo anglosajón ha sido el `positivismo lógico´, mientras que en el área de la lengua germana, el `neopositivismo´; incluso los italianos han creado, rizando el rizo, el término de `neopositivismo lógico´.

244 *Franz Brentano* no sólo apoyaba la introducción de un método científico riguroso en filosofía, sino que también compartía con los empiristas ingleses y con los positivistas una orientación anti-metafísica, por lo que mostraba una declarada animadversión contra la que él llamaba "parafilosofía mística" de los idealistas alemanes, procurando en toda su obra trabajar en pro de la unidad del método científico. Hemos de indicar también que los escritos de Franz Brentano involucran el uso de métodos propios del análisis del lenguaje, muy alineado en muchos aspectos con lo que luego sería desarrollado por la filosofía inglesa.

Pequeño inciso

Salvando las diferencias y con el debido respeto a su memoria, por ese gran carisma personal e indudable brillantez, por la fascinación que siempre ejerció sobre sus alumnos, así como por su preferencia por la palabra hablada sobre la palabra escrita, le vemos[245] *cierto parecido con el que fuera nuestro maestro y amigo, Quintín Racionero, recientemente desaparecido, tan añorado como admirado profesor. También eran los tres*[246] *unos grandes conocedores y admiradores críticos de la obra de Aristóteles.*

No sólo se dedicó Franz Brentano al tratamiento de la Lógica y de la Psicología, sino también de la Ética, la Ontología, la Teología o la Historia de la Filosofía. No olvidemos que había estudiado Matemáticas, Poesía, Teología y Filosofía en las Universidades de Munich, Würzburg y Berlín. Su "Habilitationschrift", de hecho, fue sobre *La psicología de Aristóteles*[247].

En su Facultad tuvo bastantes problemas porque fuera Brentano un sacerdote católico, y aún más los tuvo cuando se mostró en un profundo y total desacuerdo con la doctrina sobre la infalibilidad del Papa, que promulgó el

---

[245] Tanto a él como a su discípulo, Kazimierz Twardowski, del que luego hablaremos.

[246] Franz Brentano, Kazimierz Twardowski y Quintín Racionero. Consideración que podría muy bien extenderse a la figura de Jan Lukasiewicz, otro eminente seguidor del Estagirita. En el caso de Quintín, también de la de Leibniz.

[247] El antes mencionado libro de 1867. No debemos pasar por alto la gran controversia suscitada entre Eduard Zeller (1814-1908), el tan famoso en su tiempo historiador de la filosofía griega, y Franz Brentano. Esta comienza en torno a la década de los 1860´s, al mostrarse Brentano en desacuerdo con las opiniones de Zeller, cuando redactaba su tesis de habilitación, titulada "*La Psicología de Aristóteles".* Una polémica que fue volviéndose más y más agria con el paso de los años, durando nada menos que tres décadas.
No olvidemos que por ejemplo, los juicios emitidos por Zeller eran bastante descalificatorios en muchas ocasiones, como cuando enjuicia la lógica de los Estoicos; por ejemplo, cuando dice "…el pedante formalismo externo que Crisipo especialmente introdujo en esta disciplina no podía promover el progreso de la Ciencia…"
ZELLER, E., *Fundamentos de Filosofía Griega;* p. 221).

Concilio Vaticano I en 1870. Esto le hizo tener que colgar los hábitos y renunciar a su cátedra. Luego se casó[248], en Leipzig, con Ida von Lieben (1852-1894), vienesa de ascendencia italiana, quien era por cierto la hermana de una famosa paciente de su antiguo alumno, Sigmund Freud, de nombre Anna von Lieben. Claro está que con esto chocaba frontalmente con la mentalidad, más que conservadora, de la época. Por tanto, aún fue peor visto Franz Brentano por la sociedad "bienpensante" que le rodeaba. Así que cuando quiso volver a su Universidad (la de Viena), sólo le concedieron que fuese "Privatdozent", que era un puesto sin sueldo, pero con la prohibición anexa de dirigir ninguna tesis.

Contrajo Franz Brentano segundas nupcias, dos años después de la muerte de su primera esposa. Esta vez se desposaría con Emile Ruprecht, en Florencia.

En su tiempo no fue nada bien recibido que enseñara a sus alumnos la manera de pensar críticamente, de un modo científico, aboliendo prejuicios y perdiendo el temor y el respeto por las doctrinas "tradicionales". Esto hace que sus alumnos más brillantes luego desarrollaran lo que de él habían recibido de unos modos que pudiéramos denominar "heterodoxos". Los más fieles a la letra fueron los menos brillantes[249].

Franz Brentano, a pesar de su más que dramática relación con la Iglesia Católica oficial, puede considerarse que fue siempre un pensador metafísico y teísta. En una de sus obras podemos leer algo que luego nunca desmintió:

---

[248] En 1880. Obsérvese que para contraer matrimonio hubieron de desplazarse hasta esa ciudad de Sajonia, que no estaba dentro del Imperio Austro-Húngaro.
[249] Como suele suceder.

Hay una ciencia que nos instruye acerca del fundamento primero y último de todas las cosas, en tanto que nos lo permite reconocer en la divinidad. De muchas maneras, el mundo entero resulta iluminado y ensanchado a la mirada por esta verdad, y recibimos a través de ella las revelaciones más esenciales sobre nuestra propia esencia y destino. Por eso, este saber es en sí mismo, sobre todos los demás, valioso… Llamamos a esta ciencia Sabiduría, Filosofía Primera, o Teología.[250]

Por otra parte, Franz Brentano demostró un talento inaudito para las adivinanzas y los juegos de palabras más sutiles. Tanto es así que en 1879 publicaría[251] una cuidada colección de las mismas, con un éxito arrollador dentro de la sociedad y en los salones vieneses, dando lugar a muchas imitaciones. De hecho, son mencionadas en la obra de su antiguo alumno, Sigmund Freud, titulada *El chiste y su relación con el inconsciente,* de 1905.

También mostraría Brentano una enorme pasión por el ajedrez, y disfrutaba con la gimnasia y la natación. No era raro verle nadando por el Danubio. Se aficionó asimismo a la cocina y a la carpintería. Le fascinaban las ilusiones ópticas. Incluso varias veces intentó escribir poesía, pero sus resultados fueron poco satisfactorios. Y lo mismo que al compositor Anton Bruckner, le era bastante indiferente tanto la comida como la moda, incluso no prestaba ninguna atención al estado de sus ropas.

Se dedicó tanto a una enseñanza entusiasta como a cultivar la amistad de sus alumnos y colegas más jóvenes. Así, Brentano se ganó la veneración de gentes tan diversas como: *Alexius Meinong, Edmund Husserl, Christian von*

[250] BRENTANO, F., *Religion und Philosophie;* pp. 72-73.
[251] Bajo el seudónimo de "Aenigmatis".

Ehrenfels, Anton Marty, Karl Kraus, Karl Stumpf, Kazimierz Twardowski[252], *Tamás Masaryk, Sigmund Freud,*[253] *etc.*

Se difundieron esos alumnos de Brentano por las cátedras de Filosofía de casi todas las Universidades del Imperio Austro-Húngaro. Así, Kazimierz Twardowski, en Lvóv; Alexius Meinong, en Graz; Christian von Ehrenfels, o Anton Marty, quien, como el anterior, estaba en la Universidad de Praga; etc.

Tampoco debemos olvidar que uno de sus discípulos, el ya mencionado Tamás Masaryk, quien fundó y gobernó la República de Checoslovaquia desde 1918 hasta 1935. Ni omitir tampoco la aportación, a la filosofía polaca y a la europea en general, de la Universidad de Cracovia, donde Roman Ingarden (1893-1970)[254] dirigiría la tesis doctoral sobre temas de filosofía a un cierto alumno llamado *Karol J. Wojtyla,* que con el tiempo se convertiría en el Papa polaco Juan Pablo II. El pensamiento filosófico de éste es una combinación del tomismo del Aquinate con la fenomenología que le viene de Ingarden[255], el cual recibe esas ideas, a su vez, de Husserl. También se pueden percibir en su pensamiento rastros del realismo fenomenológico de Max Scheler.

En 1903 intentaron operar a Franz Brentano de un grave problema de la vista, sin que obtuvieran buenos resultados. Por lo que los últimos años los

[252] El futuro padre de la Escuela de Lvóv-Varsovia.
[253] Aunque en este caso, se podría considerar una veneración que fue disipándose por el paso del tiempo y por las mutuas divergencias.
[254] Fenomenólogo, discípulo de Husserl.
[255] Los aspectos fundamentales de la filosofía de Roman Ingarden, según W. Strózewski, serían: el análisis de la disputa entre realismo e idealismo, o de la controversia entre objetivismo y subjetivismo, en el campo de la Axiología, el problema de la validez del conocimiento, así como la estructura y el papel del lenguaje. Su filosofía sería analítica por su propia naturaleza, con unos análisis sutiles y precisos.

pasó prácticamente ciego, y era su mujer quien debía leerle los libros y cartas que recibía[256].

Falleció Brentano, víctima de una apendicitis, en Marzo de 1917. Así fue como la figura señera y la carismática enseñanza de Franz Brentano se fue luego difundiendo por toda Centroeuropa[257], dando lugar a la que hemos llamado *"tradición austriaca"* en Filosofía.

---

[256] En el caso de la correspondencia, fue principal la que mantuvo con dos de sus exdiscípulos, Anton Marty y Oskar Kraus. Es en las cartas a éste último donde Brentano se retracta de lo afirmado por él en su "período intermedio".

[257] Por medio de las obras y de las enseñanzas de sus discípulos, se han ido difundiendo las ideas filosóficas de Franz Brentano de tal modo que aún ejerce hoy día una notable influencia (no siempre explícita, a veces indirecta) sobre los debates de la filosofía contemporánea; entre otros, los dedicados a la filosofía de la mente (como el famoso de la "caja china", de John Searle, un experimento mental con el que trataba de cuestionar el Test de Turing y la posibilidad de inteligencia en una máquina), o a las ciencias cognitivas. Pero no sólo los discípulos directos de Brentano o de Twardowski han contribuido a diseminar las ideas de ambos pensadores, o de Lukasiewicz y otros miembros de la ELV. Porque hay numerosos autores contemporáneos que han venido contribuyendo notablemente a la difusión de su filosofía. Entre ellos, podemos citar a George Edward Moore, al antes mencionado John Searle, a Gilbert Ryle, Barry Smith, Roderick Chisholm, Peter Simons, Kevin Mulligan, o al padre de la historiografía sobre la ELV, que no es otro que el profesor de Cracovia: Jan Wolenski.

4. *El periodo del "interbellum", es decir, el que va desde 1918 hasta 1939, con la eclosión de la Escuela de Lvóv-Varsovia.*

Un breve preámbulo.

Desde hace ya mucho tiempo, los historiadores de la Filosofía han establecido que dentro del pensamiento post-kantiano, en los países de lengua germana, existieron dos tradiciones:

- Una sería la *alemana.*
- Otra, la *austríaca.*

En cuanto a la primera de estas, englobaría a filósofos como el propio Kant, Hegel o Schelling, lo cual conectaría con autores posteriores, como Martin Heidegger, Ernst Bloch o Theodor Adorno.

Y en cuanto a la segunda[258], contendría la línea de pensamiento que partiendo de Bernardo Bolzano pasa por Franz Brentano, Kazimierz Twardowski, Jan Lukasiewicz, Tadeusz Kotarbinski, Christian von Ehrenfels, Edmund Husserl, Ernst Mach[259] y Alexius Meinong, entre otros, para

[258] Que es la que directamente más nos concierne aquí.

[259] Es interesante consignar, aunque sea brevemente, que la figura de dos profesores como Ernst Mach (Brno, o Brünn, 1838-1916) y Richard Avenarius (1843-1896), ejerció una fuerte influencia no sólo sobre el Círculo de Viena, sino sobre el joven Albert Einstein, quien se inspiró en las obras del primero de ellos –por las que estaba fascinado- para sus investigaciones iniciales. Contra ellos dirigió toda su artillería dialéctica Vladimir Ilich Ulianov (Lenin), en su obra *Materialismo y Empiriocriticismo,* de 1908, criticando las ideas modernas del neo-positivismo como burguesas y declaradas enemigas del marxismo.

desembocar en Ludwig Wittgenstein, Rudolf Carnap[260], Ernst Bloch, Karl Popper o Theodor Adorno. Es esta segunda línea[261] la que más ha influído en el pensamiento filosófico del mundo anglosajón. Tanto es así que el filósofo Michael Dummet[262] dice que sería completamente erróneo denominar a la filosofía analítica como "Anglo-Americana", que más bien debiéramos decir "Anglo-Austriaca".

Para hablar de Lukasiewicz y de su círculo de influencia, antes debemos remontarnos a sus orígenes, o antecedentes filosóficos. Hemos de tratar, pues, de Franz Brentano y con él, de su maestro Bernardo Bolzano. Luego, de la Escuela de Brentano, si se puede considerar que tal existió, por las razones

---

Así, cuando decía ya en el Prólogo: "Toda una serie de escritores que pretenden ser marxistas han emprendido este año en nuestro país una verdadera campaña contra la filosofía del marxismo, …, nuestros valientes paladines (sic), quienes se remiten orgullosamente con la "teoría contemporánea del conocimiento", con la "filosofía contemporánea" (o con el "positivismo contemporáneo"), con la "filosofía de las Ciencias Naturales Contemporáneas", e incluso con la "filosofía de las Ciencias Naturales del siglo XX", dan por refutado el materialismo. Apoyándose en todas estas supuestamente novísimas doctrinas, nuestros destructores del materialismo dialéctico llegan intrépidamente hasta el fideísmo neto… De hecho, llegan a la abjuración completa del materialismo dialéctico, es decir, del marxismo. De palabra, subterfugios sin fin, intentos de eludir el fondo de la cuestión, de encubrir su apostasía y colocar en el lugar del materialismo en general a uno cualquiera de los materialistas, negativa rotunda a hacer un análisis directo de las innumerables declaraciones materialistas de Marx y Engels. Es una verdadera `rebelión de rodillas´, según la justa expresión de un marxista. Es el revisionismo filosófico típico, pues los revisionistas son los únicos que han adquirido triste fama por haber abandonado las concepciones fundamentales del marxismo y mostrarse timoratos o incapaces para, en forma franca, directa, decidida y clara, `liquidar cuentas´ con los puntos de vista abandonados. Cuando los ortodoxos han tenido que manifestarse contra ciertas concepciones anticuadas de Marx (como, por ejemplo, Mehring respecto de ciertas tesis históricas), lo han hecho siempre con tanta precisión y de una forma tan detallada, que nadie ha encontrado jamás en sus trabajos la menor ambigüedad".
Lo incluímos para ver el agrio tono y la considerable ausencia de objetividad con la que va a seguir.

[260] Recordemos que Rudolf Carnap estableció, en su *Sintaxis Lógica del Lenguaje* (de 1934), su conocido Principio de Tolerancia, según el cual no existe algo que pueda llamarse lógica o lenguaje `correcto, o `verdadero´. Así que somos completamente libres de adoptar aquella forma de lenguaje, o aquel tipo de lógica, que más se acomode (o más útil sea) para nuestros propósitos.

[261] La austríaca.

[262] DUMMET, M., 1988; p. 7.

que luego vamos a analizar, y así llegaremos hasta los alumnos del “invisible” Brentano[263].

Cabe preguntarnos:

- *¿Es la Lógica, o lo que llamamos “lo lógico”, una creación humana?*
- *¿Es posible construir arbitrariamente esquemas de racionalidad?*
- *¿Existen muchas lógicas posibles, incluso lógicas rivales entre sí?*
- *¿Qué relación guarda la Lógica con el mundo de lo real?*

Estas son cuestiones fundamentales, que se debaten con frecuencia en la Filosofía de la Lógica.

La Escuela de Lvóv-Varsovia, ámbito en el que fue alumbrada la Lógica Multivaluada[264] es un observatorio de excepción para profundizar en dichos problemas.

La noción de “indeterminación”, y su relación con la “verdad”, siempre ha estado presente en la historia del pensamiento[265], y esto desde los más remotos tiempos. Pero fue la Escuela de Lvóv-Varsovia la primera que de un modo más directo abordó la cuestión[266].

---

[263] Entre los cuales tenemos figuras de la talla de Alexius Meinong, Edmund Husserl, Kazimierz Twardowski (el padre de la Escuela de Lvóv-Varsovia), Stanislaw Lesniewski, incluso el mismo Sigmund Freud.
[264] O Polivalente, Multivalente, etc.
[265] De una manera implícita o explícita.
[266] También sería luego tomado en consideración ese tema por los integrantes del Círculo de Viena. No olvidemos, sin embargo, que lo que ellos buscaban era una especie de *interpretación minimalista de la realidad.* Se proponían como meta llegar a una *“ciencia unificada”,* que estuviera construida a partir de los \`observables´ físicos. El mismo acto de limitar la Física a los observables, conecta directamente con el Principio de Incertidumbre de Heisenberg, que luego estudiaremos. Porque si bien es posible observar las líneas espectrales que emiten los electrones al cambiar de órbita, no podemos ver directamente a los electrones orbitando.

La reflexión acerca de la relación lógica entre la indeterminación y la verdad implica hondas repercusiones epistemológicas, metafísicas, antropológicas, físico-matemáticas e incluso, teológicas.

Hablaremos también de las dos ciudades que fueron focos duales de este movimiento lógico-filosófico, el de la *Escuela de Lwow-Warsaw.* Pero antes vamos a mostrar una cronología comparada de la ELV, del CV y del CB, así como de los filósofos analíticos británicos:

AÑO	ELV (Escuela de Lvov-Varsovia)	CV & CB (Círculo de Viena y Círculo de Berlín)	Filosofia Analítica Inglesa
1884		G. Frege publica *Die Grundlagen der Arithmetik*	
1891	(KT) Kazimierz Twardowski, *Idea y percepción*		
1895	KT viaja desde Viena hasta la Uni de Lvov		
1902	KT,“Übersogennante relative Wahrheiten”		
1903	(JL) Jan Lukasiewicz, “O indukcji…”		(BR) Bertrand Russell, *Principles of Mathematics*
1904	Fundación de la PTF en Lvov		
1905			BR, “On denoting”
1906	JL, “Analiza i konstrukcja…”		
1907	JL en Graz, junto con Alexius Meinong		
1910	JL, “O zasadzie…”		
1911	KT funda la revista *Ruch Filozoficzny*		
1912	KT, “O czynnosciach…”		BR, *Problems of Philosophy*
1910-1913			BR y A. N. Whitehead publican sus *Principia Mathematica*
1914	Zawirski, “O modalnosci sadów”		BR, *Our Knowledge of External World* Ib., “On the Scientific Method in Philosophy”
1917		(MS) Moritz Schlick, *Raum und Zeit…* Ib., *Allgemeine Erkenntnislehre*	
1918	Czezowski, *Teoria klas*	H. Weyl, *Raum-Zeit-Materie*	BR, *Lectures on Logical Atomism*
1920	JL, “O logika trójwartosciowej”	E. Cassirer, *Zur Einstein´schen*	

		Relativitätstheorie (HR) H. Reichenbach, *Relativitätstheorie und Erkenntnis - A priori*	
1921	KT, “Symbolomania I pragmatofobia”	(LW) Ludwig Wittgenstein, *Traktatus,* en alemán O. Neurath, *Anti-Spengler*	
1922	Fundación de los *Kwartelnik Filozoficzny,* dirigidos por W. Heinrich	MS comienza a dar clases en la Universidad de Viena	Publicación del *Tractatus logico-philosophicus* en inglés
1923	Tarski, “Sur le terme primitive de la logistique”		
1924	KT, “O istocie pocej” Zawirski, “Metoda aksjomatyczna…”		
1926		R. Carnap se traslada a Viena MS, *Erleben, Erkennen, Metaphysik*	
1927	Lesniewski, “O podstawach matematyki”		
1928	JL, “O metode w filozofii” Ajdukiewicz, *Glówne zasady metodologii nauki i logiki formalnej*	Fundan la “Verein Ernst Mach” Se funda también el Berlin Kreis, o Círculo de Berlín R. Carnap, *Aufbau* HR, *Philosophie der Raum-Zeit-Lehre*	
1929	JL, “O rozunowaniu…” Tarski, “Les fondements de la geométrie des corps”	R. Carnap, H. Hahn y O. Neurath redactan el manifiesto del Wiener Kreis (Círculo de Viena) Carnap, *Abriss der Logistik* Congreso en Praga, sobre la Epistemología de las Ciencias Exactas	
1930	JL, *Philosophische Bemerkungen zu den mehrwertigen systemen des Aussagenkalküls* Tarski, *Fundamental Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften*	Aparece la revista *Erkenntnis* Congreso de Viena, sobre la Gnoseología de las Ciencias Exactas Carnap, *Die alte und die neue Logik* HR, *Kausalität und Wahrscheinlichkeit* Ib., *Die philosophische Bedeutung der moderne Physik* MS, *Die Wende der Philosophie* Ib., *Fragen der Ethik*	
1930-1933		K. Popper, *Die Beiden Grundprobleme der Erkenntnistheorie*	
1931	Ajdukiewicz, “O znaczeniu wyra en”	HR, *Ziele und Wege der heutigen Naturphilosophie*	G. Ryle, “Systematically Misleading Expressions”

		Carnap, *Uberwindung der Metaphysic durch logische Analyse der Sprache*	
1932	MS, *Positivismus und Realismus* Ib., *Form and Content*		
1933	Dambska, "O pranach w nauce" Tarski, "Pojecie prawdy…"	Hans Hahn, *Logik, Mathematik, und Naturkennen* HR abandona Alemania	Aparece en Cambridge el journal *Analysis*
1934	Jaskowski, "On the Rules of Suppositions in Formal Logic" Ajdukiewicz, "Sprache und Sinn" Participan JL, Tarski y Ajdukiewicz en el Congreso de Praga	Popper, *Logik der Forschung* Carnap, *Logische Syntax der Sprache* MS, Fondament der Erkenntnis Se celebra el Congreso de Praga	
1935	Participación de Tarski, Kotarbinski, Jaskowski y otros en el Congreso de París. Aparecen los Studia Filozoficzna, fundados por KT, Ajdukiewicz e Ingarden Ajdukiewicz, "Die syntetischen Konnexität"	Neurath, *Le Développment du Circle de Vienne et l´avenir de l´empirisme logique* Carnap, *Philosophy and Logical Syntax* R. Von Mises, *Wahrscheinlichkeitslehre* Congreso de Copenhage	
1936	JL, *Logistyka a filozofia* Tarski, *Grundlegungen der Wissenschaftlichen Semantik*	R. Carnap emigra a USA	A. J. Ayer, *Language, Truth and Logic* MS es asesinado, en las escaleras de la Universidad de Viena, por un estudiante nazi
1937	Ajdukiewicz, "Problemat transcendeltalnego…"	Congreso de París Neurath, "Unified Science and Its Encyclopaedia"	
1938		Congreso de Cambridge Anexión de Austria por Alemania (el Anchluss). Con lo cual cesan las actividades del CV AA. VV., *International Encyclopaedia of Unified Science* (aparece el primer fascículo) HR, Experience and Prediction	
1939		Congreso de Harvard Fecha con que se suele dar por concluida la ELV, aunque prosigue su actividad, atenuada, dentro y también fuera de Polonia	

Esta clasificación de los hechos y resultados más sobresalientes viene a ser una particular selección, realizada por el doctorando, de lo contenido en la página web de *"Polish Philosophy".* Los títulos de los libros y artículos, en el caso de los miembros de la ELV, aparecen en su idioma original, que es el polaco, cuando en éste aparecieron por primera vez, lo cual era lo más frecuente -como es natural-; sobre todo, en los primeros tiempos de la Escuela.

Volviendo a la ciudad de *Lwow,* ésta ha ido recibiendo diversos nombres, Lemberg, Lviv, Leópolis, etc., según los conflictos bélicos la hacían ir cambiando de manos[267]. Es en la actualidad capital del "oblast" o provincia del mismo nombre, que pertenece a Ucrania.

Las primeras referencias escritas sobre la existencia de Leópolis son de 1256, cuando se la menciona en la *Crónica de Galitzia y Volinia.*

Quedó bajo control polaco en 1349, y cuarenta años más tarde pasó a ser la capital de la provincia de Rutenia.

Alcanzó en tiempos una gran prosperidad, debido a la concesión de privilegios comerciales por parte de los reyes polacos. Así, se convirtió en punto fundamental de la ruta comercial entre la Europa Central y el Mar Negro. A esto contribuía su carácter de ciudad fortificada.

En 1772 pasó a dominio austriaco, y se convirtió en capital de la provincia de Galitzia. En las turbulentas revoluciones de 1848 la ciudad fue bombardeada, pero se consiguió recuperar poco después. Como centro

[267] Así, se le ha llamado: Lwow, en polaco; Lviv, en ucraniano; L´vov, en ruso; Lemberg, en alemán; e incluso para muchos, Leópolis.

cultural, tuvo notable importancia. La Universidad de Lvóv fue fundada en 1784, pero sería cerrada en 1805 y reabierta en 1817.

A comienzos de la Gran Guerra tenía, aparte de las cuatro facultades fundamentales, una Escuela Técnica y muchos otros centros de enseñanza.

El ferrocarril que conectaba la ciudad de Lvov con la de Cracovia se inauguró el año 1861. Su población aumentó considerablemente, y en 1914 era la cuarta ciudad más poblada del Imperio Austro-Húngaro.

Al final de la guerra, en 1919, pasó a pertenecer a Polonia, y era entonces la tercera más poblada del país, tras Varsovia y Lodz. Pero desde el punto de vista cultural, era la segunda, justo después de Varsovia. Hoy tiene alrededor de ochocientos mil habitantes.

Sobre *Varsovia (Warsaw o Warszawa),* podemos decir que como sabemos, es hoy la capital y la ciudad más grande de Polonia. La antigua capital polaca estuvo en Cracovia, pero esta capitalidad fue trasladada a Varsovia en 1956.

Su centro histórico quedó arrasado por las tropas nazis durante el "uprising"[268] de 1944. Si hoy lo podemos contemplar, aunque sólo sea en parte, es debido a la cuidadosa reconstrucción, llevada a cabo a partir de planos, cuadros, dibujos, etc., que se conservaban de cómo fueran en tiempos la ciudad y sus monumentos principales.

Su origen parece remontarse a un asentamiento comercial de los siglos X y XI, llamado el "Antiguo Bródno".

[268] El famoso y luego aplastado levantamiento de Varsovia de ése año.

La historia de Varsovia fue verdaderamente turbulenta, y muy larga para ser contada aquí. También padeció incendios, huracanes y hasta epidemias de peste, aparte de los pillajes y saqueos periódicos relacionados con las guerras. Pero recuperó cierta prosperidad tras la victoria contra los turcos, el año 1683[269].

A finales del siglo XIX consiguió un cierto florecimiento, pero siempre minado por actividades revolucionarias, lógicamente clandestinas. Durante la llamada Gran Guerra fue ocupada por las tropas del Segundo Imperio (o II Reich) Alemán.

En 1920 lograron expulsar a las tropas rusas, que habían llegado hasta la ciudad, durante la guerra Polaco-Bolchevique. Como es bien sabido, el odio visceral entre polacos y rusos es un sentimiento recíproco. Ya en 1927 tenía Varsovia un millón de habitantes.

La Segunda Guerra Mundial atrajo la desgracia, una vez más, sobre la ciudad. Las tropas nazis trataron por todos los medios de borrarla de la faz de la Tierra, así como a la nación y a la cultura polaca[270]. Pensaban los altos

---

[269] En la batalla de Kahlenberg.

[270] Sobre ese tiempo de terrible devastación y exterminio sistemático para Polonia decía el gran matemático Kazimierz Kuratowski (1896-1980), perteneciente al grupo de Varsovia y Lvóv, que: “The period of Nazi occupation was particularly tragic for Polish Science. The enemy purposely destroyed the intelligentsia, seeing in this a means of quickly turning our nation into a nation of slaves. The purpose of this was to make it impossible for our scholars to perform any scientific work, and for our youth to obtain any education. A perfectly organized clandestine underground educational system was the reply; the elite of our professors and a considerable number of students took part in it. The number of students in the clandestine study groups in Warsaw alone in the years 1943-1944 is estimated at 3800; in Cracow, 460; in Lwów, 150; in Wilno, 120. The number of lecturers in Warsaw amounted to 300 persons. The historian Stefan Kieniewicz writes about clandestine study groups as follows: `They meant classes conducted I the most difficult and primitive circunstances, in spite of the danger of imprisonment or a concentration camp. They meant several hundred master´s degrees, and several dozen doctor´s degrees obtained during the war, and hundreds obtained more quickly after the war, owing to studie started during it. They are a testimony to the power of our national culture, and the devotion of

dirigentes de las tropas de ocupación que todo mal provenía de allí, que era una especie de herida emponzoñada, y que había que hacerla desaparecer cuanto antes de la faz de la tierra.

Hoy tiene la ciudad cuatro universidades, de las más grandes de Polonia, y entre ellas reúnen unos trescientos mil alumnos. La llamada Universidad de Varsovia fue fundada en 1816, como una derivación de la más antigua del reino, la de Cracovia.

La ciudad tiene hoy día casi dos millones de habitantes, y con el área metropolitana, puede llegar hasta tres.

Para completar lo dicho sobre lo que significó la ELV, y sus posibles similitudes o diferencias con los círculos vienés o berlinés, o con los filósofos anglo-americanos de la llamada filosofía analítica, son interesantes los comentarios de Roger Pouivet[271]:

---

its creators´." … "Due to that underground organization, and in spite of extremely difficult conditions, scientific work and teaching continued, though on a considerably smaller scale, of course. The importance of clandestine education consisted among others in keeping up the spirit of resistance, as well as optimism and confidence in the future, which was so necessary in the condition of occupation. The conditions of a scientist´s life at that time were truly tragic. Most painful were the human losses. I do not intend to discuss here in detail well-known instances of cruelty, like sending the Cracow professors to Sachsenhausen concentration camp (nineteen perished, including the mathematician A. Hoborski), or the slaughter of the Lwów professors a couple of days after the German army had taken the town, or the extermination of almost all persons of Jewish descent".
KURATOWSKI, K., *A Half Century…;* cap. 3, pp. 80 ss.
Y dice también Kazimierz Kuratowski, sobre esta `universidad de las catacumbas´: "Casi todos nuestros profesores de Matemáticas enseñaron en esta Universidad clandestina y algunos de los estudiantes de entonces son ahora profesores y académicos. Debido a la organización ilegal y a las condiciones de extrema dificultad, el trabajo científico y en la enseñanza continuó, aunque por supuesto en una escala considerablemente menor. La importancia de la educación clandestina consistía, entre otras, en mantener el espíritu de resistencia, el optimismo y la confianza en el futuro, que tanto se necesitaba en las condiciones de ocupación. La vida de un científico en esta época era verdaderamente trágica y con un sufrimiento constante por las pérdidas humanas". Son, por tanto, un caso admirable de abnegación y de sacrificio, como el de la gran nación polaca, resistiendo en tiempos tan difíciles.
KURATOWSKI, K., op. cit.; p. 102.
[271] En el dicho Prèface lleva por título

Le 15 novembre 1895, âgé de vingt-neuf ans, Kazimierz Twardowski donnait son premier cours à l´Université de Lvov. Commençait alors l´une des plus belles aventures intellectuelles du XXe siècle, celle de l´École de Lvov-Varsovie…

A l´origine, l´École de Lvov-Varsovie est certainement liée à la philosophie austrichienne de la fin du XIX^{e} siécle et du debut du XX^{e} siècle. Mais elle va rapidement acquérir son autonomie. Si elle reçoit une influence anglaise russellienne, c´est que Russell appartient lui-même au grand courant pré- et post-frégéen de renouvellement de la logique. Ce qui se passé entre les deux guerres en Pologne est finalement irreductible à la philosophie viennoise ou à la philosophie britannique. De plus, si l´École de Lvov-Varsovie fut un des principaus courants philosophique en Pologne, du ébut du siècle jusqu´à l´aprés Seconde Guerre mondiale, il ne fut pas le seul… L´École de Lvov-Varsovie appartient au courant général de la philosophie analytique et anticipe par maints aspects ce en quoi elle consiste *aujourd´hui,* particulièrement la façon dont s´y mêlent logique et métaphysique et dont la discussion des philosophes du passé a acquis une place bien plus importante… Quoi qu´il soit, la philosophie qui se développe en Pologne dans l´ntre deux guerres n´est certainement pas une simple excroissance polonaise du Cercle de Vienne, ou une annexe orientale de Cambridge…

Une autre attitude est encore posible à l´égard d´Aristote et en particulier de l´aristotélisme chrétien. C´est celle de Brentano, dans ses travaux sur la métaphysique et la psychologie d´Aristote. Aristote n´y est pas un simple repoussoir permettant de se démarquer d´une métaphysique réaliste et d´une philosophie de l´esprit non dualiste, tout deux jugées parfaitement naïves, c´est l´interlocuteur philosophique de base. Aristote n´est pas une étape dépassée de l´Histoire de l´Esprit, C´est en quelque sorte

---

POUIVET, R., “Logique et Éthique: La nature du Principe de Contradiction chez Jan Lukasiewicz”, pp. 7-34. Pref. a la ed. fr. de la obra de Jan Lukasiewicz, *Du principe de contradiction chez Aristote.* Paris, Editions de L´Eclat.

un contemporain, finalement plus digne d´intérêt qu´une grande partie de la philosophie idéaliste allemande du XIXe siécle.

Au début de sa carriére, Lukasiewicz écrivait dans un article consacré au concept de cause: `Ni Kant ni Hume ne savaient ce qu´est la métaphysique… Les combats de Hume et de Kant contre la métaphysique n´étaient pas de véritables combats; leurs traités n´indiquent pas qu´ils aient jamais examiné ce qui disait Aristote´.

Pour Lukasiewicz, l´históire du principe de contradiction connaît trois moments. D´abord, le combat d´Aristote contre les Sophistes, puis la contestation hégélienne, et enfin l´examen actuel, in 1910, de la possibilité d´une `logique non aristotéliciennne´ (chap. XVI[272]), c´esta-à-dire omettant le principe de contradiction.

Pour Lukasiewicz, le principe de contradiction est comme un roca u-delà duquel nous ne pouvons plus creuser, msis ce n´est pas un roc logique. Certes, on peut toujours construiré des systèmes formels qui l´omettent.

Tant qu´on reste dans les sciences formelles, la logique ou les mathématiques, la contradiction n´est pas en rien un mal. Un paradoxe logique, comme celui de Russelll par example, doit être reconnu et accepté. Reconnaître l´existence d´une contradiction est alors un progres scientifique.

Les Sophistes ridiculisaient la science dans l´opinion publique et jetaient la confusión dans les esprits. Rien de tel dans l´attitude de Lukasiewicz. Identifier sa pensé à celles des Sophistes est donc un contresens. Car le principe de contradiction n´est en rien un príncipe dont la valeur serait logique ou ontologique, voire trascendentale. C´est une principe éthique. [273]

---

[272] Se refiere al capítulo XVI de la antes mencionada obra:
LUKASIEWICZ, J., *Du principe de contradiction chez Aristote.*
[273] Nos referimos a que los traductores franceses del resumen que Lukasiewicz hiciera del mencionado trabajo arremetieron contra el lógico de Lvov, presentado como alguien que hacía

Regresemos a la “línea del tiempo” que hemos venido apuntando en el capítulo anterior:

> *Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716) → Bernard Bolzano (1781-1848) → Franz C. Brentano (1838-1917) →* ***Kazimierz Twardowski (1866-1938) → Jan Lukasiewicz (1878-1956) → Lofti A. Zadeh (1921-) → …***

Ahora, por el subrayado en negrita, podemos imaginar de quién o de quiénes vamos a tratar a continuación; en realidad, va a ser de la Escuela de Lvóv-Varsovia, en la persona de su fundador [274] y de uno de sus primeros y más brillantes discípulos, esto es, de Jan Lukasiewicz.

Aparece en esa cadena también Lofti A. Zadeh, que como sabemos, nació en la ciudad de Bakú[275], yéndose a estudiar Ingeniería en la Universidad de Teherán, para recalar finalmente en la de Berkeley. Este no perteneció, obviamente, a dicha Escuela, pero reenciende la antorcha de Lukasiewicz y la difunde con ayuda de la nueva eclosión de las ciencias computacionales. Se sirvió para ello de su tribuna como profesor de Ingeniería Eléctrica y de su posición como Editor en Jefe de una importante revista. Así que merece ser tratado por ello como una especie de epígono de la Escuela.

Kazimierz Twardowski (1866-1938) fue un notable filósofo y lógico polaco, al que se considera con razón el fundador de la Escuela de Lvóv-

---

suyas las tesis de los sofistas, así como un representante de aquel modo de pensar lógico-científico al cual se oponía Heidegger.
SKOLIMOWSKI, H., *Polish Analytical Philosophy: A Survey and a Comparison with British Analytical Philosophy,* p. 58.
[274] Kazimierz Twardowski.
[275] Capital de Azerbaidján.

Varsovia y también puede considerarse con justicia el padre de la brillante Escuela de Filosofía Polaca[276].

La admiración que sentía Twardowski por Franz Brentano, su maestro, era inmensa, tal como queda reflejada en su *Self-Portrait*[277], que damos en la traducción inglesa:

> I felt a calling of disseminate the style of philosophizing that I have learned from Brentano among my coutrymen, and in particular, to initiate the academic youth…

Entre su pléyade de alumnos no sólo encontramos al tantas veces mencionado Jan Lukasiewicz, sino también a figuras de la talla del ya mencionado en otras partes de la tesis, Stanislaw Lesniewski, o de Stanislaw Jaskowski; asimismo, al filósofo Roman Ingarden, fenomenólogo, discípulo de Husserl y mentor de Karol Wojtyla; o al historiador de la Filosofía Wladislaw

[276] Citemos a Jan Wolenski para decir que: "The career of mathematical logic in Poland is a remarkable fact for everybody interest in the history and sociology of science. The first academic contact of Poles with mathematical logic took place in 1988/89, when Twardowski lectured in Lvov on reformatory tendencies in logic, including the ideas of Boole and Schröder. Thirty years later, the Warsaw School of Logic was fully recognized all over the world. A period of one generation was sufficient to build a great scientific school, although the starting point was close to nought."
WOLENSKI, J., `The reception of the Lvov-Warsaw School´, 1998.
El mismo Alfred Tarski, quien fuera doctorando de Lesniewski y ayudante de Lukasiewicz, nos habla del papel de Twardowski: "Almost all researchers who pursue the philosophy of exact sciences in Poland are indirectly or directly the disciples of Twardowski" [A. Tarski, in `A letter to Otto Neurath´, 24 IV, 1930; p. 20] Volviendo sobre Twardowski, más adelante de su trabajo introductorio, nos refiere Wolenski que "… he is often perceived only as a teacher and organizer of philosophical life in Poland. But it is far from the truth. Twardowski was a very important philosopher. Reinhert Grossmann nos dice que "it is a link between Brentano, Meinong and Husserl. Its historical role is obscured by attributing too great an importance to Husserl´s criticism of Twardowski. It sometimes creates the impression that a proper distinction of content and object was achieved by Husserl himself. This is not correct. The distinction was made and further elaborated by Twardowski, and the situation was so perceived by most scholars in the first thirty years [of the XXth century], not only in philosophy. Also Meinong´s debt to Twardowski was considerable, but it is more transparent than Husserl´s case: Meining admitted that this theory of objects was essentially influenced by Twardowski"
WOLENSKI, J., *op. cit.,* 1998; pp. 11-12.
[277] Twardowski, K., *Autorretrato,* 1926.

Tatarkiewicz, junto con otros ya próximos al famoso Círculo de Viena, como Kazimierz Ajdukiewicz o Tadeusz Kotarbinski. Porque es cierto que Ajdukiewicz[278] se mantuvo en diálogo constante con los integrantes del grupo vienés, si bien otros miembros de la Escuela no mostraron tanta afinidad o contacto con los del círculo vienés. Su interés iba especialmente dirigido sobre el lenguaje de la práctica científica[279].

De Tadeusz Kotarbinski nos interesarán sus posiciones ontológicas, y no sólo por sí mismas, sino por la considerable influencia que más tarde ejercerían no sólo sobre Alfred Tarski, sino también sobre Lesniewski. El "reísmo"[280] de Kotarbinski aún tiene una notable vigencia entre los filósofos polacos.

---

[278] Kazimierz Ajdukiewicz escribió notables artículos; por ejemplo, los que le publicaron en la revista *Erkenntnis,* en 1944. En ellos se pronunciaba en contra de las teorías del significado, puramente sintácticas, del Wiener Kreis (o Círculo de Viena). En ellos también exponía las ideas de lo que hoy se llama su "convencionalismo radical". Según éste, toda concepción del mundo va a depender de la elección del aparato conceptual que llevemos a cabo, y sobre él descansa dicha concepción del mundo. Pues partiendo de los mismos datos procedentes de la experiencia, se puede llegar a obtener concepciones distintas del mundo. Sólo va a depender del aparato conceptual subyacente. Así que la verdad acerca de una proposición será absoluta en el ámbito del lenguaje en que está inserta. No obstante, no debemos olvidar que el pensamiento de Ajdukiewicz va a pasar por tres fases, que son las del convencionalismo radical (en la que se opone al convencionalismo ordinario de Henri Poincaré), del empirismo moderado y finalmente, la del empirismo radical. En la segunda de estas etapas, la del empirismo moderado, Ajdukiewicz afirma que el valor de verdad de un juicio va a depender de dos factores: de la estructura del aparato conceptual y de los datos de la experiencia. En su etapa del empirismo radical, aun cuando no llegue a abordar directamente la MVL, sí que hace referencias a cuestiones conectadas con ella. Pero dentro de esta etapa se pueden considerar a su vez, dos subetapas: en la primera de ellas, excluía todo valor veritativo distinto de la verdad y de la falsedad; mientras que en la segunda, se ocupaba de una cuestión que está en la base de los planteamientos de la MVL: los problemas del `significado´.

[279] Recordemos que los *enunciados* serán *científicos* si y sólo si pueden expresarse mediante símbolos, y pueden relacionarse entre sí por medio de operaciones sintácticas de un lenguaje formalizado, el cual será independiente de su contenido significativo. Dichos enunciados científicos estarán dotados de una expresión sintáctica, simbólica o formal, y de una correspondencia semántica (o significativa).

[280] El *Reísmo* es también llamado de otros modos, como el "pansomatismo" o el "concretismo". Se supone en él que todas las "propiedades", "relaciones", "acontecimientos", "estados de las cosas", etc., no son más que hipóstasis (manifestaciones diferentes de una misma cosa) conceptuales, porque sólo existen cosas, y toda cosa no es más que un ser físico.

Por su parte, indagaba Kazimierz Twardowski, en 1894, sobre la distinción entre contenido y objeto de las presentaciones[281], en la línea de la intencionalidad, señalada por su maestro, Franz Brentano. Consideraba dividida la mente en dos características principales, como son los fenómenos mentales[282] y los fenómenos físicos.

Pero al trasladarse a la Universidad de Lvóv, en 1895, ya se dedicó Twardowski a establecer una tradición de filosofía rigurosa y crítica en Polonia, que hasta entonces no existía, principalmente por las influencias románticas. Hizo un poco como su maestro, Franz Brentano, cuyas ideas contribuyó a difundir, incluso más que las propias. Por ello apenas si tiene obra publicada, a excepción de algunos apuntes tomados por alumnos. Pero cuando escribía, era enormemente claro: así, cuando lo hacía sobre significado y referencia, o sobre la verdad, dentro de un carácter no-platónico.

Aunque Twardowski no era un lógico en sentido estricto, ni se consideraba como tal, creó en Lvóv un ambiente muy propicio para el estudio de la Lógica. También[283] impulsó el cultivo del tratamiento de problemas relativos a la Psicología Descriptiva.

---

[281] Cuando Kazimierz Twardowski llegó a Lvov, en 1895, venía procedente de la ciudad de Viena, en cuya Universidad había estudiado Filosofía, teniendo como profesores a Franz Brentano y a Robert Zimmermann, entre otros. De hecho, pertenecía a la última "hornada", entre los discípulos de Brentano. Su "tesis de habilitación" (o Habilitationschrifft) trataba precisamente de los conceptos de objeto y contenido de las presentaciomes, clarificando la distinción entre ellos. Sus ideas influyeron después, poderosamente, en las obras de Alexius Meinong y de Edmund Husserl. Sólo que al concentrarse Twardowski en la reforma de la enseñanza, y en particular, de la Filosofía en Polonia, siguiendo la línea marcada por su maestro, Brentano, esto iría en detrimento de su propia obra creativa.
[282] O "actos".
[283] Siguiendo en ello a Franz Brentano.

Desarrolló una Teoría del Conocimiento basada en el juicio, apreciando el Análisis como método válido y útil para la Filosofía. Se preocupaba más por lo que él denominaba "pequeña filosofía"[284], más que por los grandes sistemas totalizadores.

Cuando llegó Kazimierz a estudiar a la Universidad de Viena, que era su ciudad natal, en 1885, conoció a su maestro, Franz Brentano, y como tantos otros, desde entonces sintió una gran veneración por él. No sólo estudió en Viena filosofía, sino también matemáticas, historia, física y teología. Defendió su Tesis Doctoral en 1891. Esta llevaba por título *Idea y Percepción – Una Investigación Epistemológica sobre Descartes.* Fue publicada al año siguiente. Durante ambos, estudió con Whilhelm Wundt en Leipzig y con Carl Stumpf, en Munich; ambos profesores, fueron también discípulos de Brentano.

Debió permanecer tres años trabajando en una compañía de seguros, para ganarse la vida, para poder así preparar su "Habilitationscrift", para llegar a ser "Privatdozent"[285] en la Universidad de Viena. Luego, ya en 1985, pasaría como profesor a la Universidad de la ciudad de Lvóv [286], donde intentó difundir el modo de filosofar de su maestro. Tan populares llegaron a ser sus clases que hubo que trasladarlas al Great Concert Hall de la ciudad, para que cupieran los más de dos mil asistentes que solía tener.

Participó en la reconstrucción del sistema educativo polaco tras la primera conflagración mundial, en 1918. Esta guerra había perturbado de tal modo la existencia de la ELV que la Universidad de Varsovia hubo de trasladar su sede

---

[284] En el sentido de estudio de problemas concretos, tratados de modo riguroso y claro.
[285] Como profesor sin sueldo.
[286] Entonces llamada Lemberg, que estaba bajo dominio austriaco y de ahí el nombre alemán.

administrativa a la ciudad de Viena, donde ya estaban, entre otros, Kazimierz Twardowski y Tadeusz Czezowski. Como nos explica Jan Wolénski en su famosa obra,

> La reactivación de la Universidad de Varsovia fue un hecho trascendental para el desarrollo de la Escuela (de Lvov-Varsovia, se entiende), lo mismo que el requerimiento a Lukasiewicz y Tatarkiewicz para que acudieran a ocupar sendas cátedras. Esto constituiría, de algún modo, el comienzo de una nueva era para la Escuela de Lvóv-Varsovia.[287]

Cuando volvió, venía Twardowski con una idea muy clara: la de introducir la filosofía científica en Polonia[288], en el sentido que predicaba su admirado maestro, Franz Brentano. Su lema era: *"vera philosophiae metodus nulla alia scientiae naturalis est".* Así, pues, una ciencia que va a hacer de la Lógica Formal[289] una herramienta fundamental para reformar la Filosofía; conseguirlo eliminando los numerosos malentendidos o galimatías de tipo semántico y la confusión terminológica en que yacía sumido este saber.

No obstante, su personal exposición de la Lógica, la que daba en sus clases de la Universidad de Lvov, era sumamente clásica, no como la que luego desarrollarían sus alumnos; de hecho, hablaba de la peligrosa "simbolomanía" en las exposiciones lógicas, algo que cuidadosamente evitaba.

---

[287] WOLENSKI, J., 2011; p. 29].

[288] En palabras de Wladyslaw Krajewski, es descrita como "the First School of *Non-Positivist* Scientific and Analytical Philosophy". Quiere decir no positivista en el más sentido clásico del término, al cual estarían más próximos los miembros del Círculo de Viena o del de Berlín, por ejemplo.

[289] La estrecha relación existente entre la matemática moderna y la lógica formal es una de sus características fundamentales. La lógica aristotélica se manifestaba como del todo insuficiente para la creación matemática, ya que la mayor parte de los argumentos que son utilizados en ésta ciencia contienen enunciados del tipo "si …, entonces …" (también de los "IF… THEN, de los Sistemas Basados en Reglas, tan útiles en la Inteligencia Artificial; por ejemplo, para el diseño de Sistemas Expertos), que resultan absolutamente extraños en la lógica del Estagirita.

Pero parece ser[290] que este reproche no iría del todo dirigida contra la lógica que estaban desarrollando unos alumnos suyos[291] que sin duda pusieron a la ELV al frente de los estudios lógico-científicos en todo el mundo, sino más bien contra toda una forma de reducción del Universo a la Lógica y sus símbolos, en la línea de Bertrand Russell o del programa hilbertiano (el planteado por el geómetra de Göttingen David Hilbert, y su ayudante, Wilhelm Ackermann).

Kazimierz Twardowski sostenía que en Lógica todo símbolo (y por tanto, toda relación que pueda establecerse entre ellos) debe ser puesto en lugar de un objeto. De ahí su famosa cita (que figura entre nuestros `leitmotivs´): "todo símbolo representa un objeto, pero no lo reemplaza". Esa propiedad de los símbolos lógicos y la verdad se llama `intencionalidad´. Sería una de las tres características de la verdad, según Twardowski, junto con el carácter absoluto y la atemporalidad de la misma.

No hemos de olvidar la distinción que Twardowski estableciera entre eternidad y sempiternidad. Una verdad se dice que es *eterna,* si no deja nunca de serlo, desde el mismo momento en que se produce tal verdad; podría simbolizarse matemáticamente así:

$$t \rightarrow (V)$$

Mientras que sería *sempiterna*, si fuese verdadera en cualquier momento que preceda a aquel en que se produjo el hecho que confirma tal verdad. Matemáticamente:

290 En contra de lo que pudiera, maliciosa y precipitadamente, pensarse.
291 Como Jan Lukasiewicz o Stanislaw Lesniewski.

$$(V) \leftarrow t$$

Cuando se dan ambas, la eternidad y la sempiternidad, podemos hablar de la omnitemporalidad, o *atemporalidad,* de la Verdad[292].

En su artículo de 1919, "De la claridad y oscuridad…" nos dice Twardowski de un modo bien explícito que:

> … la falta de claridad de ciertos filósofos no es una consecuencia inevitable de los factores que subyacen en las cuestiones por ellos tratadas, sino que tienen su fuente en el embrollamiento y la confusión de su manera de pensar. La cuestión se presentaría entonces del modo siguiente: la claridad del pensamiento y del estilo marchan de la mano, en la medida que quien piensa con claridad, escribe con claridad. Esto nos conduce a pensar que aquel autor que escribe confusamente no sabe pensar con claridad.[293]

Los lógicos dentro de la ELV, como los antes mencionados Jan Lukasiewicz o Stanislaw Lesniewski, eran los más alineados con este

---

[292] Dice Betti sobre las diversas posiciones de los pensadores de la ELV respecto de la verdad sempiterna y su entronque con Bolzano que:
"In 1913 Stanisław Leśniewski published his article on the sempiternity of truth, 'Is Truth only Eternal or is it both Eternal and Sempiternal?' (1913). The paper, directed against Kotarbiński's 'The Problem of the Existence of the Future' (also in 1913) made an important contribution to the debate on the excluded middle current in the Lvov circle in those years. The discussion involved at the same time absoluteness, eternity and sempiternity of truth, i. e. truth for ever and truth since ever, and had as ideal reference point Twardowski's 'On the So-called Relative Truths' (1900), where the founder of the Lvov-Warsaw School had attacked the relativity of truth. Contrasting Kotarbiński's positions, Leśniewski defended 'absolutism', consequently taking sides with Twardowski. Twardowski had revived Bernard Bolzano's ideas on the subject, and, mainly thanks to him, these became known in the Lvov-Warsaw School. There is no doubt that Leśniewski knew Twardowski's ideas and it seems evident that the latter influenced him: Leśniewski's results are mostly compatible with the 'absolutistic' content of Twardowski's 1900 article. And, similarly, no doubts can be raised about the Bolzanian origin of the aspects of eternity and sempiternity of truth defended by Twardowski in Relative Truths: though his name is not quoted, traces of Bolzano's legacy can be found even in the examples given by Twardowski, some of which are the same as used by Bolzano in his *Wissenschaftslehre."*
BETTI, A., "Sempiternal Truth. The Bolzano-Twardowski-lesniewski Axis". *Filozofia Nauki,* 1998(VI, 2); pp. 51-76.
[293] TWARDOWSKI, K., 1919; p. 347.

planteamiento abierto y radical de su maestro, Kazimierz Twardowski. No lo era tanto en el caso de Kazimierz Ajdukiewicz; por ejemplo, en sus análisis del neokantismo.

El reflexivo Twardowski logró finalmente que se disipara tan espesa niebla filosófica, pero sus comienzos habían sido verdaderamente desalentadores. Como muestra, sirva lo que decía en su "Autorrretrato"[294], aparecido en los *Grazer Philosophische Studien,* el año 1926:

> I felt a calling of disseminate the style of philosophizing that I have learned from Brentano among my countryman, and in particular, to initiate the academic youth into the spirit and method of this philosophy… Franz Brentano became for me the model of a philosopher who is relentless in the guest for knowledge of the truth, and of a teacher of philosophy in the spirit of antiquity who gathers students around him as younger friends. From him I learned how to strive relentlessly after sustantiveness, and how to handle a method of analysis and investigation that, insofar as it is possible guarantee that sustantiveness. He proved to me by example that the most difficult problems can be clearly formulated, and the attempts at their solution no less clearly presented, provided one is clear within oneself. The emphasis that he placed on sharp directions that did not lapse into fruitless nitpicking was an important guideline for my own works.

Sabemos que sus comienzos fueron difíciles, pues tal como dijo W. Witwicki en su semblanza de Kazimierz Twardowski, que hiciera en 1920, aquello de:

[294] El antes mencionado Self-Portrait, en inglés, o "Selbsderstellung", en alemán, TWARDOWSKI, K., "Selbsderstellung". *Grazer Philosophische Studien,* 1926.

> He found the lecture hall almost empty. Several of his acquaintances… and several bolder strangers used to come in, partly out of cortesy, and partly of the curiosity in order to see how the young professor looked and lectured.[295]

El hecho de que sus clases en principio estuvieran casi vacías tiene su posible explicación, que estaría en la penosa situación de la Filosofía a su llegada a Polonia. Ni existían entonces seminarios avanzados ni estudios sistemáticos sobre ella.

A lo largo de su dilatada vida académica[296], pasaron por sus clases varias generaciones de los que en muchos casos llegarían a ser profesores de Filosofía de las universidades polacas, y algunos tan brillantes como los aquí comentados: Lukasiewicz, Lesniewski, etc.

Pero el trabajo de enseñanza y de organización llevado a cabo por Twardowski no se mantuvo dentro de los muros de la Universidad de Lvóv, sino que dándose cuenta de la importancia de la difusión de las publicaciones periódicas para el desarrollo de la cultura filosófica, acogió con verdadero entusiasmo la propuesta de Wladislaw Weryho de fundar la revista *Przeglad Filozofczny*[297], siendo el representante de la misma en la Universidad de Lvóv. También fundaría la *Asociación Polaca de Filosofía*[298], cuya primera sesión tuvo lugar el 12 de febrero de 1904, el día en que se cumplió el centenario de la muerte de Inmanuel Kant.

---

295 WITWICKI, W., 1920; p. IX.
296 Que se extendió a lo largo de treinta y cinco años de un fecundo magisterio.
297 *Revista Filosófica,* en castellano.
298 La *Polskie Towarzystwo Filozoficzne.*

He aquí un fragmento de la conferencia inaugural, impartida por Kazimierz Twardowski, y en la cual expone cuáles son los propósitos de dicha Asociación:

> L´Association Polonaise de Philosophie ne restera pas aux services exclusifs d´un courant philosophique quelconque, puisqu´elle desire englober tous les courants. Elle veut etre libre de toute unilatéralité, elle souhaite etre plus ouverte. Son seul dogme será la conviction que le dogmatisme ast le pire ennemi de tout travail scientifique. Nous voulons que toutes les directions du travail et des idées au sein de notre Association ne visent qu´un objetif: la mise en évidence de la verité. Le criticisme scientifique est le chemin conduisant a ce but.[299]

Uno de sus discípulos más próximos y eminentes, Tadeusz Kotarbinski, en un discurso pronunciado en homenaje a su maestro, conocido por todos como "le Professeur", dijo que:

> Il y a quelques confiait à l´un d´entre nous qu´il était heureux. Il a donné les raisons. Il se référait à son âge, un bel âge, il ne s´attendait pas à une vie aussi longue. Il avait pu voir une Pologne independent, and ceci avait été pour lui une source de joie inépuisable. Il travaille, pendant des longues années, comme professeur de philosophie, et s´il avait dû, encore one fois, choisir son métier, il avait chisi le même, et aucun autre. Il se rejouissait tout particuliérement du rapport extraordinaire qu´il avait avec ses élèves, et il avait conscience du caractère exceptionnel de ce rapport. C´etaient le propos d´un home rongé par une maladie grave, qui ne fut pourtant pa brisé par elle, amis qui domina, au contraire, ses souffrances par une sérénité interieure. Cette délaration rappelait en verité la dernière lettre d´Epicure à Hermarque. Ceci n´est pas

[299] TWARDOWSKI, K., 1904; pp. 241-242.

> rapprochement hasardeux, car le Professeur formait délibérément sa proper attitude selon les modèles des anciens maîtres grecs de l´étique autonome. Dans les dernières années de sa vie, il enseigne, en donnant l´exemple par sa conduite, comme supporter la douleur physique and comment transformer en une ocassion faire supplémentaire de faire triompher la volonté attentive.[300]

Finalmente, digamos que sus temas coincidían con los de Franz Brentano, pero los trataba siempre con una gran independencia.

Tanto Twardowski como, más adelante, su discípulo Jan Lukasiewicz, y en general, toda la Escuela de Lvóv-Varsovia, se interesaron por áreas muy diversas del saber filosófico. En todo lo cual subyace[301] la preocupación por la claridad expositiva. De ahí debió provenir luego el desarrollo de sus sistemas lógico-formales, tan ricos y bien construidos[302]. Porque según Twardowski, los

---

[300] KOTARBINSKI, T., 1938; p. 927.
[301] Y cada vez más, con el paso del tiempo.
[302] El "caso polaco" es interesante en sí mismo. Como dijera Krajewski, acerca de la ELV, ésta era la primera escuela de filosofía científica y analítica en su país, anti-irracionalista sí, pero no del todo "positivista", en el sentido acuñado en otros lares. Lo cual se explica en última instancia por la fuerte tradición católica de Polonia.
En la ELV se aúnan dos grandes tradiciones: la Brentaniana y la Russelliana. La primera de ellas fue introducida por Kazimierz Twardowki, quien fundaría la ELV, como uno de los principales alumnos de Franz Brentano y promulgador de sus ideas. En cuanto a la segunda, según Jerzy Perzanowski, provendría de tres de los lógicos modernos más importantes de Polonia, que pueden considerarse en cierto grado como seguidores de algunos de los planteamientos de Frege y de Russell, pero sin coincidir de un modo absoluto con ellos. Éstos serían: León Chwistek, que coinventó la teoría simple de tipos; el eminente Jan Lukasiewicz, que planteó las MVLs, o lógicas multivaluadas, siendo con toda seguridad el más original de todos ellos (al menos, lo fue como persona); y el tercero sería Stanislaw Lesniewski, quien hizo grandes contribuciones a la lógica filosófica, en su intento de llegar a reconstruir los fundamentos de las Matemáticas. Lo de la "tradición ruselliana" no debe entenderse como que practicasen un seguimiento indiscriminado de las ideas y las cuestiones de las que se ocupaba el filósofo inglés, sino más bien que realizaron una labor en cierto grado paralela, pero con independencia y originalidad.
Ya que aparece esta mención a Russell, consignemos que hace ya más de un siglo que éste, en los años 1902-1903, llevó a cabo un intento de establecer una escuela de pensamiento de base matemática, que tratara los problemas filosóficos reales mediante la aplicación de métodos analíticos rigurosos, científicos, serios. Pero eso fue lo mismo que predicaron e intentaron llevar a la práctica primero Bolzano, luego Brentano, y a continuación, Twardowski, en el Imperio Austro-Húngaro y los sucesivos restos de su desmembración. Las razones de ese fracaso ruselliano pueden ser resumidas en tres principales: la primera de ellas, que Russell detuvo su actividad lógico-matemática durante la Gran Guerra y los años posteriores,

saberes filosóficos deben coordinarse armónicamente. Es por esto por lo que las proposiciones filosóficas deben mostrarse en su expresión formal, para así evitar las oscuridades de su manifestación material.

Otra constante de su obra[303] sería la búsqueda de las relaciones internas que puedan permitir vislumbrar las conexiones internas que han de existir entre los diversos problemas filosóficos.

En 1930, sus alumnos le regalaron una medalla conmemorativa. En el anverso estaba grabada su efigie, y en el reverso, lucía la siguiente inscripción latina: "Discipulorum Amor et Pietas"

¡Cuántos no querrían verse tan reconocidos por sus propios alumnos!

Desde luego, el aprecio del que gozaba Twardowski[304] no se restringía al reducido círculo de sus alumnos, sino que otras Universidades le nombraron Doctor Honoris Causa. Tal fue el caso de la de Poznán y la de Varsovia. También la ciudad de Lódz le concedió un premio extraordinario por su dilatada labor científica. El profesor Kazimierz Twardowski se retiró en 1830, muriendo ocho años más tarde. Dice Barry Smith[305] que:

---

desconectándose de su gran colaborador, Alfred North Whitehead, pasando entonces a ocuparse febrilmente de moral y política; la segunda razón sería que su más brillante discípulo, el austriaco Ludwig Wittgenstein, una vez concluido su *Tractatus Logico-Philosophicus,* pensó con él haber resuelto (ya para siempre) todos los problemas abiertos en la Filosofía, por lo que decae durante años su interés por ella, y cuando retoma esas cuestiones, se ha vuelto un furibundo detractor de las concepciones russellianas, poniendo en su lugar de moda la filosofía del lenguaje; la tercera causa sería la temprana muerte de un posible genio inglés en ciernes: estamos hablando de Frank P. Ramsey.

[303] Y bajo su impronta, de los miembros de la ELV.

[304] Con razón llamado el "maestro de maestros".

[305] En su artículo "¿Por qué no existe la filosofía polaca?", que forma parte del volumen de Jadacki y Panisczek. Véase Jadacki, 2011; p. 214.

> La influencia de Twardowski en la filosofía moderna de Polonia es omnipresente. Twardowski inculcó en sus alumnos la pasión por la claridad… y la seriedad. Les enseñó a considerar la filosofía como un esfuerzo de camaradería, una cuestión de disciplina y argumentación, y les alentó para que se entrenaran a fondo en al menos una disciplina extrafilosófica, para trabajar con científicos de otros campos, tanto en Polonia como internacionalmente. Esto dio lugar… a un esfuerzo en conjunción con matemáticos, de modo que la escuela filosófica de Lvov llegó a evolucionar hasta convertirse en la escuela lógica de Varsovia… Twardowski enseñó a sus alumnos, a su vez, a respetar y llevar a cabo una investigación seria en Historia de la Filosofía, un aspecto de la tradición filosófica en Polonia que se ilustra en obras tan diversas como la monografía pionera sobre el principio de no-contradicción de Lukasiewicz, y los volúmenes, tan influyentes, sobre la Historia de la Filosofía y la Estética de Tatarkiewicz.

Una nota histórica importante, antes de exponer la secuencia y logros de los pensadores de la Escuela de Lvóv-Varsovia, consiste en recordar que la obra del filósofo francés *Louis Couturat (1868-1914),* titulada *L´Algebre de la logique*, fue publicada en 1905, y traducida al polaco en 1918, justamente el año de formación de la primera generación de lógicos de la Escuela. Este fue el primer manual de Lógica traducido a su lengua, y en él estudiaron sus primeros fundamentos lógicos los miembros de la Escuela.

En este periodo de entreguerras (el Periodo Intermedio, o de “Interbellum”), del 1918 al 1939, existían en el territorio polaco seis Universidades; así, estaban la Universidad Jagelloniana de Cracovia, la de Lvóv, la de Varsovia, la de Vilnius, la de Poznán y la Universidad Católica de

Lublín. Recordemos también que durante el periodo de existencia de la Escuela, el de ese “interbellum”, eran muchos los polacos que escribían en francés, dado que por aquel entonces era el idioma más apreciado, en cuanto lenguaje científico culto y literario. Muchos de los pensadores polacos participaron en el Congreso de Filosofía de París, que tuvo lugar en 1935. En esa reunión dio dos importantes conferencias Alfred Tarski. La primera de ellas, sobre los fundamentos de la semántica científica. La segunda, sobre la consecuencia lógica. De esa reunión internacional parece ser que proviene el nombre de *ELV (Escuela de Lvóv-Varsovia),* que se empezó a utilizar tras haber pronunciado Kazimierz Ajdukiewicz su alocución inaugural, lo que hizo en nombre de la delegación polaca.

Para hablar de la historia y pensadores de esta Escuela, no hay nada mejor que referirnos a la que sin duda constituye la obra de referencia sobre el periodo, que no es otra que la del profesor Jan Wolenski, prohibida por cierto en su país durante el régimen comunista, y hoy afortunadamente reeditada, incluso recientemente, en una selección de capítulos supervisada por el mismo Wolenski, en francés, para la editorial filosófica parisina de Jacques Vrin[306].

En la última década han venido tratándose en algunos trabajos y en tesis temas específicos dentro del pensamiento de algunos de estos autores, especialmente de Alfred Tarski, de Kazimierz Ajdukiewicz, de Tadeusz Kotarbinski, o de Stanislaw Lesniewski[307], etc. Pero no ha sido tan analizada la

---

306 WOLENSKI, J., 2011.

307 De este pensador, por cierto, existe una conexión interesante: la de haber pertenecido Lesniewski a los llamados “Codebreakers”, y el ser uno de sus más notables miembros. La Oficina de Cifrado se decía en polaco `Biuro Szyfrów´. Esta sería una agencia que adquiriera gran vitalidad durante el periodo del `interbellum´, dedicándose a la criptografía y a la

Escuela de Lvóv-Varsovia como un todo, y sus posibles conexiones o diferencias con otros movimientos, como podría ser el Círculo de Viena[308], con

criptología. Sus precursora había sido la agencia creada en 1919, que resultó de una gran utilidad en la Guerra Soviético-Polaca que duró desde ese año hasta 1921. Gracias a su labor puede decirse que se salvó Polonia de caer una vez más subyugada. Las tropas de Pilsudski sabían así de antemano los movimientos de los ejércitos rusos; esto les permitió ganar la decisiva batalla de Varsovia. A ello contribuyeron tres grandes matemáticos: Waclaw Sierpinski, Stefan Mazurkiewicz, y he aquí la (relativa) sorpresa: ¡Stanislaw Lesniewski!

Luego, durante la Segunda Guerra Mundial, la aportación de los matemáticos polacos sería decisiva a la hora de "romper" (o descifrar) el código alemán de las máquinas Enigma. Suele mencionarse a este respecto al británico Alan M. Turing, como si prácticamente trabajase en solitario. Pero no era esto así en realidad: de los lógicos polacos, especialmente de Marian Rejewski, Jerzy Rozycki y Henryk Zygalski, fue una gran parte del mérito. A partir de entonces se mantuvo sobre ello un largo manto de silencio, como "materia reservada"; hoy conocemos que gracias a ellos, la II G. M. terminó mucho antes, y el resultado terminaría siendo favorable a los Aliados.

Podemos hallar más información en diversas obras que han ido apareciendo sobre tan apasionante tema, como la enciclopédica de David Kahn, la cual abarca desde la Antigüedad hasta la década de los 1960´s: *The Codebreakers…*, cuando apareció el libro por primera vez.

308 La fecha de nacimiento de la *Filosofía de la Ciencia* como disciplina propia suele fijarse en 1929, por ser cuando se puso nombre al Wiener Kreis, o Círculo de Viena. Pero en realidad, más bien debiera considerarse no un año, sino un periodo mucho más amplio, como el del "interbellum", o intervalo temporal que va entre las dos guerras mundiales, y que fue precisamente el periodo de máximo florecimiento de la Escuela de Lvov-Varsovia que nosotros estudiamos. La cuestión de su origen es, cuando menos, bastante dicutible, pues depende de qué consideremos como tal. El caso es que ya antes del comienzo de la Primera Guerra Mundial un grupo de jóvenes físicos, matemáticos y estudiosos de las ciencias sociales se venían reuniendo en cafés vieneses, hasta cristalizar dichas reuniones en la noche de los viernes. Allí se trataba principalmente de temas científico-filosóficos, bajo una fuerte influencia del positivismo de Ernst Mach. Pero sin olvidar por ello a los filósofos y matemáticos polacos nucleados en torno a las ciudades de Lvov y Varsovia.

El fundador del grupo (CV) sería Moritz Schlick. Tanto él como otros miembros del círculo pensaban que la ciencia y la filosofía eran reducibles al lenguaje. De hecho, decía Schlick que "la filosofía no es una ciencia, o sea, no es un sistema de proposiciones". Elementos importantes fueron el matemático Hans Hahn, el físico Philipp Frank, o el sociólogo Otto Neurath, pero se les fueron añadiendo otros, como Rudolf Carnap, físico y filósofo. Ese año de 1929 sería el de máxima actividad del grupo, ya que empezó a publicarse la revista *Erkenntnis,* bajo la dirección –como sabemos- de Rudolf Carnap y de Hans Reichenbach, quien pertenecía –por cierto- al llamado círculo de Berlín, o "Sociedad Berlinesa de Filosofía Empírica", junto con otros como Carl Gustav Hempel. Ese mismo año tuvo lugar un importante evento: el Congreso sobre Epistemología de las Ciencias Exactas, en Praga. Fue organizado por la Asociación Ernst Mach, la Sociedad de Filosofía Empírica de Berlín, y la Sociedad Matemática de Alemania, entre otras instituciones. Allí se tomó la decisión de publicar una especie de "manifiesto" que expusiera las ideas clave del círculo vienés. Se le puso por título: *"Wissenschaftliche Weltauffassung. Der Wiener Kreis"* (La Concepción Científica del Mundo. El Círculo de Viena). Lo escribieron (aunque no lo firmaran) Hans Hahn, Otto Neurath y Rudolf Carnap, en nombre de la Asociación Ernst Mach, que había sido fundada el año anterior (1928), para "difundir los conocimientos de las ciencias exactas". Moritz Schlick estaba de viaje cuando fue dado a conocer el manifiesto, y a su regreso, les manifestó su disgusto ante su tono algo panfletario.

Ernst Mach era un vienés nacido en 1938, para quien se creó en 1865 la cátedra de `Filosofía de las Ciencias Inductivas´, en la que sería sucedido por otro físico relevante, Ludwig Bolzmann. Ambos trataron de renovar la fundamentación de la física, y con ello, de la Lógica. Muy especialmente, esto se produciría a través de Franz Brentano, quien aun siendo por un tiempo sacerdote católico (y padre dominico), fue dejando progresivamente de lado tanto la el que muchos la confunden, pensando que nuestra ELV fuera una simple versión del anterior Círculo vienés, pero “a la polaca”. Y nada más lejos de la realidad, como bien supo precisar el profesor Jan Wolenski, de la Universidad de Cracovia, el padre de la historiografía sobre nuestra Escuela. La actitud positivista compartida puede darles cierto aire parecido en la lejanía, pero se

---

lógica escolástica como la concepción kantiana y en general, la filosofía idealista, todo ello con el objetivo último de conseguir una fundamentación rigurosa de la Lógica.
La Sociedad Filosófica de la Universidad de Viena se dedicó, bajo la dirección de Alois Höffler y Hans Hahn, a publicar los escritos de Bernard Bolzano, en 1914 y 1921.
La disolución del Wiener Kreis le vino inducida por la subida al poder de los nacional-socialistas, porque a su fundador, Moritz Schlick, le asesinó un antiguo alumno nazi, y la mayoría de quienes componían el grupo vienés eran judíos, pero no Schlick. Así que en 1936, tras el asesinato de su líder (el mencionado Schlick), comenzó la diáspora. El matemático Hans Hahn había fallecido dos años antes. A los Estados Unidos se fueron Herbert Feigl, Rudolf Carnap, Kurt Gödel, etc. A Inglaterra emigró Otto Neurath. Y para terminar de cerrar el ciclo, las nuevas autoridades del nazismo prohibieron las obras de los autores del Círculo, siendo quemadas en aquellos aquelarres antiliterarios y anticientíficos de 1933, que preludiaban los hornos crematorios. Porque como había dicho premonitoriamente el poeta romántico Heinrich Heine (por cierto, también judío): “Donde se queman los libros, se termina quemando a las personas”. Cuando en 1939 se publicó la *Enciclopedia de la Ciencia Unificada,* por Rudolf Carnap y Otto Neurath, ésta se puede considerar el “canto de cisne” del grupo vienés, hasta entonces dedicado a lo que ellos gustaban de llamar el “empirismo consecuente”.
El Wiener Kreis tuvo su continuación con el *Kraft Circle,* formado en 1949 bajo el liderazgo de Viktor Kraft, del cual le viene el nombre. Tras la dispersión de 1952/1953, serían reflejadas sus discusiones por Paul Feyerabend en uno de sus artículos, que es de 1958 (ver en la bibliografía). Se trataba de una sociedad de estudiosos de la filosofía que pretendía considerar los problemas filosóficos de un modo no metafísico, y con una especial atención para los logros científicos. Así que el KC sería una prolongación del CV, tras la II GM. Entre sus miembros se contarían, aparte del ya mencionado Viktor Kraft, pensadores como Erich Jantsch o Paul Feyerabend, a quien le dirigiría la Tesis Doctoral el propio Kraft.
En el análisis del falsacionismo y temas conectados con él podemos encontrar dos posturas contrapuestas, aunque fueran sus autores amigos entre sí: la del húngaro Imre Lakatos (1922-1974) y la del austriaco Paul Feyerabend (1924-1994). Tras su largo artículo de 1970, llamado “Against Method”, según podemos ver en su amplia correspondencia, proyectaron escribir conjuntamente una obra que desarrollase los argumentos en favor y en contra de la existencia de reglas para el método científico. La súbita muerte de Lakatos cuatro años después dejó huérfana la primera vertiente del proyecto. Lo que ha quedado, en forma de libro, es la base de lo que se ha dado en llamar el “anarquismo metodológico”.
Así, pues, se puede decir que partir de la década de los 1920´s, en la filosofía de la ciencia se intentaba construir las teorías científicas como cálculos axiomáticos, a los que se dotaba de una interpretación observacional por medio de reglas de correspondencia. Manejaban, por tanto, la que se ha dado en llamar *“Concepción Heredada de las Teorías”* (RV, en acrónimo, por ser la `received view´). Abarcaría un periodo que llega hasta la década de los 1960´s. Englobaría tanto a los dos círculos (el de Viena y el de Berlín) como a los filósofos analíticos de Oxford, o a los lógicos polacos de la ELV, o al pragmatismo americano, entre otros. La crítica desatada contra la RV partiría del segundo Wittgenstein, el de las *Investigaciones Filosóficas,* que es un libro de 1953. Se hace constar que las formas lógicas del lenguaje vienen a moldear los hechos, mientras que la causalidad y la observación estarían `cargados´ de teoría. Toda esta reacción vino a cristalizar en el llamado “nuevo experimentalismo”, que considera las teorías científicas como `Weltanschauung´ (o cosmovisiones), en tanto que sistemas conceptuales. Dentro de esta corriente podemos mencionar a Hilary Putnam, Thomas S. Kuhn, Imre Lakatos, Paul Feyerabend, Stephen Toulmin o Joe Sneed, entre otros.

limita a lo superficial, ya que fueron más las diferencias que las similitudes entre ambas[309].

Sobre lo de *positivista,* decía Kotarbinski que es difícil para cualquiera que sea medianamente razonable no serlo.

Algunas características más podrían apuntarse, como el *antipsicologismo,* la *teoría de la intención significativa* o la *teoría semántica de la verdad,* de Alfred Tarski, pero la ELV no fue en absoluto una estructura monolítica, uniforme, sin variaciones; por el contrario, la caracterizaba su gran diversidad filosófica[310].

---

[309] Dice Roger Pouivet, sobre las relaciones de la ELV con los del Círculo de Krakow, que:
"Les affinités de Lukasiewicz avec les membres du Circle de Cracovie, des théistes convaincus et militants, invalide complètement l´idée d´un Lukasiewicz positiviste, au moins dans une acception courante du terme. Dans le Cercle de Cracovie, la logique est mise au service de la métaphysique et même de la théologie, et ne joue nullement contre elles"
POUVET, R., Prefacio al *Du principe du contradiction chez Aristote,* p. 26, nota a pie de página n.º 31.
La posición de Lukasiewicz estaría más bien a mitad de camino entre los del círculo vienés y los del círculo cracoviano: postura crítica, pero no antireligiosa.
Otro comentario interesante del mismo autor sería éste:
"During the thirties, a new trend developed within the Lvov-Warsaw School, due to the special influence of Lukasiewicz. Lukasiewicz was a Roman Catholic. He considered that the anti-metaphysical materialism of Carnap and the Vienna Circle had nothing to do with the application of logic to the investigation of traditional metaphysical problems. He strongly rejected the Kantian anti-realistic influence and its main consequences. Lukasiewicz´ project was not the rejection of metaphysics, but its revision. In his way of applying logical methods to questions of metaphysics he was rather close to Leibniz. Of course, this is a very scholastic approach. But Lukasiewicz believed that the contemporary logic of his time provided new techniques for dealing with metaphysical problems".
POUIVET, R., "Faith, Reason, and Logic", p. 1, trabajo de 1999.
Por otra parte, como sabemos, el propio Lukasiewicz había puesto serias objeciones, en 1936, al intento por parte de Rudolf Carnap (conspicuo miembro del círculo vienés), cuando este trataba de reducir las cuestiones objetivas a meras cuestiones de tipo lingüístico.
Otro interesante comentario acerca de la Escuela de Lvov-Varsovia y sus claras diferencias con la filosofía anglo-sajona de la época sería éste: "It was a school in analytical philosophy. It is important for a popular identification of analytic philosophy with Anglo-Saxon, and the rest, with continental traditions. The Lvov-Warsaw School was analytic with continental roots, speaking geographically."
WOLENSKI, J., `The reception…´; p. 9.
Así, pues, analítica sí, pero continental y con raíces en Bolzano y Brentano.
[310] Dicen A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel y A. Levy, en su libro, que es de 1958, lo siguiente sobre el florecimiento de la lógica polaca:

Entre otros aspectos, no se excluye la posibilidad de un cuestionamiento ontológico, y se hace frente a los desafíos de la ciencia moderna, como es el caso de la Física o de la Biología. No son sólo matemáticos o lógicos sus integrantes, sino más bien filósofos que sienten una gran afinidad con esas disciplinas y las cuestiones relacionadas con ellas.

Conviene mencionar aquí lo expresado pos Joseph M. Zyzinski, sobre las abismales diferencias entre el Círculo de Viena y la ELV[311]:

Philosophical activity of the Lvov-Warsaw School of Logic developed in the period when in prevailing philosophical currents classical metaphysics was compared to poetry and regarded merely as a semantical meaningless expression of human spirit. This harsh appraisal of classical metaphysics was supported by members of the Vienna Circle who examined many logical and metascientific issues raised also in Lvov and Warsaw. Although both, in the Vienna Circle and in the Lvov-Warsaw School logical precision as well as intellectual honesty were appreciated, philosophical heritage of these two centres deeply differ.

The Vienna programme, expressed in the famous *Manifesto* of 1927, implies cognitive optimism according to which there is no deep dimension in Science, since in the world everything is on the surface and can be described in protocol sentences. In the suggested black and white scheme, the truth of science was opposed to falsehood of metaphysics, and no intermediate stages were distinguished for a long time. This interpretative framework inspired later many Anglo-Saxon philosophers, A. J. Ayer and R. Braithwaite included.

"Probably no other country, taking into account the size of its population, has contributed so greatly to the development of mathematical logic and foundations of mathematics as Poland" (p. 200).

[311] En el *Foreword,* o Prólogo, de dicho autor polaco al libro de:
DOMÍNGUEZ PRIETO, P., *Indeterminación y verdad,* obra sobre la ELV que procedía de la tesis doctoral en Filosofía del desaparecido Pablo.

In many respects, Polish logicians representing Schools of Warsaw and Lvov adopted the opposite approach. Instead of searching after dichotomic divisions, they looked for new logical means, subtle enough to introduce new logical distinctionsinto those forms of analysis where the traditional opposition between truth and falsehood appeared too vague. In the same epoch when Max Planck and Werner Heisenberg discovered the role of indetermination and probabilistic explanation in microworld, Lesniewski, Lukasiewicz, and their colleagues, acknowledged the role of probability and indetermination in Many-Valued Logic. Through originally written in a language unknown (Polish) for prestigious academic centres, Their papers became classics in a short time.

One may raise the question: Why the Lvov-Warsaw School avoided this ideological cargo, which is so evident in the biased critique of metaphysics developed in the Vienna Manifesto?

May be differences can be explained in part by reference to fifference in social-cultural milieu. In the intellectual climate of Vienna at the beginning of our century (se refiere aquí al siglo XX), there were expectations of breakthrough discoveries. When Freud adscribed to himself Copernican revolution in anthropology, and Wittgenstein regarded his *Tractatus* as an exposition of the entire philosophical truth, there was a social requirement for new Copernican discoveries in many other domains. As a matter of fact, young Kurt Gödel accomplished such a discovery by proving his famous incompleteness theorems. The meaning of his discovery, however, was not understood by his radical colleagues, who wanted to reform both science and metaphysics. When their ambitious program ended in a total failure, it confirmed once again that analytical distinctions are much more important for philosophy than easy generalizations.[312]

[312] ZYZINSKI, J., *op. cit;* pp. 7-8.

El nombre de la propia corriente filosófica ha sido cuestionado con frecuencia, no terminando de saber bien si debemos decir:

- *la Escuela filosófica de Lvóv y Varsovia;*

- *la Escuela lógica y filosófica de Lvóv y Varsovia;*

- *la Escuela lógica y matemática de Lvóv y Varsovia;*

- *el Círculo de Varsovia,*

etc.

Algunos incluso han querido ver dos, y no una, Escuelas. Así, según ellos, existirían dos subcorrientes[313] con sentido propio:

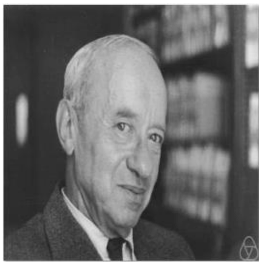
- *la Escuela de Lvóv,* de tendencia más estrictamente filosófica; y
- *la Escuela de Varsovia,* de matices más claramente lógico-matemáticos.

Pero como Jan Wolénski ha sabido ponderar muy bien, incluso en las obras con más predominio de la Lógica siempre es perceptible un sello o una "impronta" de lo más característica, que marca la línea general de la ELV, y la

[313] O corrientes de tipo bastante independiente. Se suele hablar con cierta frecuencia también de la Escuela Polaca de Matemáticas (en acrónimo, sería la EPM). En este caso, nos referiríamos a la floreciente comunidad de matemáticos surgida durante el periodo del ìnterbellum´, que como sabemos, es la etapa que iba entre las dos guerras mundiales. Se puede subdividir, a su vez, la EPM en tres subcorrientes, que se subsumen en la corriente principal. Estas serían las de la Escuela de Cracovia, la de Lvóv y la de Cracovia. Pero no son clases disjuntas, sino que muchas veces dan intersección común no vacía; tal es el caso de Alfred Tarski, que aparece en varias de ellas, y también, como brillante lógico y discípulo de Lukasiewicz, ha de considerarse dentro de la ELV.
Otros elementos brillantes podrían ser mencionados también, como es el caso (predominante) de Stefan Banach, Hugo Steinhaus, Waclaw Sierpinski, Stanislaw Ulam, Kazimierz Kuratowski, J. Schauder, W. Orlycz, etc.

herencia clara del pensamiento de su maestro, Kazimierz Twardowski, subsiste en toda ella. Así que sería una, y no dos, las Escuelas[314].

Debemos dejar constancia, una vez más[315], que a pesar de su indudable importancia, la ELV no ha conseguido hasta ahora el reconocimiento mundial que tanto se merece[316]. Tanto es así que casi la única teoría filosófica de la ELV que muchos conocen es la Teoría Semántica de la Verdad de Alfred Tarski, a quien aquí vemos:



Alfred Tarski

Posiblemente sea porque este vivió y difundió su pensamiento en las universidades americanas. Ello hizo que sus ideas fueran asimiladas por pensadores como el epistemólogo Karl Popper[317], por poner un caso bien

---

[314] Eso a pesar de haber sido comentado por Kotarbinski que: "sería más correcto hablar de dos Escuelas, la de Lvov y la de Varsovia, pues Twardowski era y quería ser un filósofo…, mientras que éste triunvirato [se refiere con ello al formado por Lukasiewicz, Lesniewski y Tarski] era más bien, si cabe hablar así, antifilosófico". Claro está que se trata de una cuestión semántica: de qué se entiende por "filosófico"; esto es, del significado que se le atribuya: es el viejo problema de la denotación y la connotación. Nos referimos al artículo:
KOTARBINSKI, T., "Humanistyka bez hipostaz", *Mysl Filozoficzna,* y que se recoge en su versión en inglés, *Gnosiology,* p. 203.
Esta opinión es también mantenida por:
JORDAN, Z., *The Development…,* 1963.
[315] Como hemos venido haciendo desde hace bastante tiempo.
[316] A diferencia de lo que ocurre, por ejemplo, con el Círculo de Viena, mucho más estudiado.
[317] *Karl Raimund Popper (1902-1994)* había nacido en Viena, en el seno de una familia que en las generaciones anteriores había profesado la religión judía, pero que ya en las más próximas al nacimiento de Karl, se habían hecho protestantes. En la sociedad vienesa de entonces estaba muy arraigado el antisemitismo, contra lo cual Popper se revolvió, rechazando todo tipo de nacionalismo (le llamaba la "regresión a la tribu"); incluso, se opondría al "sionismo", pensando que el concepto de `pueblo elegido´ era sumamente peligroso, como el de `raza elegida´ (la aria), para el nazismo, o la `clase elegida´, para el marxismo. Presentó su tesis,

señalado, y por ello llegarían a estar mucho más divulgadas. Para el resto de los miembros de la Escuela, el reconocimiento ha sido menor, si no nulo. En algunos casos, como el de Kazimierz Ajdukiewicz, su "convencionalismo radical" anticipaba las posiciones de un Willard Van Orman Quine, o incluso las de Paul Feyerabend. Tan sólo aparecen mencionados esos pensadores polacos como "de paso" en algunos manuales de Historia de la Filosofía. Puede que una de las razones sea su modo de hacer filosofía, que podríamos designar como "minimalista", o "anti-sintético". Esto les prevenía contra el "vicio" tan alemán de construír grandes sistemas totalizadores, ambiciosas síntesis globales. En vez de esto, los miembros de la ELV se ocupaban de problemas específicos, bien delimitados, que trataban de explicar y resolver mediante las herramientas de la semántica y de la lógica contemporánea, rechazando cualquier tipo de conclusiones generales. De ahí pudiera provenirles cierta debilidad en los planteamientos o perspectivas más generales.

Así, pues, nada más lejos de la realidad que esa interpretación simplista y apresurada[318] de la ELV como una versión polaca de la filosofía analítica y del Círculo de Viena. Porque entre las dos no existían demasiadas afinidades ni

---

dirigida por Karl Bühler, en 1928. Por aquel entonces entraría en contacto con el Círculo de Viena, ante cuyos postulados mantuvo una actitud crítica. Tras el asesinato de Moritz Schlick y la toma del poder por el nacionalsocialismo, emigró a Nueva Zelanda, donde dio clases en la ciudad de Christchurch. Al concluir la guerra pasó a dar clases en la London School of Economics. Introdujo su famoso "criterio de demarcación", para establecer las fronteras o límites entre la ciencia y la metafísica. Observemos que dicho criterio no decide en absoluto acerca de la veracidad o falsedad de las proposiciones, sino sobre si su estudio cabe o no dentro de lo que merece ser llamado Ciencia. Ese Criterio se basa, pues, en la capacidad de una proposición para ser `falsada´, o refutada. Así, sólo serán científicas aquellas afirmaciones que se puedan someter a experimentación o prueba, para poder en su caso llegar a contradecirlas. Con lo que por ejemplo, las Teorías de la Relatividad y la Teoría Cuántica serían científicas, mientras que el Marxismo o el Psicoanálisis no lo son, pues parten de postulados `ad hoc´, barreras que impiden que sean refutadas.

[318] Bastante simplista, por cierto.

conexiones, auque compartieran su fe en la capacidad de la Lógica y de la Matemática para proporcionarnos herramientas que permitieran establecer una visión completa y consistente de la Teoría de la Ciencia. Ambas corrientes compartían, eso sí, el deseo de ir introduciendo el mayor grado de precisión posible sobre todos los campos del conocimiento humano, tomando como norte y modelo el rigor de las ciencias físicas.

A pesar de todo ello, las diferencias posiblemente sean más que las analogías entre la ELV y el Círculo de Viena. En primer lugar, por los orígenes y la extracción social de sus miembros, muy distintos en un caso y en otro. Además, existe otra diferencia clara, y aún más evidente: la influencia del pensamiento brentaniano, con su reivindicación crítica de los principios aristotélicos y de la filosofía de la Escolástica; especialmente[319], la de Santo Tomás de Aquino. Tampoco debemos olvidar que tanto Bernard Bolzano como Franz Brentano, que se constituyeron en sus más prominentes faros intelectuales, fueran inicialmente sacerdotes de la Iglesia Católica. Eso ya les distanciaría bastante del grupo vienés, más bien ateo o agnóstico. Si a esto añadimos la escasa influencia y la poca o ninguna consideración que algunos de los integrantes de la ELV tenían por el empirismo y en general, por la filosofía anglosajona, incluso la de Bertrand Russell, del que sólo apreciaban su obra lógica, ni por la de Ludwig Wittgenstein, ni siquiera por la del austriaco

[319] Detrás de ello está, obviamente, la influencia del catolicismo en un país, como Polonia, que lo identifica con el espíritu nacional.

Ernst Mach[320], no queda duda alguna acerca de que fueron los de la ELV no sólo distintos, sino independientes y verdaderamente originales[321].

Rudolf Carnap decía que:

I found that the Polish philosophers had gone a great deal of thoroughgoing and fruithful work in the field of logic and its applications to foundational problems; in particular, the foundations of mathematics, and the theory of knowledge and the general theory of language, the results of which were almost unknown to philosophers in other countries.

CARNAP, R., `Intellectual Autobiography´; p. 31.

Jan Wolenski nos refiere su reacción ante un interesante trabajo de Barry Smith, `Why there is no Polish philosophy?´, y comenta su contenido:

“At first, I was very surprised. However, Smith´s intention was to show that, excluding the episode of Polish Messianism, there is no Polish philosophy in the sense of German philosophy, that is, as a national concern. That German (French, British, and perhaps some other) philosophy is possible is probably a privilege of nations acting in the centers. We Poles… do not belong to this circle… Our fate is to produce good philosophy, if we want to be recognized. According to Barry Smith, there is no Polish philosophy because Poles produced good philosophy. Perhaps it is the greatest

[320] Volviendo sobre la influencia de Mach en las concepciones relativistas de Einstein, podemos consignar lo que éste mismo decía, en relación con el Principio de Mach: “… en la consecuente teoría de la relatividad no se puede definir la inercia respecto al `espacio´, pero sí se puede definir la inercia de las masas una respecto a otra. Por eso, si alejamos una masa cualquiera a una distancia grande de todas las demás masas del Universo, la inercia de tal masa debe tender a cero. Vamos a intentar a formular estas condiciones matemáticamente”. Es clara la voluntad de Einstein de intentar incorporar a su teoría dicho principio, o al menos, algunas de sus consecuencias.

[321] Para Wittgenstein (y por extensión, para los miembros del Círculo de Viena, con distintos grados), la Metafísica no sólo es falsa, sino absurda, ya que está formada por proposiciones carentes de sentido (pseudoproposiciones) referidas a falsos problemas (pseudoproblemas). La diferencia clave con los de la ELV radica en que los del CV extienden esa crítica demoledora a todos los aspectos de índole religiosa, un camino por el que no les siguen los polacos, fieles a su idiosincrasia nacional católica.

complient that could be addressed to the Lvos Warsaw School by someone who belongs to a nation from the cultural center of the world".

WOLENSKI, J., *op. cit.;* p. 17.

Son muy interesantes tanto el artículo de partida, de B. Smith, como el comentario al mismo realizado por J. Wolenski. Cabe mediante él una mejor comprensión del porqué de una relativa indiferencia u olvido de muchos hacia un grupo de pensadores de tanto nivel como fue el de la ELV, si hacemos excepción de Alfred Tarski, y esto porque `salió fuera´ de Polonia, y donde estuvo fue en los Estados Unidos. La falta de repercusión de los filósofos de `naciones periféricas´, sin la caja de resonancia de las potencias centrales en dicho campo, quedaría así explicada.

5. Rasgos más esenciales de la Escuela de Lvóv-Varsovia.

Dice el tantas veces mencionado `maestro de filósofos´, profesor de la Universidad de Cracovia, *Jan Wolenski,* que el círculo intelectual conocido como *Escuela de Lvóv-Varsovia* (ELV, en acrónimo) ha estado marcado básicamente por *cuatro factores fundamentales*[322]*:*

- *El genético,* a través de las enseñanzas de Kazimierz Twardowski.
- *El geográfico,* en referencia al emplazamiento físico de la Escuela, en las ciudades de Lvóv y Varsovia.
- *El temporal,* puesto que como fecha fundacional de la Escuela puede considerarse el 15 de noviembre de 1895, cuando llega Kazimierz Twardowski a Lvóv, para hacerse cargo de la cátedra de Filosofía de la Universidad. Estamos hablando, pues, de finales del siglo XIX, aunque se suele mencionar con frecuencia otra fecha: el año 1918, que es

[322] WOLENSKI, J., 2011; p. 15.
También explica Wolenski los importantes resultados y las anticipaciones de ideas clave llevados a cabo por la ELV:
"… if I were to make such a list (of ítems), it would certainly include: praxiology; resism; radical conventionalism; Lukasiewicz´s analysis of determinism via many-valued logic; Hosiasson´s inductive logic and her solution of the paradox of confirmation; Mehlberg´s causal theory of time; Ajdukiewicz´s method of elimination of context; the attempt to modernize cholastic philosophy by logic in the Krakow Circle (a group of Catholic philosophers with Józef Bochenski and Jan Salamucha as leading members; this Circle was very strongly influenced by Lvov-Warsaw School); Zawirski´s attempt to combine many-valued logic and probability theory into one system…; Ajdukiewicz´s theory of language and his criticisms of various forms of idealism via semantics; Ginsberg´s analysis of Husserl´s theory of parts and whole; and Tatarkiewicz´s monumental history of aesthetics. For anticipation, one can include some of those mentioned…; particularly, Hosiasson´s inductive logic, but also Lukasiewicz´s criticism of induction and his antiinductionism (in this respect, Lukasiewicz anticipated all the essential ideas of Popper), and the antifoundationalism of Lukasiewicz, Poznanski, Wundheiler and Ajdukiewicz… Even if the list is not complete…, it is quite impressive. Remembering that we are dealing with philosophers at the peripheries, we find a lot of ideas that were at least interesting, and sometimes, quite influential."

cuando ya está "a velocidad de crucero". La existencia de la ELV puede considerarse que se extinguiría en 1939, cuando comenzaba la Segunda Guerra Mundial.

- *El científico,* que proviene de una común herencia de ideas.

Para establecer los rasgos esenciales de la ELV, una buena fuente puede ser la clasificación propuesta por uno de sus más prominentes miembros:

Kazimierz Ajdukiewicz

Según este[323], serían:

1.º) *el anti-irracionalismo;*

2.º) *el postulado de claridad nocional y de claridad lingüística;*

3.º) *la adaptación de la Lógica Formal contemporánea a los análisis filosóficos;*

4.º) *la toma en consideración de los aspectos lingüísticos de los problemas examinados.*

Podríamos añadir a estas características las tres siguientes[324]:

5.º) el papel que Kazimierz Twardowski y Jan Lukasiewicz atribuyen a la creatividad en el trabajo científico;

6.º) el anti-inductivismo, combinado con la aproximación en cierto modo "falsacionista" y "conjeturalista"; esto se puede predicar tanto de Jan Lukasiewicz como del primer Ajdukiewicz;

[323] AJDUKEWICZ, K., "Der logistiche Antiirrationalismus in Polen", 1935.
[324] Fundamentales para la ELV que aquí estudiamos.

7.º) la personalidad de su fundador, Kazimierz Twardowski, su fundador, quien no sólo tuvo ideas originales, sino que desarrolló una impresionante labor como organizador y profesor de sucesivas generaciones de alumnos.

Así fue como uno de los más famosos, Tadeusz Kotarbinski, dijo de su maestro que había dejado[325] de producir teorías para formar mentes. En efecto, desde su llegada a la Facultad de Filosofía de la Universidad de Lvóv, Twardowski se dedicó en cuerpo y alma a enseñar, pues consideraba que este era su deber principal, alcanzando un éxito excepcional entre sus alumnos, a los que hacía trabajar duro, especialmente organizándoles[326] unos famosos Seminarios.

Dice Wolenski[327] que se pueden reunir en cuatro los factores que llevan a la aparición y posterior desarrollo de la MVL en Polonia. El primero de los cuales sería el desarrollo de la Lógica Matemática en general, lo que le llevaría a disponer de poderosas herramientas formales. El segundo, cierta especulaciones filosóficas que conducían a una revisión de la Lógica Clásica. El tercero, la refelexión, llevada a cabo sobre todo por Lukasiewicz, acerca de los grandes pensadores del pasado, no sólo Aristóteles, sino también los Estoicos. Y como cuarto factor, que se dieran tan pronto cuenta de que el problema clave estaría en la Metalógica, y no en leyes lógicas particulares.

Podemos distinguir también, dentro de la historia de la ELV, *cinco subperíodos:*

[325] Kazimierz Twardowski.
[326] E impartiéndolos él mismo.
[327] WOLENSKI, J., *Historico-Philosophical Essays,* cap. 2 (sobre la MVL); pp. 49-50.

1.º) El periodo de introducción, que duraría unos siete años. Se cierra éste intervalo temporal con la defensa de las primeras tesis doctorales dirigidas por Kazimierz Twardowski. Esto le iba a permitir la formación de un primer círculo de colaboradores científicos en torno a la figura de éste

2.º) El periodo de formación de los puntos de vista y de los temas de interés para sus alumnos. El cual empieza, según lo antes reseñado, en 1902, y vendría a concluír alrededor de los años 1916-1918.

3.º) El periodo de cristalización definitiva de la ELV, en los años que van desde ese de 1918 hasta el 1930. Es una época en la que surge una importante transformación. Podríamos decir que por ella pasa de ser la Escuela de Lvóv a la Escuela de Lvóv-Varsovia, con la creación del grupo varsoviano de lógica.

4.º) El periodo de desarrollo de la ELV, que es propio de la década de los 1930´s. Fue entonces cuando se obtuvieron los resultados más importantes por quienes la integraban, alcanzando renombre internacional; en especial, esto fue gracias a las aportaciones de la escuela de lógicos de Varsovia.

5.º) El periodo de dispersión geográfica de la ELV. Porque si admitimos que las actividades desarrolladas después de haberse dado por concluida la Segunda Guerra Mundial constituyen un elemento esencial dentro de la historia de la ELV, se produjo entonces una vertiginosa diáspora de muchos de los pensadores emparentados con la ELV, y esto no sólo a escala polaca, sino mundial.

Así que[328] se habrían dado un par de fases principales, en el desarrollo de nuestra ELV:

- *La de Lvóv,* en tanto que fase preparatoria de la misma.
- *La de Lvóv-Varsovia,* que es ya una época de madurez[329].

Una observación importante es que aun cuando sólo suelan mencionarse las dos ciudades paradigmáticas sobre el tema: Lvóv y Varsovia, hubo algunas otras de importancia para la historia de esta corriente. Así, las de Vilnius[330], la de Cracovia, o la de Poznan.

De todos modos, el centro de cultivo de la Lógica más importante en todo ese tiempo fue, sin duda, el de Varsovia. Estaba encabezado por *Jan Lukasiewicz* y por *Stanislaw Lesniewski.* De él derivaría pasado el tiempo *Alfred Tarski* (1902-1983), doctorando del segundo de ellos[331], y que en 1939 se quedaría en los Estados Unidos, para terminar siendo profesor en la Universidad de California, en Berkeley[332].

---

[328] Como distinguía con claridad:
WOLENSKI, J., 2011; p. 17.

[329] Algunos, como Ferrater Mora (este autor, en su famoso *Diccionario de Filosofía*) hablaba de la existencia de dos Escuelas o Círculos; una sería la de Lemberg (el nombre alemán de Lvov), y otra –posterior- la de Varsovia, y dice también que aquella influyó sobre esta tanto que al final pudieran considerarse fusionadas. Lo cual se puede considerar que implícitamente reconoce la existencia de dos fases, posible y seguramente solapadas entre sí.

[330] O Vilna, hoy capital de Lituania.

[331] Se dice, en plan de chanza, que Lesniewski ha sido el único director de tesis que ha tenido un 100% de genios entre sus doctorandos. En verdad, sólo tuvo uno, y este sería nada menos que Alfred Tarski.

[332] Por cierto, que uno de los doctorandos más brillantes de Tarski fue el judío polaco Mojzesz Presburger (1904-1943), otro más de los exterminados en los campos de concentración de los invasores nazis. No sin antes haber inventado (en 1929) la llamada en suhonor “aritmética de Presburger”, que es la teoría de primer orden de los números naturales con la adición. También halló un procedimiento de decisión sobre la misma.
En cuanto a su permanencia en los Estados Unidos, ha de tenerse en cuenta que había coincidido que había ido allí, en Agosto de 1939, para asistir a un Congreso sobre el Movimiento de Unificación de la Ciencia (esto es, sobre el Círculo de Viena). El estallido de la II

Otro de los discípulos de Jan Lukasiewicz, y de quien fue director de tesis, *Boleslaw Sobocinski (1906-1980),* llegó a ser profesor en la Universidad de Nôtre Dame. Pero no sólo hubo ese florecimiento en Varsovia, sino también en la ciudad de Lvóv (antigua Lemberg), "alma mater" del propio Lukasiewicz. Algunos encuentran cierto parecido a esta Escuela polaca con el Círculo de Viena, como ya queda dicho en el capítulo anterior, o con el Círculo de Berlín[333], aunque la Escuela de Lvóv-Varsovia estaba más centrada en los estudios lógicos, y mantiene con los otros dos grupos diferencias fundamentales. Aunque no sólo cultivaron esta rama de la Filosofía, sino otras muchas, aun cuando fuese el campo de los estudios lógicos para ellos el prioritario.

También apoyaron grandemente el estudio de la Matemática; en especial, de la Teoría de Conjuntos y de la Topología[334], junto con sus aplicaciones a otras ramas de la investigación matemática, como el Análisis Matemático o el

---

G. M. le `sorprendió´ en ese gran país, y fue una decisión suya -verdaderamente juiciosa, dadas las circunstancias, y que era judío- no volver a Polonia.

[333] Este Círculo de Berlín es también denominado en inglés "Berlin Circle", o en alemán, "die Berliner Gruppe". Al principio se llamaba "Die Gesellschaft für Empirische Philosophie" (La Sociedad para la Filosofía Empírica). Fue fundado por Hans Reichenbach (1891-1953), Walter Dubislav (1895-1937) y Kurt Grelling (1886-1942). De él formaron parte algunos notables científicos y filósofos, como Carl Gustav Hempel (1905-1997), David Hilbert (1862-1943) o Richard von Mises (1883-1953). Se trató de un grupo con cierto "parecido de familia" mayor con el Círculo de Viena que con la Escuela de Lvov-Varsovia. Mantuvieron posiciones empiristas (neopositivistas, se suele decir) respecto de la filosofía. Recordemos que para los neopositivistas, la única interpretación legítima del mundo sería la científica, y queriendo fundamentar el conocimiento humano sobre bases puramente científicas, recurren a diversas estrategias, como son: el fisicalismo (el lenguaje de la Ciencia debe contener tan sólo términos que se refieran a la realidad física); la construcción de un lenguaje unificado; el criterio de verificación, o de verificabilidad (según el cual la única manera de comprobar la veracidad de una proposición no-tautológica es la observación empírica, esto es, la experiencia). Publicaron la revista *Erkenntnis* (Conocimiento), codirigida por Hans Reichenbach y Rudolf Carnap. Aun cuando mantengan ciertas coincidencias (o posiciones en común), divergen claramente los dos grupos en temas como el de la probabilidad o el del convencionalismo. En ese afán por ser distinguidos del círculo vienés, Reichenbach insistía en que al Berlin Circle se le denominara "empirismo lógico", mientras que al Wiener Kreis –según él- se le debería llamar "positivismo lógico". Con el tiempo, esas expresiones han pasado a utilizarse indistintamente. (Nota del doctorando).

[334] El también llamado, al menos por entonces, *Analisis Situs.*

Álgebra. A esto sería debido fundamentalmente la poderosa corriente de personas eminentes que fue generando entonces el país, y que hoy encontramos por doquier en la Historia de esa ciencia, como:

- *Hugo Steinhaus (1887-1972)*[335]*;*
- *Kazimierz Kuratowski (1896-1980),* gran topólogo, especialista en Teoría de Conjuntos, y quien, por cierto, fuera hasta 1933 un profesor de Matemáticas y decano en la Universidad de Lvov; se le considera uno de los máximos representantes de la Escuela de Varsovia de Matemáticas;
- *Stefan Banach* (1892-1942)[336], uno de los más grandes, absoluto dominador del Análisis Funcional moderno, autor del famoso Teorema del Punto Fijo, o de los Teoremas de Hahn-Banach[337], piezas clave del

---

[335] Hugo Steinhaus era un notable matemático polaco, así como el mentor de Banach; de hecho, dijo modestamente que su mayor decubrimiento había sido Stefan Banach. En España hemos tenido un buen cultivador y didacta del Análisis Funcional, en la persona del profesor Fernando Bombal. Sirva esta referencia como un agradecido tributo de su antiguo alumno.
Fue también (Steinhaus) uno de los más brillantes miembros de la Escuela Matemática de Lvov (la *LSM,* en acrónimo, por *Lwowska Szkola Matematyczna).* Como sabemos, este fue un grupo de matemáticos que cultivó con grandes logros su ciencia en Lvov, durante el periodo conocido como del \`interbellum´. Steinhaus sería quien, junto con su alumno Banach, comenzase a publicar la revista *Studia Mathematica,* en 1929; sobre todo, se ocupaba de Análisis Funcional. Pero muchos de los miembros de la LSM, por su ascendencia judía, hubieron de huir de Lvov ante la inminencia de la llegada de las tropas nazis, en 1941, pereciendo fusilados luego, o acabando en los campos de concentración. Tras el final de la II GM, la ciudad de Lvov, que había caído bajo el poder soviético, pasó a formar parte de Ucrania, mientras que la antigua Breslau pasó a manos polacas, convirtiéndose en Wroclaw, y fue creada una Universidad en ella, que pasaría a ser una especie de \`segunda Lvov´, con sus profesores procedentes de la anterior, como es el caso del propio Steinhaus, gran dinamizador de la nueva institución. De hecho, al \`cuaderno escocés´ (el *Ksiega Szkozca*, en polaco), donde se recogían los problemas planteados y resueltos en las mesas del *Scottish Coffee* lvovskiano, vino a sucederle un \`segundo cuaderno escocés´, pero este ya era de Wroclaw. Por cierto, que gracias a Hugo Steinhaus se conserva el famoso cuaderno, ya que fue él quien le envió el manuscrito a Stanislaw Ulam, que luego se encargaría de que se tradujese al inglés, así como de publicarlo.

[336] Nacido, por cierto, también en Lvóv.

[337] Bajo una de sus formas, el *Teorema de Hahn-Banach* diría que es posible extender los funcionales lineales acotados, cuando están definidos sobre un subespacio de un espacio lineal (o vectorial) hasta todo el espacio. También afirma la existencia de funcionales lineales en cantidad suficiente como para que estando definidos sobre EVN (espacios vectoriales normados), tenga interés el estudio de su espacio dual. Fue probado por Hans Hahn y Stefan Banach, en la década de los 1920´s, pero una extensión suya, de la cual pudiera derivarse este, había sido ya propuesta por el matemático húngaro Marcel Riesz (1886-1969), el hermano menor del gran Frigyes Riesz (1880-1956), fundador del *Acta Scientiarum*

Análisis Funcional, o del Teorema de Banach-Steinhaus, o de la Paradoja de Banach-Tarski[338], y tantos otros resultados matemáticos importantes (obsérvese el carácter polaco y en un entorno de Lvóv, salvo en el caso del matemático austriaco Hans Hahn (1879-1934), quien fuera miembro del Círculo de Viena, pero conectado con los anteriores):

Mathematicarum, junto con Alfréd Haar (1885-1933), el introductor de la Medida de Haar. En su forma matemática, podríamos enunciarlo así:

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo de los reales. Sea también P: $V \rightarrow [0, +\infty]$ una aplicación que verifica:

i) $P(0) = 0$

ii) $P(t\,x) = t\,P(x),\ \forall\, x \in V,\ \forall\, t \in \mathbf{R}_{+} \cup \{0\}$

iii) $P(x + y) \leq P(x) + P(y),\ \forall\, x, y \in V$

Hemos de suponer, además, que $\forall$ x, o bien tanto P (x) como P (-x) son finitos ambos, o ambos infinitos. Si $a \in V$ y α es un número real tal que $0 \leq \alpha \leq P(a)$, entonces existirá un funcional lineal, f: $V \rightarrow \mathbf{R}$, tal que $f(a) = \alpha$ y $f(x) \leq P(x),\ \forall\, x \in V$.

Lo cual se puede formular de otro modo equivalente (y más general): si W es un subespcio vectorial de V, y g: $W \rightarrow \mathbf{R}$ es una aplicación lineal que verifica $g(x) \leq P(x),\ \forall\, x \in W$, entonces existe una aplicación lineal, f: $V \rightarrow \mathbf{R}$, tal que $f \leq P$ y $f|_W = g$. Es su prolongación a todo el espacio vectorial, como queda dicho antes.

338 Esta famosa paradoja es de tipo topológico-conjuntista, y no semántica, como otras que veremos más adelante. Resulta sorprendente, incluso increíble para quien la escucha por primera vez, con algo de magia y prestidigitación. Pero para explicarla con detalle, necesitarámos ciertos pre-requisitos matemáticos (sobre congruencia de cuerpos geométricos, su equidescomponibilidad, etc.), en lo que no vamos a entrar. Ahora bien; explicarla de modo coloquial sí que es posible. Viene a decir que si tomamos una bola (en sentido matemático, esto es, una esfera sólida) y la cortamos (o `descomponemos´) en una cierta cantidad de piezas, si luego estas se reensamblan acudiendo para ello tan sólo a `movimientos rígidos´ (las traslaciones y rotaciones), al final se podrían obtener dos bolas idénticas a la anterior, en forma y tamaño. Se trata de un resultado muy conocido entre conjuntistas y analistas. En el fondo, vuelve al viejo debate de si el Axioma de Elección es aceptable o no desde el punto de vista matemático. Porque se ha de tenerse en cuenta que si bien esto sería coherente desde la perspectiva teórica de la abstracción matemática, donde la esfera unidad sería el subconjunto del espacio euclídeo tridimensional, $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, la bola no sería lo mismo desde el modo de ver de los físicos. Porque en el primer sentido, *S* podría subdividirse infinitamente, pues se le supone conteniendo infinitos puntos, mientras que un físico pondría la objeción de que una bola sólo contiene una cantidad finita de átomos, y no se puede subdividir más, una vez llegado a cierto umbral finito. Si se supone que las esferas no son infinitamente divisibles, entonces no se les puede aplicar la Paradoja de Banach-Tarski, ya que cada una de las piezas sería infinitamente compleja y no medible, al no tener un volumen definido. Las piezas han de ser seleccionadas por medio de sucesivas elecciones basadas en el `Axiom of Choice´, y como no existe -hasta ahora, al menos- ningún algoritmo constructivo para tal tipo de piezas, no podemos inferir cuáles sean sus propiedades; entre ellas, la de si son o no son medibles en el sentido de Lebesgue. Por esto decíamos antes que el debate desemboca en si es (o no es) admisible matemáticamente el Axioma de Elección. Pero es que dicho axioma resulta muy necesario en Matemáticas, para demostrar aspectos teóricos esenciales, como que todo espacio vectorial posee una base, o que todo cuerpo admite una clausura algebraica, entre otros muchos resultados.

Hans Hahn

Stefan Banach

- *Stefan Mazurkiewicz (1888-1945);*
- *Waclaw Sierpinski (1882-1969),* con sus muchas aportaciones a la Teoría de Números y a la Teoría de Conjuntos[339].

El impulso hacia estos temas venía dado por el *"programa Janiszewski",* llamado así por el matemático Zygmunt Janiszewski, que lo elaboró. Este matemático estaba muy interesado en los temas de Lógica Matemática y Fundamentos de las Matemáticas, por lo que no es de extrañar que su programa de investigación incluyera los problemas lógicos.

Un hecho clave para la historia de la ELV radicó en que no sólo Janiszewski, sino algunos matemáticos notables, como Waclaw Sierpinski y Stefan Mazurkiewicz, vieran la estrecha conexión entre el porvenir de la

[339] Especialmente, a la Hipótesis del Continuo y al Axioma de Elección, y a tantos otros puntos clave dentro de los fundamentos de las teorías matemáticas.

Escuela y la investigación en nuevas ramas de las Matemáticas, como la Teoría de Conjuntos o la Topología, dominios muy próximos a la Lógica Matemática. De ahí el alto grado de coincidencias entre los programas de Twardowski y de Janiszewski. Ambos querían modernizar sus respectivas disciplinas: interesándose por las últimas "novedades" científicas; tratando de establecer y mejorar las relaciones internacionales con otros investigadores, creando revistas especializadas, o nuevas instituciones de carácter científico, incluso fuera de la Universidad. Esto hizo que tanto Stanislaw Lesniewski como Jan Lukasiewicz, los considerados fundadores de la escuela de lógicos varsovianos, se sintieran en su ambiente cuando estuvieron en Lvóv.

Resumiendo lo visto hasta ahora, son muchos los que piensan que la ELV comienza con la fuerte personalidad de Jan Lukasiewicz. Pero esto es bastante injusto, y por más representativo que este sea, debemos considerar como sus verdaderos orígenes la llegada de Twardowski a la cátedra de Lvóv[340]. A pesar de esto, son muchos los que postulan la opinión anteriormente expresada. Tal sería el caso de Salomaa, Rosser y Turquette, Zinoviev, Bochénski, Rescher, Offenberger u otros. Aunque insistimos en que no pueden entenderse bien las ideas e influencias que actúan sobre los fundamentos de la Lógica Multivaluada

[340] Porque Jan Lukasiewicz fue un alumno aventajado de Kazimierz Twardowski, y de él le vino ese deseo ferviente de búsqueda de la claridad y de la precisión. Su aversión por lo oscuro y lo equívoco le aproximan no sólo al maestro para todos en aquel ámbito, Franz Brentano, sino también al filósofo británico Georg Edward Moore, y de un modo más general, a lo que se llama filosofía analítica, dentro de la cual se le suele encasillar, pero en cualquier caso, lo sería de un modo muy particular y propio. Criticaba a Immanuel Kant por haber abierto las puertas al Idealismo alemán, oscuro, neblinoso y que para él lo era sin necesidad. Lo cual le llevaba a describir las características que debería reunir el método filosófico, en un trabajo de 1927: sólo se deben tratar aquellos problemas que puedan formularse claramente; se ha de responder a estos con procedimientos axiomáticos y deductivos, esto es, con las herramientas de la Lógica Matemática; se debe mantener un continuo contacto con lo real, alejándonos de lo mítico o quimérico; y siempre hemos de apoyarnos en los resultados de la Ciencia. Ya se sabe que son unas exigencias difíciles de cumplir, para un saber como el filosófico, que parece resistirse a lo que podríamos llamar \`sistemas de tipo euclidiano´. Pero debe ser una especie de ideal, un modo de utopía del filósofo, para Lukasiewicz.

y su evolución sin conocer también a Lesniewski, a Kotarbinski, a Ajdukiewicz, etc., miembros todos ellos de la primera generación de dicha ELV. Tampoco deberían omitirse los nombres de quienes formaron parte de una segunda generación de esa ELV, como Stanislaw Jaskowski, Mordechai Wajsberg, Andrzej Mostowski, Jerzy Slupecki, Boleslaw Sobocinski, Henryk Mehlberg, Zygmunt Zawirski, o el más famoso de todos (sobre todo, en el mundo anglosajón), Alfred Tarski. Tampoco faltaron componentes femeninas notables, entre las que podemos mencionar a Daniela Gromska, Janina Hosiasson-Lindenbaum, Janina Kotarbinska, etc.

En relación con el antes mencionado *Stanislaw Jaskowski (1906-1965),* hemos de hacer algunas observaciones, pues se trata sin duda de uno de los elementos más sobresalientes de la ELV y de quienes más contribuyeron al posterior desarrollo de la MVL, junto con Jerzy Slupecki[341] o Boleslaw Sobocinski.

---

[341] Jerzy Slupecki (1904-1987) había nacido en Haben, población de la Manchuria. La razón de tan exótico origen (para un polaco) estriba en que su padre, ingeniero, trabajaba en la construcción del East China Railway. Por entonces las condiciones de vida de la familia eran bastante holgadas. Se le educó en el hogar hasta 1915, cuando empezó a ir al Instituto en Tiumen. Pero regresaría en 1918 a Haben. Eran tiempos difíciles. Tan sólo el padre consiguió regresar a Polonia. Él y su hermano mayor quedaron al cuidado de su madre. El frío allí era terrible, y su hermano murió de tuberculosis, quedando también la salud de Jerzy seriamente afectada. No regresaron a su patria hasta 1921. No pudo proseguir sus estudios en los cinco años siguientes. La difícil situación económica de la familia le obligaba a realizar pequeños trabajos remunerados. Aunque pensaba estudiar arquitectura, cayó enfermo del pulmón, y terminó matriculándose en el Departamento de Matemáticas y Ciencias Naturales de la Universidad de Varsovia. Las dos décadas siguientes fueron de continuas privaciones para todos ellos. Pero se hizo amigo de Andrzej Mostowski, Stanislaw Hartman y A. Raabe, que acostumbraban reunirse en el `Lourse Café´, de Varsovia. De allí partiría ese su “segundo amor” (tras la arquitectura): el de la Lógica y las Matemáticas.

Hemos de hacer constar que la línea de investigación de Slupecki fue sin duda la más fiel a los planteamientos de su maestro, Jan Lukasiewicz (quien le apoyó, viendo a Jerzy como su posible continuador), sobre los temas de lógica multivaluada. Téngase en cuenta que de los investigadores más notables de la ELV, tras la IIGM, sólo permanecieron en su patria el propio Jerzy Slupecki, con Andrzej Mostowski y Stanislaw Jaskowski. Todos los otros habían muerto o se habían ido del país.

Stanislaw Jaskowski tuvo desde joven un gran interés no sólo por temas científicos, sino también humanísticos. A ello le predisponía seguramente el ser nieto de uno de los grandes poetas polacos: Jan Nepomuk Jaskowski. En la Universidad de Varsovia, Stanislaw fue alumno de Lukasiewicz y de Lesniewski.

Ya destacaba a los veinte años, con un trabajo que realizó bajo la dirección de Lukasiewicz, sobre los desarrollos de los métodos de deducción natural. Es el tema sobre el que después hizo su tesis doctoral, también dirigido por Lukasiewicz. En el Congreso de París, de 1935, expuso un trabajo sobre los cálculos multivaluados, en el cual extendía un cálculo n-valuado a otro, (n+1)-valuado. A lo largo del Congreso tuvo ocasión de conocer a otros miembros de la ELV, como Kazimierz Ajdukiewicz o Zygmunt Zawirski, pero también a otros no polacos, como Bruno De Finetti o F. Gonseth. Al año siguiente ya comenzaron sus trabajos acerca de las funciones modales, estrechamente relacionados con las MVLs.

Durante la II Guerra Mundial trabajó como bibliotecario, y tuvo que padecer la destrucción de todos sus manuscritos por las fuerzas invasoras. Tras la guerra, fue primero profesor en la Universidad de Lódz, y luego, en la Nicholas Copernicus, de Torun, donde llegaría a ser Rector.

En los 36 trabajos suyos que aún conservamos se pueden destacar los siguientes temas: los métodos de deducción natural; la Lógica Clásica; los fundamentos de las Matemáticas; y los sistemas No-Clásicos de Lógica. Su gran contribución a la MVL ha sido reconocida por muchos estudiosos, como

Nicholas Rescher, Rutz, S. Haack, Surma, Jan Wolenski, o Jerzy Kotas, entre otros[342].

Para su estudio sobre la lógica intuicionista, se basó en otros muy en boga por la época, como los de Andrei N. Kolmogorov, Arendt Heyting, Kurt Gödel o Jan Lukasiewicz. También cultivó el estudio de las contradicciones; en particular, de la famosa Paradoja de Russell y de la algo menos conocida de Cesare Burali-Forti (1861-1931).[343]

La contribución más conocida de Stanislaw Jaskowski es, sin embargo, su Lógica Discusiva (propuesta por él en 1948), o "discussive logic"; también llamada "discursive" o "discursiva", o "controversial", por estar relacionada con las discusiones o controversias[344]. Basado todo esto en que Jaskowski se ocupaba fundamentalmente de considerar dicho tipo de contradicciones, las llamadas `antinomias discusivas´. Según él, estas han sido las que han traído

---

[342] Aparte de ellos, se puede estudiar a St. Jaskowski con más detalle en las obras de Jan Wolenski, o en la de:
PDP, *Indeterminación y Verdad*, pp. 198 ss.

[343] Esta puede seguirse por el planteamiento que de ella hace
CAJORI, F., *Historia de las Matemáticas,* p. 401*:*
"La serie de todos los números ordinales, la cual está bien ordenada, debe tener el máximo de todos los ordinales como su tipo de orden. Sin embargo, el tipo de la serie mencionada de números ordinales, cuando es seguida por su tipo, debe tener un ordinal mayor, dado que $\beta + 1$ es mayor que β. Por tanto, uan serie bien ordenada de todos los números ordinales define ella misma un número ordinal no incluido en la serie original." En lo que se concentra Jaskowski es en mostrar cómo la segunda utilización de `número ordinal´ es distinta de la primera. Pasando ahora a la famosa antinomia de Russell, dejemos que este nos cuente en su *Autobiografía* (p. 147) cómo la concibió: "Cantor tenía una demostración según la cual no existe un número máximo, y a mí me parecía que el número de todas las cosas en el mundo tenía que ser el máximo posible. De acuerdo con ello, examiné su demostración con cierta minucosidad, e hice un esfuerzo por aplicarla a la clase de todas las cosas que existen. Esto me condujo a considerar las clases que no son miembros de sí mismas, y a preguntarme si la clase de tales clases es o no es miembro de sí misma. Encontré que cualquier respuesta implica su contraria."

[344] La revision de las creencias, o el cambio de las diversas teorías o paradigmas, se lleva a cabo en una comunidad humana, o en particular, dentro del mundo científico, a través de una discusión de los distintos puntos o razonamientos en que se basan. Esto se puede producir por medio de un intercambio directo de opiniones, o mediante la publicación de trabajos, que son respondidos a su vez por otros, lo cual es típico de la literatura especializada. Por todo ello, se trata de procesos que son de gran interés para el estudio.

tantas tribulaciones a las teorías lógicas. Dado que al no pertenecer al ámbito sintáctico, el problema estaría en la posibilidad de formalizarlas en algún sistema sin que este se vuelva con ello inconsistente.

Lo primero que dice Jaskowski es que el sistema bivaluado clásico, $\mathfrak{L}_2$, no admitirá ese tipo de contradicciones, al ser tan sólo extensional, lo que le hace carecer de unos matices modales que permitan mostrar que no todos lo términos de igual forma poseen el mismo sentido. Precisamente esa imposibilidad de que en $\mathfrak{L}_2$ se encuadre ese tipo de contradicciones llevó a Jaskowski a elaborar su nuevo sistema lógico, su *Discusive Logic,* $\mathfrak{D}_2$, llamada así porque contiene oraciones que en apariencia son contradictorias, como ocurre en las discusiones del lenguaje natural.

Decía Jaskowski con razón que el Principio de Contradicción es uno de los más controvertidos en la historia del pensamiento. Desde que Aristóteles lo puso como pilar fundamental de todos los otros principios, se han venido produciendo críticas acerca de su validez universal. Citaba en este sentido a Antístenes, a Hegel y a los filósofos marxistas:

> En el siglo XIX, la idea de Heráclito fue adoptada por Hegel. Éste opuso a la lógica clásica una nueva lógica, por él denominada Dialéctica, en la que es posible la coexistencia de dos oraciones contradictorias. Ésta opinión permanece hasta el presente como uno de los fundamentos teóricos del marxismo.[345]

Desde el punto de vista histórico, ese sistema puede considerarse como el primer análisis formal de las contradicciones, y a partir de él se han ido

[345] JASKÓWSKI, S., "Propositional Calculus for Contradictory Deductive Systems". *Studia Logica,* 1960(24), p. 143.

realizando otros estudios de sistemas `no-consistentes´, o como ahora son llamados, paraconsistentes.

Téngase, además, en cuenta que el sistema discusivo se define a partir del bivaluado, y no viceversa. Como el $\mathfrak{D}_2$ es una generalización del $\mathfrak{L}_2$, sistema en el cual no existen más valores veritativos que el $|V|$ y el $|F|$, llegamos a la conclusión –dice Jaskowski- de que la `I´, el indeterminado, ha de ser definido en función de la verdad, esto es, que desde el punto de vista lógico, no sería un valor veritativo genuino, sino más bien una expresión de la probabilidad de que algo sea cierto.

Más adelante, su discípulo Jerzy Kotas estableció que el sistema $\mathfrak{D}_2$ no es finito-valuado, o lo que es equivalente, que se trata de un sistema lógico infinito-valuado. Porque en dicho sistema no van a existir niveles de probabilidad, pues lo único que expresa un enunciado es su carácter de `posible´. Esa infinitud de los valores veritativos, en el sistema de Jaskowski, no va a negar el Principio de Bivalencia; tan sólo deja constancia de la no disposición de datos suficientes para asignar un valor de verdad definido. Ello implica la existencia de distintos grados o niveles de esa `I´, tantos como generalizaciones puedan materializarse de $\mathfrak{L}_2$. El grado más general, o indeterminado, le corresponde al $\mathfrak{D}_2$.

El sistema lógico de Jaskowski, $\mathfrak{D}_2$, estaría basado en el $\mathfrak{S}_5$, de Clarence I. Lewis. Para Jaskowski, `lo contradictorio´ sólo va a ser admisible de modo accidental, como una consecuencia de la vaguedad del lenguaje.

Llegan el Ocaso y la Larga Noche.

Tras finalizar la Segunda Guerra Mundial[346], el régimen comunista impuso una férrea ortodoxia marxista, y esto acabó con la existencia de la Escuela de Lvóv-Varsovia, cuyos miembros se fueron dispersando por todo el mundo[347].

Lo que allí quedó de la ELV empezó a languidecer, debiendo adoptar un aspecto de lo más convencional, dentro de la vigilancia de los familiares de esa nueva Inquisición que entonces fuera el Partido Comunista de Polonia.

Digamos, por otra parte, en qué consiste exactamente el *Positivismo Lógico*[348], corriente dentro de la cual se suele englobar para muchos la Escuela de Lvóv-Varsovia que es objeto de nuestro estudio.

Se trataría de una corriente de pensamiento caracterizada por los siguientes aspectos:

- *Un empirismo total.* El cual se apoya en los cuantiosos recursos de la lógica moderna, y asimismo, en los asombrosos logros de la física entonces en ebullición. Desde el punto de vista metodológico, las ciencias empíricas estarían basadas en la inducción.

[346] Y más concretamente, a partir de 1945.
[347] Las consecuencias políticas, desde el final de la II Guerra Mundial, con la implantación del nuevo control absoluto por parte del Partido Comunista Polaco y de la URSS, actuando como nuevo dueño de la situación, más o menos en la sombra, llevaron a la práctica desaparición de la ELV como conjunto organizado. A partir de entonces, los fenómenos observables fueron más bien individuales y discontinuos; principalmente, se produjeron fuera del país. Hay que tener bien presente la actitud abiertamente desfavorable hacia las ideas de la ELV por parte de los “nuevos mandarines”, para quienes su pensamiento no era más que “filosofía burguesa”, y por tanto, despreciable y aun perseguible “de oficio”. La única filosofía científica y “respetable” era para los nuevos amos la del materialismo dialéctico y el marxismo-leninismo. Ésta era, como sabemos, incluso, la “nueva religión”, con sus adeptos y aprovechados, sus nuevos herejes y perseguidos, etc.
[348] O Neopositivismo.

- *Un empleo sistemático de la lógica-simbólica.* Utilizada como un instrumento muy útil para poder deslindar entre los distintos lenguajes, así como sus relaciones, tanto en sus aspectos formales (sintaxis-lógica) como en su contenido o sus referencias a lo real (semántica).
- *Un rechazo de la metafísica, o de la teología, o incluso de ambas.* Muy en sintonía con el pensamiento de la Ilustración, los pensadores del Círculo de Viena[349] fomentaron un considerable rechazo hacia la metafísica, por considerar que quedaba fuera de lo que era concebido como lo "sensible" y lo empírico. La acusación básica contra la metafísica sea centraba en que sus proposiciones[350] carecían de significado. Es decir, las proposiciones de la metafísica no tienen ningún sentido, porque no guardan relación con los hechos, ya que tales proposiciones no están construidas tomando para ello como base las proposiciones elementales. Pero se ha de tener muy en cuenta la importancia filosófica de la Escuela de Lvóv-Varsovia (ELV), uno de cuyas principales diferencias con el Círculo de Viena (CV) radica en que con toda seguridad por la fuerte tradición católica de su país, uno de los signos más arraigados en el nacionalismo polaco, no hacen tan suya[351] esa furibunda crítica, que aplican –como en el caso de Twardowski- al rechazo de la metafísica –a ese estilo de hacer filosofía dentro del idealismo alemán-, pero no así –o no tanto al menos- respecto de la teología[352].

[349] Que ya venían formados en el escepticismo.
[350] Según ellos.
[351] O la aminoran considerablemente.
[352] Que respetan por sus creencias, como en el caso del propio Jan Lukasiewicz. Otra observación que puede ser esclarecedora: los componentes del Círculo de Viena no se

- Proponiendo por ello una *fuerte restricción del dominio de la filosofía.* El espacio de acción de la filosofía fue casi literalmente reducido a la tarea de eliminar sus propios problemas.
- *Un fisicalismo*[353]*,* según el cual todos los enunciados empíricos pueden ser expresados en el lenguaje de la física. Este fue el fundamento teórico a favor del cual propusieron con gran convicción la necesaria unidad de la ciencia. Esta propuesta inicial de un lenguaje fisicalista estaba claramente ligada a los cambios dramáticos de la Física en las tres primeras décadas del siglo XX, originados principalmente por las Teorías de la Relatividad[354], de Albert Einstein, así como en la Mecánica

---

preocupaban demasiado de la historia de la filosofía. Por el contrario, no sucedía lo mismo con los miembros de la ELV, en la que tenemos los grandes ejemplos de Wladyslaw Tatarkiewicz o del mismo Jan Lukasiewicz, grandes cultivadores ambos de tales estudios históricos (renovados; sobre todo, en el caso del segundo). A él se deben las indicaciones sobre el interés notable que tendría el estudio de la lógica proposicional de los Estoicos (véase su escrito de 1934). Asimismo, suyo sería el primer trabajo de conjunto sobre la silogística de Aristóteles desde el punto de vista de la Lógica Formal Moderna (que es de 1951).

[353] Tal vez mejor debiera denominarse a esto un “fisicismo”, u otra expresión equivalente, no equívoca, pues el término “fisicalismo” designa también la doctrina filosófica sobre lo real que sostiene que todo lo que existe se reduce a lo puramente físico. El primer significado se referiría a la total expresabilidad de la realidad con las herramientas propias de las ciencias físicas, esto es, por medio de sus conceptos y ecuaciones, mientras que en el segundo sentido lo que se afirma es que en la realidad sólo existe lo físico, sin hablar de que su carácter sea o no expresable. Por todo lo cual lo de `fisicalismo´ sería otra forma de denominar el materialismo moderno, y se trataría, pues, de un cierto monismo, pero muy distante de la línea general de la ELV, que posee un fuerte substrato católico e indeterminista entre muchos de sus miembros. No obstante, en el `reísmo´ de Tadeusz Kotarbinski sí que pudiéramos vislumbrar cierta relación con el `fisicalismo´ antes apuntado. No olvidemos tampoco que el `fisicalismo´ conecta con la ontología mecanicista de René Descartes, basada a su vez en las investigaciones de Galileo, de Boyle o de Huyghens; de hecho, esta sería una de sus tesis, junto con la que afirma que `todo es máquina´ (el `maquinismo´). Al negar la existencia de entidades espirituales, eso llevaría a admitir que todo funciona rgido por leyes naturales, predecibles, y por tanto, al determinismo, lo cual estaría radicalmente en contra de lo defendido con tanto denuedo por Jan Lukasiewicz.

[354] Tanto la Teoría Restringida de la Relatividad como la Teoría General. No debe olvidarse la figura precursora de Ernst Mach, el profesor de Filosofía Experimental de la Universidad de Viena, que con veinte años de anticipación a los escritos de Albert Einstein, ya puso en cuestión el tiempo absoluto y el espacio absoluto, sometiendo a una crítica exhaustiva las bases de la Mecánica Newtoniana. No llegó, posiblemente, a plantear la Relatividad porque el contexto de la época no era aún al adecuado, pero la fascinación que en sus años de estudiante en Zürich sintiera Albert Einstein por este representante del “empiriocriticismo” no debe caer en el olvido. Einstein vino a matematizar y a popularizar ideas que ya estaban en los escritos y en la docencia de Mach. Ernst Mach realizó también importantes avances en

Cuántica, que partiendo de Max Planck, otros, como Janos Neumann, se encargan de matematizar, por medio de los Espacios de Hilbert, creando para sustentarla la *Quantum Logic (QL),* que ya desarrollaremos más adelante.

Aparte de lo anterior, conviene un comentario que ponga a la Filosofía de Polonia de posguerra en su contexto. Comentaremos primero lo que tienen que ver Hegel y su Lógica Dialéctica con el tema, puesto que estos autores se consideraban sus continuadores; eso sí, a través del filtro de Marx, que no de Mach.

Nos dice J. Velarde[355] que según Hegel y esa Lógica (la Dialéctica), el acto mismo del conocimiento es la introducción de la contradicción. El Principio de Tercio Excluso sería la proposición que pretende rechazar dicha contradicción, y al hacerlo, cae precisamente en contradicción: A debe ser + A y – A, con lo cual ya queda introducido el tercer término, el A, que no es ni + ni -, y por lo mismo, es + A y - A. Algo sería ello mismo y sería otro, dado que en realidad todo cambia continuamente, y la misma cosa se transforma en otra. Así, pues, se trataría de una lógica del movimiento, de la transición y de la transformación.

También decir que más adelante dicha lógica se intentó trasladar a un intento de explicación de los procesos históricos y económicos por parte de Karl Marx y de Friedrich Engels. Hoy en día se está intentando formalizar (ver,

---

Termodinámica, Óptica y Acústica; sobre todo, se dedicó al estudio del comportamiento de los fluidos a velocidades próximas o superiores a la velocidad del sonido (los ultrasonidos), bautizándose luego con su nombre el llamado *número de Mach,* como el cociente entre la velocidad de un cuerpo y la del sonido. También es en su honor el llamado *Cono de Mach,* sobre la forma de propagación de las ondas sonoras a altas velocidades.

[355] VELARDE, J., *Historia de la Lógica,* Universidad de Oviedo, 1989; pp. 409-417.

por ejemplo, las obras de Graham Priest) la Lógica Dialéctica, que se caracteriza precisamente por negar el Principio de No-Contradicción, y esto hace que sea una de las llamadas Lógicas Paraconsistentes.

Se asegura que la *síntesis* sería el tercer valor de verdad de ese sistema. Así, el profesor Diego Sánchez Meca[356] dice que:

> Frente al dualismo del entendimiento lógico-analítico, regido por el Principio de Identidad y por el Principio de No-Contradicción, la razón dialéctica aporta la posibilidad de concebir una tercera posición, distinta de A y de no A. Esta tercera posición es la síntesis, que en Lógica se expresa mediante el Principio de Tercero Excluido. La síntesis es, por tanto, el momento en que la contradicción se resuelve, al producir un concepto en el que la tesis y la antítesis se reconcilian. La síntesis es, por ello, la expresión de la relación implícita y necesaria que une los opuestos. En la síntesis, éstos son, al mismo tiempo, eliminados y conservados…

Entre los "filósofos oficiales" (marxistas, obviamente) de la época que comentamos se puede citar a *Adam Schaff (1913-2006),* que precisamente había nacido en Lvov. Estudió Derecho y Economía en París, especializándose en Epistemología. Cuando regresó a Polonia, en 1948, venía integrado en el Ejército Rojo victorioso, y se le adjudicó la primera cátedra de Filosofía Marxista de la Universidad de Varsovia. Durante años se constituyó en el paladín de la ortodoxia, pero con el tiempo fue adoptando una postura más humanista, en la línea de Kolakowski, quien pensaba que el objeto de la filosofía debe ser el hombre y sus acciones.

[356] DSM, *op. cit.;* pp. 317-318.

Ya que hemos hablado de *Leszek Kolakowski (1927-2009),* digamos que ha sido considerado uno de los filósofos polacos más sobresalientes, dentro del panorama contemporáneo. Fue evolucionando desde el marxismo hacia unas posturas más democráticas y antitotalitarias. Es bastante conocida su obra *Las principales corrientes del marxismo,* en tres volúmenes, donde hace un análisis crítico de dicho pensamiento. Durante años fue catedrático de Historia de la Filosofía en la Universidad de Varsovia, pero luego fue destituido de su puesto, por no ser demasiado adicto al régimen. Marchó luego al exilio, enseñando sucesivamente en las Universidades de Berkeley, Yale, Oxford y Chicago. Aparte del ya mencionado tema de la crítica al marxismo, se interesó por las corrientes cristianas disidentes.

Pero ambos autores, Schaff y Kolakowski, a pesar de que puedan considerarse representativos de una cierta época de la historia de Polonia, no formarían nunca parte de la ELV.

En la *Escuela de Lvov-Varsovia* se produjo entretanto una *tercera generación*[357] de filósofos, entre los que podemos destacar a *Tadeusz Kubinski (1923-1991),* del cual hablaremos más adelante, cuando tratemos de sus tres distintas aproximaciones a los "nombres vagos" (pragmática, semántica y sintáctica), con sus extensiones positiva y negativa para poder analizar los casos frontera, con la región de "penumbra" entre ambas extensiones. Se trata de una aproximación de notable interés al problema de la "vagueness"[358].

---

[357] Aún es bastante interesante.

[358] Decía Pablo González Prieto, en *Indeterminación y Verdad,* pp. 42-43, que "uno de los instrumentos fundamentales de comunicación filosófica y de desarrollo de la Filosofía en Polonia fue la revista trimestral *Ruch Filozoficzny* (El Movimiento Filosófico). Dicha revista fue

Otro filósofo polaco coetáneo del anterior sería *Tadeusz Pawlowski (1926-1996),* quien postulaba que la vaguedad de las expresiones del lenguaje tiene su raíz en la vaguedad extralingüística.

Volviendo al Preámbulo del hoy también desaparecido Monseñor J. Zycinski[359] (1948-2011) al libro de Pablo Domínguez Prieto, en él nos habla de la situación de los miembros de la ELV en un ambiente enrarecido y dominado por la todopoderosa doctrina oficial marxista, considerada como la única verdaderamente científica, y las otras, todas reaccionarias en mayor o menor grado, según sirvieran más o menos a los intereses del Partido:

> In Polish philosophical milieu, this very tradition (ELV) was very important in the time when Marxism was officially imposed as the only scientific philosophy. Many supporters of the analytic tradition… provided then exemplary patterns of intellectual responsability and moral honesty. They kept distance to dialectical materialism, and were criticized by ideological activists as defenders of the bourgeois philosophy. Perhaps logical criticism, so important for their intellectual style, not only facilitated avoidance of easy fascinations with unjustified axioms of Marxism, but also helped to defend personal dignity when this dignity was threatened by totalitarian style.[360]

Paralelamente, tras la Segunda Guerra Mundial, aparece con fuerza en tierras polacas la *corriente filosófica llamada la del personalismo.* La dura

---

fundada por Kazimierz Twardowski, en 1911. Sería publicada en Lvov (Lemberg) hasta 1939. Luego se reanudó en Torun (Thorn), bajo la dirección ya de su discípulo, Tadeusz Czezowski".

[359] Era el Arzobispo de Lublín desde 1997. Gran conocedor de la Lógica y de la Filosofía de la Ciencia. Había escrito unos cincuenta libros y trescientos artículos. De él dijo Michael Heller: "he was at home everywhere, he had friends everywhere. By pen and words he was denouncing all forms of bigotry and stupidity". Entre sus obras, podemos citar las siguientes: *Cultural Odyssey of Man,* 2005; *Christian Inspirations in the Origins of Modern Science,* 2000; *Three Cultures: Science, the Humanities, and Religious Values,* 1990; *God and Evolution*, 2006; *The Structure of Metascientific Revolution,* 1988; *Philosophy in Science,* 1985.

[360] ZYCINSKI, J., *op. cit.,* pp. 8-9.

experiencia vivida[361] condujo a la rápida maduración de estas ideas en Polonia. Pero con un rasgo diferencial importante: así como en su matriz francesa este movimiento tuvo ciertas simpatías por el comunismo ingenuo, en el caso del personalismo polaco su aversión por esa `pseudociencia´ fue total y visceral. Tras de ello estaba, sin duda, el estar bajo la sombra de Rusia, que manejaba a su antojo al gobierno títere impuesto sobre Polonia.

Entre quienes primero impulsaron la antes mencionada corriente allí estarían el Cardenal Sapieha, que creó también importantes revistas, como *Tygodnyk Powszcheny,* en 1945, o *Znak,* en 1946, tomando como modelo la publicación de *Esprit,* de Emmanuel de Mounier.

Otras influencias sobre el personalismo polaco serían las de Edmund Husserl, Max Scheler o Roman Ingarden, dentro del campo de la Fenomenología, o de Jacques Maritain y Étienne Gilson, desde el Neotomismo, así como de otros autores del personalismo francés.

Se formó un grupo de pensadores personalistas en torno a la Universidad Católica de Lublín, por lo que más tarde se llamaría el *Círculo de Lublín.* Contenía subcorrientes, como: la de Stanislaw Adamczyk, del tomismo tradicional; la del profesor Swiezawski, del tomismo existencial, que contiene influencias de Jacques Maritain y de Etiènne Gilson; también una versión “a la polaca” del tomismo trascendental de la Universidad de Lovaina, debido al trabajo de Mieszyslaw Krapiec; pero la tendencia más personalista en sentido estricto fue la encabezada por Karol Wojtyla y su grupo de debate.

[361] Tras las invasiones y el concienzudo arrasamiento, por los nazis primero y por los soviéticos después.

Otro grupo notable de pensadores fue el hoy conocido como *Círculo de Cracovia (CC),* vertebrado en torno a dicha Universidad Jagellónica, de sus alumnos y profesores[362]. Se puede decir que constituyen una de las expresiones más significativas del pensamiento católico en el periodo de entreguerras. Fue fundado por un grupo de teólogos y de filósofos. La diferencia esencial que mantenían respecto de los pensadores neotomistas tradicionales era la de aceptar la lógica formal moderna, tal como había sido desarrollada por la ELV[363]. Admitían la posibilidad de aplicarla a los problemas filosóficos y teológicos tradicionales.

Nunca fue un grupo muy numeroso, pero la segunda conflagración mundial lo disolvió, incluso con la desaparición física de alguno de sus miembros, como

---

[362] Uno de sus máximos exponentes, el Padre J. Bochenski, daba esta declaración de intenciones para su Círculo de Cracovia: "From the beginning, Catholic thought has been characterised by a tendency for a maximum precision. If modern formal logic has tools which, for their exactness, overcome physics and mathematics, then Catholic Philosophy should use those tools, achieving in such a way St. Thomas Aquinas, who developed his system on an axiomatic basis".
MICHALSKI, K., *Myl Katolicka wobec logiki wspczesnej (Catholic Mind in Relation to Modern Logic),* Poznan, 1937.
Dice Wolenski que:
"In September 1936, the Thid Polish Philosophical Congree took place in Cracow. Michalski invited a group of philosophers to address the question of the mutual relations of Catholic thought and contemporary logic… The Cracow Circle was the result of the meeting organized by Michalski."
JW, *Essays…,* ch. 3 (Polish Attempts to Modernize Thomism with Logic), 2013; pp. 56-57.
Y en la página 55 ya mencionaba que:
"Most Thomists were decisively hostile to or at best suspicious of relativism, positivism and liquidating metaphysics. Some Thomists pointed out that mathematical logic leads to atheism (Russell was mentioned as a principal example; in Poland, the same charge was labeled at Kotarbinski and Lesniewski). Hence, Catholic philosophers who wanted to apply logic to philosophy found themselves in a difficult situation."

[363] El problema de las relaciones entre el modo tradicional de cultivar la Filosofía (especialmente, por parte de los pensadores católicos) y la "nueva Lógica" no era nada nuevo. Porque ya en año 1927 se había desencadenado una viva polémica. Se produjo tras la publicación por Jan Lukasiewicz de su famoso artículo, donde proponía llevar a cabo una renovación total de la Filosofía en Polonia, utilizando para ello como herramienta la nueva lógica matemática. A ése debate se lanzaron filósofos tomistas, como H. Jakubanis, H. Enzelberg, J. Kopacz y P. Chojnacki, con una postura muy crítica respecto de la propuesta de Lukasiewicz. Incluso participaron en ella los mencionados Jan Salamucha y Józef M. Bochenski.

fuera el caso del padre Jan Salamucha (O. P.), que cayó durante el Levantamiento de Varsovia (o `Warsaw Uprising´), en 1944.

Entre los componentes más destacables del grupo se puede considerar, sobre todo, al también fraile dominico *Józef Maria Bochenski (1902-1995)*, quien -tras su paso por los frentes de batalla como capellán- fue profesor en Friburgo, y siguió la traza dejada por Lukasiewicz en el estudio de la historia de la filosofía.

Otro miembro relevante sería el antes mencionado padre *Jan Salamucha (1903-1944),* quien cuando estudiaba Teología en Varsovia había asistido a las clases de Lukasiewicz y de Lesniewski, lo que le llevó a apasionarse por la Filosofía y a especializarse en historia de la Lógica.

Un tercer representante que merece ser mencionado es *Jan F. Drewnowski (1896-1978),* el cual, tras haber estudiado Matemáticas, Física y Ciencias Técnicas, se pasó al estudio de la Filosofía y de la Lógica Matemática bajo la dirección de Kotarbinski, Lukasiewicz y Lesniewski. Colaboró con los dos antes mencionados pensadores. Con Jan Salamucha, en el campo de la Metafilosofía, y con J. M. Bochenski, en el de la modernización de la filosofía tradicional. Parece ser que elaboró un sistema lógico-simbólico propio, que habría desaparecido durante la guerra. Y un papel menor, dentro del grupo, lo jugaron *Boleslaw Sobocinski (1906-1980)* y el padre *Antoni Korcik,* historiador de la Lógica.

Puede situarse el origen de este Círculo de Cracovia en 1934, la fecha de aparición del artículo de Drenowski, “Zarys…”, que constituye una especie de manifiesto del grupo. En él se diseñaban las líneas fundamentales que habrían de seguirse, partiendo de los planteamientos de Lukasiewicz. Proponía en él introducir una serie de problemas semióticos en el pensamiento gnoseológico y ontológico, reflejando con ello el conocimiento humano como un sistema de signos[364].

Los `golpes de gracia´ definitivos al movimiento positivista parece ser que vendrían de diversos ángulos; entre otros, del artículo de William V. O. Quine, “Dos dogmas del empirismo”, en el cual denunciaba la distinción entre lo analítico y lo sintético; para venir diez años después Thomas Kuhn a completar su cuestionamiento, con *La estructura de las revoluciones científicas,* su famosa obra de 1962.

[364] Otro grupo, menos homogéneo y de características muy distintas que los anteriores, puede ser la llamada *Escuela de Poznan,* que se articula en torno a la Universidad de dicha ciudad, la antigua Posen para los alemanes. Fue una corriente marxista, que estaba en contra de una interpretación “humanista” del marxismo. En su lugar, pretendía subrayar sus características más científicas”, entrando en confrontación directa con la epistemología contemporánea. Lo que intentaba, en el fondo, era recuperar la herencia lógica y metodológica dejada por la ELV, a la cual trataba de suceder. Uno de los inconvenientes para lograr su propósito fue que carecieran de la preparación necesaria los círculos intelectuales de Poznan. Allí había enseñado Wladyslaw Tatarkiewicz, en la década de los 1920´s; Zygmunt Zawirski, a partir de 1928; Adam Wiegner, desde 1946 hasta 1956, etc. Pero se puede considerar que esta Escuela comienza su andadura con la publicación de un volumen, los *Studies on the Theoretical Foundations of Human Sciences,* en el año 1968. Una obra elaborada por dos autores, Jerzy Kmita y Leszek Nowak, quienes, junto con Jerzy Topolski, serían los máximos representantes del movimiento.

6. Jan Lukasiewicz: su obra y su entorno

Volviendo a la *ELV*[365], ésta ha constituido *el fenómeno más importante dentro de la historia del pensamiento polaco,* y sin lugar a dudas, es mundialmente su fenómeno más conocido y admirado.

Las controversias que surgen en Lógica con el advenimiento de los sistemas multivaluados[366] no se dan aisladas de otras cuestiones filosóficas,

---

[365] Recordemos que con el acrónimo ELV designamos a la Escuela de Lvóv-Varsovia que en la tesis vamos analizando. Ha de reseñarse también que a pesar de los muchos avatares que fueron actuando en su contra, la tradición de la escuela de lógicos y matemáticos polacos se ha mantenido desde el fin de la Segunda Guerra Mundial hasta incluso hoy día, si bien no se podría hablar ya estrictamente de que sea la ELV. Basta con citar los nombres de K. Kuratowski (1896-1980), gran especialista en la teoría de conjuntos y la topología (y quien, por cierto, había nacido también en Lvov, estudiando en su Politécnico); de Jan Wolenski, indudable patriarca de la historia que nos ocupa; Waclaw F. Sierpinski (1882-1969), con importantes aportaciones al estudio de la hipótesis del continuo y del axioma de elección, habiendo sido colaborador de Alfred Tarski y del mencionado K. Kuratowski; o de los actuales profesores Leonard Bolc, Piotr Borkowski, o P. Lutkowski, entre otros. Otro ejemplo notable de la actividad intelectual polaca de nestros días puede ser publicación de la revista P*JP (Polish Journal of Philosophy),* donde aparecen contribuciones de gran nivel, como las de J. Wolenski, P. Horwich, D. Jacquette, etc.
K. Kuratowski asistió a seminarios impartidos por S. Mazurkiewicz en Varsovia antes de la final de la guerra. Escribe que "ya en 1917 (Janiszewski y Mazurkiewicz) lograron la realización de un seminario de la topología, probablemente la primera en los nuevos tiempos. La reunión de este seminario, asumido a veces con muy vehementes discusiones entre Janiszewski y Mazurkiewicz, fueron un verdadero estímulo intelectual, el tratamiento necesario para los participantes". El papel que hubo de desempeñar S. Mazurkiewicz para la emergencia y mantenimiento de la escuela de matemáticas polaca fue hasta tal punto importante, que K. Kuratowski escribiría después que: "...Stefan Mazurkiewicz fue la figura central entre los profesores de matemáticas, especialmente en los primeros años de la existencia de la universidad (se refiere a la de Varsovia). Un brillante profesor, un trabajador de investigación muy activo, tuvo una gran influencia sobre los jóvenes y les animó a hacer de la investigación en sus propios campos de la matemática moderna".
I. Dambska dijo sobre éste círculo filosófico (el de Lvov, englobable dentro de la ELV), en un artículo suyo de 1948, que: "The philosophers of the Lvov group were not united by any common doctrine, but a uniform world-view. Not the content of philosophy, but rather the method of philosophizing and the common language were the factors which formed the foundations of the spiritual community of those people. That is why the school coud produce spiritualists and materialists, nominalists and realists, logicians and psychologists, philosophers of nature and art theorists."
DAMBSKA, I., "Forty years of Philosophy in Lvov…", *Przeglad Fil.,* 1948; p. 17.

sino que afectan de modo directo a los pilares fundamentales de la Filosofía[367]. Entre ellos, estarían la concepción de la Verdad y la posible unidad de las Ciencias. Nos encontraremos, por tanto, en la obra de Jan Lukasiewicz esa búsqueda constante de las relaciones que puedan existir entre los diversos problemas filosóficos.

Hablemos ahora algo más de nuestro *Lukasiewicz (1878-1956):*

Jan Lukasiewicz

Quien es sin duda la figura clave de nuestro estudio[368]. Para tratar así de mejor situarlo en su tiempo y dentro de su ambiente.

Jan Lukasiewicz nació en la ciudad de Lvov, entonces llamada Lemberg y que estaba en ese momento bajo dominio austriaco. Llegó a ser uno de los más notables matemáticos especializados en Lógica. De hecho, se le considera con justicia como uno de los padres de la Lógica Moderna, y por tanto, de la filosofía contemporánea.

---

[366] "Polivalentes", o de la MVL.
[367] Como dijera Pablo Domínguez Prieto, en 1997.
[368] Tal vez junto con su más brillante discípulo, Alfred Tarski.

Aunque muchos sólo le conozcan por su faceta como creador de la Lógica Multi-valuada (MVL), su magisterio en realidad alcanzó muchas otras áreas del pensamiento en general. Entre ellas, podemos citar la Metafísica[369], la Filosofía de la Ciencia y las regiones fronterizas entre ellas, que como suele suceder son las más fructíferas, seguramente por poco frecuentadas.

Su padre era un capitán del ejército austriaco, pero en su casa se hablaba polaco y fue una familia de verdaderos católicos romanos practicantes.

Lukasiewicz estudió Matemáticas y Filosofía en la Universidad de Lvóv y obtuvo su doctorado en 1902. De hecho, allí fue alumno de Kazimierz Twardowski (1866-1938), y el primero de entre ellos en decantarse por el estudio de la Lógica. Así que podemos considerar como su “abuelo” intelectual a Franz Brentano, y como su “padre” intelectual a dicho Kazimierz Twardowski, el principal transmisor de la herencia brentaniana. Todos ellos sobresalieron por su gran personalidad y carisma.

Algunos de sus compañeros de estudio fueron otras figuras muy eminentes de la cultura polaca, como es el caso de:

- *Kazimierz Ajdukiewicz* (1890-1963);
- *Tadeusz Czezowski* (1889-1981);
- *Zygmunt Zawirski* (1882-1948);
- *Tadeusz Kotarbinski* (1886-1981).

[369] Sobre todo, en un periodo inicial.

Continuó en su Universidad de Lvóv hasta 1915, cuando aceptó pasar a ser profesor de la Universidad de Varsovia, ciudad que estaba bajo la ocupación alemana en esa época.

La Universidad de Varsovia volvió a ser abierta en 1916, con un "staff" de profesores en su mayoría procedentes de la Universidad de Lvóv. A Lukasiewicz le contrataron allí como profesor de Filosofía. Tanto Jan Lukasiewicz como su maestro, Kazimierz Twardowski[370], dieron un impulso inicial y mantuvieron en un altísimo nivel a la Escuela de Lvóv-Varsovia[371].

La lista de filósofos y matemáticos jóvenes atraídos por el estudio de la Lógica y de la Matemática en la Universidad de Varsovia es asombrosa, por la cantidad y por la calidad, dado el relieve de muchos de sus miembros; así, por ejemplo, tenemos a:

- *Alfred Tarski* (1901-1983);
- *Adolf Lindenbaum* (1904-1941), en cuyo honor y el del anterior se puso su nombre a las Álgebras de Tarski-Lindenbaum;
- *Andrzej Mostowski* (1913-1975);
- *Moses Presburger* (1904-1943);
- *Jerzy Stupecki* (1904-1987);

[370] Este ya desde 1895.
[371] Que insistimos, se trata de mucho más que una escuela de filosofía analítica "a la polaca", como algunos ligeramente la consideran, sino que abarcando infinidad de temas y una fuerte herencia –que se remonta a Leibniz y a Bolzano- tiene una fuerte personalidad, que le hace diferenciarse del Círculo de Viena, con el cual mantuvo en ocasiones grandes divergencias.
Todos los componentes de la ELV, en mayor o menor grado, guardan una cierta relación, a veces no de afinidad precisamente, con los miembros del círculo vienés. En el caso de Lukasiewicz, se trata de una relación más aparente que real o intensa. Porque Lukasiewicz es mucho menos radical que ellos, y esto le sucede a casi todos los filófofos y lógicos polacos de la ELV. Básicamente, sería porque ellos no aplican ni las simplificaciones ni el reduccionismo a veces tan típicos de algunos miembros del grupo vienés.

- *Boleslaw Sobocinski* (1906-1980);
- *Mordechaj Wajsberg* (1902-1942), que completó y formalizó parte de las Lógicas Multivaluadas de su maestro, Jan Lukasiewiz.

Obsérvese que muchos de estos y otros estudiosos desaparecieron entonces, porque eran judíos y ya sabemos el triste final que a muchos de ellos y a sus familias les deparaba la llegada arrasadora de las "ideas" y los ejércitos nazis, seguida en el tiempo de la no menos devastadora acción soviética. Basta mirar, aparte de los nombres, quiénes terminaron su periplo vital hacia la década de los 1940´s. Y alguno de ellos, aun siendo judío también, como Alfred Tarski, salvaron sus vidas gracias a haber sabido escapar a tiempo[372] camino del exilio. Porque la muerte no es el único factor que vino a diezmar las filas de la ELV, sino que muchos con suerte o contactos lograron abandonar Polonia, como fue el caso mencionado de los Lukasiewicz, pero también de I. M. Bochenski, Hiz, Z. Jordan, Kalicki, Lejewski, Mehlberg, Poznanski, Sobocinski y Wundheiler. Para quienes se quedaron, o no consiguieron escapar, la destrucción de toda índole fue espantosa[373]; entre los más conocidos, murieron los siguientes filósofos polacos, mencionados por orden alfabético: Auerbach, Bad, los Blaustein, Igel, los Lindenbaum, Lempinski, Milbrandt, Mosdorf, Ortwin, Panski, Presburger, Rajgrodzki, Rutski, el padre Jan Salamucha, Schmierer,

[372] Antes de comenzar la guerra, y "viendo la que se les venía encima".
[373] Algunos de los miembros de la ELV abandonaron Polonia antes del conflicto bélico, o bien durante la Segunda Guerra Mundial. No volverían nunca, e intentaron seguir desarrollando su trabajo en el extranjero. Tal sería el caso de Jan Lukasiewicz, Alfred Tarski o Jozsef M. Bochenski. Los componentes judíos de la Escuela fueron, lógicamente, los más perseguidos por la furia antisemita. Pero no todos los miembros de la ELV se fueron del país; por ejemplo, allí permanecerían Tadeusz Kotarbinski, Kazimierz Ajdukiewicz o Tadeusz Czezowski (1889-1981).

Treter, Mordechai Wajsberg y Zajkowski. En los años siguientes a la guerra fallecieron también[374] Smolka, W. Witwicki y Z. Zawirski, entre otros.

Por ello no debemos pensar en absoluto que "cargamos las tintas" sólo por la parte que toca a la barbarie de los nacionalsocialistas y sus esbirros, pues en honor a la verdad, la barbarie soviética no fue mucho mejor.

Un caso al que también nos podemos referir, pues tiene mucho que ver con nuestro campo de investigación, es la figura del alemán *Gerhard Gentzen (1909-1945)*, uno de los más brillantes lógicos que haya dado la historia europea. Fue alumno de Hermann Weyl y de Paul Bernays[375], en la Universidad de Gotinga. Trabajó en la fundamentación de la Matemática y en la teoría de la demostración. Introdujo en 1934 la noción de sistema de deducción natural, tanto para la lógica clásica como para la lógica intuicionista. En el 1936 probó la consistencia de la teoría elemental de números.

Bajo el influjo del nacionalismo imperante y del nazismo inicialmente triunfante, se ofreció para dar clases en la Universidad alemana de Praga, afiliándose al partido nacional-socialista; pero sería finalmente detenido por las tropas soviéticas, e internado en un campo de exterminio, donde se le dejó morir de inanición. Esto sucedió en Mayo de 1945. Se trata, sin duda, de una venganza por las muchas tropelías que anteriormente habían llevado a cabo las tropas germanas y sus (aún más furibundos, en la mayoría de los casos) partidarios locales. Pero no deja de ser otro acto más de repulsiva barbarie,

[374] Por hambre o enfermedades derivadas del conflicto.
[375] Reiteradamente, como una especie de rueda macabra típica del ambiente y de la propaganda antijudía que intoxicaba entonces Alemania, Paul Bernays (que lo era, hebreo, como tantos profesores universitarios y pensadores en general) terminó siendo expulsado de su cátedra, lo mismo que le ocurriría al proscrito y gran analista Edmund Landau y a tantos otros, para ser sustituidos por mediocridades adictas al régimen y a la `ciencia aria´.

que aún alguien intentará justificar con aquella simple, manida y fatalista afirmación según la cual “la guerra es la guerra” y debemos conformarnos con todo lo que en ella pase.

Como detalle bien revelador de esa hecatombe humana y cultural, valga otra muestra. Se dice en el prefacio de la obra *Passages philosophiques* (segunda serie) que:

> Le première série des *Passages philosophiques* a paru en 1934, grâce aux efforts des élèves dont les moms figurent sur l´une des premières pages du libre. Parmi le cinquante et une personnes qui en faisaient partie, vingt sont aujourd´hui décédées. Nous n´avons plus aucune information à propos de cinq de nous autre collègues, et il semble justifié d´ajouter leurs noms aux vingt précédents.[376]

Así que mientras los primeros *Passages* fueron editados por cincuenta y una personas, todas ellas filósofos bien formados en las Universidades de Polonia, pocos de ellos habían sobrevivido, y en condiciones bien precarias.

Durante el terrible conflicto, siguió funcionando la Universidad, eso sí, de forma paralela y clandestina. Muchos de los profesores de Filosofía continuaron dando sus clases, a través de esa estructura subterránea. Así, podemos mencionar los casos del propio Jan Lukasiewicz, de Kotarbinski, de Tatarkiewicz, de Geblewitz, de los Ossowski, del padre Jan Salamucha, de Jerzy Slupecki, de Boleslaw Sobocinski, o de Sztejnberg, sólo en Varsovia. Porque hubo otros en diversas ciudades, como Ajdukiewicz y Dambske, en Lvóv, o Czezowski, en Vilnius. Apuntemos que algunas de estas poblaciones

[376] *Passages philosophiques,* 1958; p. 5.

quedaron tras la guerra fuera del territorio polaco; así, Lvov, en Ucrania, o Vilnius, en Lituania.

Un hecho reseñable parece desprenderse del artículo[377] en que se comenta mucha de la correspondencia intercambiada por Jan Lukasiewicz con su amigo, el lógico-matemático alemán *Heinrich Scholz.* Este le prestó apoyo desde que se desencadenara el conflicto bélico. De hecho, vino Scholz a dar conferencias a la Universidad de Lukasiewicz y viceversa (en la de Münster, que era la de Scholz), todo ello antes de la guerra. Incluso pidió Scholz que le concedieran el Doctorado Honoris Causa de su "alma mater" a Lukasiewicz, en 1939.

Este buen amigo de los Lukasiewicz fue inicialmente un estudioso de la Teología, de la cual se pasaría luego a la Filosofía, una disciplina de la que fue profesor en su Universidad de Münster desde 1928. Para terminar recalando en los estudios lógicos, que le ocuparon el resto de su vida. Esa nueva vía le dejó (ya para siempre) deslumbrado tras la lectura de los *Principia Mathematica,* de Russell y Whitehead. Para proseguir con ello de modo provechoso hubo primero de completar su formación matemática.

El hecho es que tras la invasión de Polonia, Lukasiewicz se encontró sin trabajo, sin hogar y sin dinero. Para colmo, su apartamento en Varsovia fue totalmente destruido en uno de los raids aéreos alemanes. Así que podemos decir que todos sus bienes cabían en una bolsa.

[377] Publicado por F. Schmidt, en 2006.

Como consecuencia, Scholz acogió (¿protegió?, ¿escondió?; de todo un poco) en Münster a los Lukasiewicz, y ello a pesar de que aquel, como nacionalista alemán que fuera, había sentido inicialmente considerables simpatías por el nacionalsocialismo.

Con el paso de los años[378], fundaría Scholz en Münster el "Instituto de Lógica Matemática y de Investigación de Fundamentos de las Matemáticas", por cuyas aulas pasaron brillantes alumnos, como es el caso del lógico Hans Hermes.

Cuando ya estaba Scholz muy mayor y gravemente enfermo, un paisano nuestro vino a estudiar allí, recibiendo la enseñanza directamente de Hans Hermes. Era el filósofo español Manuel Sacristán[379].

[378] V. Peckhaus propone en su artículo, que puede verse citado en la Bibliografía del final, que debemos considerar a Heinrich Scholz y a su grupo de la Universidad de Münster como una parte, aun cuando periférica, del neopositivismo lógico, utilizando ontología formal para la legitimación del cálculo lógico.

[379] No debemos dejar de mencionar, ya que sale el nombre de Manuel Sacristán, la obra dedicada a la divulgación de la *Lógica Simbólica* por Manuel Garrido, que parecía algo innovador en su tiempo, dentro del panorama español, o la publicación de la revista *Teorema.* Corramos un tupido velo sobre el problema de su cátedra y los sucesos de desajustes \`contables´ posteriores. Porque también debemos mencionar -sin duda ninguna- los posteriores esfuerzos del malogrado Alfredo Deaño, así como la labor de su grupo de amigos y de colaboradores (entre ellos, J. Muguerza, con su loable intento de dar a conocer los primeros autores de la filosofía analítica en estos "eriales patrios"). También han sido sobresalientes los esfuerzos dedicados por pensadores como Jesús Mosterín, en esa intersección entre Filosofía y Matemáticas que sería la Lógica, de la que hoy hablamos. Pero la Lógica Borrosa en particular cayó luego con demasiada frecuencia en las manos, no siempre cuidadosas ni bien informadas, de los informáticos, que la pretenden como ciencia propia. Estos ya habían ido invadiendo, progresivamente, el "nicho ecológico" desde antaño ocupado por los estudios de las Ciencias Exactas y las Ciencias Físicas, con la esperanza vana para los alumnos de un trabajo seguro y bien remunerado, dirigiéndose a la mismo tipología de alumnos que antes acudía a las disciplinas científicas. La precariedad de su formación lógico-matemática en la actualidad debe venir en gran medida de ese viciado origen. La Lógica Clásica (y junto con ella, las Lógicas No-Clásicas) constituyen la mente o el alma profunda de la Matemática y de la Filosofía, aunque algunos las desconozcan, e incluso las "enseñen". Debieran tener un papel central en el conjunto de los curricula de aquellos estudios que tengan que ver con el pensamiento; esto es, en todos ellos, de uno u otro modo. Sin ella, las andanzas de los supuestos "especialistas" correrán parejas a las de un pollo sin cabeza.

Entre 1939 y 1943 se preocupó Scholz de dar ayuda económica a los Lukasiewicz. Dichas transferencias de fondos consideradas eran ilegales entonces, por tratarse de territorios ocupados. El riesgo era tan real que en una situación bastante parecida, fue descubierto y detenido en 1939 el fraile dominico Jan Salamucha, también destacado miembro de la Escuela de Lvov-Varsovia. Fue deportado a un campo de concentración, donde acabaron sus días. Por más gestiones que estuvo haciendo Heinrich Scholz, no consiguió nada, sino dejar de ser advertido por las autoridades que sus actividades comprometían gravemente el honor del pueblo alemán.

Por intercesión de Scholz, conseguiría Lukasiewicz trabajo como traductor o intérprete en los Archivos de la Ciudad de Varsovia. También logró que a la esposa de Lukasiewicz, Regina, se le ofreciera un empleo en el Instituto de Varsovia para Asuntos del Este de Alemania. Esto les aportaría, al menos, una ración extra de comida.

Lo más llamativo es que[380] el riesgo que tanto temían los Lukasiewicz proviniese del otro lado: en caso de ser tomada la ciudad por el Ejército Rojo[381], ya que nueve de los parientes de Regina habían sido deportados por

---

Otro notable introductor de las corrientes innovadoras de la Lógica en España sería el navarro Juan David García Baca (1901-1992), hombre de gran preparación y de vasta producción, quien hubo de irse al exilio, como tantos otros. Por ejemplo, su obra:
GARCIA BACA, J. D., *Introducción a la Lógica Moderna*. Madrid, Labor, de 1936
fue citada y elogiada por autores tan prestigiosos como H. Scholz o I. M. Bochenski.

[380] Según parece desprenderse de la correspondencia que mantuvieron.

[381] Citemos aquí el comentario esclarecedor de Jaume Vicens Vives: "En la frontera oriental… los rusos habían llegado hasta las mismas puertas de Varsovia (julio de 1944), dejando que se malograra un levantamiento nacionalista polaco contra los alemanes, en provecho de un comité soviético que habían creado antes en Lublín".
VICENS VIVES, J., *La crisis del Siglo XX;* p. 370.
Esta fue en verdad la taimada y oportunista posición soviética, a la espera del debilitamiento de la resistencia del pueblo polaco: tras alentar la sublevación, dejando que los nazis les `remataran la faena´, machacando hasta sus cimientos Varsovia y sus pobladores, para acabar con el tiempo cayendo en sus manos.

las tropas soviéticas hasta el Asia, y luego terminaron muertos o desaparecidos. La razón última de este miedo de Regina Lukasiewicz estaba en su origen aristocrático y sus simpatías por Alemania, lo cual no equivale a decir por el nazismo, ni mucho menos. El temor era, pues, que a ellos les pudiera ocurrir lo mismo que a sus familiares. Estuvieron pensando primero en emigrar a Suiza, pero finalmente optaron por la católica Irlanda.

Volvamos ahora a su campo de estudio. Tal y como ocurrió con Kazimierz Twardowski, su maestro, el interés de Jan Lukasiewicz por la Lógica surgió cuando este percibiera que podía serle muy útil para resolver importantes problemas metafísicos, como el del determinismo[382]. Es por esto por lo que al intervalo temporal que va desde 1902 hasta 1915 se le suele llamar su "periodo metafísico", en el cual publica los artículos que tratan sobre cuestiones ontológicas. Pero en ningún caso ocuparía la Lógica para Lukasiewicz un lugar secundario, sino que tal como Twardowski vino desde la Psicología hasta la Lógica, Lukasiewicz fue remontando desde la Metafísica hasta sus estudios lógicos.

La visión de la filosofía como actividad o ciencia creativa es muy característica del pensamiento de Lukasiewicz, y también resulta algo fundametal para entender bien su obra. Pensaba él en la desacertada dicotomía entre arte y ciencia, según la cual la primera sería la única actividad realmente creativa, mientras que la segunda sería un mero reproductor de

[382] Que fuera desde siempre una especie de "leitmotiv", de idea recurrente, que subyace en casi todas sus investigaciones.

hechos. Esa división[383] ha provocado una brecha profunda y un notable desapego[384] entre ambas áreas de la actividad humana.

Porque ya había dicho Aristóteles que el origen de la ciencia es el asombro. Pues una verdad se puede decir que es científica, si[385] satisface la necesidad intelectual humana. Tal asombro sería casi una experiencia contemplativa, que permitiría alcanzar el lado oculto de la realidad, aquel para el que la simple razón no basta. Así que la ciencia es una actividad creativa, que trasciende los meros límites de la razón.

En el propio razonamiento detectaba Lukasiewicz signos claros de creatividad. Así, en la inducción incompleta[386], o en la formulación de hipótesis. Cuando establecemos una hipótesis, por ese mismo acto estamos creando un supuesto que luego hemos de verificar. Así que en toda generalización se puede observar un acto de naturaleza creativa, que no procede ni de la experiencia ni de la sola razón. Por todo lo cual la Lógica no se reduciría en absoluto a un puro desarrollo mecánico, a un “juego con símbolos sin sentido”, tal como muchos ven unas Matemáticas que no entienden, sino que aquí es donde de nuevo aparece[387] la libertad humana[388], un “libre albedrío” que él incorpora a su concepción de la Lógica. Al incluír en ella esa “nueva dimensión” es cuando aparece el carácter multivaluado de la Lógica de Lukasiewicz. Se trataría por tanto, de “una estructura formal que incorpora la posibilidad de

[383] Tan artificial como falsa.
[384] Con el correspondiente desconocimiento y la mutua negación correspondiente.
[385] Entre otras razones.
[386] La cual deduce un juicio a partir de otros, que no lo hacen derivar apodícticamente.
[387] Según Lukasiewicz.
[388] En contra de su “demonio familiar”: el determinismo.

operar con juicios cuya resolución depende de la libertad del hombre, y de juicios cuya resolución desconoce él por cualquier otra razón."[389]

Esta eventualidad quedaba[390] excluída en la Lógica Bivaluada[391]. Dicha LC está regida por el Principio de Bivalencia, según el cual toda oración enunciativa o bien es verdadera o bien es falsa. Y como es bien conocido, fue planteado por Aristóteles:

Sea A ser bueno , y B no ser bueno…;

a todo (sujeto) ha de convenir o A o B, y a ninguno ambos. [392]

O esta otra cita, también suya:

Respecto de lo que es y de lo que ha sido, es necesario que la afirmación o la negación sean verdaderas o falsas, y en lo que se (predica) universalmente de lo universal, siempre lo uno es verdadero, y lo otro, falso.[393]

Los sistemas lógicos multivaluados, en cambio, niegan el Principio de Bivalencia, lo que da lugar a que puedan presentar más de dos valores veritativos. Por esto se les llama *Lógicas No-Clásicas* (LNCs, en su acrónimo inglés).

Cabe plantearse la siguiente pregunta: ¿existe algún sistema lógico que sea el `correcto´? Para responderla cabe adoptar alguna de éstas cuatro posturas[394]:

---

[389] PDP, *op. cit.,* 1977; p. 22.
[390] Como bien sabemos.
[391] También llamada Lógica Bivalente, Bivaluada, o Lógica Clásica (LC).
[392] ARISTÓTELES, *Analíticos Primeros,* A46, 51b; pp. 36-40.
[393] ARISTÓTELES, *Peri Hermeneias,* 18ª; pp. 28-31.

La del Monismo (1).

La del Pluralismo (2).

La del Instrumentalismo (3).

La de “una lógica in systemarum varietate” (4).

La *“monista”,* o postura (1), sostendría que sólo existe una lógica (o sistema lógico) que sea la correcta. En este sentido dijo el propio Jan Lukasiewicz:

Estoy convencido de que uno, y sólo uno de los sistemas lógicos es válido en el mundo real… Bien es cierto que hoy por hoy no sabemos cuál sistema es, pero no dudo que la investigación empírica demostrará algún día … si las relaciones entre los hechos corresponden a la lógica bivaluada o a alguna de las lógicas multivaluadas.[395]

Dicha postura sería también la de otro miembro de la ELV, Stanislaw Lesniewski. Pero en el caso de Lukasiewicz ha de tenerse muy en cuenta la propia evolución de su pensamiento, desde una época metafísica hasta una época lógico-matemática, que también iría variando progresivamente, según grados.

---

[394] Como puede verse, por ejemplo, en la obra de Pablo Domínguez Prieto, *Indeterminación y Verdad…;* p. 23.

[395] En la traducción se empleaban los términos `bivalente´y `polivalente´, que no utilizamos nosotros. El artículo al que nos referimos es el de “Logística y Filosofía”, que aparece en la selección de *Estudios de Lógica y de Filosofía,* con algunos de los trabajos de Jan Lukasiewicz, y que fue preparada por Alfredo Deaño; ver pp. 123 y ss. Recordemos que para todo lo que sigue los nombres de los artículos de Jan Lukasiewicz que vamos a mencionar, aun cuando fueron originalmente -en la mayoría de los casos- publicados en polaco, vendrán bajo su título en inglés, dado que nos referimos generalmente a su traducción como:
Selected Works of Jan Lukasiewicz, ed. de L. Borkowski, preparada para la editorial NHC holandesa, en colaboración con la polaca PWN.

Otro partidario de esta primera posición sería Paul F. Linke, para quien los sistemas multivaluados no serían más que meras construcciones de tipo formalista, y en su concepto, vacías de contenido.

Para la postura *"pluralista",* o posición (2), se da la existencia de más de un sistema lógico correcto. Todos y cada uno de ellos tendrían la misma legitimidad, aun representando posiciones muchas veces irreconciliables entre ellas. Estaríamos en presencia de sistemas lógicos aislados, disjuntos entre sí, tal y como si se trataran de una especie de "mónadas lógicas". Un caso claro de alguien que defiende esta posición es el de Clarence Irving Lewis[396].

En el *"instrumentalismo",* o postura (3), es la noción de "corrección" la que resulta inadecuada, para ser aplicada a sistemas lógicos. En su lugar, debe hablarse de `validez instrumental´, porque para ellos la Lógica no debiera considerarse separada de su aplicación concreta. Así que carecerá de sentido afirmar que este sistema o el otro es `correcto´, sino tan sólo podremos decir que resulta válido para alguna aplicación concreta, y muy bien puede ser que no lo sea para otra. Así explicaba Destouches-Février su postura ´instrumentalista´:

> Il n´y a pas une logique unique indépendante de tout contenu, mais dans chaque domaine une logique se trouve adequate. Il y a interdependance du logique et de physique, du formel et du réel.[397]

[396] Se suele denotar abreviadamente como C. I. Lewis, para diferenciarlo del casi homónimo David Kellog Lewis, que se reduce a D. K. Lewis.
[397] DESTOUCHES-FÉVRIER, J., *La structure des théorie physiques*; p. 88.

Esta posición es la que mantienen que es necesario atribuir el valor veritativo intermedio a todos aquellos juicios relativos a la mecánica cuántica (QM).

Y la cuarta y última de las posiciones que vamos a analizar sería la que denominábamos `una logica in systemarum varietate´. Vienen a decir sus defensores que la única verdadera lógica se explicita mediante gran diversidad de sistemas. Entre tales partidarios estarían el investigador ruso A. A. Zinoviév, así como Rutz y L. H. Tharp.

También Nicholas Rescher se adhirió a este planteamiento, diciendo que:

> Nosotros adoptamos la doctrina de `un lógica in systemarum varietate´, la concepción de una misma `lógica´ que se manifiesta a través de la variedad de diversas sistematizaciones … mutuamente divergentes.[398]

También cabe asimilar a la misma postura los trabajos de D. H. Sanford y del lógico ruso D. A. Bochvar. Porque Sanford expuso que los sistemas multivaluados son diferentes versiones del único sistema bivaluado de Lógica. Llegando así a concluír la imposibilidad de la existencia de sistemas que nieguen el Principio de Tercio Excluso, sin que tengan que afirmarlo a la vez. Cabe con ello preguntarnos[399], una vez supuesta la relación entre los sistemas multivaluados y los sistemas bivaluados, ¿en qué orden de dependencia debieran situarse? ¿Es la Lógica Bivaluada subsidiaria de la Lógica Multivaluada, o bien sucede justo al contrario? Se trata de una serie de

---

398 RESCHER, N., *Many-Valued Logic;* p. 234.
399 DOMÍNGUEZ PRIETO, P., *op. cit.;* p. 25.

problemas que fueron siendo abordados con el tiempo por los diversos miembros de la ELV.

He aquí un texto de Lukasiewicz de 1918, que nos indica el camino que debemos seguir para interpretar su sistema lógico trivaluado, el que se denota por L_3:

> En 1910 publiqué un libro acerca del Principio de Contradicción en Aristóteles, en el cual pretendía demostrar que tal principio no es evidente, como se cree que es. Entonces, intenté construir una lógica no-aristotélica, pero en vano. Ahora creo haberlo conseguido.[400]

Para el tercer valor de verdad se han utilizado diversos nombres, como: *Indeterminación; Neutrum; Tercer valor veritativo; Posibilidad; Valor Indecidible, etc.* También el signo que lo representa es diverso, según los autores[401]. Así, tendríamos, entre otros, los siguientes: \`*1/2*´, \`*?*´, \`*I*´, \`*0*´, *etc.*

El primer texto donde adoptó Jan Lukasiewicz el símbolo "1/2" para designar el valor veritativo intermedio o indeterminado fue éste:

> Por ejemplo, \`En el espacio de un año estaré en Varsovia´ se puede pensar que ni es verdadera ni es falsa, sino que tiene un tercer valor indeterminado, que podemos simbolizar por \`1/2´. Pero podríamos seguir más adelante en el proceso, atribuyendo a las sentencias un número indeterminado de valores situados entre la verdad y la falsedad.[402]

[400] Es la "Farewell Lecture delivered in the Warsaw…", contenida en sus *Selected Works,* p. 84.
[401] Véanse los comentarios que hacemos a continuación.
[402] LUKASIEWICZ, J., *Elementos de Lógica Matemática.* Warsaw, 1929; p. 116.

Desde ahí el símbolo puede ir derivando en otros equivalentes, siendo también aplicables a los sistemas n-valuados, con $n > 3$. En el denominador de la fracción que representa al valor veritativo correspondiente aparecería una unidad menos que su multiplicidad, esto es, $n - 1$. Mientras que en el numerador irán apareciendo todos los valores intermedios entre el *1* y el *n* (éste, sin embargo, exclusive). Por tanto, si se denomina *m* al numerador, se tendría:

$$1 < m \leq n - 1$$

Con lo que para la lógica tetravaluada (cuando n = 4), se tendrían los valores veritativos intermedios:

$$0 = 0 / (4 - 1) = 0 / 3 = 0,\ 1 / 3,\ 2 / 3,\ 1 = 3 / 3$$

O en general, para las lógicas n-valuadas:

$$0 = 0 / (n - 1),\ 1 / (n - 1),\ 2 / (n - 1),\ \ldots,\ (n - 2) / (n - 1),\ 1 = (n - 1) / (n - 1)$$

Ese valor veritativo intermedio se puede asimismo representar como *`0´,* si la verdad se representa mediante `1´, y la falsedad por `-1´.

Otro modo de representación sería el *`?´,* un símbolo adoptado por algunos autores, como Tallet o Rescher. Trata de representar, del modo más intuitivo posible, que se desconoce el valor de verdad de un juicio. Equivaldría a un “o verdadero o falso, pero no lo sé”.

Una manera más sería la de utilizar el símbolo *`2´.* Ya que si se considerase un sistema n-valuado, entonces los números naturales que van entre el 1 y el n serían los valores veritativos intermedios. Esta notación es la de autores como Kalicki y Leblanc.

Una distinta de las anteriores, pero equivalente, sería la de usar la *`I´.* Obviamente, proviene de que sea la inicial de indeterminación. Puede extenderse fácilmente a sistemas lógicos más amplios que los trivaluados, recurriendo a los numerales adjuntos, o a los subíndices, junto a la mencionada I. Así, tendríamos: I1, I2, I3, …, In, ó bien I_1, I_2, I_3, …, I_n. Este es, por ejemplo, el sistema notacional empleado por K. Michalski.

También varía, según los pensadores consultados, la denominación dada a los valores valores veritativos no-clásicos. Entre ellos, el denominado *“neutrum”,* originariamente, fue utilizado por Guillermo de Ockham, el cual oponía las proposiciones verdaderas y falsas a las por él llamadas *“proposiciones neutras”,* dado que resulta imposible encasillar éstas en ninguna de las dos clases antes mencionadas.

El de *“indeterminación*”. Denominación que ya fue empleada por el lógico medieval Pedro de Rivo, el de las enconadas polémicas sobre los futuros contingentes de la Universidad de Lovaina, en el siglo XV. Pero lo cierto es que este nombre adquiriría más relieve con las investigaciones de los miembros de la Escuela de Lvov-Varsovia; en particular, uno de sus miembros más brillantes, Jan Lukasiewicz, aludió a ella cuando habló del símbolo antes apuntado: el de `1/2´.

El de *“posibilidad”.* Algunos sistemas de Lógica Modal han identificado el tercer valor de verdad con el modo de “posibilidad”, representable como ◊. Uno de los trabajos fundamentales y pioneros en este sentido sería el de Hans Reichenbach, acerca de los fundamentos lógicos del cálculo de probabilidades. También sería interesante el artículo de Patrick Heelan, comparando la Lógica Clásica con la Lógica Cuántica (de 1970).

El de *"valor indecidible".* Esta fue la expresión utilizada por el lógico ruso D. A. Bochwar, en 1937. A tal valor veritativo intermedio podríamos asignarle otros nombres, como "ausencia de valor de verdad", o bien el de "vacío de significado".

El de *"valor de verdad intermedio",* o el equivalente de "valor veritativo intermedio", una expresión que tiene la ventaja de no prejuzgar ninguna de las posibles concepciones que pudieran presentarse. Es la denominación adoptada en sus escritos por el recientemente desaparecido lógico español Pablo Domínguez Prieto.

No sería Aristóteles, sin embargo, el único que en la Antigüedad tratara el tema de las dificultades provenientes del Principio de Bivalencia. Pues tanto la Escuela Estoica como la Epicúrea ligaron este principio al problema del determinismo. En cuanto a los primeros, porque los estoicos eran deterministas[403], así que afirmaron que el Principio de Bivalencia tenía validez

[403] Muy en especial, la figura de Crisipo. La idea de aceptar que las sentencias, en determinados casos, pudieran no ser ni absolutamente verdaderas ni absolutamente falsas, abrió una duradera polémica (que se ramifica hasta nuestros días) entre dos posturas diametralmente opuestas. Por un lado, los Epicúreos, y por otro, los Estoicos. La razón última estaba en que estos últimos defendían un determinismo absoluto, extremo, con su equivalente en Lógica: la Bivalencia más ortodoxa. Mientras que la corriente epicúrea rechazaban ese determinismo, admitiendo la posibilidad de que ninguna de dos proposiciones, una de las cuales niega a la otra, haya de ser necesariamente cierta. Esto abre la puerta (implícitamente) a los *n* valores veritativos. Como caso particular y paradigmático, el de los sucesos aún por venir, esto es, los futuros contingentes. Esta es la razón por la que las Lógicas Multivaluadas, o las No-Clásicas, reciben también el nombre de no-Crisípeas (non-Chrysippean logics), como les llamaba -por ejemplo- Grigore C. Moisil. En ello también subyacía el propósito de no agraviar la memoria del gran Estagirita, hablando de Lógica No-Aristotélica.

universal. Mientras que los segundos, los epicúreos, eran indeterministas, lo que les llevó a negar la validez de tal principio.

En el medievo[404] también fue éste un asunto muy debatido, al engarzar la cuestión de los futuros contingentes con el problema de la libertad humana, el del libre albedrío, el determinismo, etc. Detrás de todo ello estaría la cuestión de la Divina Presciencia[405].

Ya se había referido a ese tipo de proposiciones el llamado Doctor Sutil, y más adelante, Guillermo de Ockham, con su clasificación de las proposiciones[406]. Aunque suela ser menos mencionado, también fueron muy

---

[404] No entraremos, sin embargo, en el análisis de la filosofía medieval árabe y judía, tan interesante, por razones de espacio y tiempo, aunque a través de la obra del Estagirita accedieran ellos también al problema de los futuros contingentes y con él, al del determinismo, que al fin y al cabo, era clave para los pensadores del medievo. Como sabemos, la interpretación que hizo Averroes de la obra aristotélica era tenida como la más "auténtica" durante la época medieval. Recordemos que las obras de Aristóteles y los diálogos de Platón habían sido traducidas por los árabes hacia finales del siglo IX d. C. Es asimismo interesante observar que el primer filósofo árabe destacado, Al-Kindi, fue uno de los traductores de Aristóteles. Entre los pensadores árabes más destacados, encontramos a Avicena, de origen persa; a Averroes (Ibn Rusd), en Qurtuba (Córdoba), y muchos otros, como Al-Ghazali (Algazel), Avempace o Ibn Tufayl (Abentofail). Entre los hebreos, sobresale el gran Maimónides. En el Islam, a excepción de Algazel (quien sostiene la libertad de la acción divina), para la mayoría de los pensadores árabes el mundo existe necesariamente no por sí mismo sino por depender de Dios, quien lo crea necesariamente. Dios no es libre de crear o no crear, crea por necesidad, porque crear está en su esencia. Es notable la controversia entre Algazel y Averroes, que se lanzan *La Inconsistencia de los Filósofos* y *La Inconsistencia de la Inconsistencia,* respectivamente. Pueden verse las obras originales de estos pensadores árabes y judíos medievales, así como las del profesor Andrés Sánchez Lorca, que trata sobre ellas. Consideración aparte merece el movimiento de los "mutazilíes", palabra que significa "los que abandonan o se apartan". Surgen en el siglo VIII d. C., en la época del califa abasí al-Mamún. Aparecen como una consecuencia de la traducción al árabe de los textos de los pensadores griegos, que se fueron realizando durante ese siglo y el siguiente. Argumentaban los mutazilíes que la justicia divina requiere del libre albedrío de los humanos, pues si el individuo no puede elegir entre lo bueno y lo malo, entonces el premio y el castigo carecen de sentido. Pero como Dios es justo y perfecto, no puede dejar de premiar el bien ni de castigar el mal. Subrayaban, además, la importancia de la razón y del empleo de una lógica rigurosa. Pero como pusieron en duda la legitimidad de un gobernante que no cuente con el apoyo de su pueblo, se consideraron subversivos por los califas abasíes.

[405] O *Divine Foreknowledge.* Esto puede verse con más detalle en la obra de Rescher, de 1963; pp. 43 y ss.

[406] K. Michalski mantenía que Guillermo de Ockham nos propuso en su momento una lógica trivaluada, cuando este escribió su Comentario al *De Interpretatione,* cap. 9, 18a, 19b-4, y piensa que lo volvería a hacer en la obra *Summa Logica.* Pero no está de acuerdo con ello Ph. Böhmer, ya que dice que Ockham, siguiendo al Estagirita, sostiene que no es cierto que para

notables los debates acerca de estas cuestiones que en el siglo XV se produjeron en la Universidad de Lovaina.

En 1929, Jan Lukasiewicz planteaba la necesidad de superar el sistema bivaluado de la Lógica Clásica. Exactamente, diciendo que:

> Se podría, con todo, adoptar una posición incompatible con el Principio de Bivalencia de la Lógica. De acuerdo con esta posición, las sentencias lógicas podrían tener valores distintos de los de la falsedad y de la verdad. Una sentencia de la que no sabemos si es verdadera o falsa, puede carecer en absoluto de un valor determinado respecto de la verdad o de la falsedad, pero puede tener otro tercer valor indeterminado. Por ejemplo, la sentencia `En el espacio de un año estaré en Varsovia´ se puede pensar que ni es verdadera ni es falsa, sino que tiene un tercer valor indeterminado que puede simbolizarse por un `2´. Pero podríamos seguir aún más adelante, y atribuír a las sentencias un número ilimitado de valores situados entre la verdad y la falsedad.[407]

Porque hablar de un suceso futuro-contingente consiste en hacerlo acerca de una cosa (o de un estado de ellas) en una situación que puede darse o puede no darse, esto es, que se trata de algo cuyo único correlato objetivo es el de la "posibilidad", ya que su realidad no estaría determinada antes que tenga lugar. Si en el momento t + 1 es ya verdadero o falso, lo estoy convirtiendo en un suceso "futuro necesario". Poniendo el famoso ejemplo de

---

toda proposición sobre futuros contingentes, si tal proposición es verdadera, su negación deba de ser falsa, y viceversa. Asegura Böhmer que Ockham pareciera tender a aceptar que dada una proposición que no sea ni verdadera ni falsa, se derivarían de ella consecuencias que sólo serían inteligibles dentro de las tablas veritativas de una lógica trivaluada. Por todo lo cual, dice Böhmer que en todo caso, se trataría de una aproximación "primitiva y cruda", no como dice Michalski, cuando este consideraba la aparición de ese tercer valor de verdad en Ockham como algo `irrefutable´. También William y Martha Kneale son de la opinión que sería equivocado atribuir la introducción del nuevo valor veritativo a Guillermo de Ockham.

[407] LUKASIEWICZ, J., *op. cit.,* 1929; p. 116.

Aristóteles, si hoy afirmo que mañana habrá una batalla naval, y esta sentencia es ya verdadera, estoy haciendo de la batalla un suceso necesario. La consecuencia inmediata de dicho planteamiento, según Lukasiewicz, sería el determinismo.

Por eso elige adoptar una postura que evite esa especie de “acantilado”, diciendo que:

> Voy a ilustrar esta noción mediante un ejemplo aristotélico. `Mañana habrá una batalla naval´ y `Mañana no habrá una batalla naval´ son enunciados contradictorios. Dos principios derivados del Estagirita, el de Contradicción y el de Tercio Excluso, hacen referencia a este tipo de enunciados. Me ocuparé aquí del segundo de ellos, el cual establece que dos enunciados contradictorios no serían falsos a la vez, esto es, que uno de ellos ha de ser verdadero. O bien mañana habrá una batalla naval, o bien mañana no habrá una batalla naval. Tertium non datur… Estas oraciones se refieren a eventos futuro-contingentes, y como tales, no son ni verdaderos ni falsos hoy.[408]

La verdad de los acontecimientos contingentes[409], piensa Lukasiewicz, no es sempiterna, sino eterna, es decir, que resulta verdadera desde el momento en que han acontecido, pero no antes de suceder.

¿Cuál debiera ser entonces el valor veritativo de estas proposiciones de futuro, ya que no son ni verdaderas ni falsas? Para responder a lo cual

---

[408] LUKASIEWICZ, J., 1922; pp. 47, 58.

[409] El Problema de los Futuros Contingentes fue una de las cuestiones de más relevancia tratadas en la ELV, pero no de igual modo para todos sus miembros. Así, de él se ocuparía fundamentalmente Jan Lukasiewicz, en la primera generación. Para ser luego vuelto a considerar por Jerzy Slupecki, en la segunda. Pero hubo otros problemas relevantes, como los de tipo lingüístico, en los que trabajaron Ajdukiewicz, Lesniewski y Kotarbinski, en la primera generación. Pasando el testigo a Stanislaw Jaskowski y Alfred Tarski, en la segunda. En cuanto a los relativos a la Mecánica Cuántica, estos serían abordados principalmente por Zygmunt Zawirski, quien ya pertenecía a la segunda generación, pero abordándolos con planteamientos que había heredado de los anteriormente formulados por Ajdukiewicz.

construye Lukasiewicz su sistema lógico trivaluado, o trivalente, añadiedo un tercer valor de verdad, aparte de los ya clásicos de V y F. Se trata de un sistema donde ya no tendrían validez ni el Principio de Bivalencia ni el Principio[410] de Tercio Excluso. Todo lo analizado hasta aquí podría hallarse mediante las *"modalidades".* [411]

Por lo que Lukasiewicz sostiene que:

…el sistema trivaluado de la lógica proposicional debe su origen a cierta investigaciones que yo realicé sobre las llamadas `proposiciones modales´, y sobre las nociones -estrechamente relacionadas con ellas- de Necesidad y de Posibilidad.[412]

---

[410] O *Middle Excluded Law.*

[411] No debemos olvidar que la interpretación de la `posibilidad´, a partir de los tratados del *Organon* de Aristóteles ha sido múltiple: así, según U. Zeglen (1998; pp. 106-107), estas podrían clasificarse en al menos cinco, identificadas mediante subíndices, pero donde ella pone L para necesario, nosotros pondremos $\Box$; para M, en cuanto posible (contingente), un símbolo $\Diamond$; reservando el I para imposible, con lo que por ejemplo $\neg$ I sería no imposible, o MNp, para: `es posible que no p´. Por `contingente´, entendemos algo que no es necesario, pero que una vez asumido, resulta que no es en absoluto imposible (según el *De Interpretatione,* XIII, 22b 36; de ahí la cuarta interpretación).
Quedarían, por tanto:

(1) $\Diamond_1 p \equiv (\Diamond p) \wedge (\Diamond \neg p)$
(2) $\Diamond_2 p \equiv (\Diamond p) \wedge (\neg \Box p)$
(3) $\Diamond_3 p \equiv \neg \Box p$
(4) $\Diamond_4 p \equiv \neg I p$
(5) $\Diamond_5 p \equiv \Diamond p$

La primera puede ser considerada como la *tesis del indeterminismo.* Esa interpretación es apoyada tanto por Lukasiewicz (en primer lugar), como por Hintikka, Bochenski y Seel, basándose tanto en el *De Interpretatione* como en los *Analíticos Primeros.* Este modo de interpretación que adopta Lukasiewicz –nos recuerda Zeglen- entraría en conflicto con el Principio de Bivalencia… es un punto de gran importancia para él, puesto que de acuerdo con éste, el rechazo del Principio para sentencias sobre sucesos futuros permite la defensa del indeterminismo. Mientras que la tercera interpretación sería la sostenida por Czezowski, el padre Bochenski, Maier, Ross y Seidl; asimismo, tomando como base dichos *Analitica Priora.* Esto forma parte de los avances sobre lógica modal del Estagirita, en su búsqueda de argumentos para acabar con el determinismo de los de Megara; especialmente, el de Crisipo.

[412] Lukasiewicz, 1930. Acudiendo al famoso pasaje lukasiewiczkiano de si estaré presente en Varsovia a mediodía del 21 de Diciembre del próximo año (Lukasiewicz, `Philosophical remarks on Many Valued Systems´, 1930; p. 165), no se puede negar que dicho pensador tuviese en mente el problema del determinismo y que este originase lo que al cabo fue su lógica 3-valuada. Pero Zygmunt Jordan dice que su motivación tendría un carácter más general, en cuanto que intentaba reducir la lógica de la modalidad a la lógica extensional.
JORDAN, Z., `The Development of Mathematical Logic in Poland between the Two Wars´. In Mac Call, S., as editor, *Polish Logic 1920-1939.* Oxford University Press, 1967.

Mantiene Jan Lukasiewicz en sus escritos de madurez que el Principio de Contradicción es universal, por lo que podemos afirmar que la versión constructiva de las cosas queda subsumida en la reconstructiva.

Dice Lukasiewicz, en su artículo sobre “Logística y Filosofía” que:

… El relativismo no es una consecuencia de la existencia de esos sistemas. De la posibilidad de distintos sistemas de lógica, y por tanto, de conceptos de verdad -dependientes del sistema lógico adoptado-, no se puede inferir que no haya verdades absolutas… Las verdades absolutas del pensamiento no se derrumbaron en 1930. Sea cual fuere el descrédito que alguien pueda arrojar sobre las lógicas multivaluadas, ése alguien no puede negar que su existencia no ha invalidado el Principio de Contradicción. Ésta es una verdad absoluta, que se cumple en todos los sistemas lógicos, porque si este principio fuese violado, toda la lógica y toda la investigación científica perderían su sentido.

El estudio de las proposiciones modales estuvo muy ligado a los orígenes de las Lógicas Multivaluadas, o MVLs; de la trivaluada, en este caso concreto[413]. Pero aun cuando algunas acepciones de la “posibilidad” puedan ser introducidas en el cálculo lógico bivaluado, existe al menos una que no tiene cabida en tales cálculos: sería la “posibilidad propia de los futuros contingentes”. Porque de ser incluída, incurriríamos en un determinismo.

Se está hablando, pues, de una de las primeras constataciones de Lukasiewicz sobre la existencia de distintas acepciones de la “posibilidad”,

Los tres teoremas en los que se basa la Lógica Modal resultarían incompatibles con el Principio de Bivalencia, no siendo por ello posible definir ningún operador modal que las verificase, si para ello utilizáramos las tablas de verdad bivaluadas. Esa sería entonces una razón de que Lukasiewicz abandonase el mencionado Principio.

siendo irreconciliables entre sí, en el estrecho ámbito de la Lógica Bivaluada, o Clásica. Esto lo comentaba en su artículo[414] cuando decía que “en la historia de la lógica nos encontramos con tres grupos de teoremas relativos a proposiciones modales…” [415]

Una vez establecida una lógica proposicional de tipo usual, y conseguido el desarrollo sintáctico del sistema, pasar a las cuestiones semáticas, reltivas al significado. En el caso bivaluado se consideran tan sólo dos valores de verdad (o veritativos), los clásicos de verdad o falsedad. A continuación, podemos ya introducir las tablas de verdad para la negación (denotada por $\sim$ en éste caso), pasando luego a las otras conectivas proposicionales: &, $\vee$, $\rightarrow$, $\equiv$ (conjunción, disyunción, implicación y la equivalencia o doble implicación, respectivamente). Se suele denotar esta lógica clásica bivaluada como $\mathfrak{C}_2$. Jan Lukasiewicz plantearía una axiomatización particularmente elegante de dicho sistema, para lo cual se basó en dos Reglas de Inferencia: la del *Modus Ponens,* o \`Rule of Detachment´, según la cual si p y p $\supset$ q son establecidos como teoremas, entonces también podemos asegurarlo de q (su \`teorematicidad´); la otra *Regla* sería la *de Sustitución,* la cual nos dice que una vez establecido p como teorema, es posible asegurar que será un teorema cualquier otra fórmula, p´, que se obtenga a partir de p por medio de la sustitución de p cuantas veces aparezca en alguna variable proposicional.

La *lógica trivaluada de Lukasiewicz,* $\mathfrak{L}_3$, sería un paso adelante, dado por él en 1920, introduciendo para ello un tercer valor de verdad: el *I,* por

[414] El antes mencionado, de 1922.
[415] LUKASIEWICZ, J., *op. cit.,* 1922.

intermedio, neutro o indeterminado. La base de este nuevo planteamiento estaría no sólo en el ya comentado problema de los futuros contingentes, sino en ciertas ideas acerca de la “modalidad”, introduciendo los “modos”, el de necesidad (□) y el de posibilidad (◊). Se construyen entonces las tablas de verdad, pero ahora con triple input (V, I, F), para cada conectiva proposicional. Existen diversos modos alternativos de expresarlas, pero los isomorfismos entre esas tablas de verdad y el conjunto dado inicialmente confirman que todas ellas representan uno y el mismo sistema de lógica multivaluada, sin que sea entonces muy relevante la diferencia entre los simbolismos empleados.

Asimismo, podemos considerar distintas variantes. Una sería el sistema trivaluado del lógico ruso *D. A. Bochvar,* propuesto en 1939, y que se basa en considerar el valor veritativo I como indecidible (undecidable). Suele denotarse este sistema por $\mathfrak{B}_3$. Contiene un subconjunto isomorfo al bivaluado $\mathfrak{C}_2$.

Más adelante, en 1954, un lógico chino, *Moh Shaw-Kwei,* sugirió una interpretación bochvariana del sistema trivaluado $\mathfrak{L}_3$. Para lo cual proponía que el valor de verdad intermedio, el *I,* fuese considerado como “paradójico”, y que le fuera asignado a proposiciones del tipo de la famosa “esta afirmación es falsa”.

Otro sistema trivaluado de interés fue planteado por *Stephen C. Kleene,* en 1938. Se suele designar por $\mathfrak{K}_3$. En dicho sistema kleeniano, se considerará que una proposición posee el tercer valor de verdad, *I,* no por razones ontológicas, relacionadas con lo factual, sino por razones epistemológicas, esto es, en relación con el conocimiento. La proposición se podría considerar entonces como desconocida o indeterminable. Kleene se inspiró para construir sus tablas de verdad en términos de una aplicación matemática. Introdujo para ello la distinción entre conectivas fuertes y conectivas débiles, y elaboró tablas para los dos tipos. Por cierto, que el sistema lógico basado en éstas últimas coincide con el $\mathfrak{B}_3$ de Bochvar. $\mathfrak{L}_2$ sería idéntico a $\mathfrak{C}_2$. Basta para ello con identificar 1 con V y 0 con F. Por su parte, $\mathfrak{L}_3$ coincidiría con el trivaluado de Lukasiewicz. Bastaría con identificar el 1 con V, el ½ con I, y el 0 con F.

Así que a la hora de generalizar, los sistemas L_n lo serían tanto del clásico bivaluado, $\mathfrak{C}_2$, como del $\mathfrak{L}_3$. Pero yendo más adelante todavía, se puede contemplar la posibilidad de los sistemas infinito-valuados (∞-valued). Admitiría dos subcasos.

El primero de ellos sería el sistema $\mathfrak{L}_{\aleph_0}$, tomando como su conjunto de valores veritativos el 0 y el 1, junto con todos los racionales comprendidos en el intervalo abierto unidad, $(0, 1) \subset Q$. Su cardinalidad sería, pues, la del aleph sub-cero ($\aleph_0$), o infinito numerable, que es la de los naturales, los enteros, los racionales, o todos aquellos conjuntos que se puedan poner en correspondencia biyectiva con ellos.

El segundo caso es el de $\mathfrak{L}_1$, donde se tomaría como conjunto de valores de verdad todo el intervalo cerrado unidad, el $[0, 1] \subset R$. En este caso, el cardinal sería el del aleph sub-uno, que es el de la potencia del continuo, o de los no-numerables, como los cuerpos de los números reales o de los complejos[416].

[416] No hemos de olvidar la idea de cardinalidad (generalización de la de número de elementos de un conjunto) y de los distintos tipos de conjuntos transfinitos que hay, porque está en la base del planteamiento por Georg Cantor de su "Mengenlehre" (o Teoría de Conjuntos), que luego va a ser revisada y mejorada con el paso del tiempo, dando lugar a las de Zermelo-Fraenkel (ZF) o a la ZFC (que es la ZF junto con el Axioma de Elección), y más adelante generalizada por Zadeh con la de los Conjuntos Borrosos, o `Fuzzy Sets´. El establecimiento de la ZFC se basó en la búsqueda de un sistema axiomático que no incurriera en las antinomias de la `naive set theory´, que era la inicial de Cantor, y que llevaba a paradojas como la famosa de Russell.
En 1874 probaba Cantor que el cardinal del conjunto de los enteros positivos es estrictamente menor que el de los reales: $\aleph_0$ = card (**N**) $<$ card (**R**) = $\aleph_1$. Cabe preguntarse si existen conjuntos cuya cardinalidad esté comprendida entre el aleph-sub-cero ($\aleph_0$) y el aleph-sub-uno ($\aleph_1$). La respuesta viene propuesta por la Hipótesis del Continuo (HC, en acrónimo), según la cual no existiría ningún conjunto intermedio, en cuanto a la cardinalidad se refiere, entre ellos:

$$\neg \exists A: \aleph_0 < \text{card } (A) < \aleph_1$$

Una vez admitido el famoso Axioma de Elección, existe un cardinal inmediatamente superior al $\aleph_0$, que es el $\aleph_1$. Con lo que la HC quedaría: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Cantor intentó en vano probarla. De hecho, sería este el primero de los problemas con los que David Hilbert desafiara a la comunidad matemática, en el ICM de París de 1900. El matemático de Göttingen había dicho en el ICM de París, de 1900, que: "Every system of infinitely many real numbers, i.e., every assemblage of numbers, or points, is either equivalent to the assemblage of natural integers, 1, 2, 3, ..., or to the assemblage of all real numbers and therefore to the Continuum, that is, to the points of a line; as regards equivalence there are, therefore, only two assemblages of numbers, the countable assemblage and the continuum". Y en 1925 escribía en una carta a Ernest Zermelo que: "This appears to me to be the most admirable flower of the mathematical intellect and in general one of the highest achievements of pure rational human activity ... No one shall be able to drive us from the paradise that Cantor created for us".
Sería ya en 1963 cuando se demostrase que la HC es un problema indecidible (esto es, que ni se puede probar ni se puede refutar) dentro del sistema axiomático ZFC, el antes mencionado. La prueba se hizo por dos vías; la primera, por Kurt Gödel, en 1938; la segunda, por Paul Cohen, en 1963.
Se puede dar una versión generalizada de la HC, la HCG, que viene a decir que existen cardinales transfinitos todo lo grandes que queramos; o dicho con notación simbólica: $\forall$ k $\in \Omega$, si card (A) = $\aleph_k$, entonces card [$\mathfrak{P}$ (A)] = $\aleph_{k+1}$. Recordemos que con $\mathfrak{P}$ (A) se representa el conjunto de partes de A, esto es, la familia de todos los subconjunto posibles de A, desde el vacío ($\emptyset$) hasta el propio A.
Otro resultado importante es aquel según el cual la HCG (o hipótesis del continuo generalizada) implica el *Axioma de Elección.* Recordemos que éste axioma postula que para cada familia de conjuntos no vacíos, existe otro conjunto que contiene un elemento de cada uno de ellos. Intuitivamente, sería como decir que si disponemos de cajas llenas todas ellas de bolas, se puede tomar una de cada una de las cajas, para formar un nuevo conjunto. Procedimiento trivial, para el caso finito. Pero que no lo es (y sin embargo, resulta indispensable en Teoría de Conjuntos) para el caso infinito. Fue planteado por Ernst Zermelo, en 1904, cuando intentaba probar que todo conjunto puede ser bien ordenado. A pesar de ser casi generalmente aceptado, hay algunos que lo cuestionan, buscándole inconsistencias con otros axiomas. Formalmente, cabe expresarlo como: $\forall A: \forall B \in A$, con $B \neq \emptyset \Rightarrow \exists$ f: Fun(f) $\wedge$ dom(f) = A $\wedge$ $\forall B \in A$, f(B)$\in$B. De este axioma existen diversas formulaciones equivalentes entre

Todo esto puede ampliarse con las obras de Rescher y Zinoviev sobre las implicaciones filosóficas de las lógicas multivaluadas.

Resumiendo, que podríamos decir[417] que Jan Lukasiewicz ha sido uno de los lógicos más eminentes, al menos de la primera mitad del siglo XX, y arriesgándonos más, posiblemente de toda la historia.

Tras él, todo el estudio de las Lógicas Multivaluadas se ha ido desdoblando en diversas disciplinas autónomas. Pero sin duda, les queda su impronta, pues los sistemas lógicos por él construídos son unas auténticas obras maestras en cuanto a sencillez se refiere y a elegancia formal.

---

sí. Su negación vendría a decir que existe una familia de conjuntos no vacíos que no tiene ninguna función de elección.
Volviendo a la famosa *Hipótesis del Continuo,* ésta se debe a Georg Cantor, y trata de la cardinalidad del conjunto de los números reales, la llamada `recta real´, denotada por **R,** también conocida como `el continuo´. En esencia, dice que no existen conjuntos cuyo tamaño (su cardinalidad) esté entre la de los enteros y la de los reales, esto es, entre el $\aleph_0$ y el $\aleph_1$ antes mencionados, que son los cardinales correspondientes a dichos conjuntos. El propio Cantor trató de demostrar la HC, pero esto no se llegó a lograr hasta que fueron dados dos pasos: el primero, en 1938, por Kurt Gödel, cuando complementó la ZFC con la HC; y el segundo, en 1963, cuando Paul Cohen prueba el recíproco. Con ello se obtienen sistemas consistentes, y se consigue mostrar que la HC es un problema indecidible en el sistema axiomático ZFC.
Por cierto, que Paul Cohen era también de padres judíos polacos emigrados a los Estados Unidos, y fue la única Medalla Fields (una especie de Premio Nobel de las Matemáticas) concedida a un cultivador de la Lógica Matemática. Aunque también fue un más que notable cultivador del Análisis Matemático (como de las series trigonométricas, por ejemplo), en la Universidad De Chicago, junto con Antoni Zygmund, quien creó escuela de analistas, dando lugar a matemáticos de la talla del argentino Alberto Calderón o del español Miguel de Guzmán, quien fuera profesor del doctorando. Cohen es famoso también por su método llamado del *"forcing",* que se utilizan para demostraciones de consistencia e independencia dentro de la Teoría de Conjuntos; así, por ejemplo, en el sistema de Zermelo-Fraenkel (el ZF, en acrónimo), entre el Axioma de Elección y la Hipótesis del Continuo, o para la Teoría de Modelos. Todos estos interesantes conceptos pueden verse en los libros ya clásicos sobre el tema, como el *Naive Set Theory,* del húngaro-americano (y judío) Paul R. Halmos, o los del propio Paul Cohen (también de ascendencia judía), o los de Kazimierz Kuratowski, entre otros.
Se habla aquí de las diversas axiomáticas con que se procuraron cerrar las fisuras dejadas a la luz por Russell y otros en la teoría ingenua (naive) de conjuntos, no sólo por su interés en sí, que sin duda lo tienen, sino porque la teoría de los Fuzzy Sets no deja de ser una generalización –con intenciones prácticas inicialmente, por parte de Zadeh- de todo ello.
[417] Sin temor a caer en ninguna exageración.

No debemos olvidar tampoco que además de todo lo mencionado, Lukasiewicz fue uno de los mejores historiadores de la lógica, a pesar de haber escrito poco sobre el tema; poco, pero muy selecto, ésa es la verdad.

La actividad académica de Lukasiewicz puede dividirse, “grosso modo”, en tres períodos, separados entre sí por alguna de las dos grandes conflagraciones mundiales. Antes de la primera de esas guerras, su atención estaba centrada en los problemas de la metodología de las ciencias empíricas.

Trató estas cuestiones, por ejemplo, en los siguientes artículos:

- “Of Induction as the Inversion of Deduction”, de 1903;
- “Analysis and Construction of the Concept of Cause”, de 1906.
- “Creative elements in Science”[418], de 1912.
- “The Logical Foundations of Probability Theory” es un trabajo fundamental[419]. Tanto es así que muchas de las ideas que contiene han sido copiadas una y otra vez por los diversos investigadores en el Cálculo de Probabilidades.

Incluso antes del estallido de la Primera Guerra Mundial, había estado relacionado Lukasiewicz con los temas de la Lógica Matemática, aunque él entonces aún la llamaba Lógica Algebraica. Su primer trabajo importante en esta línea fue el de “On the concept of magnitude”, de 1916.

[418] En el cual trata Lukasiewicz de las áreas de las que se ocupa y del valor que tiene la Ciencia. También establece una sencilla clasificación de los métodos de razonamiento.
[419] Uno de los más valiosos de Jan Lukasiewicz.

En su alocución de despedida de la Universidad de Varsovia, la "Farewell Lecture"[420], hacía las primeras referencias a la lógica trivaluada.

Tras el fin de esta primera y brutal confrontación mundial, la Lógica Matemática pasó a ocupar una posición central en las investigaciones de Lukasiewicz. Lo que más reclamaba su atención era el Cálculo Proposicional y la Silogística de Aristóteles[421].

Los principales artículos de Lukasiewicz en ese periodo llamado del "interbellum" son:

- "On Three-Valued Logic", de 1920.
- "Two-Valued Logic", de 1921.
- "A Numerical Interpretation of the Theory of Propositions", de 1922-1923.
- "Investigations into the Sentential Calculus", de 1930.
- "Comments on Nicod´s Axiom and on `Generalizing Deduction´",

  y añadiremos el
- "The Equivalential Calculus", de 1939.

[420] Dada el 7 de marzo de 1918.
[421] LeBlanc dice, respecto de la enorme influencia aristotélica en la filosofía polaca, y más en concreto, en la ELV, personalizada en Lukasiewicz, que: "Western (by which I mean mostly English-speaking) logicians (British, American, and later Australian logicians) often hold Aristotle in contempt, but in Poland, at least before the Second World War, Aristotle was more highly respected and most Polish logicians felt that they were building on and developing his tradition rather than replacing it. If the Western view is largely due to Bertrand Russell, the Polish view is certainly indebted to Lukasiewicz… Lukasiewicz also promoted a new interest in and understanding of the Stoics and of medieval logicians. A respect for the logical tradition is evident (for instance) throughout *The Principle of Contradiction in Aristotle,* the first book of Jan Lukasiewicz, published in 1910".
No olvidemos que es posible definir la Silogística Aristótélica por medio de cuatro de Reglas de Inferencia, que son las siguientes, para las proposiciones categóricas:
- Todo P es Q.
- Ningún P es Q.
- Algún P es Q.
- Algún P no es Q.
Dado que el Estagirita sería el primero en desarrollar el primer sistema formal para el "todos" y para el "algunos".

Daremos un rápido repaso a lo que ellos contienen[422]:

En el artículo “On Three-Valued Logic” formula por vez primera los fundamentos formales del cálculo lógico, diferenciándolo del de la Lógica Clásica. Aunque ya había escrito algunos comentarios anteriormente, acerca de las Lógicas No-Clásicas, en alguna de sus primeras obras[423]. Si bien esas referencias eran más de tipo intuitivo que formal.

En el paper “A Numerical Interpretation of the Theory of Propositions”[424] aparecen las primeras observaciones de Jan Lukasiewicz sobre las Lógicas Multivaluadas, así como sobre las aplicaciones que a estas pudieran tener para articular las pruebas de independencia de las tesis del Cálculo Proposicional.

En el “Two-Valued Logic”, tenemos un trabajo que en principio fuera proyectado como una primera parte de un estudio más amplio sobre las Lógicas Trivaluadas[425], pero ese escrito más amplio nunca llegaría a ver la luz. Se pueden observar en este “paper” la influencia de otros investigadores lógicos. En él se utilizó por primera vez el concepto de “rejected proposition”, que luego habría de jugar un papel tan importante cuando Lukasiewicz investigara la Silogística de Aristóteles desde el punto de vista de la Lógica Moderna.

---

[422] Estos trabajos pueden ser consultados en la edición de las *Selected Works* de Jan Lukasiewicz, que aparecieron en su original polaco en 1961, y luego fueron editadas en inglés. Véase Lukasiewicz, 1970, *op. cit.,* el volumen editado por L. Borkowski, para la PWN polaca y la NHC, holandesa, editándose en Varsovia; eso fue el año de 1970. Se trata hoy día de un libro prácticamente inencontrable, una auténtica rareza o pieza de coleccionista, pero afortunadamente se conserva algún ejemplar en determinadas bibliotecas de nuestras universidades, y puede conseguirse a través del préstamo interbibliotecario.

[423] Tal es el caso de la monografía *The Principle of Contradiction in Aristotle´s,* que es de 1910.

[424] Que como dijimos, es de 1922-1923.

[425] No olvidemos que tal y como se verá más adelante, Jan Lukasiewicz concibió la idea de recurrir a un sistema de lógica trivaluada (luego, generalizada a n-valuada, con $n \geq 3$), como una poderosa herramienta para llegar a resolver el enconado problema aristotélico de los futuros contingentes.

El artículo que lleva por nombre "Investigations into the Sentential Calculus" lo escribió conjuntamente con Alfred Tarski[426]. Aparte de ciertos resultados propios de ambos, también contiene los obtenidos por algunos de sus discípulos. Se trata de un verdadero clásico, que seguramente sea el trabajo más importante que se haya escrito nunca sobre la metodología del Cálculo Proposicional. En este trabajo, Lukasiewicz y Tarski tratan de axiomatizar del modo más preciso posible el Cálculo de Proposiciones. Del mismo podemos subrayar dos importantes expresiones:

- Que los axiomas del Cálculo Proposicional de Frege no son independientes entre sí, dado que el tercero puede deducirse de los otros dos.
- Que para el Cálculo de Proposiciones fundado en la implicación y en la negación, serían suficientes los tres axiomas siguientes:

  1.º) $(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$

  2.º) $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow p$

  3.º) $(p \rightarrow \neg p) \rightarrow q$

Destacaremos como resultados fundamentales de sus investigaciones en Metalógica[427] las pruebas obtenidas sobre:

- *Consistencia,*

[426] Que es de 1930.
[427] Recordemos que se llama *Metalógica* al estudio de las componentes y propiedades de los sistemas lógicos; entre dichas propiedades podemos citar las de Consistencia, Completitud, Decibilidad, Compacidad, etc., así como sus negaciones. Entre los resultados más importantes de Metalógica están el Teorema de Skolem-Löwenheim o los de Incompletitud de Gödel, junto con demostraciones de las propiedades antes mencionadas para la Lógica Proposicional veritativo-funcional, la de primer orden monádica, la indecibilidad de la de primer orden (relacionada con el famoso *Entscheidungsproblem* de Hilbert, resuelto por A. Church y A. M. Turing), entre otros.

- *Completitud,*

e

- *Independencia en el Cálculo Proposicional*[428].

Pero hemos de hacer también una mención muy especial a su demostración acerca de la completitud semántica[429].

En el "Comments on Nicod´s Axiom and on `Generalizing Deduction´", se analiza en detalle la notación sin paréntesis[430] de Lukasiewicz, esto es, la famosa "Notación Polaca", que es su original notación simbólica, sin paréntesis, sin llaves ni tampoco corchetes, y con todos los signos situados al principio, es decir, antes de los argumentos[431]; abreviadamente:

A: es el functor diádico "disyunción", que equivale al *V* de los *Principia Mathematica,* de Bertrand Russell y A. N. Whitehead.

C: functor diádico "implicación".

E: functor diádico "equivalencia".

K: functor diádico "conjunción".

---

[428] Resultado éste de 1929.

[429] Que es diferente de otras conocidas, como pueden ser las pruebas de W. V. O. Quine, Emil León Post, Laszló Kalmár, León Henkin, etc.

[430] Parenthesis-free.

[431] La notación habitual es la de expresiones que utilizan los operadores aritméticos entre los operandos, y emplean paréntesis en los casos de posible ambigüedad. Se conoce como *notación infija o normal*. La *notación polaca* sería una alternativa a dicha notación infija, que evita el uso de paréntesis y coloca los operadores o bien delante de los operandos (por ello se dice *notación polaca o prefija*), o bien detrás de ellos (en ése caso, hablamos de *notación polaca inversa o postfija*). Estas notaciones pueden resultar de una gran utilidad en los ordenadores, puesto que permiten realizar los cálculos de las expresiones de manera más sencilla, y por tanto, más rápida. Observemos que este sistema notacional es un cierto subproducto obtenido a partir del desarrollo por Lukasiewicz de su lógica trivaluada, y que para ella inventó sus propias tablas de verdad. En esta notación polaca, las proposiciones se escriben con letras minúsculas, y los functores, con mayúsculas.

M: functor modal de “posibilidad” (así, *Mp* querría decir que es posible `p´).

N: functor diádico “negación”.

Ofrece unos métodos sencillos y elegantes para probar tesis lógicas y que sirven también para desarrollar sus pruebas. En él también se aborda una importante propiedad de ciertos razonamientos lógicos, lo que él llama la deducción con generalización[432].

El “The Equivalential Calculus”, que es de 1939, debiera haber aparecido en el primer volumen de la revista *Collectanea Logica,* que fue tan sólo pensada e iniciada por Lukasiewicz. Pero como eran aterradores tiempos bélicos[433], con su maquinaria de destrucción, no sólo no llegó a publicarse nunca, sino que muchos de los trabajos se fueron perdiendo, cuando estaban como pruebas de imprenta, salvándose bien pocos; entre ellos, éste de Lukasiewicz.

En el periodo de entreguerras (el “interbellum”), o durante la Segunda Guerra Mundial, escribió Lukasiewicz cinco artículos filosóficos, que fueron:

- “On Determinism”.
- “Philosophical Remarks on Many-valued Systems of Propositional Logic”, de 1930.
- “Logistic and Philosophy”, de 1936.
- “In Defence of Logistics”, de 1937.
- “Logic and the Problem of the Foundations of Mathematics”, de 1941.

[432] “Generalizing deduction”.
[433] Nada menos que los de 1939.

El primero de ellos sería una versión revisada y ampliada de lo que contara Lukasiewicz durante su alocución como Rector de la Universidad de Varsovia, en la ceremonia de apertura del curso académico 1922-1923.

Abordaba en él las intuiciones que le llevaron a formular la Lógica Trivaluada, así como de su importancia para el análisis del que fue el problema central de todo su pensamiento: el del "determinismo".

En el segundo de los mismos, demostraba que la Lógica Modal no puede basarse en una Lógica Bivaluada, sino que lo ha de ser necesariamente sobre una Trivaluada.

El tercero corresponde al texto de la ponencia por él presentada al Congreso sobre los *Fundamentos y Métodos de las Ciencias Matemáticas,* celebrado en Zürich, el año 1938. Esboza en él un cálculo proposicional modal trivaluado[434].

Los dos artículos finales de esa relación versan acerca de la defensa que Lukasiewicz emprendió de la Lógica Matemática, la cual veía como la versión moderna y actualizada de la lógica formal de Aristóteles, en contra de las objeciones de *Nominalismo, Formalismo, Convencionalismo, y Relativismo.* En ellos se puede ver con claridad el talento de brillante polemista que poseyó sin duda Jan Lukasiewicz.

Aparte de todos estos, se debe mencionar también el paper "On the history of the Logic of Propositions", de 1934, y del cual el ya mencionado matemático alemán Heinrich Scholz dijo que eran las treinta páginas más

[434] Que es distinto del ya presentado en el "Philosophical Remarks…".

interesantes que se habían escrito nunca sobre la Historia de la Lógica. En él se demuestra, por ejemplo, que la Lógica de los Estoicos es una lógica proposicional, y no una lógica de términos, como erróneamente postulaba Karl Prantl.

Desde el punto de vista de los análisis de tipo histórico, uno de sus trabajos más interesantes es la monografía *Aristotle´s Syllogistic from the Standpoint of Modern Formal Logic,* de 1951.

Después de la Segunda Guerra Mundial, publicó Lukasiewicz doce trabajos, todos ellos sobre Lógica. De entre ellos, podemos citar:

- "The Shortest Axiom of the Implicational Calculus of Propositions", de 1948.
- "On the System of Axioms of the Implicational Propositional Calculus", de 1950.
- "On Variable Functors of Propositional Arguments", de 1951.
- "On the Intuitionistic Theory of Deduction", de 1952.
- "Formalization of Mathematical Theories", de 1953[435]
- "A System of Modal Logic", de 1953.
- "Arithmetic and Modal Logic", de 1954.

De lo que tratan los dos primeros es obvio, pues sus propios títulos los indican. El tercero aborda el sistema que crearon Stanislaw Lesniewski y él mismo, llamado la *"protothetics".* El método descrito sería la forma de escribir una definición por medio de una simple implicación, y eso es posible mediante

[435] Que estaba escrito, por cierto, en francés.

la introducción de variables functoriales en el Cálculo Proposicional. En el cuarto se llega a una sorprendente conclusión, como la de que el cálculo proposicional clásico es una parte propia del cálculo intuiconista. En el quinto se analiza la aritmética de los números naturales. En el sexto, construye Lukasiewicz un cálculo modal tetravaluado. Con ello retorna al problema que le ha estado asediando una y otra vez, durante mucho tiempo: el del *"determinismo".* Ofrece nuevas soluciones, distintas a las por él planteadas hasta el momento. El séptimo y último de los artículos mencionados viene a ser una especie de complementario del anterior.

Resumiendo, que tres de las contribuciones más importantes de Jan Lukasiewicz a la Lógica serían:

- La invención de una notación propia, que no precisa de paréntesis para evitar la ambigüedad.
- La investigación en las primeras Lógicas Multivaluadas; especialmente, en las Trivaluadas.
- La revolución que supone dentro de la Historia de la Lógica como disciplina, al servirse de la Lógica Matemática como herramienta para su comprensión y análisis.

Al reconstruirla, percibe estas cuestiones:

1.ª) que la lógica que hacen los componentes de la Escuela Estoica es una Lógica Proposicional;

2.ª) que la Escolástica medieval hizo aportaciones importantes y originales a la Lógica;

3.ª) que a Gottlob Frege debemos considerarle como el fundador de la Lógica Proposicional Moderna.

Lo que muestra Lukasiewicz es que a diferencia de la lógica de Aristóteles, la escuela estoica desarrolló un análisis que pudiera muy bien englobarse en la hoy denominada Lógica Proposicional. Respecto de los aspectos semánticos, muestra que como la actual semántica clásica, es bivaluada y funcional-veritativa. También le presta atención a la disyunción y a la negación.

Presenta la lógica estoica como un *sistema formal axiomático.* Lo de *formal* le viene porque está definido independientemente del significado de las expresiones. Y lo de *axiomático* es debido a que se encuentra estructurado mediante esquemas básicos, que serían los axiomas, y una serie de esquemas derivados de ellos, por medio de las Reglas de Inferencia.

Pues en verdad los miembros de la Escuela Estoica estaban muy orgullosos de la independencia de sus posiciones filosóficas. Miraban a la Filosofía como un animal vivo, del que la Lógica serían los huesos y nervios, o tendones (los "sinews", en inglés). Las otras ramas se repartirían el resto del cuerpo. Así, la Ética y la Física serían la carne y el alma, en ése orden o en el contrario. Sus puntos de vista filosóficos en Física y en Lógica no eran menos interesantes que los propios de la Ética. Recordemos que los estoicos dividían la Lógica en dos partes: la Retórica y la Dialéctica. La suya era una Lógica de Proposiciones, en lugar de una Lógica de Términos, como era el caso en la Silogística de Aristóteles. Decían que un argumento, para que sea válido, ha de haber sido construido mediante el uso de ciertas reglas básicas, las "themata", que podían reducirse a éstas cinco formas indemostrables siguientes, como nos cuenta Diógenes Laercio en sus *Vidas de filósofos* (36A). Debemos mencionar también a Sexto Empírico y a Benson Mates, que tan intesamente les estudió, apoyándose en dicho autor. En efecto, los argumentos de los estoicos pueden verse en Sexto Empírico, y un análisis pormenorizado en la obra *Lógica de los estoicos,* de Mates[436].

De su período anterior, el llamado *"periodo metafísico de Lukasiewicz",* debemos comentar su "concepción ontológica", que luego va a condicionar fuertemente su trayectoria en los años de los "estudios lógicos". Para el desarrollo de esas ideas se inspiraba en Alexius Meinong.

Pensaba Lukasiewicz que podemos distinguir entre dos tipos de "objetos":

> *1.º) Los objetos formados por "abstracciones constructivas"* que serían los "objetos puros"[437], en la concepción de Alexius Meinong. Lo de "constructivos" les proviene de haber sido creados, construidos o elaborados plenamente por el sujeto. El nombre trata de prevenir en contra de cualquier presuposición de existencia extralógica. De ahí que Jan Lukasiewicz les denominara "objetos incompletos"[438] o también "objetos libres de existencia".[439] Lo fundamental sería que el Principio de Contradicción no rige para estos objetos. Se trata de un ámbito ajeno a la consideración existencial; de ahí que Lukasiewicz considerase que esta "ciencia de los objetos constructivos" fuera anterior y más amplia

[436] MATES, B., *Lógica de los estoicos,* cap. V, pp. 103 y ss. Madrid, Editorial Tecnos, 1985. Trad. de la obra original, *Stoic Logic,* que fuera publicada por la University of California Press, en 1973.
[437] Los "Begriffsbildungen".
[438] "Unvollständige Gegenstände".
[439] "Daseinfreie Gegenstände".

que lo es la Metafísica. Tenemos, por tanto, dentro de esta subclase de objetos tanto los objetos sin posibilidad de existencia extralógica como aquellos que sí que admiten esa posibilidad, como sería el caso del famoso ejemplo: “la batalla naval de mañana”.

2.º) Los “objetos extralógicos actuales”, así como “los formados por abstracciones reconstructivas”. Estos sí que tienen “existencia actual”[440] y están regidos por el Principio de Contradicción. Se puede distinguir entre “cosas actuales”[441] y las “cosas reconstructivas”[442]. Un ejemplo de lo primero podría ser “monte Everest”, o “el río Jarama”, y de lo segundo, si reunimos “flor” de un determinado parque y “árbol” del mismo, proponer la composición “un árbol en flor”. Es, por ello, un término que se opone[443] al de “objeto constructivo”, pues se trata de una reelaboración construida a partir de seres extralógicos que son “en acto”.

El mismo Lukasiewicz confesaría haberse inspirado profundamente en los escritos de Aristóteles, y muy en especial, leyendo el pequeño tratado que lleva por nombre *De Interpretatione (*o *Peri Hermeneias).* Fue encontrando en él ciertas dificultades o dudas, y en su lección de despedida, pronunciada en el Aula Magna de la Universidad de Varsovia, en 1918, lo explicó con detalle. Al constatar la imposibilidad de formalizar en un sistema bivaluado de lógica proposicional las proposiciones referidas a los “futuros contingentes”, esto le hizo ver la necesidad de elaborar un primer sistema multivaluado, que contuviera tres valores de verdad.

[440] “Völlständige Gegenstände”.
[441] Aquellas que poseen existencia real y actual.
[442] Formadas a partir de las cosas actuales.
[443] Para Lukasiewicz.

No es de extrañar esa referencia al Estagirita, pues muchos consideran a éste como un precursor de la Lógica Borrosa, al poner en discusión la validez universal del Principio de Tercio Excluso. Analizaba éste allí si es necesario que una proposición sobre un hecho futuro contingente deba ser verdadera o falsa, porque si lo fuera, incurriríamos en un determinismo, al afirmar un juicio sobre una realidad que aún no ha tenido lugar.

Recordemos el breve texto siguiente:

> Así, pues, es necesario que lo que es, cuando es, sea, y que lo que no es, cuando no es, no sea; sin embargo, no es necesario ni que todo lo que es sea, ni que todo lo que no es no sea: pues no es lo mismo que todo lo que es, cuando es, sea necesariamente y el ser por necesidad sin más; de manera semejante, también en el caso de lo que no es.[444]

Es precisamente su rechazo de las posiciones deterministas lo que actúa como catalizador de sus propias concepciones, induciéndole a su creación del sistema multivaluado. Porque según las posturas deterministas, la verdad sería sempiterna, es decir, lo que es verdadero en un instante *t,* lo será también en cualquier momento anterior a *t.* Para Lukasiewicz, quienes defienden tales posturas pueden basarse para ello en dos Principios: el de Causalidad y el de Tercio Excluso.

Recordemos también que durante el "interbellum", o periodo de entreguerras (1918-1939), Jan Lukasiewicz fue el secretario o ministro de Educación de Polonia, y Decano de su Facultad, llegando a ser también Rector

---

[444] ARISTÓTELES, *Peri Hermeneias,* 9, 19ª, 24 ss. Vol. segundo del *Organon* aristotélico. Publicado en español por la Editorial Gredos, Madrid. Véase en la Bibliografía final.

de la Universidad de Varsovia durante dos períodos. Durante ese intervalo de tiempo, publicó alrededor de ochenta artículos, que versaban acerca de psicología, de matemáticas y de filosofía. Suelen distinguirse en ese periodo del "interbellum" dos subperiodos:

- El primero de ellos iría desde 1918 hasta 1929.

- El segundo sería el resto del mismo, es decir, desde 1929 hasta 1939.

7. Algunos otros miembros principales de la ELV.

Entre los integrantes de la Escuela de Lvóv-Varsovia, y de la mayor brillantez, estaba *Stanislaw Lesniéwski (1886-1939),* en cuanto que además sería uno de los promotores de la misma, junto con Alfred Tarski y Jan Lukasiewicz.

Lesniewski sería quien diera lugar a un sistema poco ortodoxo de fundamentación de las Matemáticas, basado sobre tres sistemas formales:

- *"Protothetic",* que sería un cálculo proposicional generalizado, esto es, una lógica de las proposiciones y de sus funciones. Se trata de un cálculo en el que los cuantificadores relacionan entre sí variables proposicionales relativas a funtores arbitrarios construibles sobre los funtores usuales.
- *Ontología,* en tanto que lógica de términos, es decir, de los nombres y de sus functores de orden arbitrario; y
- *Mereología,* que es una teoría general de las partes y el todo, así como de sus interrelaciones. La Mereología presupone tanto la Prototética como la Ontología. El término viene del griego μερος, que significa "parte". Se podría afirmar que es la teoría de las relaciones "inter-partes", es decir, de las relaciones de la parte con el todo, y de parte con parte dentro del todo. No se piense que no tiene antiguos precedentes

su estudio, pues pueden encontrarse raíces en los escritos de los Presocráticos, de Platón[445], y de Aristóteles[446], así como en Boecio y en los escolásticos medievales[447], y reaparece en la juvenil *Dissertatio de arte combinatoria*, así como en la *Monadología,* obras ambas de Leibniz. Incluso en los primeros escritos de Kant. Pero una teoría más "seria"[448] o detallada de esas relaciones no aparecerá hasta la época de Franz Brentano y de sus discípulos; especialmente, en la tercera de las *Investigaciones Lógicas,* de Edmund Husserl. Fue lograda esa exactitud con la obra de Stanislaw Lesniewski titulada *Foundations of a General Theory of Manifolds*[449]*,* pero sólo en polaco. Por esa circunstancia, quedó vedada para lectores no polacos, y hubo que aguardar hasta 1940 para que Goodman y Leonard consiguieran, con su *The Calculus of Individuals,* que la Mereología se convirtiera en un capítulo importante para los estudiosos de la Ontología y de la Metafísica. En general, la Merología va a consistir en una teoría de conjuntos, pero planteada con un cierto sentido `colectivo´, distinto del que tiene la teoría usual, la cual describe los conjuntos en sentido distributivo. Así que por ejemplo, la relación de pertenencia es transitiva, consideradada desde un punto de vista `mereológico´, mientras que no lo sería desde la perspectiva distributiva.

[445] En el *Parménides* y en el *Teeteto.*
[446] Especialmente, en la *Metafísica,* pero también en la *Física,* los *Tópicos,* o en el *De partibus animalium.*
[447] Como Pedro Abelardo, Raimundo Lulio, San Alberto Magno o su discípulo, Santo Tomás de Aquino.
[448] En el sentido de algo lógicamente bien estructurado.
[449] Publicada en 1916.

Stanislaw Lesniewski pensaba que su teoría de clases podía llevar a cabo todas las misiones de la teoría clásica de conjuntos, sin caer en las aporías (de hecho, inventó el sistema mereológico cuando intentaba resolver la paradoja de Russell). Él buscaba siempre el rigor máximo en la formalización y en la ejecución de la Lógica; junto con ello, mostraba un manifiesto rechazo de todas las entidades abstractas; esto le condujo a una muy precisa, pero inusual metalógica. Por todo ello se le sigue considerando como una de las figuras más originales que ha dado Polonia en el campo de la Lógica. Sus tres sistemas constituyen lo que podríamos denominar una \`gran Lógica´, y nos ofrece un lenguaje universal destinado a capturar y expresar el conocimiento. Pensaba Lesniewski, además, que ningún sistema lógico llega a estar nunca del todo cerrado, concluido, sino que siempre queda abierta la posibilidad de irle añadiendo nuevos elementos.

Las posiciones de Lukasiewicz y Lesniewski no deben considerarse contradictorias en todos los temas; no lo eran, ni mucho menos; por ejemplo, en su tratamiento del Principio de Contradicción, el cual observan desde distintas perspectivas. Porque mientras Lukasiewicz lo hace desde una postura que podríamos denominar epistemológica, Lesniewski lo hace desde una ontológica. Así, Lukasiewicz estudia cómo se puede llegar a conocer que dicho Principio es el primero y fundamental, mientras que Lesniewski va a partir de su primacía absoluta y de su carácter indubitable. De ahí que hablemos de una postura epistemológica frente a otra ontológica. No es, por tanto, que Lukasiewicz niegue tal primacía del Principio, sino que sea lo primero conocido. Son, pues, las de ambos posiciones complementarias, no contradictorias.

No debemos olvidar tampoco la muy eminente figura de *Kazimierz Ajdukiewicz (1890-1963),* que estudió en la Universidad de Göttingen, donde por aquel entonces enseñaban nada menos que el matemático David Hilbert, el famoso geómetra y lógico de dicha Universidad, y también el padre de la Fenomenología, Edmund Husserl.

Kazimierz Ajdukiewicz fue uno de los miembros más relevantes de la Escuela de Lvóv-Varsovia, dedicándose al estudio de la Lógica y de la Filosofía del Lenguaje. En ella, opuso a la concepción sintáctica del significado, que había sido planteada por Ludwig Wittgenstein[450] y Rudolf Carnap, miembros señalados del Círculo de Viena, la dimensión semántica que había ofrecido Gottlob Frege. En cuanto a la presentación de los significados como expresiones, Ajdukiewicz señalaba la necesidad de un sistema de Reglas similar a la Teoría Semántica de la Verdad propuesta por Alfred Tarski. La razón fundamental para que sus obras no fueran tan conocidas fuera de su país radica en que sólo se publicaran en polaco. En tiempos recientes, ha habido algunas traducciones, incluso alguna de ellas en español, como su *Introducción a la Filosofía*[451].

Su primer sistema epistemológico fue por él denominado “Convencionalismo Radical”, analizando todo lenguaje como un sistema de sentencias o de expresiones con unas Reglas de Inferencia que especifican las

[450] El mismo pensador austriaco, tan en boga hoy en día y que fuera en su tiempo el faro del Wiener Kreis, aunque nunca se reconoció a sí mismo como miembro suyo, Ludwig Wittgenstein, apuntaba ya en 1953 que los conceptos del NL (natural language) no poseen una clara colección de propiedades que los definan, sino que en su lugar lo que tienen son unas fronteras “extensibles”, las cuales existen en un grado u otro cuanto más o menos central sea la posición que ocupan dentro de las categorías.
[451] AJDUKIEWICZ, K., *op. cit.* Madrid, Tecnos, 2006.

relaciones entre sí de las expresiones, o de estas con los datos externos. Tales Reglas de Inferencia pueden ser de uno de estos tres tipos: *Axiomáticas, Deductivas* y *Empíricas.* Aplicando dichas reglas inferenciales, se pueden obtener casi todas las sentencias conocidas de un determinado lenguaje. Porque puede suceder también que algunos vocabularios de ciertos lenguajes produzcan sentencias desconectadas entre sí, de modo que sólo podrán ser parcialmente recogidas por dichas reglas. De modo que cuando utilizamos un lenguaje, aunque este sea científico, es necesario disponer de un aparato conceptual, que es un conjunto intraducible de significados. Por eso esta teoría es denominada “convencionalismo”, y el calificativo de “radical” le viene de que incluso los resúmenes de las experiencias estarán sometidos a este tipo de consideraciones. Se trata, sin embargo, de una teoría que el propio Ajdukiewicz iría descartando a partir de la década de los 1930´s.

Podemos distinguir en Ajdukiewicz tres etapas bien diferenciadas:

- La que va de 1921 a 1934, un periodo en el que mantiene la mencionada postura del *convencionalismo radical,* agudizando con ello el del matemático francés Henri Poincaré.
- La que va desde 1935 hasta 1946, en la que adoptaría un *empirismo moderado.*
- Y finalmente, la que abarca desde el 1947 hasta el 1963, cuando plantea lo que él llama *empirismo radical.*

La aproximación a los problemas filosóficos propia de Kazimierz Ajdukiewicz muestra cierto paralelismo con las ideas del Círculo de Viena; de hecho, cuando se habla de la "conexión" de la ELV con el CV casi debiéramos decir: Ajdukiewicz. Alguno de los otros miembros tuvieron algo que ver, pero mucho menos que él. Hemos de señalar, no obstante, que su postura filosófica ya se había consolidado antes de que apareciera el mencionado círculo vienés.

De los campos que cultivara Ajdukiewicz, podemos referirnos a que estos fueron, principalmente, la Lógica, la Metalógica y la Filosofía del Lenguaje. Su línea fundamental, en este caso, es la "teoría del significado". En ella va evolucionado según avanzan sus épocas. Así, en la primera de ellas, su concepción del significado era fundamentalmente sintáctica. Para ir luego variando, en las dos etapas siguientes (sobre todo, bajo la influencia de las ideas de Alfred Tarski), hasta llegar a enraizarse cada vez más en unos planteamientos puramente semánticos. Pero su postura hacia algunas de las bases teóricas de la MVL no fue precisamente de aceptación, como tampoco lo sería para Lesniewski o Kotarbinski. Así, decía en uno de sus trabajos:

> En particular, yo rechacé como inviable la exigencia de Lukasiewicz según la cual la experiencia decidiría la opción entre la lógica bivaluada y la lógica multivaluada construida por él. Yo creía que los axiomas de la Lógica estaban determinados por el lenguaje que nosotros usamos, y que la opción de un lenguaje o de un aparato conceptual asociado a él debe preceder a toda experiencia. Yo creí, por ejemplo, que uno no podría esperar a la experiencia para decidir si el Principio de Contradicción o la Ley de Tercio Excluso es verdadera.[452]

[452] Lo comenta K. Ajdukiewicz en su artículo "Empiricism and the concept of meaning". También puede ser interesante la lectura del trabajo de su discípulo, J. Giedymin, titulado "Radical Conventionalism. Its Background and Evolution".

Un personaje interesante, por lo atípico y lo pintoresco, un excéntrico cultivador del arte, sería *León Chwistek (1884-1944),* porque no sólo fue notable lógico, matemático y filósofo, sino que además, cultivaba la pintura[453] y fue un considerable teórico del arte. Desde 1929 ocupó la cátedra de Lógica de la Universidad de Lvóv, tras competir por ella nada menos que con Alfred Tarski, fracaso que debió pesar bastante en la decisión de éste de partir hacia América. Parece ser que Bertrand Russell influyó para que la decisión recayese sobre León Chwistek. Este pensador, durante la década de los 1930´s, estuvo muy interesado en la elaboración de un sistema general de Filosofía de la Ciencia, que aparecería publicado en inglés bajo el título *The Limits of Science*[454]*.* Porque tanto en esa década como en la anterior fueron muchos los filósofos embarcados en la reforma de la Filosofía por medio de la Lógica Matemática. Pero León Chwistek pensaba que ese no era más que un intento condenado de antemano al fracaso, porque la realidad no cabe describirla por medio de un sistema homogéneo, que se base en los principios de la Lógica Formal. La razón de esta imposibilidad radica, según él, en que no existe una sola realidad, sino que hay una multitud de ellas. Así que su teoría de la "realidad plural" sería un intento de especificar los distintos modos en que el término "real" puede ser utilizado. Era en el fondo un acérrimo defensor del "sentido común", y siempre se manifestó en contra de la metafísica y del sentimiento irracional.

[453] En la línea de las vanguardias.
[454] CHWISTEK, L., *The Limits of Science,* 1948.

Otro de los discípulos de Jan Lukasiewicz sería el fraile dominico *Józef Maria Bochenski (1902-1995)*[455]*.* Este había nacido en la localidad polaca de Czuszow y murió en la ciudad suiza de Friburgo. Entró -como en su día hiciera Franz Brentano- en la Orden de Predicadores (los frailes dominicos) el año 1927. Llegó con el tiempo a ser profesor del Collegium Angelicum, en Roma, durante los años que van desde 1935 hasta 1940. Luego dio clases en la Universidad de Friburgo.

Bochenski dedicó gran parte de su abundante obra al estudio de la *analogía.* Pero también son notables sus trabajos acerca de la Historia de la Filosofía, que principalmente versaban sobre la lógica de la Antigüedad; particularmente, la de Teofrasto de Alejandría y la lógica oriental. Concedía un importante valor a la Lógica de los Escolásticos, tanto los del siglo XIII como los del siglo XIV. Otra importante observación debe hacerse acerca del padre I. M. Bochenski: la de que es uno de los reivindicadores de la lógica estoica, como puede verse en la siguiente cita, procedente de su *Ancient Formal Logic:*

Modern history of Logic had been started during the XIXth century, but its state was very bad at that time -indeed until 1930 approximately-, because of two phenomena. On one hand, most of the historians of logic took for granted what Kant said on it; namely that `formal logic was not able to advance a single step (since Aristotle) and is thus to all appearance a closed and complete body of doctrine´; consequently, there was, according to them, no history of logic at all, or at the most, a history of the decay of Aristotelian doctrines. On the other hand, authors writing during that period were not formal logicians and by 'logic' they mostly understood

[455] Ya mencionado cuando nos referíamos al Círculo de Cracovia, en el cual se debe considerar integrado.

methodology, epistemology and ontology. . . We may place the beginning of recent research in our domain in 1896 when Peirce made the discovery that the Megarians had the truth-value definition of implication.[456]

Bochenski pensaba que las lógicas formales nos pueden proporcionar muchas más enseñanzas filosóficas que la grandilocuencia transcendental de los grandes sistemas totalizadores.[457]

También deberíamos recordar[458] aquí a los miembros de la tercera generación de pensadores de la ELV, como *Tadeusz Kubinski (1923-1991),* o *Tadeusz Pawlowski (1926-1996)*[459].

---

[456] BOCHENSKI, I. M., *op. cit.,* pp. 4-5.

[457] Aquí asoma claramente la impronta de Franz Brentano, de Kazimierz Twardowski y de Jan Lukasiewicz, que en cuanto a la historia del pensamiento, se pueden considerar el “bisabuelo”, el “abuelo” y el “padre” de Bochenski, respectivamente.
Decía Bochenski que han de aunarse filosofía y teología con el apoyo de la nueva lógica formal, considerando: “propositions with truth-values…a structured body of propositions connected in meaning and subject matter, and linked by logical relations of compatibility and incompatibility, entailment, etc… The Cracow Circle set about investigating and where possible improving this logical structure with the most advanced logical tools available at the time, namely those of modern mathematical logic, then called ‘logistic’.” (Bochenski, 2003).

[458] Aparte de todos los ya mencionados, cabe reseñar una de las versiones del tomismo polaco, que es conocida como *tomismo analítico.* En ella se interpretaban las teorías del Aquinate por medio del análisis lógico y de la formalización de sus textos. Se trataba de una rama neoescolástica muy especial, entremezclada con lógica formal y por ello mismo nada bien vista por las instancias oficiales, en parte derivada de lo que en su día fuera la Escuela de Lvov-Varsovia. Entre sus fundadores estarían: el Padre Jan Salamucha (1903-1944), discípulo de Lukasiewicz; el fraile dominico Józef A. Bochenski (nacido en 1902), antiguo alumno de las Universidades de Lvov y Posen, pero no de Lukasiewicz, que llegaría a ser profesor y rector en la de Universidad de Friburgo. Ellos fueron quienes intentaron modernizar el tomismo polaco mediante la Lógica Moderna. Cabe también mencionar a Jan Franciszek Drewnowski (1896-1978), quien fuera discípulo de Tadeusz Kotarbinski.
Otro pensador que también perteneció a esta corriente fue Józef Iwanicki (nacido en 1902), quien estudió en Estrasburgo y París, llegando a expresar sus ideas en un par de obras de títulos más que reveladores: *Leibniz et les démonstrations mathematiques de l´existence de Dieu* (publicada en París, en 1933), y *Morin et les démonstrations mathematiques de l´existence de Dieu* (que también aparecería en París, pero ésta, en 1936). Siempre se manifestó Iwanicki en favor de reconstruír el tomismo al “geometrico modo”. Esta versión de la filosofía tomista fue bien acogida por Jan Lukasiewicz y por Stanislaw Kobylewski (1864-1939). Un nombre más a añadir a esta lista sería el de Benedikt Bornstein (1890-1967), que intentaba conseguir la introducción del método matemático en la metafísica. El programa de perfeccionamiento del tomismo fue apoyado por otros pensadores, como P. Chojnacki o K. Michalski.

[459] También podríamos mencionar el considerable influjo, aunque indirecto, sobre ciertos pensadores, como es el caso del polaco-norteamericano Alfred Korzybski (1879-1950), quien

Volvamos atrás, a fin de completar el panorama del pensamiento de nestra escuela polaca. Durante la primera época se desarrollaron las enseñanzas de Lesniewski y de Lukasiewicz, así como sus trabajos científicos, aunque no todos fueran publicados entonces. Pero la verdadera "explosión" de trabajos tuvo lugar durante el segundo de los periodos.

Lesniewski y Lukasiewicz se encontraron en 1911. El mismo Lesniewski nos cuenta que ya en esa época había leído la que consideraba como una obra maestra de Lukasiewicz: el "On the Principle of Contradiction in Aristoteles", que era de 1910. Según Lejewski, decía Lesniewski que había llegado entonces a criticar a su autor. Ese mismo de año, de 1911, escribiría Lesniewski "Un intento de prueba del Principio de Contradicción", que fue publicado al año siguiente, en los *Przeglad Filozoficzny,* y que iba dirigido contra el escrito antes por Lukasiewicz. Así como lo que Lukasiewicz pensaba acerca del Principio de Contradicción es bastante conocido, no lo es tanto en el caso de la opinión de Lesniewski. De ahí que la controversia entre ambos acerca de él permanezca bastante poco conocida. Lo cual no quiere decir en absoluto que Lesniewski no apreciara el trabajo de su colega, pues de él dice que:

---

se hiciera conocido por desarrollar la teoría de la *Semántica General.* Decía que el conocimiento en los seres humanos está limitado por la estructura de su sistema nervioso y también por la estructura de su lenguaje, por lo que el hombre suele confundir las percepciones y la lengua con los hechos a tratar. Es famosa su frase: "el mapa no es el territorio". El sistema elaborado por él trata de modificar la manera en la que los seres humanos interactúan con el mundo externo. Su obra influyó notablemente en diversos campos, como el de la terapia Gestalt o el de la programación neuro-lingüística, entre otros. La relación de Korzybski con la ELV vendría más bien por la línea que desde Franz Brentano y Kazimierz Twardowski sigue por Alexius Meinong, esto es, de una de las dos facetas de la filosofía, según Brentano; concretamente, de la vertiente psicológica.

(My) results…on the whole oppose the theoretical theses supported by Lukasiewicz… But the polemical character (of some passages) should not arouse in the reader the erroneous conviction that I turn a blind eye to the theoretical value of Lukasiewicz´s work, which I regard as one of the most interesting and original of the entire `philosophical´ literature known to me.[460]

De hecho, el trabajo de Lukasiewicz tuvo una duradera influencia sobre Lesniewski. Este, por ejemplo, en él vino a encontrar la antinomia de Russell sobre la clase de todas las clases que no están subordinadas, o contenidas, en sí mismas. De hecho, su relativamente famosa teoría de la `Mereología´ tiene su origen en el intento por parte de Lesniewski de resolver las antinomias de la teoría de conjuntos. Lukasiewicz pensaba que la antinomia de Russell era un `objeto contradictorio´, mientras que Lesniewski ponía en duda la existencia de tales objetos. Llegó incluso a escribir un `paper´sobre el tema: "Is the Class of Classes…?", en 1914, tras su "Critiques…". En dicho trabajo ponía reparos a la LEM, en base a lo que él denominaba el `Principio Restringido de Tercio Excluso´, según el cual: una sentencia con sujeto denotativo y predicado connotativo es verdadera si y sólo si (syss) su singular contradictorio es falso. Para ello se basaba en el escrito por León Chwistek en 1912, acerca del Principio de Contradicción a la luz de las investigaciones (entonces, recientes) de Bertrand Russell.[461]

[460] LESNIEWSKI, S., 1912.
[461] Pueden ser ilustrativos los comentarios de A. Betti (1997).

8. Retorno a Lukasiewicz.

Volviendo sobre nuestra figura central y su esposa, Regina, estos padecieron[462] incontables penalidades durante la Segunda Guerra Mundial. Por ejemplo, su apartamento ardió como consecuencia del incendio provocado por un `raid´, o un bombardeo aéreo, perdiéndose con ello tanto su biblioteca como sus preciados manuscritos, por lo que ya le resultaba imposible seguir trabajando.

Lukasiewicz empezó a dar clases en la "universidad subterránea"[463]; también ayudó en el gobierno de la ciudad, que estaba bajo la ocupación de los ejércitos nazis. Amigos de Suiza y de Alemania le ayudaron a huir, junto con su esposa, poco antes del levantamiento de Varsovia[464].

Lukasiewicz permanecía aún oculto en la ciudad alemana de Münster[465] cuando fue liberada por tropas americanas, en abril de 1945. Luego se trasladó a la capital de la católica Irlanda, Dublín, donde aceptó una cátedra de Lógica en la Real Academia Irlandesa, siendo nombrado, además, miembro del Instituto de Estudios Avanzados. Fue capaz desde entonces de volver a dar

[462] Muchas más de las habituales en un conficto bélico-exterminador de esa naturaleza.
[463] O "underground", subterránea, clandestina, en riesgo constante, obviamente, ya que funcionaba de modo extraoficial o paralelo, oculta a las nuevas autoridades alemanas.
[464] Finalmente, aplastado con verdadero ensañamiento. Esto fue en 1944.
[465] Aquella en cuya Universidad enseñaba su amigo Heinrich Scholz, que tanto les ayudó.

nuevo impulso a sus publicaciones. Así, permanecería entre Dublín y Manchester hasta su muerte, ocurrida en 1956.

En 1917, Lukasiewicz había desarrollado su idea de un *cálculo proposicional trivaluado.* Un subproducto de este enfoque fue la idea[466] de una “tabla de verdad”, mediante la cual toda posible entrada y salida de cualquier sistema lógico pueden ser fácil y claramente tabuladas.

Otra contribución suya importante y bien conocida sería el desarrollo –que ya mencionábamos- de la llamada *“notación polaca”,* que logra simplificar la expresión de las relaciones lógicas y aritméticas, eliminando las innecesarias. Es la base de la que hoy se conoce como “notación polaca inversa” (RPN, por Reverse Polish Notation), familiar en ambientes computacionales[467].

Por fortuna, Lukasiewicz sobrevivió lo suficiente para llegar hasta la era de las computadoras, contemplando así la aplicación de algunas de sus ideas. Pero Jan no sentía la necesidad de una justificación práctica hubiera de darse para el estudio de la Matemática y de la Filosofía, pues dijo en su momento que:

> Como el arte surgió del deseo de la belleza,
>
> la ciencia fue creada por la avidez de conocimiento.

Considerando de este modo que “el arte por el arte” y “la ciencia por la ciencia” son igualmente válidos.

---

[466] Ampliamente utilizada ahora.

[467] En Notación Polaca Inversa, o Postfija (RPN), las famosas Leyes de Morgan se escribirían así: pNqKpNqNAE, y pNqApNqNKE, respectivamente.

Del periodo 1902-1915[468] se deben mencionar sus estudios acerca de:

- La noción de *"causa",* de 1906.
- Las investigaciones sobre el pensamiento de Alexius Meinong, de 1909.
- Todo lo tocante al Principio de Contradicción en Aristóteles.

Como cimientos de todo ello está su teoría acerca de la verdad científica. Sin separarse de la doctrina aristotélica, analizaba en profundidad los temas bajo una doble perspectiva: *la lógica, y la antropológica.*

Pero a partir de 1915, va apareciendo otra orientación en sus estudios, pero de una forma progresiva, continua, sin romper las conexiones con la etapa anterior, dado que comienza analizando determinada cuestiones lógicas que subyacen en los anteriores problemas metafísicos y ontológicos, como es el del "determinismo", un leitmotiv constante en su obra. Por todo lo cual podemos hablar de un "periodo de escritos lógicos", que ya va a durar hasta su muerte.

Los cuatro temas principales que cultivaría durante este periodo son:

- La teoría del Cálculo Proposicional, si bien ésta ya había empezado a abordarla en 1913.
- Las MVLs, esto es, las lógicas polivalentes, junto con la Lógica Modal.
- Los temas de Historia de la Lógica.

En el primero y en el segundo de estos campos de investigación, por poner un ejemplo, y más en concreto, cuando analizaba Lukasiewicz la lógica

[468] El llamado "período metafísico" de Lukasiewicz.

bivaluada[469], era notable su labor de axiomatización rigurosa, para la cual se inspiraba en la *Begriffsschrift*[470], del matemático y filósofo Gottlob Frege.

Tratemos ahora de los artículos de Jan Łukasiewicz que fueron seleccionados y presentados en España por Alfredo Deaño[471], podemos distinguir tres apartados:

- el primero, que trata sobre la *lógica polivalente;*
- el segundo, sobre la *filosofía de la lógica;* en particular, de la lógica polivalente; y
- el tercero, sobre la *historia de la lógica.*

Así, los trabajos que llevan por nombre *"Sobre la lógica trivalente", "Sobre el determinismo"* y *"Observaciones filosóficas sobre los sistemas polivalentes de lógica proposicional"* están dedicados principalmente a la lógica polivalente.

En el primero de ellos, escrito en 1920, nos presenta, de una forma densa y técnica, la primera sistematización algebraica de la lógica trivalente. En este artículo hallamos los principios necesarios para deducir todas las leyes de la lógica.

"Sobre el determinismo" es un artículo donde se estudia la lógica polivalente y su relación con este problema filosófico que detectó Łukasiewicz al tratar de sistematizar su lógica. Asegurando que la tesis del determinismo se basa en dos argumentos de gran poder persuasivo: el principio del tercio excluso y el principio de causalidad.

[469] Para pasar, luego, a la trivaluada.
[470] O "Conceptografía".
[471] JL, *Estudios de Lógica y Filosofía,* ed. y sel., A. Deaño, *Revista de Occidente.* Con una Edición electrónica de www.philosophia.cl/Escuela de Filosofía Universidad ARCIS.

Łukasiewicz nos muestra cómo a partir de tales principios parece deducirse la tesis del determinismo, pero posteriormente muestra que existe un error, tanto en el argumento basado en el principio de causalidad como en el principio del tercio excluso. Él argumentaba que si introducimos el concepto de infinitud, entonces el principio de causalidad resulta inaceptable y por tanto, no debemos aceptar la deducción de la tesis del determinismo partiendo de ese principio. Basándose en la teoría de la deducción, demuestra que es asimismo inaceptable el argumento que deduce el determinismo a partir del principio del tercio excluso.

Expone Lukasiewicz en este trabajo acerca del Determinismo ideas verdaderamente interesantes, como en éste párrafo[472]:

El razonamiento de Aristóteles no se manifiesta abiertamente en contra del Principio de Tercio Excluso, como uno de los principios básicos de toda nuestra Lógica, que él fue precisamente el primero en formular; a saber, que toda proposición es o bien verdadera o bien falsa. Es decir, se puede asumir uno y sólo uno de dos valores de verdad: el de verdad o el de falsedad. Yo llamo a este el Principio de Bivalencia.

En la Antigüedad, éste Principio fue enfáticamente defendido por los estoicos[473] y atacado por los epicúreos, siendo totalmente conscientes unos y otros de las

---

[472] Refiriéndose al tantas veces citado capítulo noveno del *Peri Hermeneias* (o *De Interpretatione*).
[473] No debe pasarse por alto lo que Graham Priest comenta en su trabajo de 1989. Se basaba en el famoso libro de Benson Mates de 1953, en el cual se hablaba de la posibilidad anticipada por los Estoicos de la necesidad de una lógica trivaluada, o incluso, de una lógica tetravaluada. Recordemos también la alta estima que el propio Lukasiewicz concedió a la lógica estoica. Por otra parte, los intereses de la investigación de Priest se dirigen, sobre todo, hacia las Lógicas Paraconsistentes o Dialeteicas.
Lo que Graham Priest dice concretamente en uno de sus párrafos, hablando de las antinomias, es:

cuestiones envueltas en ello. Como este Principio yace en los fundamentos mismos de la Lógica, no puede ser demostrado. Sólo se puede creer en él, y sólo el que lo considera evidente cree en él.

A mí, personalmente, el Principio de Bivalencia no me parece evidente. Por lo tanto, estoy en mi derecho de no reconocerlo, y de aceptar la idea de que además de la verdad y de la falsedad, existen otros valores de verdad; como mínimo, uno más, un tercer valor de verdad. ¿Cuál es éste valor de verdad? No tengo un nombre apropiado para él. Pero después de las explicaciones precedentes, no será difícil entender cuál es mi idea.

Sostengo que hay proposiciones que no son ni verdaderas ni falsas, sino *indeterminadas.* Todas las oraciones acerca de hechos futuros que todavía no están decididos pertenecen a ésta categoría. Esas oraciones no son ni verdaderas en el momento presente, porque no tienen correlato real, ni falsas, porque su negación tampoco tiene correlato real. Haciendo uso de una terminología filosófica que es particularmente clara, podríamos decir que ontológicamente tienen la *posibilidad* como correlato, por lo que toman el tercer valor de verdad.

Si se introduce en Lógica ese tercer valor de verdad, entonces estamos cambiando sus fundamentos. Un sistema trivaluado de Lógica, cuyo primer bosquejo

---

"What the Megarians and Stoics said about the semantical paradoxes should be integrated of course with what they said about truth and falsity, and also with what they said about implication. For these are *not* independent issues. Unfortunately, again as to the Megarian´s views on such matters, comparatively little is known. Much more is known about the theory of truth in Stoic Logic. Whereas the Megarian theory appears to have been four-valued, with values true, false, neither true nor false, and both true and false, the Stoic theory , of the truth-values of propositions or *lecta* (the basic carriers of truth-values), was (at most) three-valued, lacking the value, *both.* However, in their theory of the truth-values of presentations the Stoics did assume a four-value pattern: `… some presentations are both true and false, and some are neither´. Examples they gave of presentations which are both true and false include the following: first, `when a man imagines in his dream that Dion is standing beside him (when Dion is alive)"; and secondly, the "image of Electra as a Fury visualized by Orestes in his madness" PRIEST, G., *op. cit*., pp. 13-14.
Las citas entrecomilladas dentro del texto proceden del libro de Benson Mates, sobre la lógica estoica, que es de 1953; pp. 33 y ss.

pude dar en 1920, difiere de la lógica bivaluada ordinaria, la única conocida hasta ahora, tanto como los sistemas no euclídeos de Geometría difieren de los euclídeos. A pesar de ello, la lógica trivaluada es tan consistente y libre de contradicciones como la lógica bivaluada. Sea cual fuere la forma que esta lógica asuma cuando se desarrolle en detalle, la tesis del determinismo no formará parte de ella. Porque en el condicional mediante el que se expresa esa tesis, "`si A es b en el instante t´, entonces es verdadero en todo instante anterior a t que A es b en el instante t", podemos asignar a las variables "A", "b" y "t" valores tales que su antecedente se convierte en una oración verdadera y su consecuente en una oración indeterminada, es decir, en una oración que tiene el tercer valor de verdad. Esto sucede siempre cuando la causa del hecho de que A sea b en un instante futuro, t, no existe hoy. Un condicional con antecedente verdadero y consecuente indeterminado no se puede aceptar como verdadero, porque la verdad sólo puede implicar verdad. El argumento lógico que parece apoyar el determinismo falla decisivamente.

… En mi opinión, los viejos argumentos en apoyo del determinismo no superan la prueba de un análisis crítico. Esto no implica en absoluto que el determinismo sea una concepción falsa. La falsedad de los argumentos no demuestra la falsedad de la tesis.

Apoyándome en el análisis crítico que he hecho, quisiera decir solamente una cosa: que el determinismo no es una concepción mejor justificada que el indeterminismo. Por lo tanto, y sin exponerme a que se me acuse de irreflexivo, puedo declararme en favor del indeterminismo. Puedo asumir que no es cierto que el futuro entero esté determinado con anticipación. Si hay cadenas causales que comienzan sólo en el futuro, entonces sólo algunos hechos y eventos futuros, los que están más cerca del tiempo presente, están causalmente determinados en el instante presente.

Apoyándose en el conocimiento presente, incluso una mente omnisciente podría predecir cada vez menos hechos, cuanto más profundamente intente penetrar en el futuro: ésta es la única cosa efectivamente determinada en el marco cada vez más amplio dentro del cual tienen lugar los hechos, y dentro del cual hay más y más cabida para la posibilidad.

El drama universal no es un cuadro completado desde la eternidad. Cuanto más nos alejemos de las partes de la película que se está pasando en este instante, más vacía y blanca[474] será la imagen. Está bien que ello deba ser así. Podemos creer que no somos simples espectadores pasivos del drama, sino también participantes activos en él. Entre las contingencias que nos esperan, cabe elegir el camino mejor, y evitar el peor. Cabe de algún modo configurar el futuro del mundo de acuerdo con nuestras decisiones.[475]

En el escrito titulado *"Observaciones filosóficas sobre los sistemas polivalentes de lógica proposicional"* encontramos un estudio de la lógica polivalente desde la perspectiva de la Lógica Modal. Łukasiewicz afirma que el sistema trivaluado de lógica proposicional debe su origen a ciertas investigaciones acerca de las llamadas proposiciones modales, así como de las nociones de posibilidad y necesidad, vinculadas con ellas. Łukasiewicz afirma que las proposiciones modales analizadas bajo una lógica bivalente nos llevan inevitablemente a paradojas y a contradicciones.

De este modo, la lógica trivaluada se puede obtener a partir de la lógica bivaluada, consiguiendo que no aparezcan contradicciones.

"Logística y Filosofía" y *"En defensa de la logística"* son dos trabajos con un gran interés desde el punto de vista filosófico, así que podríamos decir que pertenecen al segundo apartado: la filosofía de la lógica. No son estudios de

[474] En principio, más y más borrosa.
[475] LUKASIEWICZ, J., Dublin, 1946; pp. 116-117.

lógica en sí, sino más bien estudios en torno a ella; se refieren al sentido e implicaciones de la lógica polivalente, así como a su influencia en el quehacer lógico y filosófico.

En ambos escritos define la lógica matemática como una ciencia formal, no necesariamente ligada a ninguna postura filosófica: la lógica como una rama de la filosofía, no pretendiendo reemplazar en ningún caso a la filosofía. En el segundo texto, Łukasiewicz defiende a la lógica de las críticas planteadas: entre ellas, las de nominalismo, formalismo, positivismo, convencionalismo, pragmatismo y relativismo. Decía Lukasiewicz en el segundo de dichos artículos, aquel en el que trata de defender la lógica, por entonces llamada "logística":

> El fundamento más profundo de toda lógica hasta ahora conocida, sea lógica de proposiciones o lógica de términos, sea lógica estoica o aristotélica, es el Principio de Bivalencia, que enuncia que toda proposición es o bien verdadera, o bien falsa, es decir, tiene uno, y sólo uno, de tales valores lógicos. La lógica cambia, desde sus mismos fundamentos, si asuminos que además de la verdad y de la falsedad, hay también un tercer valor lógico, o varios más. Hice esta asunción invocando la autoridad del propio Aristóteles, porque nadie más que el Estagirita parecía creer que las proposiciones concernientes no son hoy ni verdaderas ni falsas. Así es como han de interpretarse algunas formulaciones de Aristóteles en el capítulo noveno del *De Interpretatione,* y así fue como las interpretaron los estoicos, según testifica Boecio[476].

[476] De *Boecio* (nacido hacia el 480– 524/525 d. C.) también deberíamos hablar, aunque sea en esta breve nota a pie de página. Porque en el libro quinto de su famosa obra, el *De consolatione philosophiae,* aborda el problema del determinismo, que aquí aparece una y otra vez. Se trata, como sabemos, de uno de los problemas centrales de la filosofía, y muy especialmente en la Edad Media, por sus implicaciones religiosas. Se pregunta si son compatibles ó no la libertad humana y la presciencia divina. ¿Acaso es el hombre libre? Su respuesta es, sobre todo, de raíces neoplatónicas, incluso aristotélicas, con algo de estoicismo,

Al hablar así, el Estagirita intentaba evitar el Determinismo, que para él estaba inevitablemente conectado con el Principio de Bivalencia. Si esa concepción de Aristóteles es correcta, y si entre las proposiciones acerca de eventos que tienen lugar en el Universo hay proposiciones que no son todavía ni verdaderas ni falsas, entonces estas proposiciones deben tener un tercer valor lógico. Pero entonces, el mundo de los hechos que nos rodean está gobernado no por una lógica bivaluada, sino por una trivaluada, o bien, si el número de estos nuevos valores lógicos es mayor, por alguna otra lógica multivaluada. En ese caso, los sistemas multivaluados de lógica adquirirían a la vez una justificación intuitiva y un vasto campo de aplicación.[477]

Lukasiewicz fue ciertamente un pionero en el estudio de la historia de la lógica. Uno de sus artículos sería el titulado *“Para la historia de la lógica de proposiciones”,* donde considera la dialéctica estoica como la forma antigua de la lógica proposicional. También nos da ejemplos de cómo la lógica proposicional estoica perdura y se desarrolla a lo largo del tiempo. Además, nos dice que Gottlob Frege fue el fundador de la lógica proposicional; afirmación hecha antes de que ese autor fuese ni siquiera muy conocido. Los hallazgos de Łukasiewicz con respecto a la historia de la lógica son esenciales para llegar a comprender la lógica misma.

Para finalizar estas observaciones de Lukasiewicz, ya en las últimas líneas de ese segundo trabajo, donde va tratando de hacer justicia respecto del papel

---

poniendo a la razón como condición esencial para llegar a comprender la naturaleza de la libertad humana. Su influencia fue notable sobre el Aquinate y sobre Leibniz. Por ello se dice que junto con San Agustín, fue uno de los filósofos fundamentales que se hayan ocupado de la metafísica cristiana en torno al libre albedrío. Etiénne Gilson dice de él que fue para la Escolástica la principal autoridad en temas de Lógica, hasta que en el siglo XIII se consiguó volcar al latín todos los tratados que componen el *Órganon* aristotélico, tarea por él iniciada, pero que dejó inconclusa, por su triste y prematuro final. También escribió sobre Música, Matemáticas, Astronomía y Teología. Se dice que fue el último representante de la cultura romana y el primer intelectual del medievo.

[477] LUKASIEWICZ, J., 1937; pp. 246-247.

fundamental que desempeña la Lógica en el conjunto de los saberes, nos da la que es toda una declaración de principios:

> … me gustaría esbozar una imagen que está conectada con las intuiciones más profundas que siempre experimento ante la Lógica. Esa imagen arrojará tal vez mayor luz sobre el auténtico trasfondo de esa disciplina, al menos en mi caso, que cualquier descripción discursiva. Hela aquí: cada vez que me ocupo de un problema lógico, por insignificante que sea –por ejemplo, cuando busco el axioma más corto del cálculo proposicional implicacional- tengo siempre la impresión de que estoy frente a una estructura poderosa, dotada de la máxima coherencia y resistencia. Siento esa estructura como si fuera un objeto concreto, tangible, hecho del más duro metal, cien veces más fuerte que el acero y el hormigón. Nada puedo cambiar en ello; no estoy creando nada por mi voluntad, sino que mediante un trabajo tenaz descubro constantemente en ello nuevos detalles, y llego a verdades inconmovibles y eternas. ¿Dónde está y qué es esa estructura ideal? Un creyente diría que está en Dios, y que es Su pensamiento.[478]

En ella se revelaba con claridad que era un verdadero creyente, y aún más, que era un creyente de un tipo muy especial: un creyente polaco, no un beato farisaico y santurrón al paño, como diría don Antonio Machado de muchos de los nuestros.

[478] LUKASIEWICZ, J., *op. cit.;* p. 249.

9. Completando la cadena de pensadores de la ELV

Otros pensadores de la Escuela de Lvóv-Varsovia también fueron bastante interesantes, desde el punto de vista filosófico. Este es el caso de Alexius Meinong o el de Stanislaw Lesniewski.

Alexius Meinong, Ritter (o Caballero) von Haudschuchsheim, fue un psicólogo y filósofo austriaco que nació en Lvóv (entonces, Lemberg), en 1853. Se doctoró en Historia en 1874, siendo Franz Brentano uno de los miembros del tribunal de su tesis. Desde 1882 hasta su muerte (en 1920) enseñó en la Universidad de Graz. Le hizo famoso su *Gegenstandstheorie*[479]*,* donde con un enfoque ontológico introduce tanto objetos existentes como no existentes. Ese enfoque está relacionado con el concepto de "intencionalidad" de Franz Brentano. Pero le hizo mucho más famoso que Bertrand Russell se fijara en su teoría y la comentara en su libro *Analysis of Mind,* aunque más adelante la rechazara, y esa controversia le aportó notoriedad. Al propio Meinong le obligó a refinar la teoría.

Alexius Meinong nunca fue, ni pretendió serlo, un filósofo especulativo, pero esto no impidió que fuera desarrollando un sistema propio, cuya pieza clave es la mencionada "Teoría de los Objetos". Pensaba que la Filosofía no debe constituirse en una ciencia aislada, sino que debiera ser un cierto ensamblaje de ciencias relacionadas con el fenómeno mental. Reprochando al

[479] O *Teoría de los Objetos,* de 1904.

“psicologismo” un `uso inapropiado del método psicológico´, tanto en la Lógica como en la Teoría del Conocimiento. Resaltaba que la Filosofía debiera llevarse a cabo de modo científico, y no especulativo, dando una gran importancia dentro de ella al estudio de la Psicología. No sólo estableció en la Universidad de Graz el primer laboratorio austríaco de Psicología, sino también un Seminario de Filosofía. Fue un hombre de notable capacidad de trabajo y de gran perseverancia, para lo que contó con el apoyo de su familia; en especial, de su mujer, Doris.

No sólo prosiguió con aportaciones originales la Psicología Descriptiva de Brentano, sino que también avanzó en otros campos, como los de la Ontología, la Metafísica, la Epistemología o la Teoría de los Valores.

Otra importante teoría, muy relacionada con Franz Brentano y la Escuela de Lvóv-Varsovia, es el llamado *“Reísmo”.* Su nombre procede del latín “res” (cosa). Fue una teoría con muchos precursores, como los Nominalistas y los Materialistas, por los Estoicos, ciertas doctrinas medievales[480], o el propio Thomas Hobbes y sus consideraciones sobre los “corpora” (cuerpos). También puede observarse cierto grado de “reísmo” en G. W. Leibniz. Y el mismo Franz Brentano lo defiende en su último período, como cuando argumenta en contra de los “entia rationis”[481]. Puede considerarse a Brentano reísta desde 1904. Pues se basaba en la identidad:

[480] Las de los “singularia”, o particulares.
[481] Ú “objetos de pensamiento”, puesto que tales objetos, según él, sólo estarían en nuestro pensamiento.

Ser = Entia Realia = Cosas

Esta teoría procede en Franz Brentano de sus "tomas de distancia" respecto de la ontología aristotélica.

Pero la figura que aparecerá con más frecuencia asociado con el "reísmo" es *Tadeusz Kotarbinski (1886-1981),* por ser quien elaboró una versión más desarrollada de esta teoría. Fue él quien introdujo el propio término de "reísmo" para denotar aquella visión filosófica según la cual la categoría de las cosas es la única categoría ontológica, o dicho de otro modo, que el reísmo reduce las categorías a la de las cosas. Aunque los reístas difieren entre sí a la hora de decidir qué deba ser incluído dentro de esa clase o categoría de las cosas.

El Reísmo tiene también una dimensión semántica, al recomendar el uso exclusivo de de nombres singulares, est es, que sólo se utilicen nombres que se refieran a cosas concretas, mientras que las palabras abstractas- según él- debieran ser evitadas. Aunque eventualmente pudieran usarse sentencias que contengan palabras abstractas, siempre que están tengan traducción en expresiones con términos singulares.

Kotarbinski fue no sólo filósofo, en los campos de la Lógica y de la Praxiología, sino también brillante matemático[482]. De hecho, uno de los más

---

482 Según Jan Wolenski, Kotarbinski sería el primero en introducir en Polonia la idea de que existen sentencias que no son ni verdaderas ni falsas, sino indefinidas. Lo hizo en 1913, en el artículo que lleva por nombre "Zagadnienie…". Dicho trabajo fue duramente atacado por Stanislaw Lesniewski, quien nunca fue muy partidario de la MVL, aunque hubiera impartido clases acerca de ella. Pensaba que carecía de interpretaciones intuitivas. Defensor de la verdad absoluta, decía que la MVL abriría la puerta al relativismo y al pragmatismo. Su postura sería respaldada por Kazimierz Twardowski, con lo que finalmente pareció quedar Kotarbinski convencido por sus oponentes, y nunca más volvió a defender la MVL.
Véase el segundo cap. de los *Historico Philosophical Essays,* de JW, Krakow, 2013; p. 42.

notables dentro de la Escuela de Lvóv-Varsovia. Formó parte de la PAU[483] así como de la PAN[484]. Como alumno de Kazimierz Twardowski, Kotarbinski sería[485] un heredero de la tradición filosófica de Franz Brentano. En su pensamiento se pueden distinguir tres etapas: La primera de ellas se caracterizaría por los estudios lógicos y ontológicos. La segunda, por su énfasis en la praxeología (la cual implica una teoría de la acción). La tercera sería la dedicada a la ética.

En su obra de 1929, Kotarbinski elabora una especie de manual de Lógica donde expone su teoría del "reísmo"; en polaco, "reizm". Retoma en ella lo analizado, sobre Lógica y Ontología, por Stanislaw Lesniewski en sus *Elementy.* Tal teoría, también llamada del "concretismo"[486], contendría elementos de *Materialismo, Empirismo Lógico y Nominalismo Radical.*

Kotarbinski atacaba en su obra muy especialmente a lo que llama "onomatoides", es decir, a las denominaciones falsas, aparentes, porque lo que hacen es crear la ilusión de poseer un objeto o un significado real, concreto, que esté soportado en los entes reales.

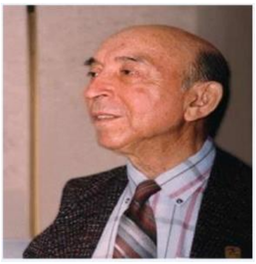
También existía en Kotarbinski, ya dentro de la segunda etapa, cierto *pragmatismo,* dado que le interesaban especialmente las cuestiones prácticas; por tanto, la teoría debía estar en una correlación fuerte con la *praxis,* o práctica. De ahí que su pensamiento praxiológico lleve implícito una teoría de la

[483] Academia Polaca de Aprendizaje.
[484] Academia Polaca de Ciencias.
[485] Aunque indirectamente.
[486] Para no confundirla con el "realismo", puesto que suena bastante parecido.

acción. Para ella buscaba Kotarbinski una “gramática”, es decir, un lenguaje que nos permitiera hablar de modo pertinente[487].

[487] En Kotarbinski, T., 1955, tenemos la referencia del tratado que escribió sobre praxeología. Para mayor información acerca de esta teoría, puede consultarse la extensa entrada, escrita por Jan Wolenski, bajo el epígrafe de “Reism”, para la *Stanford Enciclopedy of Philosophy.*

10. La contribución de Zadeh.



Lofti Asker Zadeh

Hablemos algo más ahora de *Zadeh* (y decimos algo más, porque en otros capítulos nos referiremos de nuevo a él).

El azerí Lotfi A. Zadeh[488] perteneció al Departamento de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de California, en Berkeley, desde 1959. Zadeh fue estudiante en la University of Teheran, luego en el MIT[489], y finalmente, en la Universidad de Columbia. Ha sido profesor visitante de institutos y laboratorios internacionales de reconocido prestigio[490].

Desde 1965 su investigación[491] se ha venido centrando en la teoría de la lógica borrosa o difusa, y de los conjuntos borrosos y sus aplicaciones en

[488] Nacido en Bakú en 1921 y aún afortunadamente con vida, asistiendo a Congresos y Simposios.
[489] Massachusetts Institute of Technology.
[490] Como el de Princeton, New Jersey; en donde estudió, el MIT; o en el IBM Research Laboratory, de San José, California; en el SRI International, Menlo Park, también en California; o en el Center for the Study of Language and Information, de la Universidad de Stanford.
[491] Dice Julián Velarde, en la p. 56 de su *Gnoseología de los Sistemas Difusos,* que en Zadeh cabe distinguir varias etapas:
a) Propuesta, en 1965, de la teoría de los conjuntos difusos, con el propósito de tratar lo difuso de manera sistemática, aunque no necesariamente cuantitativa.

Inteligencia Artificial, en lingüística, en lógica, en el análisis de decisiones, la teoría de control, los sistemas expertos o las redes neuronales. Actualmente su foco de interés se centra en la investigación en lógica borrosa y el soft computing[492].

El principio que guía su investigación[493] es que las mejores soluciones se encuentran empleando combinaciones de diferentes áreas. En los últimos años sus aportaciones se encuentran específicamente en la computación con palabras[494] y sus últimos trabajos son sobre la teoría computacional del lenguaje natural[495] percepciones y precisiated natural language[496].

El concepto de *"soft computing"*[497], plantea la necesidad de metodologías de computación que toleren la imprecisión y la incertidumbre en la búsqueda de soluciones a problemas mediante sistemas computables, robustos y de bajo coste. Lo que está haciendo a este tipo de sistemas realmente importantes, en informática y en la ciencia en general, es que nos permiten el diseño y el desarrollo de sistemas informáticos híbridos, al facilitar el uso conjunto de la lógica borrosa, de la neuro-computación, de la computación evolutiva y de la computación probabilística.

---

b) Interpretación, en 1972, de marcadores y variables lingüísticas en términos de la teoría de los conjuntos difusos. Los marcadores lingüísticos… son tratados como operadores aplicables a términos con significado específico.
c) En 1973, Zadeh sugiere una `lógica difusa´ como una extensión de las lógicas polivalentes, que en la nueva teoría quedan como formas `degeneradas´ de lógicas difusas, en las que los valores de verdad quedan individualizados numéricamente, en tanto que en la lógica difusa los valores de verdad son no numéricos, sino lingüísticos, y cada uno de ellos representa un subconjunto difuso del conjunto de valores veritativos de una lógica de Lukasiewicz."

[492] Que es una especie de coalición entre lógica borrosa, computación neuronal, computación evolutiva, computación probabilística y una parte de aprendizaje automático.
[493] Y del `soft computing´, en general.
[494] CWW, acrónimo de Computing With Words.
[495] NL, acrónimo de "natural language".
[496] PNL.
[497] Introducido por LAZ en 1991.

El profesor Zadeh ha recibido prácticamente todos los premios y condecoraciones relevantes en el campo de la Computación y en el de la Inteligencia Artificial; así, es Fellow de la IEEE, de la AAAS, la ACM, la AAAI, y de la IFSA. Asimismo, es miembro de la National Academy of Engineering de los Estados Unidos, y un Foreign Member de la Russian Academy of Natural Sciences. Ha recibido, entre otras, la IEEE Education Medal, la IEEE Richard W. Hamming, etc., o la Medalla Benjamin Franklin, todo ello por sus fecundas investigaciones.

Sobre su obra, podemos decir que tiene, por ejemplo, ciento once entradas en la importante base de datos *dblp,* de la Universidad de Tréveris (Trier), ubicada en el Schloss Daghstul – Leibniz Zentrum für Informatik[498]. Sus conexiones con el resto de los científicos más relevantes, bien por medio de trabajos conjuntos, o por sus frecuentes participaciones en Congresos Internacionales, de los que suele ser el "Honorary Chair", son de las más amplias actualmente, al menos dentro del mundo científico-filosófico, siendo el más citado en su campo.

Citemos algunos otros datos interesantes para conocer al personaje. Su padre era un periodista iraní, y su madre, una pediatra. Cuando trasladaron a su padre a la capital de la que en realidad era su patria de origen, en ese Teherán estuvo estudiando durante ocho años Lofti en el Colegio Americano.

---

[498] Que van desde su clásico y ya famoso artículo:
LAZ, "Fuzzy Sets". *Information and Control,* vol. 8(3), pp. 338-353 (1965), citado 39.269 veces, según el Google Scholar; hasta el también artículo suyo, llamado: "Computing with Words - Principal Concepts and Ideas". *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, vol. 277, pp. 3-89. Springer Verlag, 2012.

Así, podemos citar también sus colaboraciones con: Ryszard Tadeuskiewicz (8); Leszek Rutkowski (8); o Jacek M. Zurada (7). Que aparecen reflejadas en la base dblp antes citada.

Se graduó el año 1942[499] en la Universidad de la capital iraní. Por cierto, que fue uno de los tres únicos alumnos que se graduaron durante ese curso, porque con la Segunda Guerra Mundial el Irán había sido invadido por los rusos, que pasaron a administrarlo conjuntamente con los británicos. También llegó un aluvión de soldados americanos. Un detalle menos conocido sería el siguiente: durante esa ocupación, su padre y él vivieron de venderle material a dichas tropas.

Decidió el año 1943 emigrar a los Estados Unidos, pero por problemas burocráticos no lo consiguió hasta el año siguiente. Así que fue ya en 1944 cuando entró en el MIT, y en 1946 terminaba su Máster en Ingeniería Eléctrica. Se le admite como alumno de Doctorado en la Universidad de Columbia, y recibe ese título en 1949. Un año después se convierte en profesor de la misma institución académica. Allí fue profesor durante los diez años siguientes. En 1957 llegó a Profesor Titular (Associate), y dos años más tarde se trasladó a la Universidad de California, en Berkeley. Parece una especie de maremágnum entre países, pero Zadeh nunca ha creído en los nacionalismos.

Así, dijo una vez que:

> La verdadera cuestión no es si soy americano, ruso, iraní, azerí, o cualquier otra cosa. He sido formado por todas esas personas y culturas, y me siento muy a gusto entre todas ellas.

También dijo en una entrevista que:

[499] En Ingeniería Eléctrica.

> "No debemos tener miedo a enredarnos en polémicas. Es una tradición turca y también una parte de mi carácter. Puedo ser muy terco, y eso, probablemente, ha sido beneficioso para el desarrollo de la Lógica Borrosa."

Lofti A. Zadeh descubrió los trabajos de Jan Lukasiewicz, que en el fondo nos proponían una más que interesante relajación y adaptación a la realidad de la lógica de Aristóteles. Se le ocurrió entonces que esto podría tener notables aplicaciones, tanto en las Matemáticas como en la Tecnología, y con esa intuición, acertó de pleno. Hoy es uno de los autores más referenciados, y los temas de sus artículos van más allá de la Lógica Borrosa, o de la Teoría de los Conjuntos Borrosos. Por ejemplo, investigó con Ragazzini[500] sobre la llamada transformada Z, que es útil para el procesamiento de señales discretas de tipo temporal. Se trata de métodos que hoy ya son estándar, en el control digital o en el tratamiento de señales. Zadeh es también el editor de la *Revista Internacional de Cognición Computacional*, entre otras publicaciones de prestigio. Y ha sido elegido Presidente en España del Centro de Investigación en Soft Computing, creado en Mieres por el gobierno del Principado de Asturias.

En los últimos años la participación de nuestros investigadores en Congresos y mediante publicaciones en revistas especializadas ha llevado a nuestro país, pese a las enconadas resistencias iniciales, a un puesto bastante honroso, dentro de las naciones civilizadas; de hecho, es quizá hoy día uno de los primeros cultivadores de la `Fuzzy Logic´ en Europa.

[500] En 1952.

11. Los “eslabones perdidos”.

Hemos tratado de un modo tal vez demasiado esquemático la llamada “línea del tiempo”, la que va desde Bernardo Bolzano hasta Lofti A. Zadeh:

> *Aristóteles (384 a.C.– 322 a.C.) → … → Guillermo de Ockham (hacia 1280/1288-1349) → … → Leibnitz (1646-1716) → Bernard Bolzano (1781-1848) → Franz C. Brentano (1838-1917) → Kazimierz Twardowski (1866-1938) → Jan Lukasiewicz (1878-1956) → Lofti A. Zadeh (1921-) → …*

Y no quiero decir con ello que esta sea la única posible, ni la más completa tampoco. Bien sabemos que hacia atrás debería –seguramente- haber incluido una serie de bien merecidos puestos de “predecesores” o “precursores”, entre quienes no debieran faltar el gran Aristóteles, los lógicos estoicos, los escolásticos (al menos, Juan Duns Scoto[501] y Guillermo de

---

[501] *Juan Duns Scoto* fue un fraile franciscano, lo mismo que Guillermo de Ockham. De su origen escocés le viene el nombre. Enseñó las doctrinas de Aristóteles durante el siglo XIII, en las Universidades de París y de Oxford. El método al que recurrió en sus enseñanzas era el de la “quaestio”, que estaba entonces en boga. Comentando, por ejemplo, el *De Interpretatione,* texto fundacional de la Lógica. La transcripción de los dos cursos que allí impartiera ha dado lugar a la *Questions sur le Peri Hermeneias*, traducidas (por ejemplo) recientemente al francés. En ellas trata de la semántica; téngase en cuenta que las obras del conocido como “Doctor Sutil” nos presentan un pensamiento original acerca del significado y la verdad. No olvidemos que Duns Scoto se interesaba por la Lógica en sí, esto es, por la Lógica como objeto de conocimiento. Entre otras aportaciones, le debemos la llamada “Ley de Scoto”, que en notación lógica actualizada, se puede expresar como: $[(p \rightarrow \neg p) \rightarrow q]$; esto es, que si algo implica su negación, entonces de ahí se puede deducir cualquier cosa. De hecho, se anticipó a los trabajos acerca de Lógica Modal (siempre moviéndose entre la metafísica y la lógica, eso sí), al establecer la distinción entre “ser posible” y “ser necesario”, con lo que empieza a diferenciar entre sí los ámbitos de la extensionalidad y de la intensionalidad. Otros nombres que se suelen

Ockham[502]); luego, posiblemente los jesuitas Luis de Molina y Francisco Suárez, y pasando por la figura señera de G. W. Leibniz, que sin duda, es uno de los candidatos más merecedores al disputado título de "padre de la lógica moderna y de la computación". Un eslabón intermedio tal vez debiera constituírlo nuestro Raimundo Lulio, que tantas ideas visionarias y precursoras vertió en su asombrosa *Ars Magna.*

Muchos otros lógicos, filósofos y matemáticos pudieran insertarse después en esta ya larga cadena, como es el caso de Georg Cantor, Augustus De Morgan, Jevons o George Boole, entre otros. Y más adelante, podríamos incluir a Hermann Weyl[503], Bertrand Russell, Max Black[504], Janos Neumann, incluso posiblemente a Ludwig Wittgenstein[505], con sus implicaciones en la

---

dar a esa Ley de Duns Scoto antes enunciada serían el Principio de Cornubia o el Principo de Explosión (pues hace que el sistema lógico considerado salte por los aires).

[502] Puede considerarse que fray Guillermo de Ockham se llegó a anticipar a Jan Lukasiewicz en proponer algo que ya anunciaba la necesidad de una lógica trivaluada, en su tratado acerca de los futuros contingentes. Desde luego, sin la formalización moderna. También sugería allí algo similar a las hoy conocidas como Leyes de Morgan (por el lógico y matemático inglés Augustus De Morgan, que las formalizó en el siglo XIX), es decir, que la negación de la disyunción de dos proposiciones es la conjunción de dichas proposiciones negadas, y que la negación de la conjunción de ambas es la disyunción de dichas proposiciones, una vez hayan sido negadas.

[503] El matemático *Hermann Weyl* fue quien llevó a cabo por vez primera la generalización (a una función con grados de pertenencia), en 1940. Weyl la reemplazaba explícitamente por una función característica continua. El mismo tipo de generalización fue más adelante propuesto por Kaplan y Schott, en 1951. Estos sugirieron llevar a cabo el cálculo para funciones características generalizadas de los predicados vagos, así como de las conectivas lógicas de los que hoy son los conjuntos borrosos, que ya aparecen en sus escritos.

[504] Didier Dubois y Henri Prade dicen que a pesar del considerable interés y del enorme trabajo volcado en las Lógicas Multivaluadas por Jan Lukasiewicz y los restantes miembros de la Escuela de Lvov-Varsovia, desarrollando para ello las lógicas de los valores intermedios de verdad, había de ser el "poly-math" americano-azerí (pues había nacido en Bakú, como Lofti A. Zadeh) *Max Black* quien primero postulase los por él llamados "consistency profiles" (o perfiles de consistencia, que serían los precursores de las hoy denominadas funciones de pertenencia), con el propósito de caracterizar los "símbolos vagos".

[505] El filósofo austriaco *Ludwig Wittgenstein* apuntaba ya en 1953 que los conceptos del NL (natural language), o "lenguaje natural", no poseen una colección clara de propiedades que las definan, sino que tienen unas a especie de fronteras extensibles, y que existen miembros que ocupan una posición más o menos central respecto de una determinada categoría. Eso vendría a traducirse en los que luego se llamarán grado de pertenencia a un conjunto, el grado de verdad de una proposición, etc., en la terminología propia de la Lógica Borrosa moderna.
Sobre el primer Wittgenstein, el del Tractatus, se puede decir que se ocupaba de desarrollar su \`teoría significativa del lenguaje´, esto es, de lo que él llamaba el \`lenguaje-retrato´. En ella

filosofía del lenguaje posterior, etc. Pero tal vez ninguno con tanto mérito como *Charles Sanders Peirce (1839-1914)*, figura un tanto desconocida[506]; sobre todo, en su propia época. Además, sus coetáneos en muchas ocasiones copiaban sus ideas, sin tener siquiera la deferencia de citarle. Tal es el caso del primer Bertrand Russell, cuando escribió con Alfred North Whitehead sus *Principia Mathematica,* en 1913. Porque fue Peirce[507] el verdadero precursor de bastantes de las ideas más cruciales de la Lógica y de la Matemática modernas. Tal es el caso de sus aportaciones a la Teoría de Conjuntos, anticipándose en muchos años a otros que iban a ser reconocidos en su lugar gracias a ellas, como el mismo Cantor, o George Boole.

De Peirce escribió Russell que era una de las mentes más brillantes y originales que había dado América, pero no le reconoció su influencia en los *Principia,* como queda dicho. Y Alfred North Whitehead dijo que al leer algunos de los escritos de Peirce había encontrado una inesperada anticipación de muchos de sus propios pensamientos. Estamos hablando de la Universidad de

---

sostenía que las proposiciones del lenguaje \`retratan´ la realidad, pues existiría un isomorfismo entre el lenguaje y el mundo. Pero es que además de significado, el lenguaje tiene sentido, el cual va a venir determinado por la lógica. Todo ello determina la estructura del lenguaje, y dado que este describe el mundo, también la lógica va a determinar la estructura de dicho mundo (el \`real´, uno de entre los mundos posibles). Porque el segundo Wittgenstein, el de las *Investigaciones Filosóficas,* abandonó esa teoría del lenguaje, pues el significado –para él- va a dejar de ser un \`retrato´de la realidad, sino que va a depender del contexto, del uso que hagamos de las palabras. Habla entonces de los \`juegos de lenguaje´, que serían modelos simplificados describiendo una situación comunicativa. Pero todo esto sin que exista un lenguaje unitario, que tenga como objetivo la descripción del mundo. Así, cada juego de lenguaje va a ser un lenguaje acabado en sí mismo.

[506] Y desde luego, injustamente tratada.

[507] Hace ya más de un siglo que el gran filósofo americano *Charles Sanders Peirce* se refirió al fenómeno de la “vagueness”, con lo que sería uno de los primeros estudiosos que en la época moderna apuntase algo así; decía que “los lógicos han abandonado demasiado el estudio de la vaguedad, sin sospechar el importante papel que juega en el pensamiento matemático.” (Peirce, 1931). Se trata del mismo punto de vista que años más tarde expresaría también Bertrand Russell. Las discusiones acerca de los estrechos vínculos entre la lógica y la “vagueness” no han resultado infrecuentes en la literatura filosófica, y menos aún en la que viene desde mediados del siglo XX hasta la fecha.

Harvard y del año 1934. Y está muy conectada nuestra investigación con la línea descrita por C. S. Peirce, pues su influencia fue enorme sobre Alfred Tarski y la Escuela de Lvóv-Varsovia. Tarski le admiraba y tenía en mucha estima sus escritos.

Karl Popper veía a C. S. Peirce como uno de los filósofos más grandes de todos los tiempos. Pero a pesar de tanta capacidad y mérito, pasó una vida llena de penalidades, perseguido por la miseria y por un tal Newcombe, que le vedaba toda posibilidad de alcanzar una posición segura. Hacia el final de su vida su amigo William James hubo de organizar una especie de fondo de rescate para que el pobre Peirce pudiera hacer frente a los gastos más perentorios.

Aun cuando la parte más notable de su obra tratase de Lógica y Fundamentos, también trabajó en la Teoría de Grafos, en la Topología, en el estudio de Matrices, en Álgebra Lineal, etc. En muchas de estas áreas realizó C. S. Peirce importantes descubrimientos[508]. Tal es el caso de cuando en 1860 sugirió la posibilidad de asignar un cardinal a los números infinitos, años antes de que lo hiciese Georg Cantor, cuya Tesis fue presentada más tarde, en 1867. Y sin que él hubiera podido tenido acceso a la hoy en día más famosa obra[509]

[508] C. S. Peirce ideó buena parte de las conectivas lógicas trivaluadas que luego serían "redescubiertas" por otros, que en ocasiones pudieran no haber conocido los poco publicitados trabajos de Peirce. Así, tenemos la negación trivaluada de Lukasiewicz, la negación cíclica de Emil L. Post, la función T (o T-function), de Slupecki, las conjunción y las disyunciones de Lukasiewicz y de Bochvar (ésta última viene a coincidir con las versiones débiles de Kleene), etc. Los estímulos intelectuales para la obra de Peirce -en conexión con las MVLs- provienen a su vez de los artículos de Hugh MacColl. No olvidemos tampoco que Charles Sanders Peirce había inventado, junto con Gottlob Frege, el método de las tablas de verdad para el cálculo proposicional bivaluado, pero sería Peirce quien lo extendería al caso trivaluado. Para lo cual se basó en ideas modales, a la hora de asignar v. v. que contemplasen el estatus veritativo intermedio.

[509] Obra póstuma.

de Bernard Bolzano, las *Paradoxien des Unendlichen* (o *Paradojas del Infinito*), aun cuando ésta fuera de 1851.

Otras de las ideas de las que fue notable predecesor serían las de la axiomática de la aritmética para los números naturales, de 1881, con la que se anticipaba muchos años a los trabajos de Richard Dedekind o de Giuseppe Peano. Y otra importante anticipación fue la idea de que los cálculos booleanos podían ser realizados mediante circuitos eléctricos[510].

Pasando al campo de la Matemática Pura, mucho de lo conocido sobre el álgebra de las relaciones es debido a Ch. S. Peirce.[511] La obra peirceana en Lógica suscitó algunos grandes admiradores y seguidores. Tal es el caso del matemático y filósofo inglés W. K. Clifford, o de Arthur Prior. Además de la notable influencia sobre nuestra Escuela de Lvóv-Varsovia, y especialmente sobre Alfred Tarski, como queda dicho. Así que en la línea del tiempo que enunciamos al principio seguramente debieran introducirse bifurcaciones, a especie de establecer ríos principales, hablar de sus afluentes y subafluentes, lo cual completaría algo más la visión ofrecida. Pero las restricciones que nos impone la brevedad lo desaconsejan[512]. Por tanto, puede que una línea del tiempo más completa pudiera ser algo más de éste tipo:

Aristóteles (384 a.C.– 322 a.C.) → … → Guillermo de Ockham (hacia 1280/1288-1349) → … Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716) →

[510] Con lo cual se adelantaba en más de medios siglo a lo expuesto por Claude E. Shannon en su famoso artículo, publicado por este cuando trabajaba en la Bell Telephone Company.
[511] Así, la mencionada influencia en los *Principia Mathematica,* o en la llamada Lattice Theory, o Teoría de retículos, del matemático americano Garrett Birkhoff, que luego trabajó con Janos Neumann en la Lógica Cuántica.
[512] Pudiera convertirse con ello en una segunda parte de *La historia interminable.* Es broma, obviamente.

Bernard Bolzano (1781-1848) → Franz C. Brentano (1838-1917) → ***[George Boole (1779-1848)] → C. S. Peirce (1839-1914)]*** *→ Kazimierz Twardowski (1866-1938) → Jan Lukasiewicz (1878-1956) →* ***[Georg Cantor (1845-1918) → Max Black (1909-1988)→ [Edmund Husserl (1859-1938)] → Bertrand Russell (1872-1970) → Alonzo Church (1903-1995) → [Ludwig Wittgenstein (1889-1951) → Alan M. Turing (1912-1954) → Kurt Gödel (1906-1978)] → Alfred Tarski (1902-1983)→ Janos Neumann (1903-1957)→ Claude E. Shannon (1916-2001) → …]*** *→ Lofti Asker Zadeh (1921-) → …*

Ú otra clasificación similar, con las ramificaciones que se consideren más oportunas. Las influencias recíprocas nos darían quiénes son los ríos principales y quiénes hacen el papel de afluentes o subafluentes, aunque ninguno de ellos se queda, desde luego, reducido a un simple regato. Puede observarse que por ello hay corchetes y subcorchetes, que indican cuáles influyen más realmente y cuáles menos sobre los restantes.

Por razones de justicia, no debemos dejar de mencionar al máximo representante de la otra corriente generada a partir de Franz Brentano: la fenomenología, y al que se considera como creador de la misma, que no es otro que *Edmund Husserl (1859-1938).* Su teoría fenomenológica se puede considerar como una síntesis del pensamiento de Bernard Bolzano y del de Franz Brentano. Aunque muchos de los seguidores de Husserl consideran a Brentano como un mero precursor suyo, es mucho más, tanto para él como para el resto de sus discípulos. El mismo Husserl reverenciaba en grado sumo a su maestro, que le había enseñado a filosofar.

Edmund Husserl había nacido en la región de Moravia, de padres judíos. Estudió en las Universidades de Leipzig, Berlín y Viena, desde 1876 hasta 1881. En Matemáticas tuvo como profesores: en Berlín, a Karl Weierstrass y a Leopold Kronecker (el perseguidor de Cantor).

Su amigo Támas Masaryk le aconsejó volver a Viena, para poder escuchar a Franz Brentano. Y así lo hizo, desde 1884 hasta 1886. Fue este Masaryk quien le convenció de que se hiciera protestante. En esa época Husserl oscilaba entre las Matemáticas y la Filosofía, en un mar de dudas, pero fue al oír a Brentano cuando se inclinó finalmente por la segunda. Le escuchaba con verdadero fervor de novicio, y en los Seminarios que organizaba su maestro le veía analizar el pensamiento de Bernard Bolzano. Posteriormente, Husserl fue de los pocos alumnos[513] que serían invitados al hogar de Brentano, siendo en el verano de 1866 huésped del maestro en el Wolfgangsee. Pero a pesar de esa generosidad de Brentano, nunca llegó a compartir con él su discípulo Husserl su psicologismo. Tal vez este sea uno de los motivos del enfriamiento de sus relaciones a partir de 1886. No obstante, a principios de la década de 1890´s Husserl le visitó en Italia, llamándole de nuevo a Venecia, en 1908.

En 1919, Husserl manifestaba su admiración infinita por el maestro, e insistía diciendo que de no haber sido por él, no habría escrito nunca ni una sola línea de filosofía. Tanto es así que en la dedicatoria de su primera obra

[513] Sólo invitaba a los alumnos más brillantes.

filosófica, *Die Philosophie der Arithmetik: Psychologische und Logische Untersuchungen*[514] escribió lo siguiente:

A mi Maestro, Franz Bretano:

con gratitud, de todo corazón.[515]

Husserl siguió durante su periodo de madurez enseñando en otras Universidades, pero siempre alemanas, como las de Halle (1887-1901), Gotinga (1901-1916) y Friburgo (1916-1929).

Con asombrosa sencillez[516], cultivó una filosofía enteramente objetiva, sin nada de "presuposiciones", remontándose desde Alexius Meinong y Franz Brentano hasta una visión de la Lógica muy en la línea propugnada por G. W. Leibniz y Bernard Bolzano. De hecho, en su *Logische Untersuchungen* (o *Investigaciones Lógicas,* publicadas originalmente en 1900-1901), aparte de atacar la lógica subjetiva de los empiristas como John Stuart Mill y Herbert Spencer, reconocía su deuda intelectual con Gottlob Frege, Franz Brentano y G. W. Leibniz.

Husserl describió sus conceptos detalladamente, dejando más de cuarenta mil páginas manuscritas, que hoy se guardan en el Archivo Husserl de Lovaina, aún no estudiadas en su totalidad.

Prosiguió su labor como una auténtica misión confiada por el maestro, con una verdadera abnegación, y estaba convencido de que con su fenomenología trascendental se podría suplir muy bien a la ciencia de la mente. Pues lo mismo

[514] Que es de 1891.
[515] *In inniger Dankbarkeit.*
[516] Bajo la clara influencia de los que les había inculcado Franz Brentano, en ese aspecto.

que Brentano, pretendía restaurar la “philosophia perennis”. Pero su abstrusa terminología redujo el círculo de sus primeros seguidores, entre los cuales se puede citar a Roman Ingarden, a Felix Kaufmann o a Martin Heidegger, quienes volcaron estas ideas en sus propios sistemas. También Max Scheler estuvo fuertemente influido por la lectura de las obras de Husserl. Desde entonces, ciertos continuadores -en cierto modo- de Heidegger, como Jean-Paul Sartre, Karl Löwitz, o muchos otros, han mantenido viva esa tradición.

No nos extendemos más sobre la figura y el pensamiento de Edmund Husserl, pues aunque corre paralela su fenomenología a la escuela de los lógicos aquí estudiados, dichas líneas no se cruzan.

Otro personaje notable de aquel mundo fue el filósofo vienés *Ludwig Wittgenstein (1889-1951).* Procedía éste de una familia de origen judío, siendo una de las más ricas del mundo en ese momento. Más tarde se habrían convertido al protestantismo. El padre de Ludwig, que era un poderoso empresario del acero, mantuvo sus bienes, por haberlos dispersado por toda Europa y América, poniéndolos bien a recaudo de la inflación galopante de aquellos años.

El hermano de Ludwig, Paul Wittgentein, llegó a ser un famoso concertista de piano, pero perdió el brazo derecho en la Gran Guerra, y para él compuso Maurice Ravel su famoso *Concierto para la mano izquierda.*

El primer interés de Ludwig fue por la ingeniería; de ahí que viajara a Manchester, entonces una pujante ciudad industrial. Pero al interesarse por la Filosofía de las Matemáticas, y conocer a Bertrand Russell, esto le decantó por los temas filosóficos. Con Russell mantuvo una relación bastate conflictiva. Wittgenstein no se reprimía a la hora de manifestar sus opiniones sobre de sus colegas. Así, dejó escrito que:

> Me es indiferente que el científico occidental típico me comprenda o me valore, ya que no comprende el espíritu con el que escribo. Nuestra civilización se caracteriza por la palabra `progreso´. El progreso es su forma, no una de sus cualidades, el progresar. Es típicamente constructiva. Su actividad estriba en construir un producto cada vez más complicado. Y aun la claridad está al servicio de este fin; no es un fin en sí. Para mí, por el contrario, la claridad, la transparencia, es un fin en sí.[517]

Entre sus amigos estaban el filósofo George E. Moore[518] y el gran economista John Maynard Keynes.

Se suelen distinguir dos etapas, o hablar de “dos Wittgenstein”:

- El primero, alrededor del *Tractatus Logico-Philosophicus,* publicado en 1923. Se podría enmarcar dentro del neopositivismo[519], si bien algo forzadamente.

---

[517] WITTGENSTEIN, L., *Aforismos. Cultura y valor,* el n.º 30. Edición de Austral. Madrid, Espasa.

[518] Por cierto, que a Wittgenstein le fascinaba la paradoja propuesta por dicho filósofo, G. E. Moore. Así, nos dice Ray Monk, en su libro *Ludwig Wittgenstein. The Duty of a Genius,* que: ése es “el nombre que daba Wittgenstein al absurdo de afirmar una proposición y a continuación decir que no se la cree uno; por ejemplo, `Hay fuego en esta habitación, pero no me lo creo´” (podemos encontrarlo, con más comentarios, en la página 492 de la edición española de dicha obra, publicada por la Ed. Anagrama).

[519] Su publicación en 1924 produjo un gran impacto entre los miembros del Círculo de Viena, que lo leían y discutían apasionadamente, junto con otra obra, la de Rudolf Carnap que lleva por nombre *Der logische Aufbau der Welt,* publicada en 1928. Tanto el Círculo de Viena como el Círculo de Berlín tuvieron como cauce para la difusión de sus trabajos la revista *Erkenntnis,* recordemos que fundada y dirigida por Rudolf Carnap (del primero de los grupos) y por Hans Reichenbach (del segundo de ellos).

- El segundo, en torno a sus *Investigaciones Filosóficas,* obra póstuma, de 1953. También entrarían, por tanto, en ese "segundo Wittgenstein" los famosos: *Cuaderno azul y Cuaderno marrón.* Por las obras de éste segundo período se le considera uno de los fundadores de la filosofía analítica. Wittgenstein se desdice, o retracta, en este segundo periodo de mucho de lo afirmado en el primero. Abandonando, por ejemplo, la noción de significado[520].

  No olvidemos que en su primera época Wittgenstein había desarrollado hasta sus últimas consecuencias el atomismo lógico de su maestro en Cambridge, Bertrand Russell. Pero que éste aún mantenía cierto grado de metafísica, como Bradley.

Entre estas dos fases, podemos encontrar ciertos elementos comunes, como:

- El interés por el lenguaje, y
- El valor que concede a la Filosofía. Pues, según Wittgenstein, ésta no puede darnos una descripción con sentido de la realidad. En particular, la Metafísica no sería nada más que un absurdo producto de confusiones de raíz lingüística, esto es, de modos incorrectos de reunir los conceptos en una determinada proposición[521]. Por todo lo cual

[520] DSM, *op. cit.;* p. 419. En dicha obra puede verse desarrollado con extensión y claridad el no siempre fácilmente interpretable pensamiento de Wittgenstein.
[521] No obstante, Wittgenstein no llegaba a negar la existencia de aquello que no pueda ser expresado de modo lógico-matemático, o científico, como cuando dijo en el *Tractatus* que: "Nosotros sentimos que cuando todas la posibles preguntas científicas han sido contestadas, los problemas de nuestra vida no han sido tocados siquiera. Entonces, por supuesto, ya no quedan más preguntas, y justamente ésa en la respuesta." "Se da, en efecto, lo indecible. Esto se muestra: es lo místico" [op. cit; p. 202]. Como dice el profesor Sánchez Meca, no se rechaza lo metafísico (en este primer periodo). "Lo que se niega es la posibilidad de constatarlo, relegándolo a una experiencia de tipo místico." Ver DSM, *op. cit.;* p. 397.

pensaba que la auténtica Filosofía se ha de restringir a la mera delimitación del ámbito de aquello que se puede decir, esto es, del ámbito del sentido; por tanto, su labor consistiría en el análisis y el esclarecimiento del lenguaje.

No debemos olvidar tampoco a *Kut Gödel (1906-1978),* que en contra de lo que se suele pensar, no era alemán, sino moravo; concretamente, de Brno, la capital de Moravia, aunque perteneciera dentro de ella a la minoría de lengua germana. Se trasladó a Viena con la intención inicial de estudiar Física en su Universidad. Su hermano Rudolf ya llevaba cuatro años estudiando Medicina en ella.

Kurt fue alumno de Philipp Fürtwangler[522] (1869-1940), el notable especialista en Teoría de Números, y del especialista en Análisis Matemático, Hans Hahn, que terminaría siendo su director de tesis[523]. Asistió a los Seminarios de Moritz Schlick, el fundador del Círculo de Viena, quien le fue introduciendo en la filosofía de la matemática de Russell.

[522] Primo del compositor y gran director de orquesta Wilhelm Furtwängler (1886-1954), glorioso intérprete de Beethoven, entre otros.

[523] Philipp Furtwängler (1869-1940) fue un doctorando de Felix Klein, en la Universidad de Göttingen, donde leyó su tesis, *Zur Theorie der in Linearfaktoren zerlegbaren ganzzahlingen ternären Kubischen Formen,* el año 1896. Ejerció como profesor en la Universidad de Viena, desde 1912 hasta 1938. Entre sus alumnos estuvo Kurt Gödel. Éste le admiraba sobremanera, tanto es así que dijo después que nunca había escuchado clases tan buenas como aquellas. De hecho, se había matriculado pensando estudiar Física, pero tras oír a Furtwángler cambió de idea y estudió Matemáticas.Como Philipp era paralítico, daba sus clases hablando desde su silla de ruedas, y el ayudante se encargaba de escribirlo en una pizarra. Su contribución más importante a su campo es al *Teorema del Ideal Principal.* Era primo segundo del famoso director de orquesta Wikhelm Furtwängler.
En cuanto a Hans Hahn (1879-1934), fue éste un brillante matemático austriaco, también profesor de Gödel en Viena. Investigó en la teoría de conjuntos, la topología y el análisis funcional, donde son fundamentales tanto su *Teorema de Hahn-Banach* como el llamado *Principio de Acotación Uniforme.* Se ocupó mucho de problemas filosóficos, siendo uno de los impulsores más eficaces del Círculo de Viena.

A pesar de la derrota en la Gran Guerra de las llamadas “Potencias Centrales”, lo que hizo que Viena pasara a ser una ciudad de segunda fila en lo económico, la vida cultural siguió siendo floreciente.

En el Círculo de Viena estaban, aparte de los antes mencionados, como Hans Hahn o Moritz Schlick, personajes tan notables como Karl Menger, Rudolf Carnap[524], Otto Neurath, o Herbert Feigl, y Gödel pasó a ser uno de ellos. A sus reuniones asistiría entre 1926 y 1928[525].

A finales de 1928 empezó Gödel su tesis y medio año después ya la había terminado. Sus directores de tesis fueron los profesores Philipp Fürtwangler y Hans Hahn. El texto lo envió a la revista *Monatshefte für Mathematik und Physik,* apareciendo un año después ya publicado, bajo el título *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkälkuls*[526]. Le concedieron el doctorado en febrero de 1930.

---

[524] Son famosos, dentro del campo de los filosofos analíticos, los ataques dirigidos contra las ideas de Martin Heidegger (especialmente, los de Rudolf Carnap), acusándole de mero \`malabarista de palabras´. Recordemos que el problema de la filosofía no sería la verdad, sino el lenguaje, contribuyendo con ello al \`giro lingüístico´ que preconizaron G. E. Moore, B. Russell y L. Wittgenstein, junto con otros neopositivistas. Estas críticas a Heidegger se vuelven mucho más virulentas con Mario Bunge, quien le califica de un \`mero charlatán´. No queremos añadir más leña al fuego, con la referencia a ciertas actitudes poco airosas, como el acudir a dar las conferencias vestido con el uniforme nazi. Pero estas cosas debieran quedar como en sordina, concentrando el esfuerzo en dilucidar qué puede haber de válido en su pensamiento. Por cierto, que la expresión \`giro lingüístico´ proviene de Gustav Bergmann. Asimismo, este parece haber sido el primero en hablar de \`filosofía analítica´, en un artículo suyo de 1945 que aparece en la Bibliografía final.

[525] Solían reunirse en el famoso Café Central de Viena, donde, por cierto, entre los parroquianos habituales había otros dos que también eran asiduos, aunque entonces sin demasiada importancia todavía, pero llamados a cambiar la historia de su país: se trataba de los rusos Vladimir Ilich Uliánov (más conocido por Lenin) y Lev Davidovich Brohnstein (más conocido por Trotsky). Extraña mezcla en un mismo café.

[526] Es decir, *la completitud de los axiomas lógicos de primer orden.*

En ese artículo de 1930, Gödel ya demuestra la completud (o completitud) semántica de la Lógica de Primer Orden[527], basándose en los siguientes dos teoremas:

- *Teorema 1. Toda fórmula válida es deducible.*
- *Teorema 2. Toda fórmula o es refutable, o es satisfacible.*

Esta prueba realizada por Kurt Gödel tiene una gran trascendencia en la historia de la Lógica.

Hacia ese año ya se pensaba que el programa formalista[528] había alcanzado su culmen, con la aparición de los *Principia Mathematica,* de Bertrand Russell y Alfred N. Whitehead. Pero faltaba probar la consistencia de algún sistema formal de la aritmética. Esto daría lugar al teorema más famoso de la Lógica y seguramente, de toda la Matemática. Fue en 1931 cuando Gödel probó que todos los sistemas formales de la Matemática Clásica[529] son incompletos. Esto quiere decir que dentro de cualquiera de ellos se puede construir una sentencia indecidible, esto es, que ni su afirmación ni su negación sean deducibles. Además de esto, Gödel probaba que es imposible demostrar la consistencia formal de cualquiera de los sistemas de este tipo. Aunque se podría probar esa consistencia "desde fuera", saliéndose del sistema hasta alcanzar uno más potente, pero eso ya no sería lo mismo y de dudosa utilidad. Lo cual fue semejante a un maremoto en las hasta entonces tranquilas aguas de la fundamentación matemática.

[527] FOL, por Fist Order Logic, o Lógica de Primer Orden.
[528] El de David Hilbert.
[529] El de Peano, el mismo de Russell, o el de la teoría axiomática de conjuntos.

En 1938, y tras el Anschluss[530], partió Gödel hacia Princeton. Al año siguiente acudiría a la Universidad Católica de Nôtre Dame, cercana a la ciudad de Chicago, y allí dio clases de Lógica y de Teoría de Conjuntos, junto con Karl Menger. Mientras tanto, las tropas nazis habían invadido Polonia y entrado en guerra contra Francia y Gran Bretaña. Gödel se mantenía mientras tanto bastante ajeno a toda esta debacle de la civilización occidental que se estaba produciendo.

En la Universidad de Princeton fue colega de Albert Einstein y de Wolfgang Pauli, recibiendo la visita de Bertrand Russell, el año 1943, en el IAS[531], donde trabajaba.

Uno de sus trabajos menos conocidos es el de la elaboración de un modelo cosmológico, que hoy viene siendo conocido como el *Modelo de Gödel.* Lo presentó en 1950, en el Congreso Internacional de Matemáticos de Cambridge (Massachussets), bajo el título de “Rotatory Universe in General Theory of Relativity”. En dicho trabajo presentó las soluciones a la Ecuación de Einstein, que daban lugar a universos rotatorios, espacialmente homogéneos y finitos.

En los diez últimos años de su vida[532], fue hundiéndose más y más en la paranoia, aislándose de modo progresivo de todo el mundo exterior. Ya no tenía ningún contacto ni con otras personas ni con la investigación científica. Ni siquiera la demostración que lograse Y. Matiyasévich consiguió sacarle de su

---

[530] U ocupación de Austria por Hitler y sus tropas, no por todos tan mal recibidas allí, ni mucho menos (conviene recordarlo).
[531] *Institut for Advanced Studies (IAS).*
[532] Esto es, desde 1968 hasta 1978.

permanente marasmo. Las crisis nerviosas se fueron repitiendo, inexorablemente. Le quedaban las visitas de su amigo Oskar Morgestern, pero cuando este murió de cáncer, en 1977, su aislamiento se volvió total[533]. Se negaba a comer y a pasar por el hospital, así que falleció de inanición, o de progresiva desnutrición, el 14 de Enero de 1978.

[533] No es esto de extrañar, dada la larga historia de desórdenes mentales de muchos grandes matemáticos y pensadores en general, ya que la lista podría empezar por el propio Gödel, para seguir por David Hilbert o con Georg Cantor, por citar sólo algunos de los que terminaron en psiquiátricos. La interrelación entre el descomunal sobreesfuerzo mental y la locura está aún por ser contada.

12. Antecedentes del concepto de Verdad.

<u>Precedentes griegos.</u>

Antes de profundizar en las distintas concepciones que nos ido ofreciendo hasta hoy el pensamiento contemporáneo acerca de la verdad, daremos una rápida, pero creemos que conveniente, revisión del mundo de las paradojas o antinomias, como antecedente directo de la teoría de los grados de verdad. Y un par de fragmentos del gran Estagirita, que mueven a pensar sobre sus relaciones con lo que con el tiempo ha llegado a ser la Lógica Borrosa.

Porque podemos citar varios textos que nos mueven a pensar si no fue Aristóteles el primer lógico “fuzzy”. Así, por ejemplo, tomemos el siguiente:

> Las cualidades admiten variación de grado. La blancura es predicada de una cosa en mayor o en menor grado que de otra. Este es también el caso en relación con la justicia. Además, una y la misma cosa puede exhibir un mayor grado que lo hacía antes: si una cosa es blanca, puede llegar a ser más blanca.[534]

Los problemas relacionados con la “vagueness” fueron estudiados en tiempos de Aristóteles, cuando el ya mencionado filósofo Eubúlides de Mileto (nacido hacia el 400 a. C.) descubrió la *Paradoja Sorites,* o del Montón de Arena, porque es en griego lo que significa “soros”, montón. Pero no sería esta

[534] ARISTÓTELES, *Categorías,* ch. 8, 10b.

la única antinomia planteada por Eubúlides, sino que se le ocurrieron al menos éstas otras:

- La del mentiroso (The Liar Paradox, o pseudomenos).
- La del “overlooked man” (o del `dialanthanôn´).
- La de Electra y su hermano.
- La del hombre enmascarado (`egkekalummenos´).
- La de los cuernos (The Horns, o `keratinês´).
- La del calvo (The Bald Man, o `Phalakros´), etc.

Así que dicho Eubúlides de Megara fue quien más hizo por promover las paradojas en toda la historia de la humanidad[535], si hacemos –tal vez- excepción del caso del propio Zenón de Elea.

Parece haber tenido el tal Eubúlides una furibunda aversión -y casi manía persecutoria- contra el Estagirita, al cual intentó desacreditar de todas las maneras posibles. Perteneció Eubúlides a la llamada Escuela Megárica, habiéndola fundado su maestro, Euclides de Megara, el cual no debe ser confundido con el otro Euclides, el de Alejandría, recopilador y creador de parte de sus famosos *Elementos.* Los razonamientos sofísticos de Eubúlides son satirizados en boca de Sócrates, en los *Diálogos* de su discípulo, Platón; concretamente, en el que lleva por nombre *Teeteto.*

Dos de los argumentos dialécticos atribuidos a Eubúlides de Mileto se encuentran entre los más sorprendentes y de más difícil solución de toda la historia.

[535] SORENSEN, R., *Breve historia de la paradoja.* Barcelona, Tusquets Editores, 2007.

El primero de los cuales sería la llamada *“Paradoja del Mentiroso”,* que muestra la imposibilidad de asignar un valor de verdad a aquello bien famoso de “Esta afirmación es falsa”. El otro argumento sería el ya conocido como *“Paradoja Sorites”.*[536]

<u>De las Paradojas o Antinomias.</u>

Recordemos que una paradoja, o antinomia, es una construcción mental (`thought construction´) que conduce a una contradicción inesperada. Lo esencial en esta definición proviene precisamente de ése carácter “inesperado”. Puesto que a veces podemos llegar a contradicción sin que la situación sea vista como paradójica. Una contradicción se entiende como la conjunción de dos proposiciones (o sentencias), de las cuales una es la negación de la otra. Así, pues, una paradoja aparecerá cuando se presenta una contradicción a pesar de haber utilizado reglas de inferencia correctas (desde el punto de vista lógico), de estar convencidos de haber sido formulado nuestros razonamientos con precisión, y tener la certeza de que las opiniones que sostenemos son racionales.[537]

[536] Se trata de la P*aradoja del Montón (The Paradox of the Heap)*, que vamos a seguir dilucidando en el capítulo siguiente. Porque hemos de dejar constancia que la vaguedad en la aplicación de los términos conduce a frecuentes paradojas, como bien dijera Nicholas Rescher. Esto se debería a que los términos vagos delimitan una región más o menos definida de aplicación, que luego va decayendo en el grado de nitidez, para entrar en una zona de penumbra o de sombra progresiva, lo que podríamos llamar, frente al blanco y el negro, una zona de grises. Lo cual proviene de la indefinición y de la incertidumbre.
Pero no es la única antinomia a la que podemos asociar dicho nombre, puesto que existen al menos seis -como antes dijimos- cuya autoría se atribuye a Eubúlides de Mileto, y que pudieran ser dignas de recibir dicho nombre. Así que más adecuado sería hablar de “Paradojas del tipo Sorites”, o de “argumentos soríticos”, en plural.

[537] Como con el tiempo harían los Escépticos, es cierto que los Sofistas no consideraban las paradojas por puro placer, sino porque veían en ellas unas herramientas que permitiesen poner de manifiesto un aspecto fundamental de la condición de los humanos: los límites de su razón. Para los Megáricos, el elemento clave de la dialéctica no era la lógica, en cuanto teoría de la inferencia correcta, por importante que ésta fuera, sino la “erística”, en tanto que teoría de la

Las paradojas provienen fundamentalmente del folklore griego; más en concreto, de los oráculos y las profecías, de aquellos cultos antiguos en cuyos templos, como el tan famoso de Delfos, las sibilas y las sacerdotisas emitían augurios y frases enigmáticas, que muchos se encargaban luego de descifrar, o de hacer como que interpretaban. Recordemos otro caso de lugar de culto famoso de aquella época: el del oasis de Siwa, donde al hijo del rey Filipo de Macedonia, Alejandro Magno, le confirmaron su origen divino, tras la correspondiente inyección (suponemos) a las arcas del templo del más eficaz "ungüento amarillo" conocido desde la antigüedad: la cantidad suficiente de las que entonces eran estáteras de oro.

Como dice Roy Sorensen en su libro sobre las *paradojas,* estas son

"preguntas (o pseudopreguntas, en algunos casos) que nos dejan sorprendidos entre demasiadas buenas respuestas."

O asimismo,

… los argumentos que apoyan una solución de una paradoja parecen convincentes al considerarlos de forma aislada. La cuestión se mantiene viva gracias al juego de tira y afloja que se da entre contendientes con posibilidades similares. Los griegos se sintieron atraídos por disputas largas y sorprendentes como éstas.[538]

También es digno de mención que el gusto por la disputa dialéctica en sí, pero sin fin alguno, llamada la *Erística,* tuvo un cultivo especial en la Escuela

evitación del error. Para ellos, era el camino más directo hasta la salud. Porque sabiendo manejar los razonamientos, en situaciones de conflicto o de competición, esto equilibraría la mente, lo mismo que el ejercicio físico o la competición deportiva entonaría el cuerpo. Lo consideraban, pues, como una especie de gimnasia mental, como lo que hoy pudieran ser las matemáticas, el ajedrez, o en tono menor, los "sudokus".

[538] SORENSEN, R., *op. cit.,* 2007; pp. 13-14.

Megárica, fundada por Euclides de Megara y de la que formó parte su discípulo, Eubúlides de Mileto[539], al cual corresponden muchas de las paradojas del tipo Sorites que podríamos comentar.

Pero la figura de Sócrates dio un giro radical a ese tipo de disputas, que en la forma hasta entonces practicada le parecían estériles, proponiéndolas como un camino hacia la búsqueda de la verdad.

Dice la tradición que una paradoja no es más que una opinión, o una conclusión, que resulta contraria a la creencia común. El mismo Estagirita (384-322 a. C.) decía que es paradójico todo aquello que va en contra de la creencia de la gente. Pues la misma opinión puede que sea paradójica para un grupo, y que no lo sea para otro.

En sentido estricto, una paradoja sería lo que en griego se llamaba *antinomia*[540]*.* Diremos que un razonamiento es antinómico, si a pesar de su forma lógicamente correcta, lleva a contradicción: P y no-P.

En un sentido aún más estricto, una antinomia sería un razonamiento lógicamente correcto que justificase esta equivalencia:

P si y sólo si[541] *no-P*

---

[539] Dicho Eubúlides de Mileto debió nacer hacia el año 400 a. C., y sería el más brillante de los dialécticos de la Escuela creada por Euclides de Megara, discípulo de Sócrates. Este Euclides no debe confundirse con el Euclides de Alejandría de los famosos *Elementos*, donde recopiló el saber de geometría. Los Megarenses heredaron el tema de las paradojas de los antiguos sofistas, quienes se preocuparon por él en el afán de mostrar que la razón es inadecuada para llegar a comprender la realidad de las cosas. Como sabemos, Aristóteles se ocuparía in extenso de su modo de razonar en sus *Refutaciones Sofísticas.* La Aporética sería una heredera de todo ello. Lo cual tendría su continuidad en tiempos medievales, con el estudio de los sofismas y de los irresolubles, o \`insolubilia´.

[540] Del griego αντινμια, que combina “anti” y “nomos” (ley).

[541] “syss”, en acrónimo español; “iff” (if and only if), sería su acrónimo equivalente en inglés.

Es en este sentido en el que la antinomia es entendida más a menudo.

Un apartado interesante de las paradojas se suele reservar a las llamada “de movimiento”, debidas a Zenón de Elea. Entre ellas, la Paradoja de la Dicotomía, la de Aquiles y la tortuga, la de la flecha, la del estadio y la del grano de mijo. Ésta últia es un dilema que apunta hacia que existe un cierto umbral de audibilidad. La del estadio muestra la verdad de un hecho bien sencillo: que nuestra velocidad es distinta con respecto de los distintos objetos que consideremos, siempre que éstos, a su vez, o bien se encuentren en reposo o en movimiento, con una cierta velocidad. Es claro que ninguna de las dos (ni la del estadio ni la del grano de mijo) son verdaderas paradojas, ya que no contienen ninguna contradicción. Pero hay otras que aún despiertan interés, llenas de sutileza e ingenio, y que siempre deben contextualizarse para entender su motivación y último sentido. Nosotros vamos, primero, a tratar de someterlas al análisis matemático, si pretender con ello que todo acaba ahí, pues luego hemos de ver el porqué de ellas, de qué pretendían apoyar o quedar en evidencia.

Empecemos con la llamada *Paradoja de la Dicotomía.* Se podría plantear así: Para cubrir una distancia de longitud finita, primero hemos de cubrir su mitad, luego la mitad de la otra mitad, y así en adelante, haciendo el proceso infinito. Cubrir la distancia *s* sería por ello equivalente a ir cubriendo una cantidad infinita de distancias decrecientes, cuyas longitudes fueran siempre no nulas, y que vendrían a formar una sucesión:

$$s / 2, s / 4, s / 8, s / 16, \ldots, s / 2^n, \ldots$$

Lo que avalaría que cubrir una distancia de cualquier camino equivale a llevar a cabo infinitas acciones en tiempo finito. Lo cual es imposible.

Matemáticamente, es fácil de traducir.

Todo *s* se particionaría en:

$$|\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ s / 2 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_|\_\_\_\_\_\_\_ s / 4 \_\_\_\_\_\_\_\_|\_\_\_ s / 8 \_\_\_|\_\_ ... \_\_|$$

La sucesión obtenida es de las de tipo geométrico, con primer término:

$$a_1 = s / 2$$

y razón

$$r = ½$$

Como la razón de la sucesión tiene módulo menor de la unidad:

$$|r| < 1$$

La sucesión dada es convergente.

Para obtener su suma (Σ), aplicaremos la conocida fórmula de las progresiones geométricas:

$$\Sigma = a_1 / (1 - r) \qquad [*]$$

Con lo que en nuestro caso[542], se tendría:

$$\Sigma = s / 2 + s / 4 + s / 8 + s / 16 + \ldots =$$

$$= (1 / 2 + 1 / 4 + 1 / 8 + 1 / 16 + \ldots) s =$$

$$= \{(1 / 2)^1 + (½)^2 + (½)^3 + (½)^4 + \ldots\} s =$$

$$= \{½ \ / (1 – ½)\} s = s < + \infty$$

Kazimierz Ajdukiewicz nos hacía la observación sobre que el mismo Aristóteles ya había dado esta solución, aunque de forma descriptiva[543]. Distinguía Ajdukiewicz entre la “indefinidad[544] de la división” y la “indefinidad de los límites”, que en el caso de las cantidades continuas, admitiría la división infinita con respecto de los límites.

Zenón de Elea, sin embargo, estaba principalmente interesado en el movimiento, para apoyar las ideas de Parménides, en contra de Heráclito y de tantos otros filósofos, que hablaban de la multiplicidad del ser, de los pluralista, etc. No se quedaba, por tanto, en la mera subdivisión sucesiva de un segmento.

Ésta paradoja plantea, como decimos el problema de si es posible realizar infinitas tareas en tiempo finito. Tomasz Placek hizo observar[545] que las paradojas de Zenón acerca del movimiento estarían relacionadas con la cuestión de si es posible una máquina infinita, esto es, una máquina que sea

[542] AJDUKIEWICZ, K., “Paradoxes of Ancients”, de 1985, en la página 140. También Alfred North Whitehead, en su obra *Process and Reality,* de 1929; p. 95.
[543] ARISTÓTELES, *Física,* 232b-234a.
[544] \`Indefiniteness´, o indefinición. Es la cualidad de ser indefinido.
[545] En 1997.

capaz de llevar a cabo infinitas acciones en un intervalo de tiempo finito. Dicho autor nos narra la historia de la afanosa búsqueda de una máquina o autómata de ésas características. Nos recuerda, de paso, la máquina de Turing u otros ingenios mentales similares. El problema de base radica en que tales máquinas en realidad no pueden construirse, porque su funcionamiento requeriría leyes físicas distintas de las conocidas, o incluso, magnitudes físicas infinitas. Incluso la construcción de tales máquinas entraría en contradicción con las leyes de la lógica. Se quedarían, pues, en el limbo de los constructos matemáticos. Podríamos suponer que el movimiento es la única cosa realmente de entre las existentes que nos permite verlo como tal máquina infinita. Pero la Mecánica Cuántica ha sugerido con toda claridad que tiempo y movimiento no son infinitamente divisibles. Lo cual pone en evidencia que la paradoja de la dicotomía de Zenón concierne a la argumentación de los atomistas contra los antiatomistas.

El propio Estagirita apuntaba que la paradoja de Aquiles y la tortuga era una simple variante de la paradoja de la dicotomía[546]. La de Aquiles y la tortuga es de sobra conocida como para tener que reiterarla aquí. Pero no lo es tanto su resolución matemática: se trataría de un ejemplo más de lo que en Análisis se denomina una sucesión geométrica convergente. La traslación a ecuaciones sería como sigue:

Sea V_1 la velocidad de Aquiles, y V_2 , la de la tortuga. Antes de que Aquiles alcance al quelónido, el primero ha de llegar al punto B. Supongamos ahora que Aquiles cubre ése camino, AB, de longitud s_1, en un tiempo t_1. En ése

[546] ARISTÓTELES, *Física,* VI, 239b 10-33; p. 405.

mismo tiempo, la tortuga alcanza un punto C, cubriendo el tramo BC, cuya longitud no nula es s_2. De modo que transcurrido el tiempo t_1, Aquiles estará en el punto B, mientras que el quelónido está en el C. Ésa secuencia se repetiría indefinidamente, generándose con ello una sucesión infinita de secciones, $\{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}$:

|________________s_1________________|______s_2_______|___s_3_____| …

A B C D

Se trataría, por tanto, de una progresión geométrica, de primer término:

$$a_1 = s_1$$

y de razón:

$$r = V_2 / V_1$$

De modo que para $n \geq 1$,

$$s_n = s_1 (V_2 / V_1)^{n-1}$$

y como $|r| < 1$, lo cual estaría asegurado por ser $V_2 < 1$, la sucesión $\{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ a ser convergente. La suma es posible y vendría dada de nuevo por la ecuación [*].

Así que:

$$S = s_1 + s_2 + s_3 + \ldots = \Sigma_{i\in\mathbf{N}}\ s_i =$$

$$= s_1 + s_1 (V_2 / V_1) + s_1 (V_2 / V_1)^2 + \ldots + s_1 (V_2 / V_1)^{n-1} + \ldots =$$

$$= s_1 [1 + (V_2 / V_1) + (V_2 / V_1)^2 + (V_2 / V_1)^3 + \ldots + (V_2 / V_1)^{n-1} + \ldots] =$$

$$= s_1 [V_1 / (V_1 - V_2)] < + \infty$$

Como en el caso anterior, la solución matemática puede que a algunos les parezca bastante ilusoria, e incluso anacrónica, pues utilizamos unas herramientas matemáticas de las que no disponían los pensadores griegos de la época, limitados a los números naturales, ya que no sería hasta otros científicos posteriores, como el famoso Arquímedes de Siracusa, que dispusieran de los números racionales. Por todo esto, se puede considerar que el problema filosófico de la dicotomía aún subyace en el fondo.

La diferencia entre ambas paradojas, la de la Dicotomía y la de Aquiles y la tortuga radica en el hecho fundamental de que con la primera de ellas lo que Zenón de Elea intentaba demostrar era la imposibilidad del movimiento absoluto, sin punto de referencia, siguiendo con ello a Parménides, mientras que con la segunda paradoja lo que Zenón pretendía mostrar es la imposibilidad del movimiento relativo, esto es, con respecto de otros objetos en movimiento.

Un tipo especial de paradojas es el de los llamados *"Sofismas".* Usualmente, el término de "sofisma" tiene un sentido negativo: que con él se intenta engañar a la gente. Por ello, debe distinguirse bien del *Paralogismo*[547]*,* que sería también un razonamiento incorrecto, pero en este caso, sin intención de engaño. Dado que una persona que propone uno de dichos razonamientos puede que desconozca que éste fuera erróneo, o incluso que aun sabiendo que

[547] O falsa conclusión.

lo es, lo presente como cierto, pero en forma de chiste, broma, o que sea una especie de truco didáctico, ilustrativo, para explicarlo acto seguido.

En cuanto al fenómeno de la “vagueness”, no sólo viene desde los tiempos más antiguos, sino que está presente por doquier en la vida cotidiana. De ahí que su estudio sea de un gran interés para los investigadores de muchos campos, interconectados entre sí . Se suele denominar a las paradojas provenientes de la vaguedad como paradojas del tipo Sorites. Aunque se suele asociar con la del montón de arena, no es la única de este tipo. Con ella lo que en realidad se intenta es formalizar nuestra indecisión en los casos de “fuzzy boundaries”, o de frontera difusa.

Es muy interesante a este respecto la Tesis Doctoral en Filosofía que presentó Phil Serchuk en la Universidad de Calgary, en 2005, bajo el título de:

“Fuzzy Logic and Vagueness”

Allí trata dicho autor, “in extenso”, de la paradoja por excelencia, la Paradoja Sorites . Esta paradoja proviene de una muy larga tradición, y parece proceder del filósofo Eubúlides de Megara , el cual mantuvo una agria polémica con Aristóteles; contra él y contra su “Mean Theory” iría en tal caso dirigido dicho argumento. Parece ser que Eubúlides llegó a acusar al Estagirita de haber traicionado a su maestro, Platón, y de haber actuado como un espía infiltrado en Atenas por el rey Filipo de Macedonia, el padre de Alejandro Magno, para quien sería luego elegido Aristóteles como preceptor.

Dice Serchuk allí que:

Typically, a paradox resulting from vagueness is referred to as a sorites or sorites-like paradox. The sorites paradox, also known as the paradox of the heap, is an attempt at formalizing our indecision over borderline cases. The sorites involves a heap of sand of sufficient size q and the true sentence Pq, 'q grains of sand constitute a heap of sand'. Now suppose one grain of sand is removed, so that the heap is now of size q- 1. Because it is odd to think that one grain of sand could make the difference between heapness and non-heapness, it seems as though P q−1 is still true. It is then reasonable to say that 'for all numbers n, if n grains of sand constitutes a heap of sand, then n − 1 grains constitute a heap of sand'. Yet we could repeat this process q − 1 times and reach the intuitively unacceptable conclusion that one grain of sand constitutes a heap; if we reject this conclusion, however, we are forced to conclude that there is some number n such that that n grains of sand constitute a heap and n − 1 do not.

The reasoning of this paradox can be made explicit:

P (1): 100,000 grains of sand constitute a heap of sand

P (2): If 100,000 grains of sand constitute a heap of sand, then 99,999 grains of sand constitute a heap of sand as well

C (1): Therefore, 99,999 grains of sand constitute a heap of sand

P (3): If 99,999 grains of sand constitute a heap of sand, then 99,998 grains of sand constitute a heap of sand as well

C (2): Therefore, 99,998 grains of sand constitute a heap of sand

P (4): If 99,998 grains of sand constitute a heap of sand, then 99,997 grains of sand constitute a heap of sand as well

C (3): Therefore, 99,997 grains of sand constitute a heap of sand

. . .

P (100,000): If 2 grains of sand constitute a heap of sand, then 1 grain of sand constitutes a heap of sand as well

C (99,999): Therefore, 1 grain of sand constitutes a heap of sand

Note that the final conclusion is deduced by repeated application of modus ponens. If we were to model 'heap' in classical logic at least one premise from the above argument would need to be rejected. This would have the effect of imposing a strict bound on 'heap'. For example, we could reject P (99,000) and decide that 1,000 grains of sand constitute a heap of sand but 999 grains do not. Yet it is intuitively absurd to hold not only that one grain of sand makes the difference between heapness and non-heapness, but that it is precisely the thousandth grain of sand that makes the difference.

Podría ser muy apasionante analizar todas las paradojas de este tipo, como son: la del mentiroso, la del calvo, u otras similares. Podríamos incluso acuñar como neologismos los conceptos de "montoneidad", en tanto que grado en que un grupo de grados de arena es ya o no es todavía un montón, o el de "alopeceidad", en cuanto grado en que una persona se va quedando calvo.

La cuestión sería: ¿cuándo empieza a estarlo o deja de estarlo? He aquí la frontera borrosa que define la aparición y la necesidad de la lógica de los grados, la Lógica Fuzzy, para resolverlo.

Descrita en forma más compacta e inductiva, la paradoja Sorites se podía exponer así:

The paradox … form using any vague predicate:

P (1): A man with one hair on his head is bald.

P (2): If someone with n hairs is bald, then someone with n + 1 hairs is bald as well.

C (1): Someone with 10,000 hairs is bald.

P (1): A 120-year old person is elderly.

P (2): If someone n years-old is elderly, then someone (n – 1)-years-old is elderly as well.

C (1): Someone 5 years-old is elderly.

These arguments can be shortened and the effect of mathematical induction highlighted by symbolizing the argument in predicate logic. Without any loss of generality, let F 100,000 be the true sentence ‘100,000 grains of sand constitute a heap of sand’. Using this conditional form of the sorites we can conclude that 1 grain of sand constitutes a heap of sand.

Otro capítulo interesante acerca de la resolución de la Paradoja Sorites recoge más adelante que las:

“Solutions to the Sorites (Paradoxes) have typically only been examined from a philosophical perspective. While it is necessary for any good theory of vagueness to pass philosophical scrutiny, a good account of vagueness should also be useful when applied in the many disciplines where vagueness can be found.”

“ … a detailed analysis of two proposed methods of dealing with vagueness: the epistemic view, which holds that classical logic is completely compatible with what appears to be vagueness, and fuzzy logic, which introduces an infinite number of truth values to deal with the phenomenon.

Both the epistemic and fuzzy account of vagueness can be seen as extreme solutions and several moderate theories have also been proposed, including one requiring a 3-valued logic and one that is known as supervaluationism. Each theory of vagueness has a unique set of strengths and offers a different view of vagueness; yet discussions of these theories usually focus not on their strengths but on their many weaknesses.

R. M. Sainsbury lo exponía con brevedad de este modo alternativo[548]:

A single grain of sand is certainly not a heap. Nor is the addition of a single grain of sand enough to transform a non-heap into a heap: when we have a collection of grains of sand that is not a heap, then adding but one single grain will not create a heap. And so, by adding successive grains, moving from 1 to 2 to 3 and so on, we will *never* arrive at a heap. And yet we know full well that a collection of 1,000,000 grains of sand is a heap, even if not an enormous one.

Para ver con mayor claridad este argumento, convendría traducirlo a un simbolismo lógico abreviado como éste:

Supongamos que g_i representase un conjunto formado por *i* granos de arena. Abreviemos también mediante H(g) el cumplimiento de esta propiedad por el conjunto: "la colección g, de grados de arena, constituye un montón". De modo consecuente, $\neg$ H (g) sería el no-cumplimiento de esa condición, esto es, la "no-montoneidad".

Así, tendríamos esquemáticamente que:

(1) $\neg$ H (g_1), un hecho observable

[548] SAINSBURY, R. M., *Paradoxes.* Cambridge University Press, 2009. Véase también la obra homónima, publicada por N. Rescher en 2001.

(2) $H(g_{1,000,000})$, que también es un hecho observable.

(3) $(\forall i)[\neg H(g_i) \rightarrow \neg H(g_{i+1})]$, un principio que parece ser evidente.

(4) $\neg H(g_{1,000,000})$, que se sigue de (1) y de (3), por iteración.

(5) El (4) entra en contradicción con el (2).

Algunas observaciones pueden hacerse a partir de ello. Así, la (1) y la (3), juntas, darían la (4); mientras que la (4) lleva a la (5), la cual contradice a la (2). Mientras que la terna $\{(1), (2), (3)\}$ forma un `cluster aporético´[549], por lo que sería necesario eliminar uno de los elementos de esa triada para poder resolver la paradoja.

Por lo tanto, queda patente que tanto la (1) como la (2) corresponden a hechos observables, y son relativos a nuestra noción de qué cosa sea un `montón´ (o `heap´). Pero la (3), en cambio, es una genaralización que presenta un alto nivel de abstracción, siendo tan sólo una generalización plausible, esto es, una teoría.

Y a pesar de la fragilidad lógica que pueda mostrar la (3), no debiéramos rechazarla como falsa, ya que su negación nos llevaría a lo siguiente:

$$(\exists i)[\neg H(g_i) \,\&\, H(g_{i+1})]$$

Siendo claramente muy difícil concebir la existencia de un tal elemento, que cumpla lo que ese g_i.

[549] Lo de “cluster” tiene el significado de racimo, o de acumulación de elementos, dentro de un conjunto; así, podemos hablar de un cluster de estrellas dentro de una galaxia. Mientras que lo de “aporía” recordemos que era un enunciado que expresa o que contiene una inviabilidad de orden racional. O sea, para hablar en román paladino, soe trataría de un puñado de cosas que no debieran estar juntas.

13. El concepto de verdad en el pensamiento moderno y contemporáneo, con especial atención a la línea temporal aquí estudiada (la que viene desde Leibniz a través de Bolzano).

A lo largo de esta tesis hemos abordado lo que creemos que es un problema notable, al menos muy esencial dentro de los precedentes de la línea en que nos movemos: es el de los *futuros contingentes,* que desde Aristóteles y Diodorus Cronus ha venido reapareciendo a través de la Escolástica, en relación con la Presciencia Divina[550] y el determinismo o libre albedrío que pudieran tener o no tener los seres humanos.

Pero eso ha sido tratado ya, y vamos a pasar, por tanto, a la visión que de la verdad nos dan los pensadores coetáneos de la Escuela de Lvóv-Varsovia, así como alguno de sus precursores, ya que como sabemos, los miembros de dicha Escuela descienden indirectamente de Bernard Bolzano [551] y de Franz Brentano[552] a través de Kazimierz Twardowski[553].

Bernard Bolzano distingue entre cinco posibles significados, tanto de verdad como de verdadero.

Si los ordenamos en orden decreciente, del más a menos apropiado, estos serían:

---

[550] O *Divine Foreknowledge.*
[551] Que podíamos decir que cumplía el papel de ser su "bisabuelo" intelectual.
[552] Que sería, en ese sentido, su "abuelo".
[553] A quien le correspondería el papel de "padre".

1.- *el significado objetivo abstracto;*

2.- el significado objetivo concreto;

3.- el significado subjetivo;

4.- el significado colectivo;

5.- el significado impropio.

Bolzano se ocupó primero del significado objetivo concreto. Todas las verdades en sí mismas serían proposiciones en sí mismas. No existen, en tanto en cuanto no están localizadas en el espacio-tiempo. Sin embargo, ciertas proposiciones tienen el atributo de ser verdades en sí mismas.

Estableció Bolzano que una proposición es verdadera, si expresa algo que aplica a su objeto. Y que una verdad conocida tiene dos elementos constituyentes[554]: un juicio y una verdad en sí misma. Cada juicio tendría como soporte una proposición, que puede ser a su vez verdadera o falsa.

Franz Brentano criticó, por su parte, la teoría de la correspondencia[555], según la cual una proposición, una creencia o una opinión serían verdaderas, si ese juicio se refiere a algo que existe en la realidad. Decía Brentano que esa teoría no explicaba cómo un juicio verdadero puede afirmar la existencia o inexistencia de algo. Así que en su lugar, introdujo una nueva teoría de la verdad, según la cual un juicio verdadero o bien atribuye al objeto algo que pertenece a dicho objeto, o bien niega algo que no existe. En particular, si el juicio se limitara a una simple aserción, entonces aseveraría de algún objeto que tal objeto existe, o bien que no existe alguno que no existe. Su teoría de la

[554] Besatandsteile.
[555] O “correspondence theory of truth”.

verdad se puede considerar “nominalista”, en cuanto que postula que el concepto de universalidad no puede ser pensado, a menos que exista alguna cosa particular que sea universal. La universalidad como concepto abstracto sería, por tanto, un juicio sobre alguna cosa en particular, y no en lo universal. Así, *Warheit und Evidenz*[556] son dos términos generales que deberán ser referidos a cosas particulares que sean verdaderas y evidentes[557].

No queremos extendernos demasiado sobre las ideas brentanianas, ya expuestas en otras parte de este trabajo. Pero para saberlo en profundidad, convendría leer lo que dicen Kazimierz Twardowski y Anton Marty, en cuanto que miembros de la Escuela de Lvóv-Varsovia, por ser algunos de los que trasvasaron parte de las ideas y de las clases impartidas por el maestro, aunque dejando en ellas algo de su particular impronta. *Kazimierz Twardowski* compartía, con el primer Brentano y con su condiscípulo Anton Marty, la tesis de la independencia de las dos dimensiones, de realidad y existencia:

> An object is said to be something real or not real, regardless of whether or not it exists, just as one can talk about the simplicity or complexity of an object, without asking whether or not it exists. That in which the reality of an object consist can not be expressed in words; but most philosophers seem to agree nowadays that objects like piercing tone, tree, grief, motion, are something real, while objects like lack, absence, possibility, etc. are to count as not real Now, just as a real object may at one time exist and at another time not exist, so, too, can something non-real now exist, now not exist.[558]

[556] Verdad y Evidencia.
[557] BRENTANO, F., 1966; p. 18.
[558] TWARDOWSKI, K., 1894. In *Austrian Philosophy,* Ch. VI, 1995; p. 161.

Así que según eso, la verdad no sería una propiedad atemporal de los juicios. Pero más adelante rechazaba esta tesis, pues en 1902, en su artículo “On Relative Truth”, argumentaba en favor de una concepción de la verdad como algo absoluto[559], lo cual obviamente dejaría fuera la posibilidad de que la verdad de un juicio pueda depender de la ocasión, o del cambio de sujeto[560].

[559] Explica Jan Wolenski, en el segundo de su colección de ensayos, aparecida en 2013, pp. 38-39, que:
“The Polish chapter in Many-Valued Logic began when Kazimierz Twardowski published his very influential paper on the problem of relative truths. Twardowski very strongly defended the view that truth is absolute… Twardowski´s view about truth was commonly accepted in Poland until 1910. In this year, Lukasiewicz published a book on the principle of contradiction in Aristotle, and a short abstract reporting on his lecture about the principle of excluded middle. In the book, Lukasiewicz investigated the status of contradiction. He argued that it was not an obvious logical rule, even for Aristotle. Then, Lukasiewicz outlined the idea of non-Aristotelian logic, that is, logic in which principle of contradiction does not hold. According to Lukasiewicz, nothing excludes this kind of logic as a basis for correct inferences. Finally, Lukasiewicz argued that we accept principle of contradiction not, however, on theoretical grounds, but relative to our moral needs in order to maintain the difference between lying and truth-telling. Lukasiewicz did not propose in his book any formal system of non-Aristotelian logic, but clearly maintained that a revision of logic would be possible.”

[560] La aceptación de la idea de F. Brentano según la cual la verdad puede cambiar, pero el juicio permanece, dice Twardowski, parte de una confusión entre los juicios y sus expresiones. La argumentación de Twardowski muestra una clara influencia del libro de Bolzano que lleva por nombre *Wissenschaftlehre*. Posteriormente, puede hallarse bajo otras formas en la obra de Gottlob Frege, en la de Bertrand Russell, o en la del primer Wittgenstein.

AUTOR	SUJETO	TIEMPO DE LA COSA	SUJETO GRAMATICAL	¿ORACIÓN = JUICIO?	¿JUICIO = REAL?	OBSERVACIONES	VALOR VERD.
Łukasiewicz	Temp.	Futuro "en acto"	Cosa constructiva	Si	No	/I/ "pura" subordinada a la ontológica	/I/ "pura"
		Futuro "en potencia"	Cosa reconstructiva		Sí (Posibilidad)		/I/ "ontológica"
Leśniewski	Atemp.	Futuro "en acto"		Si	Si	Juicios absolutos	/V/ ó /F/
Kotarbiński	Temp.	Presente o pasado	Pseudonombre	No	No		Sin valor de verdad
		Presente o pasado	Nombre vacío	Sí			/F/
Ajdukiewiz	Temp.			No	No	Convenc. Radical	/V/ ó /F/ (En el contexto de su "apar. conc.")
			Término ambiguo o incompleto	No	Sí	Empir. Radical	/I/ Lingüística
Zawirski	Temp.	Presente	Nombres de cosas	Sí	Sí	Nos referimos en este cuadro a algunos juicios propios de la Física	/I/ (No gnoseológica ni lingüística, sino objetiva)

[561]

[561] Esta clasificación de las distintas posturas respecto del problema de los Valores Veritativos, la Indeterminación y la Multivalencia procede del libro de PDP, *op. cit.;* p. 242.

En particular, ahora hablaremos con más detalle de las contribuciones del judío polaco *Alfred Tarski (1901-1983).* Este fue un discípulo tanto de Stanislaw Lesniewski como del propio Jan Lukasiewicz.

La *Teoría de la Verdad de Tarski* es una de sus principales y más conocidas aportaciones filosóficas[562]. En realidad, se basaría en la versión alemana de un artículo previo suyo, pero escrito en polaco, y que quizá por eso había pasado casi inadvertido.

Ocho años después publicó, cuando ya estaba en Berkeley, otro que también versaba sobre dicha teoría, comentándola y refutando algunas objeciones puestas al anterior escrito. Este segundo trabajo se llamaba: “The semantic conception of truth and the foundations of semantics”.

La *Teoría de la Verdad* se podría clasificar en tres grupos o subclases:

- *Las Teorías de la Coherencia.*
- *Las Teorías Pragmatistas.*
- *Las Teorías de la Correspondencia*.

Dentro del primer grupo (el de las Teorías de la Coherencia) podemos enclavar al filósofo *F. H. Bradley (1846-1924)* y a *Nicholas Rescher (1928-).* Según ellos, se dice que un enunciado es verdadero cuando éste es consistente, o coherente, con el resto de los enunciados del sistema al que pertenece. Por tanto, lo que aquí nos interesa son las relaciones entre los enunciados del conjunto elegido.

[562] Y aparece desarrollada en su artículo:
TARSKI, A., “Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten sprachen”, de 1936.

Dentro del segundo grupo (el de la Teorías Pragmatistas), se puede situar a *John Dewey (1859-1952)* y a *William James (1842-1910).* Para ellos, un enunciado sería verdadero cuando es conveniente o resulta útil para una acción. Aquí lo que importa, pues, será la relación de conveniencia entre el enunciado teórico y la praxis.

Finalmente, y dentro del tercer grupo (el de las Teorías de la Correspondencia), se pueden considerar tanto al mismo *Aristóteles (s. IV a. C)* como a *Bertrand Russell (1872-1970).* Según ellos, un enunciado se dice que es verdadero, si se corresponde con lo que realmente es, ú ocurre. Ahora lo que nos interesa es la relación de adecuación entre realidad y lenguaje.

Es a este grupo al que debe considerarse que pertenece la *Teoría de la Verdad* de Alfred Tarski. Lo que este intentaba en el fondo era darle la razón al Estagirita en sus intuiciones, sólo que aportándole una explicación lo más técnica y detallada posible de la Verdad, dentro del contexto de los lenguajes formales.

Ya en su trabajo de 1944 había dicho Tarski que el predicado "verdadero" se puede aplicar no sólo a fenómenos psicológicos, como las creencias o los juicios, sino también a ciertos objetos físicos, como podrían ser las expresiones lingüísticas (entre ellas, los enunciados), o a entidades ideales, como las \`proposiciones´.

No olvidemos que la aportación semántica clave de Tarski –como hemos dicho- es precisamente esa Teoría de la Verdad.

La clasificación de las teorías de la verdad ha sido intentada por muchos, como, por ejemplo, es el caso de Karl Otto Apel, el cual en 1987 distinguía entre ocho clases[563]. Estas para él serían las siguientes:

- *Teorías clásicas de la Correspondencia,* con Aristóteles o Bertrand Russell como representantivos de la clase.
- *Teorías Evidenciales,* con René Descartes y Edmund Husserl.
- *Teorías Coherenciales,* con Hegel, Otto Neurath o Nicholas Rescher.
- *Teorías Pragmáticas,* con William James, John Dewey o Richard Rorty.
- *Teorías Semánticas.* Dentro de las cuales se puede subrayar la famosa teoría de Alfred Tarski, con su origen en el pensamiento heredado de la Escuela de Lvóv-Varsovia, a la cual él mismo perteneció. Estamos hablando del pensamiento lógico-filosófico de Kazimierz Twardowski, de Stanislaw Lesniewski, o de Jan Lukasiewicz, entre otros.
- *Teoría Post-Tarskianas de la Correspondencia,* como las de John L. Austin o de Karl Popper; éste, por cierto, un agudo crítico de las ideas del Círculo de Viena, las cuales trataba de atemperar[564].

[563] APEL, K. O., 1995.
[564] Karl Popper (1902-1994) fue un filósofo de origen austriaco, pero no debe ser considerado (él mismo así no se consideraba) como uno de los miembros del Wiener Kreis. No está de acuerdo con las posturas de los miembros de ese Círculo, donde se tomaba el verificacionismo como el método de verificación de las teorías. Recordemos que dicho *Principio de Verificación* (o de Verificacionismo) dice que todas las afirmaciones que no puedan ser verificadas carecen de sentido. Luego sería el filósofo inglés Alfred J. Ayer quien expusiera una versión débil de ese Principio. Según él, una afirmación cabe que no sea `provable´ (demostrable), pero que sin embargo, se pueda mostrar como probablemente cierta, dentro de un margen de duda razonable. Esto permitiría hacer afirmacioes sobre el pasado o predicciones en la Ciencia. En lugar de todo esto, Karl Popper introdujo el *falsacionismo,* método basado en la conjetura; al aplicarlo, deducimos las consecuencias observables, que luego van a ser puestas a prueba: en fin, el método de `ensayo y error´. Cuando la consecuencia falla, se rechaza la hipótesis de partida. Pero si no falla, entonces se someterá a sucesivas pruebas, que nos informarán provisionalmente de su validez: queda, pues, corroborada, pero con un carácter temporal. Por lo que la ciencia progresaría con la falsación sucesiva de las teorías, para que viendo todas aquellas que fallan, podamos tomar esto como guía para seguir avanzando por las restantes vías. Dicho de un modo más matemático, se dice que una teoría es *falsable,* si el conjunto de

- *Teorías Constructivistas del Consenso,* con Paul Lorenzen o Kuno Lorenz.
- *Teorías Pragmático-Trascendentales del Consenso,* con el propio K. O. Apel o Jürgen Habermas.

Admite Tarski que su teoría de la verdad no puede ser fácilmente aplicable al lenguaje natural[565]. Esto es debido tanto a la ambigüedad como al propio carácter, semánticamente cerrado, de los lenguajes naturales.

Tarski fue quien primero desarrolló y extrajo las implicaciones subyacentes a la diferencia que existe entre el lenguaje-objeto y el metalenguaje. Esta distinción ya había sido señalada por Bertrand Russell, en su introducción a la versión inglesa del *Tractatus Logico-Philosophicus,* de su antiguo alumno, Ludwig Wittgenstein.

La idea clave, para Tarski, es que la definición de verdad le concierne a los enunciados de un lenguaje-objeto, mientras que se construye en su correspondiente metalenguaje[566]. Lo cual es especialmente difícil en el tratamiento del lenguaje natural, por su carácter no especificable. Habría que fijar primero, para definir la verdad de los enunciados, cuáles son las expresiones dotadas de sentido, cuáles los términos primitivos, cuáles los axiomas admitidos, etc. Así llega a la conclusión según la cual este problema

---

sus enunciados de base puede separarse en dos subconjuntos disjuntos entre sí (esto es, puede establecerse con ellos una partición), estando formado el primero de estos por los enunciados de base con los que entraría en contradicción (serían sus llamados `falsadores potenciales´), y el segundo, por aquellos que no la contradicen.

[565] NL, como acrónimo del "natural language", o lenguaje hablado; en contraposición a los lenguajes artificiales de programación, por ejemplo.

[566] Recordemos que en Lógica y en Filosofía del Lenguaje se llama *Metalenguaje* a un lenguaje utilizado para hablar acerca de otro lenguaje, al cual se llama *Lenguaje Objeto*. Pueden ambos coincidir, como es el caso cuando utilizamos el inglés para hablar del propio inglés. Y un metalenguaje puede convertirse en lenguaje objeto de otro metalenguaje de orden superior.

sólo podría ser resuelto de forma rigurosa en aquellos lenguajes de los que previamente se ha especificado rigurosamente su estructura. Porque para el resto de los lenguajes[567], el sentido permanece vago y sólo tendría su solución un carácter aproximativo.

Para establecer, según Alfred Tarski, la definición de verdad habrá dos condiciones necesarias. Estas serán las de:

- *corrección formal,*

  y

- *adecuación material.*

La primera de ellas atendería a la forma de tal definición, mientras que la segunda se ocuparía de su contenido.

Nos dice que la distinción entre lenguaje-objeto y metalenguaje nos permite manejar un sistema abierto, desde el punto de vista semántico, en lugar de cerrado, como eran los lenguajes naturales o hablados[568].

Así que ya no se producirían paradojas semáticas, como la famosa de Eubúlides de Mileto, conocida como la Paradoja del Mentiroso, o del Cretense, que como sabemos, se remonta al siglo cuarto antes de Cristo.

Un modo de transcribirla sería:

> Un cretense dice que miente. Si dice la verdad al decir que miente, entonces miente. Y si miente al decir que miente, entonces es que dice la

[567] Como los naturales: francés, español, portugués,…
[568] NLs, en acrónimo.

verdad. Con lo que se puede concluír que miente al decir la verdad, y dice la verdad cuando miente.[569]

La resolución de tal paradoja requiere la distinción entre:

- *metalenguaje* (denotémoslo por *M*),

  y

- *lenguaje-objeto* (denotado por *O*),

a la que antes nos hemos referido.

Cuando el enunciado dice que el cretense miente y cuando dice que no miente, estos pertenecen al lenguaje-objeto, el *O.* Mientras que cuando los enunciados dicen que "miente" es verdadero o es falso, estamos moviéndonos en el metalenguaje, *M.*

Esto nos lleva a formular de nuevo[570] la paradoja mediante los dos niveles:

Si "miente" es verdadero, entonces miente.

Si "miente" es falso, entonces no miente.

Otro aspecto interesante en el pensamiento de Alfred Tarski es el de los *"truth-bearers",* o *"portadores de verdad".* Estos aparecen por vez primera cuando define "verdad" de modo semántico, en 1933. Se trata en realidad de sentencias. El predicado "es verdadero" se afirma en el metalenguaje de las sentencias en el lenguaje-objeto, esto es, en aquel en el cual se habla de las cosas.

---

[569] MARTÍNEZ-FREIRE, P., 2000; p. 106.
[570] Pero ya en forma clara y no contradictoria.

Así que en primer lugar, sería necesario definir de modo unívoco la noción de sentencia, a partir de las expresiones metalingüísticas que nos hablan acerca de ellas. Y en segundo lugar, la cuestión del porqué las sentencias juegan un papel en esos llamados *"portadores de verdad".*[571]

La respuesta a la primera de ellas es negativa. Tarski utiliza la noción de sentencia en cuatro acepciones: según la primera de ellas, una sentencia significa una expresión de lenguaje definida de modo puramente sintáctico; por la segunda, es un producto físico-psicológico de un suceso mental; según la tercera, sería un objeto físico, tal como una inscripción; según la cuarta, es posible definirlas como funciones sin variables libres.

Tengamos presente que Alfred Tarski fue alumno de:

- Jan Lukasiewicz, en *Lógica;*
- Tadeusz Kotarbinski, en *Filosofía;*
- Stanislaw Lesniewski, en *Lógica;*

Y estuvo fuertemente influido por todos ellos, a los cuales igualó e incluso llegó a sobrepasar por su brillantez. Se suele decir que Tarski es "el hombre que definió la verdad".

Por ejemplo, hizo su tesis bajo la dirección de Stanislaw Lesniewski. En Filosofía estudió bajo Tadeusz Kotarbinski, a quien más adelante dedicaría la colección de sus artículos. La por él llamada "formulación clásica de la noción de verdad" es obra suya. Su búsqueda de clarificación de los conceptos de Verdad y de Consecuencia Lógica son piezas clave en el desarrollo de la

[571] Los "*Truth-bearers".*

Lógica Moderna, y su influencia ha llegado a ser enorme tanto en Filosofía como en Ciencias de la Computación o en Lingüística. También era un profesor carismático, como lo habían sido Brentano o Twardowski, y siempre fue un infatigable defensor de su visión de la Lógica como fundamento de todo el pensamiento racional. En los Estados Unidos constituyó en torno suyo una especie de "emporio de los estudios lógicos", que atrajo hacia sí alumnos e investigadores de todo el mundo.

Sobre lo que piensa Lofti A. Zadeh en torno al concepto de verdad, dejemos que hable él mismo. Lo hizo cuando[572] nos dijo que:

> In bivalent logic, BL, truth is bivalent, implying that every proposition, P, is either true or false, with no degrees of truth allowed. In multivalent logic, ML, truth is a matter of degree. In fuzzy logic, FL: everything is, or is allowed to be, to be partial, i.e., a matter of degree; everything is, or is allowed to be, imprecise (approximate); everything is, or is allowed to be, granular (linguistic); everything is, or is allowed to be, perception based.

De ahí el conocido leitmotiv de la Lógica Borrosa, según el cual *"todo es cuestión de grado",* que algunos asocian equivocadamente como la causa desencadenante del "relativismo moral" que nos invade; eso es falso, si tal cosa sucede, sus causas son otras.

---

[572] En una presentación llevada a cabo en Hong Kong, el 2004:
LAZ, "Fuzzy logic systems: origin, concepts, and trends".
Lo que Zadeh pretendía fue llegar a desempolvar una vieja e interesante teoría, heredada de un Lukasiewicz obsesionado con el problema del "determinismo", poniéndola en marcha, tanto matemáticamente como en las aplicaciones tecnológicas, y sobre todo, en estas últimas; como consecuencia, la nueva ciencia anduvo, y bien deprisa por cierto; gracias a Dios, aún hoy sigue caminando robusta.

14. Lógicas Multi-valuadas

El tantas veces mencionado[573] por nosotros lógico polaco Jan Lukasiewicz se inspiró en la lectura de Aristóteles[574], cuando este trataba acerca del famoso problema de los *futuros contingentes.*

Podemos asegurar que los futuros contingentes parecen tener una extraña cualidad, como cuando consideramos declaraciones en tiempo presente o en tiempo pasado, como

"está nevando"

o bien

"Cristóbal Colón descubrió América"

cuyo valor de verdad no depende de estados o de eventos futuros.

Parece sencillo afirmar que estas dos últimas frases son verdaderas si y sólo si tales estados o sucesos se corresponden con la realidad. Pero ¿tiene sentido afirmar que la verdad o falsedad de una declaración futuro-contingente, tal como "El primer ser humano en pisar Marte será un murciano", depende de la realidad futura de modo similar? Evidentemente, esto sólo puede tener sentido si significativamente se puede referir a la realidad futura del mismo

[573] Bien merecidamente, por cierto.
[574] Más concretamente, en el tantas veces mencionado:
ARIST., *De Interpretatione (*o *Peri Hermeneias).*

modo que podemos referirnos a la realidad pasada. Sin embargo, si el futuro es abierto o no resulta algo muy problemático.

El desafío filosófico al que la discusión de los futuros contingentes ha dado lugar resulta doble. En primer lugar, cualquier persona que quiera mantener algún tipo de indeterminación con respecto del futuro, puede enfrentarse con algunos argumentos comunes a favor del determinismo lógico, es decir, los argumentos destinados a demostrar que no existen los futuros contingentes.

Además, cualquiera que sostenga que la existencia de futuros contingentes puede ser emplazada a establecer una teoría de la verdad que sea compatible con la idea de un futuro abierto.

Tal teoría debiera dar respuesta a preguntas tales como: ¿Se puede considerar significativo lo futuro contingente como verdadero o falso ahora, si el futuro está abierto? Y si es así, ¿cómo debemos considerarlo? ¿Pueden las afirmaciones sobre el futuro contingente tener algún sentido? Y si es así, ¿cómo es ello? Algunos lógicos han sostenido que ningún futuro contingente es verdad. Sin embargo, otros han encontrado esto totalmente inaceptable. Pero buscando una base teórica sobre la que podríamos sostener que un contingente futuro sí que es verdadero (o es falso).

Los problemas de interpretación con respecto del problema lógico de Aristóteles acerca de la batalla naval no son en absoluto triviales. Muchos han formulado sus propias interpretaciones de dicho texto aristotélico.

En la generación posterior a Aristóteles, *Diodorus Cronus (ca. 340-280 a.C.)* analizó problemas similares, con su llamado *“Master Argument”* [575]. Se trata, en realidad, de lo que se conoce como un *trilema.*

Según Epicteto, Diodorus Cronus argumentaba que las siguientes tres proposiciones no pueden ser verdaderas a la vez[576]:

(P_1) Toda proposición verdadera sobre el pasado es necesaria.

(P_2) Una proposición imposible no puede seguirse a partir de (o después) de una posible.

(P_3) Hay una proposición que es posible, pero que no es, ni será verdadera.

Diodoro utiliza esta incompatibilidad, pues combina la plausibilidad de (P_1) y (P_2) para argumentar que (P_3) es falsa. Suponiendo (P_1) y (P_2), pasa a definir lo posible como “lo que es o va a ser verdad”, y lo necesario como “aquello que siendo cierto, no es falso”. De esta manera, su argumento parece haber sido diseñado para demostrar que no puede haber cualquier contingencia futura en absoluto.

Pero poco se sabe sobre la forma en que Diodoro utilizó sus proposiciones con el fin de llegar a tal conclusión. La reconstrucción del argumento principal constituye, ciertamente, un problema real para la historia de la lógica. Varios han sido los que han intentado reconstruir el argumento tal como podría haber sido.

---

[575] O “Argumento Maestro”, también llamado por algunos el “Argumento Soberano”.
[576] MATES, B., *La Lógica de los Estoicos*. Madrid, Tecnos, 1985, cap. III, par. III; p. 71.

La discusión tomó una forma particularmente interesante durante la Edad Media. En dicho período histórico, los lógicos conectaron su disciplina filosófica con la Teología. Y una de las cuestiones teológicas más importantes era precisamente el problema de los futuros contingentes, en su directa relación con la doctrina cristiana. Según dicha tradición, la presciencia divina comprende el conocimiento de las posibilidades futuras a realizar por los seres humanos. Pero esta suposición parece dar lugar a un argumento sencillo, que lleva desde la presciencia divina hasta la necesidad de los hechos futuros: como Dios ya sabe ahora la decisión que tomaré mañana, es una verdad[577] que mi elección de mañana está dada. Mi elección, entonces, parece ser necesaria, pero no libre. Por lo tanto, no parece haber ninguna base para la afirmación de que tengamos libertad de elección entre varias alternativas. Esta conclusión, sin embargo, violaría la idea de la libertad humana y la responsabilidad moral.

La discusión medieval sobre la lógica de la presciencia divina está, desde un punto de vista formal, muy cerca de la clásica discusión sobre los futuros contingentes. Si a esto añadimos la hipótesis de que necesariamente algo es verdadero si y sólo si lo sabe Aquel que todo lo sabe, que es Dios, entonces resulta fácil ver que es esencialmente la misma cuestión de fondo que la discusión clásica sobre la contingencia de los futuros. De esto se dieron cuenta claramente los lógicos medievales.

[577] Y por ello, ahora sería ya inevitable.

En su tratado *De eventuale futurorum,* el franciscano Richard Lavenham (c. 1380) hizo una breve reseña sobre los enfoques básicos del problema, aunque siempre dentro de los márgenes de las doctrinas escolásticas.

Lavenham consideraba un argumento central, que iba desde la presciencia de Dios a la necesidad del futuro y a la falta de libertad humana. De hecho, las diversas posiciones sobre la contingencia del futuro se pueden presentar como posibles reacciones ante este argumento. La estructura principal resultaría, pues, muy cercana a aquel que se cree que fuera el argumento principal de Diodorus Cronus[578].

Está claro[579] que tenía noticia del viejo argumento, de origen estoico o megárico, probablemente a través de su lectura de la obra de Cicerón *De Fato.*

La idea principal es la transferencia de la supuesta necesidad del pasado hacia el futuro. Para hacer las cosas más claras, que se podría afirmar el argumento en términos de ayer y de mañana, en lugar de pasado y futuro en general.

Parece que tanto Ricardo de Lavenham como Guillermo de Ockham (c. 1287-1347) tuvieron a Aristóteles como su principal referencia, al sostener que las proposiciones acerca de los futuros contingentes no son ni verdaderas ni falsas. Algunos de los lógicos escolásticos favorecieron esta visión aristotélica[580].

---

578 GASKIN, R., *The sea battle and the master argument: Aristotle and Diodorus Cronus on the metaphysics of the future.* Walter de Gruyter Verlag, 1995.
579 A partir del texto de Lavenham.
580 Por ejemplo, tal es el caso de Petrus Aureolus (c. 1280-1322).

Lavenham, sin embargo, rechazó este punto de vista, insistiendo en que los futuros contingentes son verdaderos o falsos ahora, y que Dios conoce los valores de verdad de todos los futuros contingentes.

Argumentaba que al rechazar la necesidad del pasado, como principio general, las doctrinas del libre albedrío y de la presciencia divina[581] pueden resultar unidas de un modo consistente. Esta solución fue formulada por primera vez por Guillermo de Ockham, aunque algunos de sus elementos ya se encontraban en Anselmo de Canterbury[582].

Una contribución posterior fue la del padre jesuita *Luis de Molina* (1535-1600)[583]. La contribución especial de Molina es la idea (para Dios) del "conocimiento medio, o ciencia intermedia, o ciencia divina media", por el cual, en virtud de la comprensión más profunda e inescrutable de cada uno se hace posible el libre albedrío, ya que Él ve en su propia esencia lo que cada voluntad haría con su libertad innata, y le llevan a colocarse en una u otra opción, incluso de un número infinito de órdenes de cosas[584].

Se plantea la polémica "De Auxiliis" en dos obras clave: la *Concordia,* del padre jesuita Luis de Molina (1535-1600), y la *Apología,* de fray Domingo Báñez (1528-1604), dominico de la Escuela de Salamanca. En esencia,

---

[581] Del futuro contingente.
[582] Nuestro San Anselmo (1033-1109).
[583] Las ideas de Molina han sido ampliamente discutidas en:
CRAIG, W., 1988.
[584] A pesar de que realmente podría, si así lo quisiera, hacer lo contrario (cita de Craig 1988, p. 175). Esta polémica, que durante los siglos XVI y XVII enfrentó a los dominicos y los jesuitas versaban acerca de si las ciencias que Dios posee son dos o tres; el problema venía de antaño, pudiendo remontarse al propio Aristóteles y los Estoicos, continuando más adelante, con Pelagio, Prisciliano, Pedro Abelardo o la "cadena de santos": los San Agustín, San Anselmo y Sto. Tomás de Aquino. Después de la polémica "De Auxiliis", reaparecerá con Leibniz, Spinoza y William James, entre otros.

representaba el posible antagonismo entre el libre albedrío de los humanos y la eficacia de la Gracia Divina. Dicho brevemente: ¿cómo es compatible la omnisciencia y la omnipotencia de Dios con la libertad del hombre? Agudamente decía el padre jesuita Francisco Suárez, en 1594, que:

…se ha de suponer dos herejías encontradas por extremos en esta materia. La una es de Pelagio, que negaba la necesidad de la Gracia, diciendo que para salvarnos bastaban las fuerzas naturales del libre albedrío y sus actos naturales. La otra es de Lutero y Calvino, que al contrario, dijeron no haber en nosotros libertad alguna, sino que hacemos solamente aquello que Dios nos hace obrar, sin poderle resistir, así en lo natural como en lo sobrenatural, y así en lo malo como en lo bueno.

Los "molinistas" (jesuitas, en su mayor parte) defendían la existencia de tres ciencias divinas: la de la simple inteligencia, la de la visión y la de la ciencia intermedia.

Mientras que los "bañecianos" (en su mayoría, dominicos) sólo admitían la existencia de las dos primeras de dichas ciencias, remitiéndose con ello a la más estricta ortodoxia tomista. Según la cual Dios conocería los futuros contingentes libres, las acciones de los hombres hasta sus más nimios detalles.

Decía por aquel entonces el doctor Palacios de Terán, en su defensa de la postura de fray Domingo Báñez, que:

En no quitarnos nuestro libre arbitrio cuando eficazmente nos mueve está la suavidad que tiene Dios, y en que salga Dios como quiere está su Fortaleza.

Pero la Gracia de Dios es irresistible, según los bañecianos, mientras que los molinistas propuganan que dicha Gracia es sólo una Gracia eficiente, para que se produzca la cción, pero sin determinarla. Por lo que en Báñez la predestinación sería anterior, no teniendo nada que ver con los méritos del sujeto. Esto le aproxima curiosamente a la opinión herética del agustino Martín Lutero (ML), cuando este decía:

> De donde se sigue que el libre albedrío es un nombre absolutamente divino, y que a nadie más que a su Divina Majestad le puede convenir. Por lo que si se atribuye a los hombres, es tanto como atribuirles la divinidad misma, por lo que no podría encontrarse un sacrilegio mayor que éste.[585]

Así que para los bañecianos, el problema de cómo Dios determina los actos libres sería un misterio de naturaleza ontológica, mientras que para los molinistas sería de tipo gnoseológico, ya que como indica Alvargonzález,

> se trataría de saber cuál es la Ciencia Divina que hace posible que Dios tenga esa \`supercomprensión´, esa \`comprensión eminentísima´ que le permite prever los futuros contingentes libres.

La solución, para los molinistas es la introducción de esa "ciencia media"; en palabras del padre Francisco Suárez nuevamente:

> Como si yo tuviese tanta comprensión de la condición y voluntad de Pedro que supiese que rogándole una cosa en tal hora y en tal sazón en que suele estar contento la hará, y rogándosela en otra coyuntura, aunque la podría hacer, sé que no la hará. En tal caso, elegir yo al pedírsela en una sazón o en la otra depende de mi sólo querer, y hace mucho para que lo que se pretende con efecto se consiga o no. Y con

---

[585] LUTERO, M., *De servo arbitrio,* 1526. Respuesta de Lutero al *De libero arbitrio* (1525), de Erasmo de Rotterdam.

todo eso, yo no hago más acerca de Pedro porque se le pida a una hora o a otra, o al menos, no dejo de hacer cosa de las necesarias para que se consiga el efecto.[586]

En dicha Ciencia Media se trata, pues, de conocer lo que haría o dejarían de hacer las criaturas (el libre albedrío creado), puestas unas condiciones. Así, habría una co-determinación operatoria, que es propia del `concurso simultáneo´. Se trataría de los *futuros condicionados,* o *"futuribilia",* en tanto que futuros contingentes que se van a producir, una vez establecidas unas condiciones. Con lo que esta Ciencia Media antecedería al acto libre de la voluntad humana.

W. Craig pasa a explicarlo de la siguiente manera:

...mientras que por su conocimiento natural (de Dios) sabe que por ejemplo, Pedro cuando se coloque en un cierto conjunto de condiciones, bien podría traicionar a Cristo, o bien no traicionar a Cristo, siendo libre de hacerlo bajo circunstancias idénticas, por Su medio del conocimiento (el de Dios), sabe lo que Pedro haría si se le coloca bajo esas circunstancias.[587]

Como seguramente supiera Ricardo de Lavenham, Guillermo de Ockham había discutido antes que él ese problema de la presciencia divina y de la libertad humana.[588] Ockham afirmaba que Dios sabe la verdad o la falsedad de todos los futuros contingentes, pero también sostenía que los seres humanos

---

[586] Dicho texto puede verse en la p. 423 de la obra de V. Beltrán de Heredia.

[587] CRAIG, W. L., *The Problem of Divine Foreknowledge and Future Contingents from Aristotle to Suarez.* Leiden, E.J. Brill. 1988; p. 175.

[588] OCKHAM, W., *Tractatus de Praedestinatione et de futuris contingentibus.* Tr. Ingl., *Predestination, God's foreknowledge, and future contingents,* transl. by M. McCord Adams and N. Kretzmann. New York, Appleton-Century-Crofts, 1969. Tr. Fr., C. Michon. Paris, Libr. Philos. J. Vrin, 2007.

pueden elegir entre posibilidades alternativas. En su *Tractatus* defendió que las doctrinas de la presciencia divina y la libertad humana son compatibles.

Richard de Lavenham hizo un esfuerzo considerable para entender y presentar claramente las características lógicas del sistema de Ockham, en lugar de la solución de Aristóteles.

Y fue para esclarecer este tipo de cuestiones para lo que Lukasiewicz construyó un lenguaje formal en el que tanto la negación como el condicional son las conectivas primitivas, mientras que lo Verdadero, lo Indeterminado y lo Falso tienen valores de verdad cuantificados como 1, ½, y 0, respectivamente. Por ello, sería Jan Łukasiewicz quien presentase por vez primera un sistema trivaluado, en 1920. Łukasiewicz, gracias a sus investigaciones sobre las proposiciones modales y sobre los conceptos de posibilidad y de necesidad, tratando de hallar solución al problema de los futuros contingentes planteado por Aristóteles, desarrollaría dicha lógica trivaluada, que admite, junto a los valores de verdad y falsedad, el intermedio a ambos, el de lo indeterminado, al que inicialmente asignó el valor 2, pero luego lo cambió por 1/2.

Decía Lukasiewicz en su artículo “Sobre el determinismo” que:

Esas oraciones (las de los eventos futuros contingentes) no son ni verdaderas en el momento presente, ni falsas, porque sus negaciones tampoco tienen correlato real. Haciendo uso de una terminología filosófica…, podríamos decir que ontológicamente no corresponde a estas oraciones ni el ser ni el no-ser, sino la posibilidad. Las oraciones indeterminadas, que ontológicamente tienen la posibilidad como correlato, toman el tercer valor de verdad.[589]

Analizaba Lukasiewicz con detalle el Principio de Bivalencia, el Principio de Tercio Excluso y el principio inherente al determinismo, que es el llamado Principio de Causalidad. Nos muestra que en absoluto es el determinismo una posición filosófica mejor justificada que el indeterminismo. Nos hace ver cómo puede hacerse uso en Filosofía de la Lógica, y recíprocamente, en un camino de ida y vuelta, tratando de resolver ciertos problemas filosóficos que aún estaban sin solución, mediante el uso de dicha Lógica.

Y es que algunas de las autoridades de entonces en el mundo de la Filosofía, como el propio Immanuel Kant (1724-1804), habían dado como concluida, completa y cerrada ya para siempre jamás, esta disciplina de la Lógica, considerándola como algo acabado y perfecto; lo cual, desde luego, implica, si no un desconocimiento, sí un claro desprecio por el trabajo en Lógica de la Escuela Estoica, de los pensadores de la Escolástica y aun del mismo Leibniz, entre otros[590]. Fue Lukasiewicz, junto con otros autores que irán apareciendo a lo largo de este trabajo, el encargado de demostrar que esto no era en realidad así. El catalizador más eficaz y eficiente para tales nuevas ideas, en tiempos contemporáneos, seguramente haya sido la expansión y el

[589] LUKASIEWICZ, J., "Sobre el determinismo". Trad. esp., en *Estudios de Lógica y Filosofía,* A. Deaño, *Revista de Occidente,* Madrid, en 1975. Dicho texto aparece en la p. 59.
[590] Leibniz decía que la Lógica, en sentido amplio, es el `arte de pensar´, que incluiría no sólo el arte de la demostración, sino también el de inventar y el de la memoria.
Véase, por ejemplo, lo que se dice al respecto en la p. 19 de la *Gnoseología…,* de Velarde.

rápido avance de la Inteligencia Artificial[591] y las otras ramas de las Ciencias de la Computación, mediante los desafíos que nos va planteando de continuo.

Recordemos algunos detalles históricos acerca de uno de nuestros principales personajes. Así, por ejemplo, que *Jan Lukasiewicz (1878-1956)* había nacido en la ciudad de Lvóv, ahora ucraniana y entonces polaca, aunque por aquellos años bajo el dominio austro-húngaro. Todo ello dentro de las vicisitudes históricas, y de la situación geográfica, que han condenado a aquellas tierras a su condición de corredor apto para los enfrentamientos entre las sucesivas potencias dominantes; de ahí proviene en buena parte la atribulada historia de Polonia. Durante la Primera Guerra Mundial formó parte del gobierno nacional de Ignaz Paderewski.

Era nuestro autor un matemático y filósofo brillante, discípulo de Kazimierz Twardowski (1866-1938), que lo era a su vez de Franz Brentano (1838-1917).

También debemos reseñar que J. Lukasiewicz introdujo la llamada *“notación polaca”,* en un intento de simplificar la expresión de las relaciones lógicas. Con ella, por ejemplo, se trataba de eliminar paréntesis y otros símbolos de los que pudiera prescindirse. Veamos un resumen de dicha *Notación Polaca:*

Siendo P(p) y Q(q) letras proposicionales, toda conectiva lógica se puede representar entonces de la siguiente manera, en las notaciones más conocidas:

[591] Hoy cada vez más frecuentemente denominada Computational Intelligence, o Inteligencia Computacional, en vez del ya algo clásico de Inteligencia Artificial.

	Notación Tradicional (esto es, la adoptada por Bertrand Russell y A. N. Whitehead, en sus *Principia Mathematica*)	*Notación polaca*
Negación	$\neg$ P	N p
Conjunción	P & Q	K p q
Disyunción	P $\vee$ Q	A p q
Implicación	P $\supset$ Q	C p q
Bicondicional	P $\equiv$ Q	E p q
Cuantificador Universal	$\forall$ x P(x)	Π p
Cuantificador Existencial	$\exists$ x P(x)	Σ p

Así que por ejemplo, para la *"afirmación del consecuente",* tendremos que en vez de:

$$P \supset (Q \supset P)$$

Debe traducirse a la expresión siguiente, que equivale a la anterior, pero ya estaría en notación polaca:

C p C q p

O en el *Silogismo Hipotético*, que en la primera notación sería:

$$(P \supset Q) \supset (Q \supset R) \supset (P \supset R))$$

Y en la de Lukasiewicz quedaría:

C C p q C C q r C p r

Mientras que las Leyes de Morgan se trasladarían a la Notación Polaca así:

$$\neg (p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q) \leftrightarrow \text{EKNpqANpNq}$$

$$\neg (p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q) \leftrightarrow \text{EANpqKNpNq}$$

Estas notaciones pueden completarse, por ejemplo, leyendo el artículo que Lukasiewicz denominara *Observaciones filosóficas sobre los sistemas polivalentes de la Lógica Proposicional.*

Puede que sea muy discutible para algunos si realmente existe evidencia de algo similar a una lógica trivalente en Aristóteles[592], pero es posible que la primera conocida lógica de tres valores[593] fuera desarrollada, ya en 1909, por el matemático ruso y también poeta Nicolai A. Vasiliev, eliminando la conocida ley del tercero excluido de la lógica aristotélica o clásica. La denominaba con el bastante exótico nombre de *Lógica Imaginaria.*

Nikolai A. Vasiliev se inspiró para ello en una posible analogía con la aparición de las Geometrías No-Euclidianas[594], surgidas a partir de la negación del axioma de las paralelas[595] de la Geometría Euclídea. Pensaba él que negando el Principio de Tercio Excluso[596] se reproducía la misma situación, y que esto daba lugar a algo que él llamaba las Lógicas Imaginarias No-Aristotélicas. Construyó para ello el Principio o Ley de Contradicción en la

[592] Relacionada con la idea de los futuros contingentes.
[593] Aunque algo balbuciente todavía.
[594] Por parte tanto del ruso Nikolai Lobatchevski como del húngaro János Bolyai.
[595] O quinto postulado.
[596] LEM, por Law of Excluded Middle.

forma kantiana: “Ningún objeto puede tener un predicado que lo contradiga”. Mientras que el Principio de Tercio Excluso lo enunciaba del siguiente modo: “un objeto debe poseer un predicado o su negación”. Se trata de leyes que pertenecen a la base ontológica de la Lógica, y como tales, estarían sometidas a cambios, siendo aplicables al mundo actual, pero téngase en cuenta que éste es sólo uno de los mundos posibles. Sin embargo, el que llamaba su Principio de `no-autontradicción´, según el cual “uno y el mismo juicio no puede ser verdadero y falso a la vez”, ése sí que es un principio metalógico, y como tal, inalterable.

Como dice Julián Velarde,

> Frente a la lógica con base ontológica determinada por nuestro mundo actual, desarrolló Vasiliev su lógica imaginaria según la determinación ontológica de su mundo imaginario, donde algunos objetos poseen el predicadao A, otros el predicado no-A, y otros que poseen a la vez ambos, el A y el no-A. Por su parte, una afirmación puede ser afirmativa, negativa, indiferente, correspondiente con las tres formas de juicio `S es P´, `S es no-P´ o `S es P y no-P´, respectivamente.[597]

Muchos otros pensadores han trabajado en estos sistemas, completándolos y comentándolos. Tal es el caso de:

- Hans Reichenbach,

---

[597] VELARDE, J., “Lógica Polivalente”, *El Basilisco,* p. 95, 1978.
También dice ese autor, respecto de las Lógicas Multivaluadas, que “… sin duda alguna, la mayor significación que cabe atribuir a la lógica polivalente consiste en su mismo descubrimiento: las leyes de la lógica han sido frecuentemente hipostasiadas y consideradas como leyes apriorísticas, analíticas en el sentido de evidentes por sí mismas, y, en cuanto tales, eran intocables. El descubrimiento de la lógica polivalente demostró que eran posibles estas otras leyes alternativas, y con ello se abrían amplios horizontes en las investigaciones de lógica.”
VELARDE, J., *Historia de la lógica.* En cuatro vols. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Oviedo; p. 416-417.

- A. A. Zinoviev,
- A. R. Turquette,
- G. Malinowski, o
- J. B. Rosser, entre otros.

También es digna de ser reseñada la aportación de *Joseph A. Goguen* (1941-2006). De hecho, la implicación estándar en la lógica difusa producto[598] se llama a menudo en su honor la *"implicación Goguen".*

J. A. Goguen generalizó asimismo el concepto de conjunto borroso dado por L. A. Zadeh, relacionándolo con el resto de las estructuras algebraicas. Por lo tanto, lo conectaba con las lógicas infinito-valuadas. Goguen desarrolló para esto un análisis formal en lógica difusa de Paradojas diversas[599]; en particular, las del Argumento Sorites. A partir de su artículo segundo, introduce la "Formal Fuzzy Logic", ahora llamada FLn.[600]

Goguen planteó una versión generalizada de los conjuntos difusos. Serían los así llamados *"L-sets".* Un *L-conjunto* es una función que aplica el conjunto de partida, X, el "portador difuso", en un conjunto parcialmente ordenado, "lattice" o retículo, L. Esto es, tendríamos $A: X \rightarrow L$. El conjunto parcialmente ordenado, L, de Goguen, puede ser llamado el *"conjunto-verdad"* de A. Los elementos de L pueden ser interpretados como *"valores de verdad";* es en este sentido con el que Goguen se refiere a una "lógica de los conceptos inexactos".

[598] Petr Hájek.
[599] J. A. Goguen.
[600] Como acrónimo de la Lógica Difusa en sentido estricto.

Como cualquier otra lógica, la Lógica Borrosa está relacionada con la argumentación, pero a diferencia de otros enfoques, que se centran en el razonamiento "nítido" (crisp o de fronteras precisas) de la Matemática Clásica, ahora se trata con el llamado "razonamiento de sentido común", es decir, con el razonamiento aproximado.[601]

Además, debemos mencionar con más detalle al pensador alemán *Hans Reichenbach (1891-1953),* que fue un importante filósofo de la ciencia, como defensor del empirismo lógico, y también como fundador del Círculo de Berlín. Él formuló, en 1932, una lógica de *n* valores de verdad, y propuso estudiar su comportamiento cuando *n* tiende a un infinito positivo, es decir, dando con ello lugar al sistema lógico denotado por $\mathfrak{L}_\infty$.

A *Hans Reichenbach* se le ha llamado, y con razón, "el mayor empirista del siglo XX".[602] Reichenbach desarrolló una filosofía inspirada en la Ciencia. Fundó y dirigió la prestigiosa revista *Erkenntnis,* junto con Rudolf Carnap. Su obra abarcó muchos campos, y desde que asistiera a las clases de Albert Einstein en Berlín, estuvo ya para siempre atraído por las nuevas Teorías de la Relatividad y por la fundamentación lógica de la Física. Pero también publicó sobre otros campos, como la lingüística, la ética, la teoría de la probabilidad, el

---

[601] SOBRINO, A., 2013.
Téngase en cuenta que la `crispness´(o nitidez) es una propiedad que se basa en la Ley de Tercio Excluso, en la necesidad de decir qué está dentro y qué está fuera, qué verifica totalmente una propiedad y qué no la verifica en absoluto. Por su parte, la `fuzziness´ (o borrosidad) se debería a la incertidumbre de los conceptos, o al insuficiente cumplimiento de las propiedades; por ejemplo, en casos como el de la `Edad´, el ser `Hombre Mayor´ o la `Salud´, entre otras. Como sabemos, para caracterizarla se pasa de la función característica, cuyo rango es el $\{0, 1\}$, a la función de pertenencia, cuyo rango es [0, 1]. En esa cuestión, aparentemente intrascendente, del cambio de unas llaves por unos corchetes, está mucho de lo más fundamental de esta nueva ciencia.
[602] SALMON, W., 1977.

espacio y el tiempo, la causalidad, etc. Una de las obras más famosas sobre el tema es precisamente una suya ldenominada *The Direction of Time.*

Así, el famoso lógico austriaco *Kurt Gödel (1906-1978)* puso de manifiesto, en 1932, que el sistema lógico llamado intuicionista no es una lógica finito-multivaluada. Debido a esto, se define una especie de estadio o de fase intermedia entre la lógica intuicionista y la lógica clásica, dando con ello lugar a la llamada *Lógica Intermedia.*

El filósofo germano-americano, y también notable matemático por cierto, *Nicholas Rescher (1928-)* desarrolló un marco formal para la teoría de la probabilidad condicional[603], y el matemático polaco *Jan Lukasiewicz* (1878-1956) desarrolló[604], una lógica multiforme, en la forma de una lógica discreta.

También es de justicia mencionar las investigaciones sobre Lógica Multivaluada del notable matemático rumano *Grigore Moisil (1906-1973),* que comenzó a escribir una serie de artículos basándose en los trabajos previos de Jan Lukasiewicz. G. Moisil también introdujo algunas álgebras multivaluadas, ahora llamadas *Álgebras de Łukasiewicz - Moisil,* las cuales incluso utilizó en el

---

[603] Por cierto, que Rescher dijo sobre la MVL y la ELV: "… Nosotros adoptamos la doctrina de una "lógica in sistemarum varietate", la concepción de una misma `lógica´que se manifiesta a través de diversas sistematizaciones … mutuamente divergentes".
RESCHER, N., *Many-Valued Logic,* 1969, p. 234.

[604] JL., *op. cit.,* 1930.
No debemos olvidar que Lukasiewicz identificaba la probabilidad con el valor de verdad de una proposición "indefinida". Y que dicho valor veritativo se mediría como un cociente: es la proporción que existe entre el número de variables para las cuales la proposición produce juicios verdaderos, respecto del número total de las variables. Pero cabe preguntarse por el significado de esa "proposición indefinida". Se puede considerar que es una "prescription" (o "receta") diseñada para establecer conjuntos de fórmulas cerradas, es decir, para toar conjuntos de modelos que dependen de una restricción "a priori". Es lo que el propio Lukasiewicz designaba como un rango, o recorrido, finito y bien definido. Childers y Maier (en 1998) concluyen que es posible explicar en términos modernos la concepción de probabilidad de Lukasiewicz, que tiene validez operativa, y que nos puede servir para distintos cometidos o fines.
Jan Lukasiewicz desarrolló dicha Teoría de la Probabilidad en el intervalo temporal que va desde 1909 hasta 1913, es decir, antes de la llamada Gran Guerra.

estudio de la Teoría de Autómatas. Además, fue quien introdujo, y más tarde expandió, la Ciencia de la Computación en su patria. Luego de su muerte quedó una escuela de lógicos muy brillantes en esa región geográfica, que se extiende por Hungría y Transilvania; tal es el caso de Gheorge Gheorgescu y de Afrodita Iorgulescu. Estos han seguido desarrollando y puliendo sus ideas, así como difundiendo en sus escritos las construcciones por él planteadas.

En la década de 1960, *Arthur P. Dempster* desarrolló una *Teoría de la Prueba*[605] que por primera vez, incluiría una evaluación de la ignorancia o de la falta de información.

Los profesores franceses *Didier Dubois* y *Henri Prade*[606]*,* han realizado una amplia labor de recopilación de resultados, procurando a su vez ampliar muchos de los ya conocidos en el campo de la Lógica “Fuzzy”, así como también indagando en alguna de sus ramificaciones más interesantes, como son la Teoría de la Posibilidad o la Teoría de la Causalidad.

Al principio[607], los trabajos de Lofti A. Zadeh y de otros precursores[608], como Max Black (1909-1988) o Jan Lukasiewicz (1878-1956), no tuvieron una recepción científica muy entusiasta que digamos, pero con el paso del tiempo, estas ideas fueron obteniendo gradualmente más aceptación; en muchos

[605] O “Proof Theory”.
[606] Ambos, de la Universidad de Toulouse.
[607] Como pasa con casi todas las nuevas ideas, y normalmente, con las más interesantes. Siempre hay muchos que ya hace tiempo han dejado de pensar, y por inercia, rechazan las teorías nuevas.
[608] La generalización de la función indicatriz, también llamada función característica, desde los conjuntos clásicos, que sólo toma valores en el $\{0, 1\}$, hasta una función con sus grados de pertenencia, y con valores en el [0, 1], ya fue considerada por Hermann Weyl, quien el año 1940 sugería reemplazarla por una función característica continua. Más adelante, ya en 1951, Kaplan y Schott sugirieron implementar el cálculo para funciones características generalizadas asociadas a los predicados vagos. De hechos, las conectivas lógicas necesarias para ello ya aparecían en sus escritos.

casos, con la aparición de algunos inspirados continuadores. Así que esas teorías se han ido ampliando de un modo muy considerable, siendo aceptadas hoy día por círculos científicos cada vez más amplios.

La resistencia inicial contra de la lógica difusa puede resultar muy sorprendente, pero quizá no debería serlo tanto, si recordamos cómo tiempo atrás el sabio matemático oficial de la época, en la predominante Universidad de Berlín, Leopold Kronecker (1823-1891), hizo todo lo posible para que no se difundieran los trabajos y las ideas de su antiguo alumno, Georg Cantor (1845-1918), e intrigó para que este no consiguiera ninguna posición académica relevante. Estamos hablando de los propios orígenes de la teoría de Conjuntos Clásica. De hecho, en esta persecución obsesiva de L. Kronecker contra las nuevas ideas parece estar el origen de los sucesivos colapsos nerviosos que llevaron al pobre Cantor primero al frenopático, y luego, definitivamente, a la tumba.

En cuanto al nuevo desarrollo de la vieja teoría, podemos decir que ciertamente cuando Lofti A. Zadeh visitó la empresa IBM para exponer sus ideas, los ejecutivos de la misma le dijeron que esas ideas no les interesaban, que no les veían ningún futuro comercial (¡asombroso, a la par que instructivo!, podríamos decir).[609]

Porque las lógicas no clásicas han sido recibidas con diferentes grados de aceptación, pero es la lógica difusa la que ha encontrado más resistencia a ser

[609] Este fiasco puede ser, de hecho, un ejemplo memorable más de la consabida ceguera intelectual ante lo nuevo, muy frecuente y negativo para el desarrollo y proyección de ciertas grandes empresas occidentales.

aceptada en muchos círculos académicos. ¿Cuál sería la razón más profunda de este trato diferencial? Ahora lo analizaremos.

El propósito de Lofti A. Zadeh fue la creación de un formalismo para manejar más eficazmente la incertidumbre y la imprecisión natural del pensamiento humano.

La diferencia esencial entre las lógicas clásicas y no clásicas se encuentra en el tratamiento de lo multivaluado. Debido a que la lógica clásica es bivalente, bivaluada o 2-valuada. Esto significa que se entiende como la división de las proposiciones entre proposiciones totalmente verdaderas y proposiciones totalmente falsas. Mientras que las lógicas no clásicas son los sistemas que rechazan la condición de bivalencia, ya que admite otros valores de verdad intermedios. De hecho, los sistemas de lógica difusa tiene un número infinito de grados de verdad, que serán representados por un número real entre el 0 (completamente falso) y el 1 (totalmente cierto). De ahí que se llamen *Multi-Valuadas,* o Multi-Valoradas, esas lógicas entre las cuales estaría la *"Fuzzy Logic".*

Por su parte, la *Lógica Intuicionista* fue propuesta por el matemático holandés *Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966).* Se presentó como el razonamiento lógico correcto por excelencia en las Matemáticas.

Su punto clave fue el rechazo a la Ley de Tercero Excluido (o Tercio Excluso), la eliminación de la Doble Negación, y la presencia de las leyes de Augustus De Morgan, como parte de su teoría. Su alumno[610] *Arendt Heyting*

[610] También holandés.

(1898-1980) estudió y trató de desarrollar esa lógica formal, puesto que L. E. J. Brouwer se oponía a establecer ningún tipo de formalización de su Lógica.

El interés de la Lógica Intuicionista resulta hoy muy considerable en las Ciencias de la Computación, porque es una lógica constructiva; por lo tanto, se encuentra entre las lógicas de aquello que pueden hacer las computadoras.

Por otro lado, la *Lógica Modal* introdujo dos nuevos modos de verdad, o “modalidades” (de ahí el nombre): el de *Necesidad* (denotado por □) y el de *Posibilidad* (denotado por ◊).

Se ha propuesto como una lógica No-Clásica. Sin embargo, con frecuencia se formaliza con el principio de Tercio Excluso, y es bivalente su semántica relacional. Por lo tanto, tal adscripción al “clasicismo” no puede estar en duda. Pero se puede introducir también una lógica modal formal, que represente modalidades de uso de operadores modales. Estas modalidades o formas pueden ser de uno de estos tres tipos: Necesidad, Posibilidad y Probabilidad.

Si nos atenemos a las clasificaciones de Susan Haack, en su obra *Deviant Logic,* existen muchos sistemas lógicos que son no-estándar. Entre ellos estarían los Multivaluados (MVL) y los Modales (ML), entre otros. Pero su distinción respecto de la Lógica Clásica (LC) puede que sea en un sentido fuerte o en un sentido débil, según que pretendan sustituirla o complementar a esta. Así, tanto las MVLs como la Lógica Intuicionista serían del primer tipo, dado que postulan que la LC no es satisfactoria, tanto como que contendría expresiones no verdaderas. Por lo que estarían proponiendo un sistema rival a la LC, a la que pretenden desbancar.

Mientras que las del segundo tipo aceptan la LC, y se consideran un sistema meramente suplementario de ls misma. Tal sería el caso de las Lógicas Modales. Esta sutil diferencia ya fue advertida.[611]

Los primeros sistemas mencionados serían, por tanto, incompatibles con la LC, mientras que en el segundo caso, serían compatibles con él. Dentro de los sistemas propuestos como *rivales* podemos mencionar:

- Las *Lógicas Multivaluadas,* de J. Lukasiewicz y D. A. Bochvar.
- La *Lógica Intuicionista,* de L. E. J. Brouwer.
- La *Lógica Minimal.*
- La Lógica elaborada por Hans Reichenbach, Janos Neumann y otros, especialmente dedicada a la fundamentación de la teoría mecano-cuántica. Recibe el nombre de *Lógica Cuántica* (o Quantum Logic, QL).
- Los *lenguajes presuposicionales,* de Bas Cornelis Van Fraasen.

Dentro de los sistemas propuestos como *suplementarios* podemos mencionar:

- La *Lógica Temporal.*
- La *Lógica Deóntica.*
- La *Lógica Epistémica.*
- Las *Lógicas Modales.*

[611] ACKERMANN, W., 1967; p. 15.
Recordemos que fue el ayudante de David Hilbert, con el cual escribió un famoso libro sobre *Lógica Matemática.*

Algunos de los que proponen sistemas rivales del de la LC piensan que la lógica puede ser verificada o falsada (falsifiable). A estos se les conoce como *realistas.*

Otros, en cambio, opinan que la selección de la lógica debería basarse en la economía de medios, la conveniencia o la simplicidad. A estos les llamaremos *pragmatistas.*

Dentro de los primeros podemos incluir al matemático holandés *L. E. J. Brouwer,* el padre de la Lógica Intuicionista, ya que creía que se puede demostrar que la Lógica Clásica está equivocada.[612]

Por el contrario, Hillary Putnam sería un pragmatista, al pensar que la física elemental y la Lógica Cuántica, la de Garrett Birkhoff y Janos Neumann, se deberían referir a una física más compleja y a la Lógica Clásica, simplemente por razones de economía y de sencillez.[613]

Pues bien: podemos encontrar representantes de cada uno de los dos tipos entre quienes postulan sistemas rivales. Luego, en cada una de estas clases cabe establecer otras dos subclases, la de los globales y la de los locales.

Así que tendríamos por un lado los *reformistas globales,* en cuanto que mantienen que sus sistemas deben sustituir a la LC en todas sus aplicaciones. Mientras que los *reformistas locales* se inclinan por pensar que tan sólo deberían reemplazar la LC en algunas de las aplicaciones.

[612] BROUWER, L. E. J., 1952.
[613] PUTNAM, H. (1926-); véase su obra de 1962, pp. 123 y ss.

De los del primer tipo, los reformistas globales, tendríamos a Michael Dummet[614]. Mientras que los lógicos intuicionistas serían del segundo tipo, ya que piensan que la Lógica Clásica sólo fallaría en el razonamiento de tipo matemático.

Finalmente, apuntemos que los sistemas se pueden diferenciar de uno de estos dos modos[615], o de ambos a la vez:

- *Semánticamente* (esto es, respecto de la interpretación),

y

- *Sintácticamente* (esto es, con respecto del conjunto de teoremas).

Otra observación interesante, y que también atañe a lo que hemos de tratar sobre Relatividad e Incertidumbre, está en que así como la mecánica newtoniana y el sistema de Galileo constituyeron una ruptura, un cambio de paradigma respecto de la física aristotélica, que se había impuesto absolutamente hasta sus días, por el contrario, los pensadores pertenecientes a la línea filosófica que aquí analizamos[616] significan una vuelta a las fuentes del Estagirita, un cierto neo-Aristotelismo con variantes, aunque contemplado de un modo bastante crítico y creativo. Lo cual no es, sin embargo, un retroceso, sino que significa un gran avance, a través de nuevas líneas de pensamiento aún no exploradas lo suficiente. De ahí que permanezcan vivas, apoyadas por su fulgurante y el sostenido éxito obtenido en las aplicaciones.

---

[614] Disponemos para ello del texto de M. Dummet, de 1959.

[615] Habría que ver, según Susan Haack, si tanto la Lógica Intuicionista como las Lógicas Multivaluadas son realmente una alternativa adecuada para la LC. Para lo cual deberíamos encontrar alguna característica formal dentro de dichos sistemas que nos permita decidir si estos sistemas son rivales de la LC, y en qué medida lo sean. Así que al final, igual que todo, va a ser cuestión de grado, como diría Zadeh.

[616] Desde B. Bolzano, pasando por F. Brentano, K. Twardowski, J. Lukasiewicz, y A. Tarski, hasta Max Black o Lofti A. Zadeh.

15. Aproximaciones a las Lógicas Difusas.

El término de "conjunto borroso", o "conjunto difuso", comúnmente llamado el "fuzzy set", se ha puesto de moda, y es un slogan que como casi todos, es mal entendido y en algunos casos, incluso mal mirado por algunos[617]. La teoría de lo que pudiera denominarse el "fuzzy-ism" ha sido definida por M. M. Gupta[618] así:

> a body of concepts and techniques aimed at providing a systematic framework for dealing with the vagueness and imprecision[619] inherent in human thought processes.

Los cuatro "pilares básicos" que podríamos identificar para el "fuzzy-ismo" serían los siguientes:

- *Thinking* (pensamiento).

---

[617] En cambio, el profesor Julián Velarde lo expone muy bien, cuando nos dice que:
"Uno de los motivos por los que Zadeh sugiere, en 1965, el concepto de `conjunto difuso´ es la inconsistencia del formalismo matemático o lógico que es empleado para describir fenómenos o relaciones mal-definidas, vagos o subjetivos. La tesis de la que parte Zadeh es la siguiente: los elementos clave en el pensamiento humano no son los números, sino los rótulos (marcadores, o etiquetas) de conjuntos difusos, esto es, clases de objetos en los que la transición de la pertenencia a la no pertenencia es gradual, más bien que abrupta. La innegable realidad de lo difuso en los procesos del pensamiento humano sugiere que buena parte de la lógica propia (suya) no es la lógica tradicional, bivalente, …, sino una lógica con verdad difusa, conectivas difuasas y reglas de inferencia difusas. A nuestro entender, es esta Lógica Difusa … la que juega un papel básico en la que bien puede ser una de las más importantes facetas del pensamiento humano, a saber, la capacidad para compendiar información: extraer de colecciones de masas de datos que llegan al cerebro humano aquellas, y sólo aquellas, que son relevantes para la ejecución de la tarea en ese momento… Otra de las motivaciones de Zadeh es lo que él mismo llama `principio de incompatibilidad´: en la medida en que crece la complejidad de un sistema, en esa misma medida disminuye nuestra capacidad para hacer precisos y aun significativos enunciados acerca de su conducta, hasta alcanzar un umbral más allá del cual la precisión y la significación (o relevancia) resultan casi siempre características mutuamente excluyentes".
VELARDE, J., *Gnoseología de los Sistemas Difusos;* pp. 10-11.
[618] En 1977.
[619] E indeterminación, cabría añadir.

- *Vagueness* (en sus distintas interpretaciones).
- *Imprecisión.*
- *Indeterminación.*

Dicho con brevedad, el principio de creación mental, o de pensamiento, no tiene porqué estar en principio ligado de modo intrínseco con las expresiones lingüísticas, pues tan sólo el intercambio de ideas tiene necesidad del lemguaje hablado, o de su equivalente escrito[620]. Pensar, por tanto, consistiría en tales procesos de construcción mentales, y que sólo después de ser "volcados" en forma lingüística, admitirán pruebas lógicas y de análisis.

En cuanto a los restantes términos (vaguedad, imprecisión e indeterminación), son sobre los que están fundadas tanto la Teoría de los Conjuntos Borrosos como el "fuzzy-ismo". Se pueden considerar como fenómenos de tipo empírico, por lo que serían característicos del lenguaje, o dicho de un modo más general, de la información.

Existen al menos dos posibles enfoques con los que se puede abordar la Lógica Difusa.

El primero de ellos se puede considerar relacionado con la tradición de la lógica multivaluada, propiamente dicha, que se enmarca en torno a la escuela de Petr Hájek, de la Universidad Carolina (o Charles), de Praga. El procedimiento debe servir para fijar un conjunto de valores previamente diseñados, y a continuación, definir entre ellos una relación de vinculación.

---

[620] Abraham Fraenkel lo decía ya en:
FRAENKEL. A. A., et al., *Abstract Set Theory.* Amsterdam, NHC, 1973.

Podemos definir un conjunto adecuado de axiomas y de reglas de inferencia, que sirvan de motor para su aparato deductivo.

La segunda línea de avance estaría a cargo de Pavelka, Goguen, y así sucesivamente. Se dirige a proporcionar un aparato deductivo en que se pueda admitir y manejar el razonamiento aproximado. Se llega así, mediante un subconjunto adecuado, a una colección de axiomas lógicos y a unas reglas de inferencia difusa.

Comparando entre ellos ambos enfoques, será muy diferente el operador de consecuencia lógica que utilizan. En el primer caso, se obtiene el conjunto de consecuencias lógicas a partir de un conjunto dado de axiomas. Considerando el segundo caso, se da el subconjunto difuso de consecuencias lógicas de un determinado subconjunto borroso de hipótesis.

Algunas reflexiones lógicas.

Aristóteles estableció sus leyes del pensamiento:

- *Principio de Identidad*

- *Principio de Contradicción:* no P y no P, es decir,

$$\neg (P \land \neg P)$$

- *Ley del Medio Excluido,* o Tercio Excluso (Excluded Middle Law, en inglés):

P ó no P ($P \lor \neg P$, en la moderna terminología lógica)

La estricta observancia de ellos ha condicionado[621] el desarrollo de la lógica en toda la cultura occidental[622].

Este fenómeno ha sido menos opresivo en los países orientales[623], ya que la tradición budista admite con naturalidad, en las cosas y los pensamientos, la posibilidad de ser al mismo tiempo y no ser, y que las proposiciones pueden a la vez, falsas y verdaderas, mediante la asignación de una gradación.

Ello conecta directamente con la Lógica Fuzzy y la Teoría de Conjuntos Difusos, como las que introdujeron la función de pertenencia, que van a estar en el intervalo real unitario, denotado por $I = [0, 1] \subset \mathbf{R}$.

No obstante, en la antigua Grecia algunos filósofos realizaron algunas afirmaciones que parece que sean compatibles con esa nueva manera de pensar. Así, podemos mencionar al mismo Platón, que en sus *Diálogos* presenta una cierta recopilación de los pensamientos de Sócrates, su maestro, así como de otros pensadores precedentes.

Como se ha mencionado, y de acuerdo con Aristóteles, tanto Heráclito de Abdera como Anaxágoras negaron el principio de no contradicción, de acuerdo con lo que no es posible alcanzar simultáneamente p y $\neg$p. También puede resultar interesante consultar a Protágoras acerca de este Principio.

La versión psicológica de este principio de no contradicción puede ser esta:

Nadie puede pensar “p” y “no p”.

[621] Y según algunos autores, ocluido u obstruido.
[622] KOSKO, B., *Fuzzy Thinking,* New York, Hyperion Books.
[623] Como China, Japón, Corea del Sur, India, etc.

Otras propiedades que caracterizan a la lógica clásica podrían ser: monotonicidad de la vinculación, la idempotencia, la conmutatividad de la conjunción, así como la Doble Negación, en este caso dada por $\neg\neg A = A$.

También se verifican en estas lógicas formales propiedades que ya se verificaban en la lógica clásica, o en la Booleana, como son las leyes propuestas por Augustus De Morgan, también llamada la dualidad de De Morgan, de acuerdo con

NOT (P AND Q) = (NOT P) OR (NOT Q)

y

NOT (P OR Q) = (NOT P) AND (NOT Q)

O en las actuales expresiones, con notación moderna expresadas como

$$\neg (P \wedge Q) = (\neg P) \vee (\neg Q)$$

$$\neg (P \vee Q) = (\neg P) \wedge (\neg Q)$$

Esto es, que cada uno de los operadores lógicos que aquí intervienen es dual del otro.

La Lógica Difusa, como sistema lógico infinito-valuado, rechaza el principio de tercero excluso, o excluido, admitiendo como valores de verdad cualquier número real que pertenezca al intervalo real unidad, denotado por I.

En cuanto a la estructura algebraica que esto genera, la colección de conjuntos difusos, con las operaciones de unión, intersección y el paso al complementario definido por Zadeh, no será un álgebra de Boole. Por lo tanto, es completamente distinta de la teoría ya clásica de George Cantor, sobre los conjuntos nítidos, “crisp”, o clásicos. De hecho, esta última sería un caso particular de aquella; se reduce al caso en que el conjunto imagen de la función de pertenencia es el $\{0, 1\}$. Y es fundamentalmente por la violación de dos famosos principios, el de Tercio Excluso y el de No-Contradicción, que ambas teorías no coinciden, sino que se incluyen una en otra.

Por completar un poco todo este repaso de lo que son las Lógicas Multivaluadas, se podría (incluso tal vez se debiera) poner algún ejemplo suficientemente ilustrativo. Pero nos resistimos a repetir uno de esos tan manidos, que vienen en casi todos los libros y artículos sobre el tema, sobre si Sally es alta y su prima más todavía. Están copiados hasta en el nombre de los personajes y sus roles. Tratemos, pues, de exponer algo distinto, y más conectado con la realidad del solar patrio. Supongamos que alguien dice algo así como: “a los Congresos se manda a los becarios”. Este comentario es autojustificativo seguramente de no haber vuelto a ir a ninguno de ellos. Pero sólo es cierto en parte y en parte no lo es; por tanto, se podría considerar cierto en un grado y no cierto en otro, no habiendo ninguna contradicción en que así sea. Porque si bien es verdad que se suele enviar a quienes empiezan y necesitan hacerse rápidamente un currículum, para que sean conocidos e irles prepearando un “traje a medida”, para en su día aspirar a alguna plaza estable, también es cierto que los Congresos no sólo se surten de ese tipo de personas necesitadas de publicaciones y de reconocimiento internacional, sino que al mismo tiempo, se suele invitar a quienes se supone que sean algunos de los mejores o de los más reconocidos investigadores del campo en cuestión, para que en sus conferencias plenarias expongan el estado del arte, e incentiven al resto para que sigan trabajando en las diversas líneas o problemas abiertos. Por lo tanto, se trata de algo que a la vez es cierto y es falso, y lo es en cada caso en una cierta medida, dada por los respectivos grados de verdad, y que llevan asociados, pues, los respectivos valores veritativos.

Este tipo de afirmaciones o interpretaciones parciales de la realidad, que es difusa por naturaleza, impregnan todos nuestros razonamientos y especialmente el lenguaje natural. Se prestan, pues, a favorecer manipulaciones, con medias verdades y otras argucias a las que son tan aficionados leguleyos y políticos. Por cierto, para los abogados y jueces resultaría fundamental que en sus planes de estudio y de especialización se recogieran todos estos tipos de Lógicas, como sucede, por ejemplo, en las Universidades de Polonia desde los tiempos de Twardowski, ya que deben razonar hábilmente, aunque no tanto lo suelen hacer los juristas para buscar la verdad[624], sino en el arte de la persuasión a través del razonamiento.

[624] Que en su caso, es relegada como algo secundario.

16. Algo más acerca de la formalización de las Lógicas Multivaluadas, y en particular, de la Lógica Borrosa.

Como ya hemos dicho, la principal diferencia, o la más visible, con las consecuencias que lleva implícto asumirlo, entre el Cálculo Proposicional Clásico y el Cálculo Proposicional Fuzzy o Difuso está en el rango que recorren los valores de verdad, que en el primer caso se limita al conjunto binario $\{0, 1\}$, mientras que en el segundo es todo el intervalo real unidad, [0, 1], lo cual nos va a permitir modular los grados de verdad.

Se llama *Proposiciones Fuzzy* a aquellas que contienen Predicados Fuzzy. La forma canónica de una proposición difusa incondicional sería del tipo: x es A, donde A es un predicado fuzzy (por tanto, un conjunto borroso) llamado una *Variable Difusa.*

Los valores de una variable lingüística son sentencias o palabras en un NL[625], o bien en un lenguaje sintético, artificial[626]. Una de tales variables lingüísticas es un subconjunto difuso definido sobre un Universo de Discurso.

Los "fuzzy modifiers", hedges o "modificadores difusos", son palabras que cambian o regulan los cambios en el predicado[627]. Así, por ejemplo, pueden

[625] Natural language, o lenguaje natural.
[626] En ese sentido se emplea el término "artificial".
[627] FERRATER MORA, J., *Diccionario de Filosofía,* comenta que "hay quienes han dicho que las lógicas multivalentes (al menos, las finito-valuadas) no pueden reproducir muchas de los matices de los valores de verdad expresables en el lenguaje ordinario (NL, o `natural

ser: “”mucho”, “poco”, “casi”, “bastante”, etc. De modo que podemos pasar de un “Hace frío hoy” a un “Hace mucho frío hoy”, o a afirmar que “Hace poco frío hoy”. Se utilizan para ello los operadores:

- *CON* (por “CONcentration”), que intensifica la acción del predicado. Cuantas más veces se aplique, lógicamente, más la intensifica.

  A veces, se utiliza también el operador INT, de intensificación.
- *DIL* (por “DILatation”), que debilita esa acción. También se puede aplicar reiteradamente.

Partiendo de la función de pertenencia, μ, esta acción puede ser considerada como una aplicación dentro del intervalo unidad real; así,

$$\text{CON: } [0, 1] \to [0, 1]$$

$$\mu\ (x) \to \mu^n\ (x), \text{ con } n > 1$$

y

$$\text{DIL: } [0, 1] \to [0, 1]$$

$$\mu\ (x) \to \mu^n\ (x), \text{ con } n < 1$$

Como ejemplo, podríamos poner, partiendo de “high”, con una función de pertenencia dado por μ (x), una intensificación más alta con μ^2 (x), correspondiente a “very high”. O una más alta aún con μ^4 (x), que correspondería a “extremely high”. En lugar de esto, para pasar a “short”, o bajo, dispondríamos de $\mu^{1/2}$ (x), o muy bajo, “very short”, con $\mu^{1/4}$ (x), etc.

---

language´, se diría ahora)… Pero otros han rebatido esto, diciendo que están especialmente dotadas para hacerlo”. En esa época y por esos comentarios se ve que aún no era conocida toda la teoría de los modificadores difusos, que viene a matematizar, a cuantificar modulando, toda esa terminología de `casi´, `bastante´, `algo´, etc.

Tenemos otros modificadores difusos, como el INT, de intensificación, o bien la combinación de los anteriores, o los que veamos necesario introducir, siempre tratando de cuantificar matemáticamente, de traducir a fórmulas la gradualidad de las propiedades.

Las "Fuzzy Relations", o Relaciones Difusas, parten como en el caso de las relaciones clásicas, o "crisp relations", del concepto de producto cartesiano (o producto directo) de conjuntos. Dados dos de tales conjuntos, como recordamos, una relación no es más que un subconjunto de ese producto cartesiano, que nos indica cuáles son los pares de elementos relacionados entre sí.

Supongamos que son dos conjuntos borrosos, X e Y. Entonces, una "fuzzy relation", o relación borrosa, es un subconjunto fuzzy del producto cartesiano de ambos:

$$R \subseteq X \times Y$$

Definida mediante la función de pertenencia asociada a la relación[628] siguiente:

$$\mu_R: X \times Y \rightarrow [0, 1]$$

$$(x, y) \rightarrow \mu_R (x, y) = \min \{\mu_X (x), \mu_Y (y)\}, \forall (x, y) \in X \times Y$$

Cuando ambos conjuntos-base coinciden[629], se dice que R es una *relación difusa sobre X.*

Un ejemplo de ello podría ser el que vamos a plantear ahora.

[628] O membership function relation.
[629] Esto es, cuando X = Y.

La relación difusa:

$$“y >> x”$$

(significando que el número y es mucho mayor que el x)

puede ser matematizada mediante:

$$\mu_R\ (x, y) = 0\ ,\ si\ x \geq y,$$

ó

$$\mu_R\ (x, y) = 1 / [1+ 100\ (y - x)^2],\ si\ x < y.$$

Si esos conjuntos, X e Y, son numerables, o en particular, si son finitos, podemos representar el conjunto de los grados de verdad de sus elementos mediante una matriz, la llamada Matriz Difusa[630].

Un ejemplo podría ser, cuando los dos conjuntos coinciden[631], y tenemos una relación $R \subseteq X^2 \equiv X \times X$, que se puede expresar así[632]:

$R = \{(a, a)|0.2 + (a, b)|1 + (a, c)\ |0.4 + (b, b)|0.6 + (b, c)|0.3 + (c, b)|1 + (c, c)|0.8\} = \{(a, a)|0.2, (a, b)|1 , (a, c)\ |0.4, (b, b)|0.6, (b, c)|0.3 , (c, b)|1, (c, c)|0.8\}$

La matriz difusa asociada sería, en este caso:

$$R = \begin{pmatrix} 0.2 & 1 & 0.4 \\ 0 & 0.6 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0.8 \end{pmatrix}$$

[630] O “Fuzzy Matrix”.
[631] Ambas componentes del producto cartesiano serían el mismo conjunto, denotado aquí por una X.
[632] Lo cual hemos expresado según las dos notaciones más usuales en la Teoría de Conjuntos Borrosos.

Análogamente, podemos definir un *Grafo Difuso*[633].

Para ello, dispondremos de dos colecciones de nodos o vértices equivalentes entre sí, en la relación dada, R.

Sean las $\{x_i\}$ e $\{y_j\}$, por ejemplo. Y supongamos la existencia de enlaces o arcos entre ellos, que los conectan. Los grados de relación de cada nodo con los restantes formaría la matriz difusa asociada al grafo.

Pero también las proposiciones difusas pueden ser asignadas a conjuntos o sistemas borrosos. Supongamos para ello que una proposición difusa, P, es asignada a un conjunto borroso, A. Entonces, el valor de verdad de la proposición vendría definido por:

$$T(P) = \mu_A(x)$$

donde

$$\mu_A(x) \in I = [0, 1]$$

Por lo tanto, la "truthness"[634] de una proposición, P, es un valor de la función de pertenencia del elemento x al conjunto borroso, A.

Las conectivas lógicas, como la disyunción, la conjunción, la negación o la implicación se pueden definir también sobre proposiciones borrosas.

Así, para una proposición difusa, P, definida sobre un conjunto borroso, A, y otra proposición difusa, Q, definida sobre otro conjunto borroso, B, la *conjunción* de ambas proposiciones difusas, $\wedge$:

---

633 O "Fuzzy Graph".
634 Grado de verdad, o de veracidad.

$$P \wedge Q\text{: } x \text{ es A y B}$$

vendría dada como:

$$T\ (P \wedge Q) = \text{mín}\ \{T\ (P),\ T\ (Q)\}$$

Mientras que la *disyunción* de ambas sería:

$$P \vee Q\text{: } x \text{ es A ó B}$$

Expresable mediante:

$$T\ (P \vee Q) = \text{máx}\ \{T\ (P),\ T\ (Q)\}$$

La *negación* sería definida como el paso al complementario de la Teoría de Conjuntos clásica, o al suceso contrario, típico dentro de la Teoría de la Probabilidad:

$$T\ (P') = 1 - T\ (P)$$

Y en cuanto a la *implicación:*

$$P \rightarrow Q\text{: si } x \text{ es A, entonces } x \text{ es B}$$

Se le puede asignar la:

$$T\ (P \rightarrow Q) \equiv T\ (P^c \vee Q) = \text{máx}\ \{T\ (P^c),\ T\ (Q)\} = \text{máx}\ \{1 - T\ (P),\ T\ (Q)\}$$

Si P fuera una proposición definida sobre un conjunto A, que está contenido en un Universo de discurso, U, y Q fuese otra proposición, definida esta vez sobre otro universo de discurso, el V, entonces podemos representar la relación R por medio de:

$$R = (A \times B) \cup (A^c \times V) \equiv \text{Si A, entonces B}$$

<u>Distintas Lógicas Multivaluadas.</u>

Existe toda una familia de Lógicas No-Clásicas, que todas ellas comparten una semántica que toma el intervalo real unidad, el [0, 1], como el sistema de valores de verdad, y con funciones asociadas que se suelen llamar *t-normas.*

En realidad, las llamadas t-normas y t-conormas proceden de una generalización a la Lógica Borrosa de la conjunción y de la disyunción, respectivamente. Por lo cual derivan a su vez de la intersección y de la unión de conjuntos borrosos. Se trata de objetos o constructos matemáticos interesantes en sí mismos.

Fueron introducidos en el contexto de los espacios métricos probabilísticos, y juegan un importante papel en la Teoría de la Decisión[635] en Estadística y en la teoría de medidas no aditivas[636]. Algunas de las familias parametrizadas resultan como soluciones de ecuaciones funcionales bien conocidas.

Las t-normas (y sus duales, las t-conormas) proceden de un artículo del matemático Karl Menger (hijo), titulado "Statistical metrics"[637]. Su idea principal sería la de analizar aquellos espacios métricos donde son utilizadas distribuciones de probabilidad, en vez de números, para la modelización de la

[635] O "Decision Making".
[636] KLEMENT, R., 2004.
[637] MENGER, K.,1942.

distancia entre elementos de un espacio dado. Proceden, por lo tanto, de una generalización de la desigualdad triangular clásica:

$$D (x, z) \leq D (x, y) + D (y, z)$$

Desde una perspectiva matemática, la teoría de las nomas triangulares (o t-normas) tiene dos raíces bastante independientes entre sí:

- El campo de las ecuaciones funcionales.
- La teoría de semigrupos; especialmente, de los semigrupos topológicos. Lo cual la conecta directamente con los trabajos del matemático noruego Niels Henrik Abel.[638]

Otra línea de investigación importante sería la encaminada a conseguir identificar familias parametrizadas de t-normas (o dualmente, de t-conormas) como soluciones de ecuaciones funcionales.

Recordemos lo que es una *norma triangular,* o *t-norma:*

Se llama *t-norma* a una función

$$T\colon [0, 1] \times [0, 1] \equiv [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$$

que verifica las siguientes propiedades:

1) *Commutatividad:*

$$T (a, b) = T(b, a)$$

2) *Monotonicidad:*

$$T (a, b) \leq T (c, d), \text{ si } a \leq c \text{ y } b \leq d$$

[638] ABEL, N., 1826.

3) *Asociatividad:*

$$T(a, T(b, c)) = T(T(a, b), c)$$

4) *Existencia de elemento unidad,* o neutro, que es el 1:

$$T(a, 1) = a$$

Observación.

Como una t-norma es una operación algebraica sobre el intervalo unidad cerrado, [0, 1], se puede optar por otra notación, la "infix notation": x * y, en lugar de la "prefix notation", T (x, y), que hemos usado anteriormente; de este modo, los anteriores axiomas quedarían así:

1) $x * y = y * x$
2) $x * (y * z) = (x * y) * z$
3) si $y \leq z$, entonces $x * y \leq x * z$
4) $x * 1 = x$

Disponemos de *cuatro t-normas principales.* Estas son:

- *la del mínimo,* T_M
- *la del producto,* T_P
- *la de Lukasiewicz,* T_L
- *la del producto drástico,* T_D

que vendrían dadas a través de:

$$T_M(x, y) = \text{mín}\{x, y\}$$

$$T_P(x, y) = x \cdot y$$

$$T_L(x, y) = \text{máx}\{x + y - 1, 0\}$$

$T_D(x, y) = 0$, si $(x, y) \in [0, 1) \times [0, 1)$; con mín $\{x, y\}$, en el resto.

Todas estas normas triangulares son dignas de consideración, cada una de ellas por distintas razones:

- la del producto drástico es la menor de entre todas las t-normas;
- la del mínimo es la mayor de todas ellas;
- ésta (la del mínimo) es también la única t-norma para la cual cada elemento del intervalo cerrado unidad es idempotente;
- la del producto y la de Lukasiewicz son claros ejemplos de dos clases importantes de t-normas; en concreto, de la clase de las normas triangulares estrictas y de la clase de las nilpotentes, respectivamente.

Una *conorma triangular,* también llamada *t-conorma o s-norma,* sería también una operación binaria sobre el intervalo unidad cerrado de la recta real, que cumple las propiedades conmutativa, asociativa, la de monotonía y la de admitir al 0 como elemento neutro, es decir, se trataría de una función:

$$S: [0, 1]^2 \equiv [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

tal que aparte de cumplir los tres primeros axiomas, vistos para el operador T (sustituyéndolo ahora por el S), verifica este cuarto axioma:

$$S(x, 0) = x$$

Las *cuatro S-normas,* o co-normas triangulares fundamentales, son:

- *la del máximo, S_M*
- *la de la suma probabilística, S_P*
- *la de la suma acotada, o de Lukasiewicz, S_L*

- *la de la suma `drástica´ (o drastic sum), S_D*

que vienen dadas, respectivamente, por:

$$S_M (x, y) = \text{máx} \{x, y\}$$

$$S_P (x, y) = x + y – x y$$

$$S_L (x, y) = \text{mín} \{x + y, 1\}$$

$$S_D (x, y) = 1, \text{ si } (x, y) \in (0, 1] \times (0, 1]; \text{ con máx } \{x, y\}, \text{ en el resto.}$$

que se suelen denotar por M^*, Π^*, W^* y Z^*, respectivamente.

Las normas triangulares y las conormas triangulares están relacionadas entre sí, de modo que se puede definir la t-norma a partir de la s-norma y viceversa: de T a S, y de S a T, del siguiente modo:

S es una *t-conorma* si y sólo si (syss, en acrónimo) existe una *t-norma,* T, tal que para todo par de valores, x e y, del cuadrado unidad, se cumple una de estas dos condiciones:

$$S (x, y) = 1 – T (1 - x, 1 - y)$$

ó

$$T (x, y) = 1- S (1 - x, 1 - y)$$

La S de la primera ecuación se dice la t-conorma dual de la t-norma T, y la T de la segunda se llamaría la *t-norma dual* de S. Por todo lo cual se pueden establecer pares, compuestos por una t-norma y su S-norma dual; de este modo, tendríamos:

$$(T_M, S_M)$$

$$(T_P, S_P)$$

$$(T_L, S_L)$$

$$(T_D, S_D)$$

Podemos estudiar también propiedades como la continuidad, tanto sobre las normas como sobre las conormas triangulares. Así, diremos que la t-norma T es *continua,* si para todas las sucesiones convergentes que podamos considerar, como las que denotamos aquí por $(x_i)_{i\in\mathbf{N}}$ e $(y_i)_{i\in\mathbf{N}}$, contenidas en el rectángulo generalizado $[0, 1]^{\mathbf{N}}$, formado por las funciones que van desde el conjunto de los números naturales hasta el intervalo real unidad cerrado, [0, 1], se tiene que:

$$T (\lim_{i\to+\infty} x_i, \lim_{i\to+\infty} y_i) = \lim_{i\to+\infty} T (x_i, y_i)$$

Está claro que la continuidad de una norma triangular equivale a la continuidad de su conorma dual. Y como el cuadrado unidad, $[0, 1]^2$, es un subconjunto compacto del plano euclideo, esa continuidad implica también su continuidad uniforme.

Las t-normas T_M, T_P y T_L, así como sus duales, las t-conormas S_M, S_P y S_L, son continuas. Mientras que la T_D y la S_D no lo serían.

Es bien conocido el hecho según el cual una función real definida sobre el plano puede ser continua con respecto de cada una de sus componentes, pero no serlo considerada en conjunto, esto es, cuando se considera actuando sobre un punto del plano. Pero no sucede aquí, con las normas y conormas triangulares, al tratarse de funciones monótonas.

Esto se podría enunciar del siguiente modo:

T es continua syss lo es en cada una de sus componentes, es decir, que para todo par de valores, x_0 e y_0, del intervalo unidad cerrado, se tiene que tanto su sección vertical, la

$$T (x_o, .): [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

Como su sección horizontal,

$$T (., y_0): [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

son funciones continuas en una variable.

Muchas veces son utilizadas[639] sirviendo de base teórica para el Razonamiento Aproximado. Estas llamadas *"t-norm Fuzzy Logics"* pertenecen a unas clases más amplias, unos superconjuntos o superclases de lógicas, como son, por ejemplo, las Lógicas Multivaluadas, o en particular, las Lógicas Borrosas.

Para conseguir un buen funcionamiento[640] de la implicación, a éstas t-normas se les suele exigir que sean continuas por la izquierda.[641] Tales lógicas con esta condición pertenecen a una superclase, la de las Lógicas Subestructurales, que cumplen la llamada *Ley de Prelinearidad:*

$$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$$

[639] Tanto las t-normas como las lógicas que éstas generan, no sólo en Lógica Borrosa, sino también en la Teoría de Conjuntos Difusos.
[640] Que sea "well-behaved".
[641] O "left-continuous".

Las Lógicas que restringen la semántica de la t-norma a un subconjunto del intervalo real unidad, se suelen incluir en esta clase también.[642]

Otras importantes Lógicas Borrosas de este tipo serían:

- La *Lógica Básica,* o "Basic Logic" (BL, en acrónimo), que es la de todas las t-normas contínuas.
- La *Lógica Producto* (o "Product Logic"), que es la del producto de las t-normas anteriores.

O bien las:

- *Lógica Monoidal* asociada a la t-norma[643].
- *Lógica Nilpotente* del mínimo[644], que es la de todas las t-normas contínuas por la izquierda (o "left-continuous").

Algunas de éstas últimas lógicas, que parten de motivaciones independientes entre sí, son:

- *La Lógica de Gödel-Dummet,* que es la lógica de la t-norma *min.*
- *La Lógica de Lukasiewicz*, que es la lógica de la t-norma de Jan Lukasiewicz.

Sobre las Tablas de Verdad en las Lógicas Multivaluadas.

Para lo que sigue, el mejor guía es posiblemente Nicholas Rescher y su libro titulado *Topics in Philosophical Logic*. Nos dice en él que dado un sistema

[642] Como puede ser la lógica finito-valuada de Lukasiewicz.
[643] Monoidal t-norm logic; MTL, en acrónimo.
[644] La "nilpotent minimum logic".

de Lógica Proposicional de tipo usual, es posible, una vez que el desarrollo sintáctico riguroso ha sido conseguido, entrar en el terreno de lo semántico, esto es, de lo que se orienta al significado. Véanse allí algunas más de estas tablas[645], así como la comparación entre ellas para las distintas lógicas generadas: las de Stephen Cole Kleene, la de Emil Leon Post, la del lógico ruso D. S. Bochwar, o la del propio Jan Lukasiewicz, etc.

En la Lógica Trivaluada de Lukasiewicz, como paradigma o modelo del que inicialmente partimos, se puede observar una serie de características esenciales, como:

1) Existen tres valores de verdad, V, F e I[646], que puestos en orden creciente de "truthfulness" quedarían así:

$$T(F) = 0 < T(I) = 0.5 < T(V) = 1$$

2) La negación de un "statement" de un cierto valor de verdad es su opuesto en cuanto a "truthfulness".
3) El valor de verdad de la conjunción es el más falso, y el de la conjunción el más verdadero, de entre los valores de verdad de sus componentes.
4) El valor de verdad de la implicación es el mismo de $(\neg P) \vee Q$, salvo que como valor de verdad correspondiente a $I \rightarrow I$, le asignamos el V, para así asegurarnos de que el $P \rightarrow P$ tome siempre el valor V.
5) El valor de verdad de $P \leftrightarrow Q$ es el mismo que el de

$$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

[645] Pues algunas de ellas las mostramos aquí.
[646] Por verdadero, falso e indeterminado, respectivamente.

Con la mirada puesta en la interpretación futuro-contingente del tercer valor de verdad, Lukasiewicz introdujo un operador modal, el de *necesidad,* que se denota por ◊, en su lógica trivaluada.

P	¬ P
V	F
F	V

P│Q	P & Q	P ∨ Q	P ⊃ Q	P ≡ Q
	V F	V F	V F	V F
V	V F	V V	V F	V F
F	F F	V F	V V	F V

Para la *Lógica Bivaluada o Bivalente*[647]*,* denotada por $\mathcal{B}_2$ *o* $\mathcal{L}_2$, estas serían las Tablas de Verdad.

En cambio, para la *Lógica Trivaluada de Lukasiewicz,* $\mathfrak{L}_3$, estas se ven transformadas en las siguientes (observar con detenimiento las diferencias con las anteriores):

P	¬ P
V	F
I	I

[647] La lógica "clásica", también llamada a veces lógica matemática. Observemos que la notación utilizada pudiera haber sido la de 0, I, 1, en lugar de expresarla mediante V y F.

F	V

Podemos hacer notar un nuevo valor de verdad, el *I,* que corresponde a *Indeterminado.*

P | Q	P $\wedge$ Q			P $\vee$ Q			P $\rightarrow$ Q			P $\leftrightarrow$ Q		
	V	I	F	V	I	F	V	I	F	V	I	F
V	V	I	F	V	V	V	V	I	F	V	I	F
I	I	I	F	V	I	I	V	V	I	I	V	I
F	F	F	F	V	I	F	V	V	V	F	I	V

Aquí se puede ver un sistema de Lógica Proposicional “truth-functional”, pero que tiene tres valores de verdad, en vez de dos.

El *sistema trivaluado de Bochvar* (1939), o “sistema bochvariano”, es denotado como $\mathfrak{B}_3$. El problema que Bochvar trataba de resolver y formalizar mediante ellas era el de las Antinomias, o Paradojas Semánticas.

Posee las siguientes *Tablas Veritativas,* donde ya hemos cambiado la tabla correspondiente a la conectiva lógica (u operador) \`conjunción´:

P | Q	P $\wedge$ Q		
	V	I	F

V	V I F
I	I I I
F	F I V

Para la *Negación:*

P	$\neg$ P
V	F
I	I
F	V

y para las conectivas:

P | Q	$P \vee Q$			$P \rightarrow Q$			$P \leftrightarrow Q$		
	V	I	F	V	I	F	V	I	F
V	V	I	V	V	I	F	V	I	F
I	I	I	I	I	I	I	I	I	I
F	V	I	F	V	I	V	F	I	V

Tengamos en cuenta que aquí el significado de la disyunción sería distinto del anterior; concretamente éste sería:

$$\neg (\neg P \wedge \neg Q)$$

En la *lógica trivaluada de S. C. Kleene.* El problema que subyace a esta lógica guarda relación con las relaciones parciales recursivas. Dichas relaciones puede que no estén defindas en algunos casos. Se conoce como la $\mathfrak{K}_3$, y tendríamos la misma tabla que antes para la negación, mientras que para las otras conectivas[648] serían así:

P | Q	$P \wedge Q$			$P \vee Q$			$P \rightarrow Q$			$P \leftrightarrow Q$		
	V	I	F	V	I	F	V	I	F	V	I	F
V	V	I	F	V	V	V	V	I	F	V	I	F
I	I	I	F	V	I	I	V	I	I	I	I	I
F	F	F	F	V	I	F	V	V	V	F	I	V

Y para la *Lógica Trivaluada de Jan Lukasiewicz,* la idea de partida sería la de formalizar la verdad como `posibilidad´. Al tercer valor veritativo se le puede asiganar la interpretación de `neutralidad´, o el de `indeterminación´. Se denotaría esta lógica como $\mathcal{L}_3$*,* introduciendo para ella la equivalencia con los valores de verdad numéricos iniciales, el 1, el 0 y el -1, que luego Lukasiewicz cambiaría por los del 1, el 0 y el ½, y que se expresa mediante las tablas:

P	$\neg$ P
1	-1
0	0
-1	1

Con:

[648] De las cuales la disyunción sería definida igual que la que acabamos de señalar.

P ∣ Q	$P \wedge Q$			$P \vee Q$			$P \rightarrow Q$			$P \leftrightarrow Q$		
	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1
1	1	0	-1	1	1	1	1	0	-1	1	0	-1
0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0
-1	-1	-1	-1	1	0	-1	1	1	1	1	1	1

Así que como hemos podido comprobar, es posible construir una gran variedad de lógicas multivaluadas. Incluso, las infinito-valuadas, como propusiera en su día Hans Reichenbach.

P	$\neg^{m} P$
1	2
2	3
3	4
…	…
m - 3	m - 2
m - 2	m - 1
m - 1	m
m	1

Esta sería la *versión m-valuada de la negación en la Lógica de Emil L. Post.* Asimismo se pueden introducir versiones m-valuadas de las otras conectivas.

Como se suele hablar de *Lógicas Postianas,* o de Post, para *m = 3,* el sistema postiano sería el $\mathcal{P}_{3}$. En el cual se tendrán las siguientes tablas de verdad:

P	$\neg$ P
1	3
2	2
3	1

P | Q	P $\wedge$ Q			P $\vee$ Q			P $\rightarrow$ Q			P $\leftrightarrow$ Q		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	3	3	2	1	1	1	1	2	2	3	3	3
2	3	1	3	1	2	2	1	2	3	3	1	2
3	2	3	2	1	2	3	1	1	1	3	2	3

Siguiendo el modelo de los *Principia Mathematica*[649]*,* introdujo Emil L. Post variantes m-valuadas de la negación y de la disyunción, denotando dichas conectivas como $\neg^{m}$ y $\vee^{m}$, respectivamente.

También hemos de mencionar la Lógica trivaluada de Arendt Heyting, con la que éste, quien fuera discípulo de L. E. J. Brouwer, trató de formalizar el razonamiento intuicionista, que como sabemos, no coincide con el clásico, llevando a la admisión sólo de algunas pruebas matemáticas, rechazando las

---

[649] La ya clásica referencia de Bertrand Russell y Alfred North Whitehead (obra inconclusa, por cierto).

del resto (por ejemplo, aquellas que utilizan el recurso a la `reducción al absurdo´). Recordemos que para los intuicionistas no sería válida la fórmula:

$$\neg\neg A \rightarrow A$$

Sus tablas de verdad serían éstas:

	$\neg$
V	F
I	F
F	V

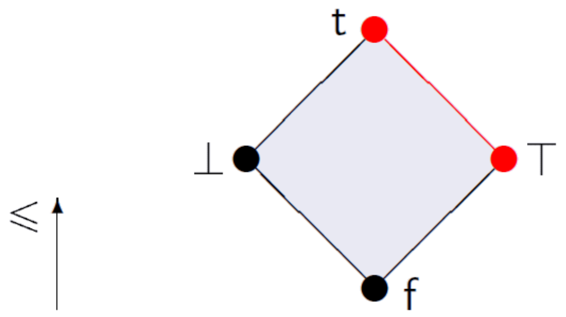
$\wedge$	V	I	F
V	V	I	F
I	I	I	F
F	F	F	F

$\vee$	V	I	F
V	V	V	V
I	V	I	I
F	V	I	F

→	V	I	F
V	V	I	F
I	V	V	F
F	V	V	V

Dentro de los *sistemas tetravaluados,* debemos mencionar el debido a *Dunn y Belnap,* surgido del estudio de las Lógicas de la Relevancia. Su interés es muy notable dentro de las aplicaciones computacionales. Estaría basado en cuatro valores veritativos: el de ninguna información sobre el estado de la cuestión (state of affairs); el de información acerca de que el estado de la cuestión falla; el de información de lo que el estado de la cuestión obtiene; y finalmente, el de información conflictiva, esto es, de aquello que obtiene y aquello en lo que falla. Con notación matemática, tendríamos este conjunto de valores de verdad:

$$W = \{\varnothing, \{\perp\}, \{\top\}, \{\perp, \top\}\} \equiv \{f, \perp, \top, t\}$$



$\neg$	
t	f
f	t
$\perp$	$\perp$
$\top$	$\top$

A veces, el primero de esos elementos se viene a representar como `f´, por `false´, y el último, como `t´, por `true´. Por ello hemos dispuesto esas dos descripciones equivalente de W.

Suele visalizarse como ese `diamante´ (`diamond´, o rombo), cuyos vértices se etiquetarían por medio de los antes mencionados elementos. Dicho conjunto de valores veritativos admitiría dos posibles ordenaciones `naturales´ (en el sentido de los retículos, o `lattices´). Éstas ordenaciones serían:

- La que pone el $\{T\}$ en la cúspide del rombo, situando en sus lados el $\varnothing$ y el $\{\bot, T\}$, mientras que abajo, el $\{\bot\}$.
- La que pone arriba del todo al $\{\bot, T\}$; en los laterales, el $\{\bot\}$ y el $\{T\}$, en cuanto grados incomparables; y el $\varnothing$, en la base del rombo.

Dados el *sup* y el *inf* para la ordenación del conjunto de los valores veritativos, existirán funciones de los grados de verdad tanto para la conectiva conjunción como para la disyunción. La negación produciría el intercambio entre $\{\bot\}$ y $\{T\}$, al tiempo que dejaría fijo el valor $\varnothing$.

En 2005, Shramko y Wansig idearon, para las bases de conocimiento de las redes complejas, sistemas conteniendo dieciséis grados de verdad, los cuales luego han sido estudiados por Odintsov, en 2009.

Si se tomara un conjunto no numerable de grados de verdad, se tendría $\mathfrak{P}_{\aleph}$. Bastaría para ello que simplemente tomásemos como conjunto de valores de verdad todos los números reales comprendidos en el intervalo [0, 1]. Una característica interesante de dicha clase es que no admitiría tautologías, suponiendo las fórmulas bien plantedas o formuladas (wffs)[650]. Como dice Nicholas Rescher, la asignación de valores de verdad a las proposiciones[651] puede ser considerada como una especie de juego simbólico. Este hecho puede ser de gran utilidad para el estudio de aspectos de Teoría de la Prueba[652] en los sistemas de lógica proposicional. Por ejemplo, en la presentación de pruebas de independencia en lógica de proposiciones.

---

[650] Aprovechemos para recordar que un *lenguaje* (L) sería un subconjunto no vacío (llamado alfabeto, A), sobre un conjunto numerable, del lenguaje universal sobre A. Se suele denotar matemáticamente así: $L \subseteq A^* \equiv \bigcup_{n \in \mathbf{N}} A^n$. Dicho L estaría compuesto por un conjunto de símbolos, llamado alfabeto del lenguaje. Asimismo, un conjunto de reglas de inferencia, las cuales van a determinar qué cadenas de símbolos están bien construídas (las \`wffs´). Esto va a constituir la llamada *Gramática del Lenguaje.* Las *Reglas de Formación, o de Inferencia,* serían: 1) los elementos del conjunto numerable (el de proposiciones), Π, son wffs (serían las fórmulas atómicas); 2) si A es una wff, también lo es la $\neg$ A; y 3) si A y B, entonces $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$ son wffs. Los símbolos A y B que se utilizan en esta definición no serían símbolos del propio lenguaje, sino *metasímbolos.* Se llama *interpretación* a una función que asocia a cada wff un valor semántico. Un *modelo* para A sería una de tales interpretaciones que asignara a dicho A un valor destacado. Una *fórmula válida* es aquella para la cual toda interpretación es un modelo. De un conjunto, C, se *infiere* el A, si todo modelo de C también lo es del A.

[651] Designando mediante τ(X) la clase de todas las tautologías de un sistema lógico, X, tendríamos la siguiente cadena conjuntista, que sería de contenidos estrictos entre dominios tautológicos:

$$\tau\,[\mathfrak{L}_{\aleph}] \subset \ldots \subset \tau\,[\mathfrak{L}_{n\,(k+1)}] \subset \tau\,[\mathfrak{L}_{(n-1)\,(k+1)}] \subset \ldots \subset \tau\,[\mathfrak{L}_{2\,(k+1)}] \subset \tau\,[\mathfrak{L}_{(k+1)}] \subset \ldots \subset \tau\,[\mathfrak{L}_2] \equiv \mathfrak{C}_2$$

Con *k* número primo, y donde $\mathfrak{L}$ indica que el sistema es el de Lukasiewicz, de la multiplicidad veritativa que indica el subíndice. La última de la cadena sería la bivaluada clásica. Además, en el caso de que los subíndices r-1 y s-1 no fueran divisibles entre sí, cada uno de los sistemas lukasewiczianos $\mathfrak{L}_r$ y $\mathfrak{L}_s$ contendrá alguna tautología que no esté contenida en el otro sistema lógico.

La diferencia entre $\mathfrak{L}_{\aleph_0}$ y $\mathfrak{L}_{\aleph_1}$ no es algo crucial en lo referente a la clase de las tautologías, dado que ambos sistemas muestran el mismo \`stock´ de ellas.

De esto trataba, por ejemplo, Robert John Ackermann, en su obra *Introduction to Many Valued Logics* (1967); pp. 60-63.

Como sabemos, existen lógicas infinito-valuadas que no son generalizables a partir del sistema trivaluado de Lukasiewicz, el L_3. Por ejemplo, es el caso de los sistemas bochvarianos, de la familia B_n, aun cuando ambos coincidan para n = 3.

Otro caso digno de mención sería el de los sistemas gödelianos, los G_n. El G_3 es particularmente interesante, desde un punto de vista lógico, pues todos los teoremas del Cálculo Proposicional Intuicionista (IPC) son G_3-tautologías, es decir, que todos ellos asumen el valor veritativo unidad, para cualquiera de las fórmulas bien formadas (wffs). Pero el recíproco no es cierto, dado que existen tautologías del G3 que no serían teoremas del IPC. Todo lo cual fue estudiado por Z. Zawirski (1946), S. C. Kleene (1952) y por T. Kotarbinski (1957).

[652] Proof-theoretic.

Luego tendríamos también las lógicas basadas en las t-normas, o Normas Triangulares. De ellas las fundamentales son las de Lukasiewicz, la de Gödel y la Lógica Producto. Su interés queda más que justificado al conocer un Teorema Fundamental de Representación, según el cual toda t-norma arquimediana siempre se puede escribir como una suma ordinal de las tres mencionadas[653].

Tengamos también presente que toda t-norma determina la función de verdad de una conjunción, y que su residuo lo que determina es la función veritativa de una implicación. Podemos hablar de la *Basic Logic* (BL, en acrónimo), de Petr Hájek. Su lenguaje puede ser dotado de una negación lógica; para ello, basta con tomar:

$$\neg\, u \equiv u \rightarrow 0$$

De modo que una t-norma siempre va a permitir que definamos la semántica de una lógica difusa.

En el caso de los tres principales sistemas axiomáticos antes mencionados (el de Lukasiewicz, el de Gödel y el del Producto), basta considerar lo que para cada una de ellas significa la operación *, así como su residuo (en forma de aplicación, $\leftarrow$)[654].

---

[653] Con lo que tendríamos como herramienta esencial las lógicas basadas en las T-normas, o Normas Triangulares. De entre ellas, las fundamentales son esas tres: la de Lukasiewicz, la de Gödel y la asociada a la Lógica Producto. Su interés queda más que justificado al conocer ese resultado fundamental. Recordemos que una t-norma, T, es *arquimediana,* si:

$$T(x, x) < x, \forall x \in (0, 1)$$

[654] El sistema de Lukasiewicz estaría basado en:

$$x * y \equiv \text{máx}\,\{0, x + y - 1\}$$

Su residuo sería:

$$x \leftarrow y \equiv \text{mín}\,\{x - y + 1, 1\}$$

17. La polémica en torno a la Lógica Borrosa

Una de las más aceradas y persistentes polémicas fue la instrumentada[655] por el hasta entonces patriarca de los probabilistas italianos, Bruno de Finetti (1906-1985), y por su escuela.

Al dar a conocer de nuevo estas ideas en un modo más consistente y formalizado, los artículos publicados por Lofti A. Zadeh no fueron muy bien recibidos en Occidente, sino por el contrario, rechazados con una extrema dureza por los elementos más conservadores de la ciencia académica. No obstante, con el tiempo comenzaron a ir ganando más adeptos, lo que llevó a que estas teorías se extendieran, estableciéndose así entre los científicos más innovadores y entre los mejores profesionales. Más que en cualquier otro lugar arraigó en el Japón, y luego en Corea del Sur, en China e India. Europa y

---

En cuanto al sistema en sí, partiría del de la BL, adjuntándole el axioma:

$$\neg \neg A \to A$$

El de Gödel está fundado en:

$$x * y \equiv \text{mín } \{x, y\}$$

con residuo:

$$x \leftarrow y \equiv 1, \text{ si } y \leq x; \text{ con } x, \text{ en otro caso}$$

También partiendo del BL, pero ahora se le añadiría el axioma:

$$A \to (A \;\&\; A)$$

La Lógica Producto se basa, por su parte, en:

$$x * y \equiv x \cdot y$$

con un residuo:

$$x \leftarrow y \equiv \text{mín } \{1, x/y\}$$

Su sistema axiomático, partiendo también de la BL, se obtendría mediante la adjunción de estos dos axiomas:

$$\neg \neg C \to [(A \;\&\; C) \to (B \;\&\; C)] \to (A \to B)]$$

$$[A \;\&\; (A \to \neg A)] \to \perp$$

[655] Contra la “Fuzzy Logic”, se entiende.

Estados Unidos fueron incorporándose, aunque más lentamente, pero se puede considerar sin duda una rama innovadora y creciente de la Matemática y de la Inteligencia Artificial, que tiene muchas y profundas implicaciones filosóficas.

La polémica, o controversia[656], se desencadenó de forma virulenta y ya desde el primer momento, siendo especialmente airada y visceral en los medios académicos occidentales. Posiblemente al estar tan imbuidos de ideas cristianas y aristotélicas, contra las cuales chocaba frontalmente esta nueva doctrina de los "grados de verdad". A los profesionales de la Estadística[657] les pareció que con ella surgía una fuerte competidora, que ponía en riesgo su campo de la "Teoría de la Probabilidad", parcelita de la cual se sentían únicos, eternos y auténticos propietarios.

Estos celos profesionales llevaron a que en la primera mitad del siglo XX, Bruno De Finetti cargara reiteradamente contra la Lógica Borrosa y sus iniciadores. Así, decía que la consideraba innecesaria, absurda y altamente peligrosa, por lo que debía excluirse de todo currículo científico serio. Aún andan muchos seguidores de estas opiniones infiltrados entre los actuales estadísticos, participando de tales ideas adversas, bien sea de un modo confeso o soterrado. Todo lo cual procede en buena medida de envenenados malentendidos, no siempre inocentes, porque en realidad ambas teorías pueden y seguramente deban en el futuro coexistir, dado que la Fuzzy Logic utiliza los grados de verdad como un modelo matemático del fenómeno de la

[656] Para este "estudio de caso", el de la Lógica Borrosa.
[657] Como ya hemos comentado.

“vagueness”, mientras que la probabilidad es un modelo matemático de la ignorancia que tenemos acerca de un suceso aleatorio.

Frente a esta descalificación furibunda e interesada de la Lógica Borrosa, tenemos el caso de algunos que pudiéramos llamar “apóstoles” que se dedicaron a predicar la buena nueva de la Fuzzy Logic. Tal es el caso del matemático americano Bart Kosko, quien es al mismo tiempo un escritor muy popular en los EE. UU., y además, se trata de un notable científico de la computación. Por su apasionada defensa de esta teoría, se le ha llamado el “San Pablo de la Lógica Borrosa”. Pero en cualquier caso, no es conveniente adoptar posturas fundamentalistas, aunque esto sea poco popular decirlo en medio del campo de batalla. Porque las descalificaciones que contra la Lógica Borrosa han vertido algunos de los sabios oficiales de la ciencia académica han sido tremendas y claramente excesivas. Así, William Kahan, del propio Berkeley donde enseñaba Zadeh, dijo que “la Lógica Borrosa es la *cocaína* de la ciencia”[658], o Dana Scott, de la Universidad Carnegie Mellon, cuando decía lo de que esta es “pura pornografía”[659].

Una postura intermedia parece, como de costumbre, más equilibrada y coherente: ni esta teoría es una panacea universal, ni algo de lo que debamos huir como del demonio, en cuanto que fuera algo así como el origen de todos los males de la humanidad. Así, Mark Wierman, de la Universidad americana

[658] Demasiado extremista en ocasiones, con descalificaciones muchas veces innecesarias, nos parece.
[659] Todos estos comentarios fueron recogidos por muchos medios.
Por ejemplo, podemos verlo en:
HAACK, S., 1996; p. 230.

de Creighton, dijo en su obra *An Introduction to the Mathematics of Uncertainty,* que:

> One of the most powerful tools of the Cybernetic Age is Fuzzy Set Theory. A fuzzy set has graded membership. Thus, it is designed to handle vagueness.[660]

Otra conclusión a la que es posible llegar[661] es a que la lógica difusa y la probabilidad son dos diferentes maneras de abordar y de expresar la incertidumbre[662]. Porque mientras que la teoría de la probabilidad puede ser utilizada para representar la creencia subjetiva, en la teoría de conjuntos difusos se utiliza el concepto de pertenencia a un conjunto difuso, es decir, hasta qué punto una variable verifica la propiedad que define un conjunto.

También hemos de incluír dos conceptos, también muy filosófico-matemáticos, como son el de Incompletitud y el de Indecibilidad[663]:

---

[660] WIERMAN, 2010; p. 53.

[661] Y es la que parece más razonable.

[662] Es importante diferenciar los dos tipos de incertidumbre: la que da lugar, respectivamente, a los conjuntos borrosos por un lado, y aquella de la que provienen las medidas borrosas por otro. Tal distinción puede hallarse en el contexto de las observaciones o de las medidas de la Física; por ejemplo, en Meteorología: no es posible definir nítidamente las fronteras de los sistemas nubosos. La razón está en que tales medidas son inherentemente vagas y por ello mismo guardan conexión con los `fuzzy sets´. En muchas medidas de este tipo, como son las de peso, longitud, intensidad lumínica, etc., se establecen clases con límites nítidos. Pues dado un rango de valores para tales medidas, como puede ser el intervalo real cerrado [a, b], se particiona éste en *n* subintervalos disjuntos entre sí: $[a, b] = [a, a_1) \cup [a_1, a_2) \cup \ldots \cup [a_{n-1}, b]$, según un nivel admisible o adecuado de precisión. Con ello, la magnitud observada caería forzosamente en uno de esos subintervalos en concreto y en ningún otro. Pero a los efectos prácticos, que esto estuviera garantizado presupondría la no existencia de errores observacionales. Y como tales errores son inevitables, cada una de las observaciones coincide o está próxima a uno de esos puntos-frontera, los $\{a_i\}$, que dividen dos subintervalos colindantes entre sí, lo cual lleva consigo incertidumbre respecto de su pertenencia a cada uno de los subintervalos reales que divide. Dicha incertidumbre reúne todas las características de una medida borrosa.

[663] Según decía Manuel Sacristán, "un cálculo es *completo* cuando se pueden demostrar en él como teoremas todos los enunciados formalmente verdaderos construibles a partir de sus símbolos". Lo que probó Kurt Gödel en su tesis doctoral fue que es posible demostrar todo enunciado verdadero en el sistema lógico de predicados de primer orden. Más adelante, ya en 1930, Gödel probaba que existen proposiciones en la aritmética de las cuales no es posible demostrar que sean verdaderas, pero tampoco que sean falsas. Se trata de las *proposiciones*

En la teoría de la probabilidad se utiliza el concepto de probabilidad subjetiva. Así, por ejemplo, ¿cuán probable pensamos que es que una variable determinada se halle dentro de un conjunto? Aunque esta distinción es, sobre todo, de índole filosófica, la medida de posibilidad que nos proporciona la lógica difusa es intrínsecamente distinta de la medida de probabilidad "clásica", por lo que no son directamente equivalentes.

Sin embargo, muchos estadísticos fueron persuadidos[664] por la obra del influyente autor italiano antes mencionado acerca de que sólo un tipo de tratamiento de la incertidumbre[665] es realmente necesario, y que por lo tanto, la lógica difusa resultaría absurda, condenable y superflua. Este sería

indecidibles. Como una consecuencia de ésta indecibilidad, publicaría un segundo teorema, el llamado *Teorema de Incompletitud,* según el cual la lógica de predicados de orden superior (que incluye a la aritmética) no puede ser a la vez completa y consistente.
Nagel y Newman, en su obra *El teorema de Gödel,* nos dicen que las conclusiones de éste fueron dos: una, que no es posible presentar una prueba metamatemática de la consistencia de un sistema lo bastante comprensivo (o amplio) como para contener toda la aritmética, salvo que se empleen reglas de deducción que difieran en lo esencial de las reglas de transformación utilizadas para derivar (o inferir) teoremas dentro del sistema; y otra, que la potencia del método axiomático es limitada.
Lo que Gödel en realidad demostraba en su famoso teorema es que en los sistemas lógicos existen proposiciones indecidibles, es decir, proposiciones que no son ni demostrables ni refutables. Lo cual implica que es imposible probar la no-contradictoriedad de un sistema, si no es mediante recursos ajenos a éste. Estos resultados hicieron tambalearse los cimientos de la Matemática construida más o menos plácidamente hasta sus días. Ello significaba el fracaso del programa hilbertiano, el de los métodos finitistas que Hilbert empleaba intentando probar la no-contradictoriedad de la aritmética dentro del sistema axiomático propio de ésta. Por lo cual resultaría ya imposible demostrar la no-contradictoriedad de un sistema por métodos puramente sintácticos.
[664] Y aún lo están bastantes de ellos.
[665] Desde un punto de vista matemático.

posiblemente una especie de “ataque de celos”, tras detectar que algún rival potencialmente fuerte acaba de invadir nuestra “finca particular”.

Por otra parte, según Bart Kosko (1960-), la probabilidad sería una subteoría de la lógica difusa, ya que la probabilidad sólo se ocupa de un tipo de incertidumbre. Así, Lotfi A. Zadeh (1921-) sostiene que la lógica difusa es diferente en su carácter de probabilidad, y no es un sustituto de la misma.

Bart Kosko cita las opiniones vertidas por dos de los más acérrimos enemigos de la Lógica Borrosa al principio de su obra *“Fuzzy Thinking”,* afirmaciones que destacan sin duda por su vehemencia:

The danger of fuzzy logic is that it gives wings to the sort of fuzzy thinking

that has brought us so many problems. Fuzzy logic is the cocaine of science.[666]

The blur is a kind of scientific permissiveness. Tends to end up in socially appealing slogans that are not accompanied by the discipline of hard scientific work and patient observation.[667]

Es cierto que la idea de “truth/ falsehood”[668] como mutuamente excluyentes es una tosca simplificación del mundo real, pero es un hecho cierto también que cualquier proceso de abstracciones en sí mismo. ¿Por qué no usar entonces el más simple, esto es, el bivalente? El paradigma científico puede cambiar tan sólo negando la vieja teoría y afirmando la nueva.

Algunas de estas descalificaciones le vienen a Lofti A. Zadeh de su propio entorno. Tanto de su propia Universidad como se propio departamento. Y en

666 William Kahan.
667 Rudolf Kalman.
668 Verdad / Falsedad.

los Estados Unidos se han producido con periodicidad y más que declarada belicosidad, acusando a la Lógica Borrosa de desastres tales como el mal estado actual de la educación americana. Para esto se escudan dichas críticas en una mala interpretación de las ideas “fuzzy”, como si estas técnicas matemáticas estuvieran detrás de toda la permisividad, el descreimiento, el “relativismo”, así como de los distintos vicios y los males del mundo.

Tales críticas poco fundadas no sólo tienen su base en la ignorancia o en la información tendenciosa que algunos transmiten, sino en las corrientes fundamentalistas que allí prosperan por doquier.

El famoso Ilya Prigogine describía las más recientes contribuciones a este campo y cómo se continúa buscando leyes deterministas para explicar fenómenos esencialmente inestables y caóticos, introduciedo teorías a las cuales Bart Kosko ataca con dureza:

> Once again, the scientists were wrong at 'self-evident' of logic and mathematics; had inflated their hunches, instincts and conditioned reflexes of 'probability' and 'randomness' to make them a pagan god, and they had filled every corner of the universe as in the last century had filled all the invisible 'light ether' so that light waves could move through space.[669]

Los problemas de incertidumbre, imprecisión y vaguedad se han debatido durante muchos años[670]. Estos problemas han sido temas muy importantes en

---

[669] PRIGOGINE, I., 1997.

[670] Los problemas que han dado origen en la investigación y en la tecnología, a esa necesidad de estudio de la Incertidumbre han sido muy variados. Mencionemos, por ejemplo, los aparecidos en la Cibernética, cuando en la IIGM se trataba de armonizar los movimientos de los aviones con la potencia de fuego antiaérea; o en el filtrado de ondas, en las comunicaciones. También en la Teoría de Colas (Queuing Theory), para tratar con la incertidumbre de las llamadas telefónicas. O en la Teoría de Juegos (o Game Theory), para

los círculos científicos y filosóficos, con muchos debates acerca de la naturaleza de la vaguedad y la capacidad de la lógica booleana tradicionales para hacer frente a los conceptos y percepciones que son imprecisas o vagas. La lógica difusa puede ser considerada una lógica divergente. Se basa en la teoría de los conjuntos fuzzy, y se aplica con creciente éxito en el tratamiento de información y control de distintos sistemas complejos.

Se podría pensar que la lógica difusa es muy reciente, pero sus orígenes se remontan al menos a los filósofos griegos. Incluso parece posible rastrear sus orígenes en China e India antiguas. Fueron ellos los primeros en tener en cuenta que todas las cosas no tienen por qué ser de un determinado tipo o dejar de serlo, sino que puede haber una amplia gradación de estados intermedios.

Dentro de los acerados polemistas que han arremetido contra la Lógica Borrosa, no podemos dejar de citar a la profesora de filosofía de Australia, *Susan Haack* (1945-). Ésta autora critica a Lofti Zadeh, aduciendo que su lógica no está bien o suficientemente motivada, ya que la verdad[671] no puede venir dada en grados. Pero muchos pueden contraargumentar con que se trata de una lógica que sin duda, funciona, y que el desacuerdo de Haack pudiera ser debido a ciertos prejuicios de raíz fregeana. A lo cual ella responde que si la Lógica Borrosa se tomase como una mera descripción formalizada de los

---

estudiar el caso de la incertidumbre en el comportamiento y estrategia desarrollados por los jugadores, que pueden ser ejércitos enfrentados. Pero también hay muchos otros, como el de la información oculta, detección de señales débiles, procesamiento del lenguaje natural, mejora de la seguridad y eficiencia de la codificación, etc. De entre los métodos no-clásicos, podemos citar los siguientes: aparte de la Fuzzy Logic, tenemos el Fuzzy Control, las ANN (Artificial Neural Networks), los GA (Genetic Algorithms), SAA (Simulated Annealing Algorithm), Rough Set Theory, Tabu Search Algorithm, Teoría del Caos, Análisis de `Wavelets´, Teoría de Fractales, la Data Mining (o Minería de Datos), etc.

[671] Según dice ella.

procesos mentales que llevan a poder ajustar aparatos como el del aire acondicionado, entonce podría admitirse una conexión con la tecnología "fuzzy", pero siempre que fuese sin amenazar con ello a la Lógica Clásica. Así que en caso de considerarse como una rival de ésta, tal como dicen Zadeh y sus seguidores, el éxito de la tecnología difusa sería irrelevante para su "bona fides" filosófica. Piensa que lo que habría que hacer sería acomodar la vaguedad dentro de la estructura de la Lógica Clásica, por medio de una semántica no-clásica, en la cual la evidencia vaga contaría como verdadera tan sólo en caso que pudiera ser verdad para todos los modos de hacerlo preciso.

Tras explicar Haack cómo la borrosa no sólo se distancia de la clásica, o diverge de ella, sino que también lo hace de la concepción clásica de qué es la lógica. La critica por lo que llama sus "extravagancias metodológicas" y sus "inconsistencias lingüísticas", arguyendo que a pesar de introducir tan grandes complejidades, finalmente no logra evitar imponer una precisión natural, incurriendo con ello en el mismo defecto que Zadeh le encontraba a la clásica. Así, termina concluyendo[672] que la Lógica Borrosa no le parece un competidor viable para la Lógica Clásica. A estos ataques y similares han respondido Bart Kosko y otros autores, diciendo que en el mundo filosófico hay gentes que sólo han leído los primeros artículos publicados sobre la Lógica Borrosa, ignorando la inmensidad y precisión de mucho del trabajo de fundamentación posterior, y que tan sólo hablan desde la más completa ignorancia y desde la inconsciencia[673].

---

[672] HAACK, S., 1979; pp. 116 y ss.
[673] Esto completa, a nuestro entender, el marco en que se ha movido hasta ahora esa tan agria como enconada polémica.

18. Otras Lógicas No-Clásicas

Entre otras, podemos mencionar la "Computability Logic"[674], que es una teoría de la computabilidad semánticamente construida. Esta se opone a la lógica clásica, que de hecho sería una teoría de la verdad.

La Computability Logic se extiende e integra dentro de sí diferentes lógicas; entre ellas, las lógicas lineales, las intuicionistas y la misma lógica clásica.

Hablemos ahora de lo que se conoce como Razonar sobre el Conocimiento[675]. Puede ser llamado así cuando las expresiones especificando algo que no se conoce conducen a la necesidad de retrocederlo cuando ese nuevo conocimiento es aprendido.

Se dice *Lógica Relevante*[676] cuando todas las hipótesis deben ser necesarias para la conclusión.

La Lógica *Paraconsistente* rechaza el principio de No-Contradicción. Esto es así tanto en la Lógica Relevante, y el Dialetheism, o Lógica Dialeteica.

Una lógica se dice que es *paraconsistente* si y sólo si no es el caso para todas las oraciones A y B que se dé

[674] O Lógica de la Computabilidad.
[675] Knowledge Reasoning.
[676] O *Strict Logic.*

$$A, \neg A \vdash B$$

O en una definición algo diferente, una lógica será *paraconsistente* si y sólo si es que existen algunas sentencias, A y B, de tal manera que

$$\vdash A \text{ y } \vdash \neg A, \text{ pero no } \vdash B$$

Es el *Razonamiento Abductivo,* si podemos derivar las explicaciones más probables que resultan de los hechos conocidos.

En cuanto a la Lógica Lineal, a las Relevant Logics (o Lógicas Pertinentes) y la No-Monótona, cabe decir que todos ellas rechazan la "Contradiction Law", o Principio de No-Contradicción.

Una *lógica modal* formal representa modalidades mediante los llamados "operadores modales". Estas modalidades o formas pueden ser de uno de estos tres tipos: de necesidad, de posibilidad y de probabilidad.

Los elementos antes mencionados de modalidad pueden ser expresados no en función de otros mediante la negación.

Hoy en día han crecido notablemente las expectativas y aplicaciones de la Modal Logic (ML), muchas de ellas siguiendo la estela de los trabajos de Saúl Kripke. Pero también lo están haciendo las Lógicas Paraconsistentes; especialmente, debemos hacer mención aquí a uno de sus principales impulsores y cultivadores, Graham Priest, de Australia. Es en este país donde han arraigado con más fuerza esta corriente y la del "Dialetheism".

Algunos otros aspectos históricos de la lógica modal.

En las obras de Aristóteles algunos pasajes pueden ser considerados como verdaderas anticipaciones de la lógica modal, ya que nos muestran las conexiones con el tiempo y con las potencialidades.

En los filósofos escolásticos medievales podemos encontrar otros ejemplos de razonamiento encauzado de una forma modal. Así, por ejemplo, en las obras de Guillermo de Ockham, y de Juan Duns Scoto, con el análisis de los conceptos de esencia y de accidente.

La Lógica Modal Moderna fue fundada por *Clarence Irving Lewis*[677]. El sería quien, en su tesis y en sus posteriores artículos, ya desde 1910, estableciera una nueva forma de plantearla, lo que culminaría en uno de sus libros, el titulado *Symbolic Logic*, que es de 1932.

En tiempos más recientes, *Saul Aaron Kripke* (1940-) comenzó a desarrollar su semántica modal, ya en 1959. De heho, escribió su primer artículo sobre los aspectos semánticos de la Lógica Modal y de los Mundos Posibles a los dieciséis años. Esta es ahora llamada *Semántica Estándar de Kripke,* donde

[677] Citado habitualmente como C. I. Lewis, y que vivió entre 1883 y 1964, siendo uno de los filósofos americanos más relevantes de las décadas de los 1930s y los 1940s. Aparte de los escritos seminales de Jan Lukasiewicz, fueron C. I. Lewis y P. Weiss quienes plantearon las primeras discusiones sobre el carácter multivaluado que debían tener las lógicas, aun sin aún llegar a desarrollarlas analíticamente. Luego serían abordados especialmente por el ruso A. A. Zinoviev. Otros intentos iban en dirección a construir modelos algebraicos, como fue el caso de B. A. Bernstein, en 1929, o en la línea topológica, como el de C. G. Hempel, de 1937. Las conexiones entre las MVLs y los Retículos (o Lattices) fueron estudiadas por A. Rose, en la década de los 1950´s, y éste sería, junto con G. C. Moisil, uno de los más activos investigadores en dicho campo.

aparece toda la famosa terminología semántica de los "Possible Worlds" (PWs, en acrónimo)[678].

La Lógica Modal representa una útil extensión de la lógica clásica, ampliada con los operadores de verdad no funcionales, también llamados los operadores “modales”: el de *Necesidad* (denotado por □) y el de *Posibilidad* (denotado por ◊). Estos son los dos “modos” que dan nombre a este tipo de Lógica.

Algunos teoremas recientes muestran que en principio, la Lógica Difusa se puede utilizar para modelar cualquier sistema continuo que se base en la inteligencia artificial, o la física o la biología, o la economía; por tanto, en muchos campos se puede encontrar que los modelos difusos y la lógica de sentido común son los más útiles, y mucho más convenientes o adecuados que aquellos estándar, entre los que podríamos considerar la matemática clásica.

Analizamos a continuación, con más detalle, la historia y el desarrollo de nuestro problema, el de la Vagueness, o Fuzziness, la “Borrosidad” podríamos decir en castellano, pues resulta esencial para trabajar con la incertidumbre.

---

[678] Es digno de ser reseñado que Saul A. Kripke propusiera también en su momento el abandono del Principio de Tercio Excluso. Para esto, fue elaborando toda una teoría de la que excluye aquellas oraciones que nos puedan llevar a dificultades irresolubles, posiblememente debido a las autoreferencias, de lo cual es ejemplo paradigmático la `Liar Paradox´, cuando se trata de aplicar el concepto de Verdad. Porque tales oraciones carecerían de valor lógico, estando por ello fuera del alcance de las Reglas de Demostración. Aunque las oraciones autoreferenciales no problemáticas (como `Esta frase es verdad´) sí que poseerían un valor lógico.
Recordemos que *autoreferencia,* en el contexto de la filosofía del lenguaje, va a denotar a todo `statement´ que se refiera a sí mismo, o que sea su propio referente.

19. El ámbito de las nuevas corrientes "fuzzy".

Como sabemos, la lógica es el estudio de la estructura y los principios del razonamiento correcto, y más específicamente, los intentos de establecer los principios que garantizan la validez de los argumentos deductivos. El concepto central de la lógica es el de validez, porque cuando la afirmamos de un argumento, se nos está diciendo que es imposible que su conclusión sea falsa si sus premisas son verdaderas.

La idea básica que subyace a todos los antiguos enfoques es una dicotomía intrínseca entre lo verdadero y lo falso. Esta oposición implica el necesario análisis sobre la validez de dos leyes fundamentales de la lógica clásica: Principio de Tercio Excluso y Principio de No Contradicción. Esta idea básica genera una serie de paradojas[679] y una insatisfacción que se basa en la necesidad de superar la rigidez del concepto de verdad, esto es, la estrecha bivalencia de la lógica clásica. La solución propuesta por Jan Lukasiewicz en su artículo clásico de 1920 es la aceptación de una lógica de tres valores de verdad[680] que además de verdadero y falso, acepte un valor de verdad indeterminado, al que le atribuye un valor de verdad de 0.5. Luego, en 1930,

[679] Recordemos que las paradojas suelen ser clasificadas en tres grupos: 1) las paradojas semánticas; 2) las de tipo teórico-conjuntista; y 3) las epistémicas. Entre las primeras tendríamos la Paradoja del Mentiroso, y se trataría de antinomias relevantes para las teorías de la Verdad. Las del segundo tipo son importantes para la Fundamentación de las Matemáticas. Y las del tercer tipo tienen su relevancia en Epistemología. Todas ellas poseen la misma estructura subyacente, pudiéndose formular recurriendo a los mismos recursos matemáticos.
[680] O de tres grados.

este sistema[681] de la lógica trivaluada fue analizado, junto con otros sistemas multivalentes, tanto por Alfred Tarski como por el propio Lukasiewicz. Más adelante, en 1932, sería axiomatizado en parte por uno de sus mejores alumnos, el judío polaco Mordechai Wajsberg.

Como dijimos, este sistema fue sugerido a Lukasiewicz por la lectura de Aristóteles[682], y a través de él, llegaría a sus alumnos, como el mencionado Wajsberg, Tarski o Sobocinski.

Charles Sanders Peirce (1839-1914) lo anticipó en alguno de sus trabajos, pero ha habido muchos otros que también han contribuido a su construcción, así como al muchas veces agrio y tenso debate generado en torno a su introducción en los curricula, como ha podido ver bien el matemático y científico de la computación americano Bart Kosko.

Un matemático, filósofo y en particular, lógico ruso, el poeta simbolista y pensador *Nicolai Alexandrovich Vasiliev* (1880-1940) es merecedor de recuerdo, porque sería un precursor notable de la Many-Valued Logic (o Lógica Multivaluada), asimismo de la Para-consistente (Paraconsistent Logic). N. A. Vasiliev ofrecía una conferencia en 1910[683] donde por primera vez aparece la

---

[681] Que pudiéramos en cierto modo llamar ya "clásico".

[682] Más en concreto, al ver lo que dice sobre el problema de los valores de verdad acerca de los sucesos "futuro-contingentes", tal como fuera planteado por el Estagirita, en su *De Interpretatione.* Desde la década de los 1920´s se ha mantenido (brotando esporádicamente con mayor intensidad) la controversia filosófica acerca de si los sistemas lógicos multivaluados representan genuinas teorías lógicas alternativas a la teoría `ortodoxa´, la bivaluadada. Entre los primeros habría que contar con Vasiliev, que llamó a su sistema ìmaginario´, y lo caracterizaba como no-Aristotélico, trazando una explícita analogía con las Geometrías No-Euclidianas.

[683] Titulada "Sobre las Sentencias Parciales, según el Triángulo de Opuestos, en la ley del Tercero Excluido". Proponía en ella una versión modificada de la silogística aristotélica, que incluyera afirmaciones del tipo `S es a la vez P y no P´.

idea de la Lógica No-Aristotélica, liberada tanto del Principio de tercio Excluso como del de No-Contradicción.

En homenaje a la “geometría imaginaria” de N. Lobatchevsky, N. A. Vasiliev bautizó a su nuevo constructo como la “lógica imaginaria”. Se supone que esta lógica sería aplicable en el uso de los mundos posibles donde las leyes aristotélicas no se mantienen. También introdujo Nicolai Vasiliev el concepto de “metalógica”[684].

También lo es el escocés *Hugh Mc Coll* (1837-1909), uno de los precursores de la Lógica Modal Moderna, y que con su obra *Symbolic Logic and Its Applications,* de 1906, contribuyó también al debate de las Lógicas Multivaluadas.

Estas ideas cayeron después en un prolongado olvido[685], del que se empezaron a recuperar a principios de la década de 1960s, estando en la base

---

[684] Este autor es mencionado por [Rescher, 1969]. Recordemos que en 1919, el también lógico ruso Iván F. Orlov (1886-1936) estableció la primera axiomatización de la lógica relevante, $\mathfrak{R}$, que por cierto, es paraconsistente. Sobre la obra de Nikolai A. Vasiliev, podemos consultar los artículos de Arruda, de 1977 y 1989, pp. 102 ss.; y sobre la de Iván F. Orlov, el de Anderson, Belnap y Dunn, de 1992; véase su página XVII. El trabajo de Orlov se refería principalmente a la Filosofía de las Matemáticas y a la lógica, especialmente sobre la denominada *dialéctica lógica.* Pero la obra de ninguno de ambos, ni la de Vasiliev ni la de Orlov, produjo un impacto notable dentro de su época. Por ello, el primer lógico que desarrollaría una Lógica Paraconsistente, piensan muchos, fue el lógico polaco Stanislaw Jaskowski, con su *Discussive Logic.* Era este uno de los discípulos de Lukasiewicz y un miembro de la ELV. Se le ocurrió el planteamiento de su lógica cuando leía la crítica que hiciera su maestro sobre el Principio de No-Contradicción según Aristóteles.
Más adelante, esas ideas fueron desarrolladas, de modo independiente, por F. G. Asenjo (1954) y Newton Da Costa (1963), en Sudamérica. Su cultivo se extendería luego por otros países, como Inglaterra, Bélgica, Australia, y es investigada hoy en casi todo el mundo. Por cierto, que dice Da Costa (en su interesante libro), que las lógicas clásicas y polivalentes compondrían un par de lógicas alternativas entre sí: cualquiera de ellas podría servir de base a la otra, y ambas pueden funcionar conjuntamente, como una especie de \`organon´ del mecanismo deductivo.
NEWTON DA COSTA, *Logiques clasiques et non-classiques,* 1997; p. 151.

[685] La elección de una lógica u otra, bien sea esta clásica o no-clásica, multivaluada (de un número determinado de valores veritativos u otro), o bien paraconsistente, no-monótona, etc., dependerá de su posible aplicabilidad, y se puede referir tanto a otras Lógicas como a cuestiones filosóficas, como la aparición de antinomias, por ejemplo. Lo cual no quiere decir en

de la llamada Lógica Para-consistente, de Graham Priest y otros. Así también, su trabajo debe ser considerado como un precursor de las Lógicas Multi-Valuadas (MVL).

Algunos lectores de la obra *"Fuzzy Thinking"* critican a su autor, Bart Kosko, por el uso que hace en ella de la lógica aristotélica de la dicotomía radical entre verdadero y falso en la presentación de las ideas borrosas, como si esto revelara una incoherencia, y con una crítica a veces excesiva por innecesaria, demoledora. Pero *Bart Kosko* lo que sí deja perfectamente claro es que la lógica aristotélica, la del negro y del blanco absolutos, así como las Matemáticas que se derivan de ella son nada más y nada menos que un caso especial[686] de la lógica difusa. Así como la física relativista se reduce a soluciones newtonianas para cuando estamos en presencia de bajas velocidades y bajas densidades, la lógica difusa se puede reducir a la lógica aristotélica, en el caso especial de que partamos de la base de axiomas matemáticos clásicos, o tradicionales.

El punto crucial en los razonamientos de Bart Kosko es que a diferencia del mundo de las matemáticas clásicas, el mundo real es siempre borroso. De los quarks a los cúmulos de galaxias, los objetos que percibimos, conceptualizamos, etc., tienen "fuzzy boundaries".[687] Debemos, pues, utilizar la ciencia y en particular las matemáticas para tratar de entender esa presencia de límites difusos, tanto físicamente como en su conceptualización.

---

modo alguno que esa elección sea "arbitraria", sino que indica la existencia de toda una rica pluralidad de sistemas lógicos.

[686] Completamente válido, por otra parte, pero según para qué.

[687] O fronteras borrosas.

Bertrand Russell (1872-1970) es considerado por muchos el padre de la Lógica Difusa, pues partió de la idea según la cual la lógica clásica, inevitablemente, conduce a contradicciones, lo que expuso en una famosa conferencia sobre la "Vagueness", llegando a asegurar que dicha vaguedad es un grado. Aunque otros atribuyen la paternidad de la "nueva ciencia" a Max Black.

Según esta nueva teoría[688] tenemos una función de transferencia que generaliza la llamada función característica. Se suele llamar la *"función de pertenencia",* y se extiende desde el universo de discurso, U, hasta el intervalo unidad cerrado de los números reales, que sería en términos matemáticos el intervalo real unidad, $I = [0, 1] \subset \mathbf{R}$.

No es así en los llamados "crisp sets"[689], donde el rango o imagen función se reduce a un conjunto que consta tan sólo dos elementos, a saber, el {0, 1}. Por lo tanto, la teoría de conjuntos difusos sería una importante generalización de la teoría de conjuntos clásica.

Como hemos apuntado, la teoría de conjuntos "fuzzy" partiría en los tiempos modernos de un físico cuántico y filósofo del ámbito cultural alemán, pero nacido en Bakú, Azerbaidjan; curiosamente, la misma ciudad donde nació otro de los personajes de esta historia: Lofti A. Zadeh.

Se trata de *Max Black*, que en 1937 analizó también la cuestión de cómo se podría modelizar la "vaguedad". Pero Black se diferencia de Russell en que admite que la lógica tradicional puede ser reinterpretada. Analizó la vaguedad

[688] ZADEH, L. A., *op. cit.,* 1965.
[689] Conjuntos "clásicos", o "conjuntos nítidos" (los también llamados \`crisp sets´).

de los términos o los símbolos mediante el uso de casos extremos, en donde no está claro si el término puede ser utilizado para describir la situación. Cuando habla de tal medida, señala que “la indeterminación que es consustancial en la vaguedad está presente también en todas las mediciones científicas”. Una idea propuesta por Black es la definición de un “perfil de consistencia”, o de una curva que nos permite el análisis de la ambigüedad de una palabra o de un símbolo.

También puede considerarse esencial la antes varias veces mencionada contribución del lógico polaco *Jan Lukasiewiz (1878-1956).* Se debe en buena medida a tales influencias intelectuales que Lofti Asker Zadeh publicara el conocido artículo que lleva por nombre “Fuzzy Sets”[690], y en 1968, otro sobre el “algoritmo de aproximación”.

Pero hoy hemos conseguido ya un cierto consenso, bastante amplio en círculos abiertos, sobre la idea de que la lógica probabilística y la lógica multivaluada, en tanto que modelos de lógicas, son dos objetos muy distintos: se basan en los grados de creencia y los grados de verdad, respectivamente. Por lo tanto, la conclusión a la que se llega es que la lógica difusa y la probabilidad son dos maneras diferentes de expresar la incertidumbre[691].

[690] ZADEH, L. A., *op. cit.,* 1965.

[691] Es un hecho cada vez más reconocido en nuestro mundo que estamos yendo desde una sociedad de tipo industrial hasta una sociedad de la información. Se trata de una tranformación de lo más significativa. Tal cambio guarda conexión con la emergencia poderosa de la tecnología computacional. Esos avances han ampliado con rapidez nuestra capacidad para el manejo de sistemas de creciente complejidad, antes \`intratables´ por su dificultad. Se empieza a observar que podemos llegar a ciertos límites, por lo que sería muy conveniente proceder a la simplificación de los sistemas. Y de entre todos los modos de hacer más sencillos y accesibles dichos sistemas complejos, el más significativo sería admitir algún grado de incertidumbre en su descripción. Porque la pérdida de información necesaria se refleja en la incertidumbre. Luego este concepto guarda estrecha relación con los de complejidad e información. Existen diversos tipos de incertidumbre, y cada una de ellas puede jugar un papel diferente en el

Debido a que mientras que la teoría de la probabilidad puede ser usada para la representación de la creencia subjetiva, en la teoría de los conjuntos difusos utilizamos el concepto de pertenencia a un conjunto difuso, es decir, la asignación de un grado variable que nos vaya informando de en qué medida se verifica para cada elemento la propiedad que define al conjunto.

Como sabemos, en los países orientales, estas nuevas ideas calaron muy rápido y muy hondo, tanto que en muchos casos parecen haberse convertido en casi una segunda "piel" (o naturaleza) de sus cultivadores y de sus numerosos admiradores. Más todavía, cuando se comprobó la increíble utilidad para el desarrollo y la mejora de las aplicaciones, entre las que pueden mencionarse la que incorporan los sistemas de frenos ABS, en los termostatos, en la robótica, o en la guía de metros o trenes sin conductor, como el de Sendai (Japón), para citar sólo algunas de ellas. Así, muchos de los más impresionantes avances de la tecnología japonesa están basados en la Fuzzy Logic. De hecho, existen centros de investigación y universidades con estos temas como asunto central –ahora también en China o la India-, y se publican revistas enteras, tesis y artículos innumerables sobre estos avances.

En Occidente se ha ido aceptando con no pocas resistencias, aunque ya hay países donde van siendo mejor acogidas, incluso se investiga sobre

---

proceso de simplificación del problema. Para poderlas caracterizar de un modo apropiado, desde el punto de vista matemático, tenemos la Teoría de los Conjuntos Borrosos y la de las Medidas Borrosas. El proceso del conocimiento (y su mismo progreso) se apoya en estas dos etapas: 1) un intento de conocer el carácter del mundo, y 2) el intento (posterior) de conocer el carácter del conocimiento mismo.
KLIR, G. J., & FOLGER, T., *Fuzzy Sets, Uncertainty and Information.* Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1988; ver la `Introduction´.

ellas[692]; sobre todo, en lo relativo a Computación, pero también en los aspectos matemáticos y filosóficos.

De estas polémicas, del estado actual de su debate y de las previsiones de futuro, así como de la posible identificación de los patrones difusos que comparta con otras polémicas, es de lo que hemos ocupado en nuestro grupo actual de investigación, dentro del *Proyecto de Investigación sobre Polémicas y Controversias,* liderado en su día por nuestro amigo desaparecido, Quintín Racionero, y ahora resueltamente liderado por la profesora Cristina de Peretti.

De acuerdo con todo lo dicho, la polémica sobre la Lógica Borrosa es un paradigma dentro de las controversias que deberíamos seguir estudiando, comparándolas con las generadas por otras Lógicas No-Clásicas, como puede ser la Lógica Modal, las Lógicas No-Monótonas, la Lógica Temporal, las Lógicas Para-Consistentes, etc., todas ellas muy útiles para el avance de investigaciones de todo tipo, no sólo en Matemáticas o en Ciencias de la Computación[693], sino también en el terreno filosófico, con problemas que están subyaciendo abiertamente en todas ellas.

Podemos establecer unas características o propiedades comunes que todas compartan en mayor o menor grado, y luego cuantificar esos valores a través de la asignación de una función de pertenencia adecuada.

Podríamos referirnos también[694], a la controversia originada en torno a la Modal Logic, o *Lógica Modal* (LM, en acrónimo). Esta ha sido rechazada

[692] Francia, Austria, Chequia, Polonia, Hungría, Italia, USA, Rumania, …, incluso España.
[693] Especialmente, en Inteligencia Artificial.
[694] Aunque sea de modo más breve y como elemento de comparación.

históricamente por ciertos filósofos. De hecho, desde Aristóteles parecen haber estado más interesados en ella los filósofos que los matemáticos.

La Lógica Modal es un tipo de lógica formal que se comenzó a desarrollar de un modo sistemático durante el pasado siglo. En ella se trata de ampliar la Lógica Proposicional y de Predicados clásicas para incluir los llamados "modos de verdad" (de ahí lo de Modal); concretamente, los modos de Necesidad (denotado por $\square$) y Posibilidad (denotado por $\Diamond$). La fundó, como sabemos, Clarence Irving Lewis, en 1910[695], donde ya introdujo los cinco sistemas bien conocidos, que van desde el S_1 hasta el S_5. También existe el modelo $\mathfrak{K}$[696], denominado de este modo en honor a Saul Kripke.

La estructura matemática de la Lógica Modal se construye a partir de las Algebras Booleanas añadiéndoles ciertas operaciones. Porque la semántica algebraica interpreta las conectivas de la Lógica Modal como operadores de un Algebra de Boole. Y la semántica relacional utiliza estructuras cuyos elementos serían los mundos posibles[697]. A menudo se les denomina *Modelos de Kripke. A. N. Prior* estableció a partir de ella la denominada *Lógica Temporal* (o Tense Logic), en 1957. Le añadió dos nuevos operadores modales, el [F] y el [P], significado "henceforth"[698] e "hitherto"[699]. Estas lógicas, y las que de ellas derivan, han desencadenado también algunas más o menos agrias polémicas,

695 Culminándola en 1932 con su obra *Symbolic Logic.*
696 El más simple.
697 PWs, acrónimo de Possible Worlds.
698 Adverbio que significa "de ahora en adelante".
699 Otro adverbio, que en este caso significa "hasta el momento".

que estamos estudiando para su comparación con la antes mencionada, esto es, la originada por la introducción de la Lógica Borrosa[700].

Las luchas han sido enconadas, persistentes, despiadadas[701], y utilizando muchas veces recursos arteros y argumentaciones verdaderamente falaces, pero creemos que no ha sido la primera vez ni será la última que este tipo de cosas ocurra[702].

---

[700] Recordemos que en esta tesis estamos tratando de analizar el origen y el desarrollo de todos estos sistemas lógicos, así como las polémicas y las controversias generadas por ellas en ciertos medios académicos.

[701] O muchos otros epítetos que podrían aplicárseles.

[702] Hay otras polémicas bastante conocidas en la historia de la ciencia, no sólo la de los continentales contra los insulares, como fuera el caso de los partidarios de Leibniz contra los de Newton, que marcaría el avance científico, paralizando y aislando durante mucho tiempo a los británicos. O la que acompañó a las ideas de Georg Cantor sobre la entonces nueva teoría de conjuntos, con Leopold Kronecker ejerciendo desde Berlín como un Júpiter tronante, lanzando rayos y venablos por doquier contra todo lo nuevo. O la originada por las ideas de Galileo Galilei, a punto de conocer los efectos del "fuego purificador", como le había pasado al dominico Giordano Bruno. O las teorías de Charles Darwin, tan denostadas hoy en escuelas y conciliábulos varios, etc.

20. Relatividad e Incertidumbre.

Tal vez no estaría de más el mencionar las diferentes “físicas” que se han ido sucediendo a lo largo del tiempo. Pero por razones de espacio, nos concentraremos fundamentalmente en unos comentarios sobre lo que antecedió a la ciencia del siglo XX.

Pensaba Aristóteles que los cuerpos terrestres en movimiento dejarían de moverse, si se les dejaba solos. En contra de esas ideas físicas de Aristóteles, por ejemplo, *Galileo Galilei (1564-1642)* afirmaba el Principio de Inercia, pero sólo para el movimiento circular, sin acelerar ni decelerar[703]. Precisamente, en el concepto de aceleración se basa su “Ley de caída de graves”, diciendo que cuando un cuerpo cae libremente, su aceleración se mantiene constante, restando la parte que pueda tener debida a la resistencia del aire, y que la aceleración es la misma para todos los cuerpos, sean estos ligeros o pesados. También se dedicó al estudio del movimiento de los proyectiles. Pero no llegó a formular la “Ley de la Inercia”, que es fundamental en la Física Clásica, y según la cual, la velocidad adquirida durante la caída de un cuerpo llevaría a este con velocidad uniforme hasta el infinito. Pensaba Galileo que la gravedad era la propiedad esencial y universal de todos los cuerpos físicos, pero Newton

[703] Toda variación de la velocidad, o aceleración, sería entonces debida a la acción de fuerzas externas.

demostró que dependía de la masa y de la distancia. Fue Galileo también[704] un denodado defensor del heliocentrismo.

Isaac Newton (1642-1727) vino a culminar toda la labor de los anteriores, pues completó el trabajo investigador de Galileo al cuantificar el carácter universal de la fuerza de la gravedad, sintetizando en una sola teoría tanto el mecanicismo de René Descartes, como las leyes astronómicas de Johannes Kepler y las del propio Galileo Galilei acerca del movimiento terrestre. La publicación de su obra fundamental, los *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis*[705] marcó un profundo cambio de paradigma en todo lo relativo al rigor empírico y deductivo.

Podríamos[706] extendernos mucho más, porque el tema sin duda lo merece. Pero lo que más querríamos resaltar aquí es cómo esos nuevos conceptos de la llamada "Revolución Científica" estaban ya en abierta oposición con las ideas aristotélicas, mientras que muchos de los principales autores que con relación a nuestras Lógicas No-Clásicas estamos analizando aquí van a volver a beber de la fuente del Estagirita, aunque de modo crítico y original.

Desde los albores del siglo XX han cambiado decisivamente los fundamentos de la Física, a causa principalmente de resultados experimentales. El primero fue el que condujo a la aparición de las Teorías de la Relatividad[707], y el segundo, a la Teoría Cuántica[708]. Asimismo, surge el

---

[704] Como bien sabemos.
[705] En 1686-1687, bajo el cuidado de la Royal Society of London.
[706] Y quizá deberíamos.
[707] Albert Einstein, pero también otros trabajos cercanos a formularlas, como los de Ernst Mach o Henri Poincaré.
[708] Con Max Planck, u otros, como el que mencionaremos tratando sobre "Vagueness", que no es otro que Max Black.

Principio de Incertidumbre, formulado por Werner Heisenberg (1901-1976). Con ellos, el marco conceptual de dicha ciencia, y su influencia sobre muchos otros saberes, como las Matemáticas, la Química o la Filosofía, ha sido desde entonces enorme[709].

Decía Louis de Broglie que:

La física clásica, fiel al ideal cartesiano, nos mostraba el Universo como análogo a un inmenso mecanismo susceptible de ser descrito con absoluta precisión por la localización de sus partes en el espacio y su modificación en el decurso del tiempo, mecanismo cuya evolución en principio podría ser prevista con rigurosa exactitud cuando se poseía cierto número de datos acerca de su estado inicial.

Pero tal concepción descansaba sobre ciertas hipótesis implícitas, que se admitían casi sin advertirlo. Una de estas hipótesis era que el marco del espacio y del tiempo, en el cual buscamos instintivamente localizar todas nuestras sensaciones, es un marco perfectamente rígido y determinado, en el que cada acontecimiento físico puede ser en principio rigurosamente localizado, independientemente de todos los procesos dinámicos que se desarrollan en él. De acuerdo con tal principio, todas las evoluciones del mundo físico están representadas, necesariamente, por las

[709] En el siglo XX, la tendencia (tan generalizada hasta entonces entre los científicos) hacia el determinismo vino a cambiar de una forma radical. Lo hizo ya con el planteamiento de la teoría cinética de los gases y la teoría cuántica, pero se hizo más notorio con el mencionado Principio de Incertidumbre, propuesto siguiendo a su maestro, Niels Bohr. Uno de los disciùlos de Heisenberg, W. Strobl, dijo que: “aun cuando conociéramos todos los actos de un momento actual del mundo, los estados futuros no podrían calcularse como hechos ya consumados, o predestinados, sino tan sólo como halos de inclinación hacia una mayor o menor probabilidad”, Lo cual está basado en esa imposibilidad de determinar con precisión a la vez la velocidad y la posición de las partículas elementales, de las que depende el comportamiento de la realidad corpórea. De este modo se derrumbaron arraigadas creencias deterministas de la Física Clásica, si bien con reticencias de algunos, como Albert Einstein. Son bien conocidas las apasionadas discusiones de éste con Niels Bohr y Werner Heisenberg, que llevaron a Einstein a su famosa frase: “El buen Dios no juega a los dados”, con la cual mostraba su disconformidad con las teorías indeterministas. Aunque no fue menos sutil la respuesta de Bohr: “Pero no es asunto nuestro prescribir a Dios cómo debe dirigir el mundo”. Concluye Strobl que “en la nueva Física no hay determinismo ni indeterminismo. Se sigue manteniendo tnato la determinación por leyes como por causas eficientes”.

modificaciones de los estados locales del espacio en el transcurso del tiempo, y por eso, en la ciencia clásica las magnitudes dinámicas, tales como la energía y la cantidad de movimiento, aparecían como magnitudes derivadas…

Muy diferente es el punto de vista de la física cuántica. La existencia del cuanto de acción… implica… una especie de incompatibilidad entre el punto de vista de la localización en el espacio y en el tiempo, y el punto de vista de la evolución dinámica. Cada uno de estos puntos de vista es susceptible de ser utilizado para la descripción del mundo real, pero no es posible adoptarlo simultáneamente en todo su rigor. La localización exacta en el espacio y en el tiempo es una especie de idealización estática, que excluye toda evolución y todo dinamismo; la idea de estado de movimiento… es una idealización dinámica que en principio es contradictoria respecto de los conceptos de posición y de instante. En las teorías cuánticas la descripción del mundo físico sólo puede hacerse utilizando más o menos una u otra de estas dos imágenes contradictorias; por tanto, resulta una especie de compromiso, y las famosas relaciones de incertidumbre de Heisenberg nos dicen en qué medida ese compromiso es posible…

Otra hipótesis implícita subyacente en la física clásica es la posibilidad de hacer despreciable… la perturbación que ejerce sobre el curso de los fenómenos naturales el sabio… que las observa y las mide. En otros términos, se admite que… la perturbación… puede hacerse tan pequeña como se quiera. Esta hipótesis se cumple … para los fenómenos en gran escala, pero deja de verificarse para los fenómenos del mundo atómico… En efecto, de la existencia del cuanto de acción resulta… que toda tentativa para medir el cuanto de acción de un sistema dado tiene por efecto perturbar otras magnitudes ligadas al sistema. De un modo más preciso, toda medida de una magnitud que permita precisar la localización de un sistema dado en el espacio y en el tiempo tiene por efecto perturbar una magnitud conjugada de la primera, que sirve para especificar el estado dinámico del sistema. En particular, es imposible medir al mismo tiempo dos magnitudes conjugadas.[710]

El texto del gran físico francés nos conecta con claridad con todo ese maremágnum de nuevas ideas fiscas que emergieron en su época. De ahí la conveniencia de haberlo incluido.

A principios de dicho siglo XX se dudaba de la validez de algunas estructuras que hasta entonces habían permanecido como "sagradas" e incuestionables. Tal es el caso de *la Lógica; de la Ley de la Causalidad, y de la Geometría Euclídea.* De modo que la ciencia física pidió su comprobación, basada en la experiencia.

El *Principio de Incertidumbre* se ha hecho muy famoso y tiene unas notables implicaciones filosóficas[711]. Téngase en cuenta que está encajado como una especie de "clave de bóveda" de toda la Mecánica Cuántica. Y que esta, a su vez, es la mejor candidata para conseguir una descripción universal y completa del mundo físico[712]. De hecho, la introducción de este principio significó un auténtico cambio de paradigma en nuestro entendimiento del mundo exterior, y de la teoría de las medidas físicas.

[710] Louis-Victor de Bloglie (1892-1987) fue un príncipe francés y el séptimo duque de Broglie. Estudió Historia y Física Teórica en la Sorbona, de París, doctorándose en la segunda de ellas con Paul Langevin, en 1924. Desde 1928 hasta 1962 fue profesor de la Facultad de Ciencias de su Universidad. En 1929 le concedieron el Premio Nóbel de Física por el descubrimiento de la naturaleza ondulatoria del electrón, lo cual se conoce como `hipótesis de De Broglie´.
BROGLIE, L. DE, *La Física Nueva y los Cuantos,* Madrid, Espasa Calpe; pp. 8-10.

[711] Cuando en la Mecánica Cuántica se planteó el Principio de Incertidumbre, o de Indeterminación, llegó a pensarse que ya debía con ello descartarse por completo la idea de determinismo en la Naturaleza. A tanto alcanzó esta pasajera euforia que se llegó a hablar del "libre albedrío del electrón". La tendencia más moderna, en cuanto al determinismo, se inclina hacia el mundo físico y la causalidad de diversos procesos. Hay quienes incluso postulan que el ADN determina de modo inexorable tanto el desarrollo como el futuro de los individuos, y esto nos retrotraería hacia una nueva forma de tesis mecanicista-determinista, pero "a la moderna".

[712] Como bien dice la *Stanford Encyclopedy of Philosophy,* en su entrada sobre el "Uncertainty Principle".

La diferencia esencial entre la Mecánica Clásica y la Mecánica Cuántica estriba en que mientras para la primera se pueden asignar valores exactos y simultáneos a todas las magnitudes físicas, la segunda, en cambio, niega que exista esa posibilidad. El ejemplo por excelencia es el de la imposibilidad de fijar simultáneamente el momento[713] y la posición de una partícula.

Porque la noción de incertidumbre aparece de distintas formas en la literatura no sólo física, sino también filosófica[714]; por ejemplo, se puede referir a la falta de conocimiento acerca de una cantidad por parte del observador, o bien a la imprecisión experimental con que es medida esa magnitud, etc.

Fue por todo esto por lo que el físico alemán *Werner Heisenberg (1901-1976)* introdujo su famoso Principio, o relación, de Indeterminación, en su artículo: *"Über den auschaulichen Inhalt der quantentheorischen Kinematic und Mechanik"*[715]*.*

En su escrito, Heisenberg decía:

At the instant of time when the position is determined, that is, at the instant when the photon is scattered by the electron, the electron undergoes a discontinuous change in momentum. This change is the greater the smaller the wavelength of the light employed, i.e., the more exact the determination of the position. At the instant at which the position of the electron is known, its momentum therefore can be known only up to magnitudes which correspond to that discontinuous change; thus, the more precisely

[713] O "momentum".
[714] Aunque, en aquella época especialmente, fueran `reinos´, o campos, imbricados entre sí.
[715] Se puede traducir como "Sobre el contenido físico…", o "Sobre el contenido perceptible…", o con interpretaciones equivalentes del término "anschaulich", como "intuitivo", o "inteligible", o "visualizable", etc.

the position is determined, the less precisely the momentum is known, and conversely.[716]

Esta sería, pues, la primera formulación del famoso *"Uncertainty Principle".*

Se puede utilizar notación matricial para expresarlo[717]. Porque todas las cantidades físicas pueden expresarse por medio de matrices infinitas y autoadjuntas, como la **p** y la **q**, para el momento y la posición canónica de la partícula, respectivamente. Así, podemos escribir que:

$$\mathbf{q}\,\mathbf{p} - \mathbf{p}\,\mathbf{q} = i\,h$$

donde *i* sería la unidad imaginaria, y *h* la constante de Planck.

Sólo había transcurrido un año cuando otro físico, *Erwin Schrödinger (1887-1961)*[718] introdujo una teoría alternativa, la llamada "Wave Mechanics", o *Mecánica de Ondas.* En ella exponía que un electrón perteneciente a un átomo puede ser representado como una especie de "nube" (cloud) de carga oscilante, que evolucionaría de un modo continuo dentro del espacio-tiempo, siguiendo la ecuación de ondas. Scrödinger probó que ambas teorías son equivalentes. Pero ambas teorías siguieron rivalizando desde entonces, y lo harían aún durante bastante tiempo.

Las *Teorías de la Relatividad* fueron debidas[719] al físico judío-alemán *Albert Einstein (1879-1955),* tan conocido poco más que de nombre muchas veces

---

[716] HEISENBERG, W., 1927; pp. 174-175.
[717] Escribiendo las matrices en negrita, o "bold".
[718] Nacido también en el Imperio Austro-Húngaro.
[719] Realmente sería Einstein el primero en plantearlas, tal como hoy las conocemos, pero su claro precursor había sido el físico austríaco Ernst Mach, con su famoso *Principio* de 1893 sobre la naturaleza de las fuerzas no inerciales. Según éste, "la inercia de cualquier sistema es el resultado de su interacción con el resto del Universo". Esto es, que cada partícula del

como mal entendido. Esta Teoría consta de dos partes diferenciadas (o de dos subteorías), pero finalmente conectadas entre sí:

- *La Teoría de la Relatividad Especial,* y
- *La Teoría de la Relatividad General.*

Los conceptos que estas dos teorías introducen incluyen que:

- Las medidas de determinadas cantidades son relativas a la velocidad del observador. Razón por la cual podemos considerar que el tiempo puede "dilatarse".
- El espacio y el tiempo se pueden o bien considerar juntos[720], o en relación el uno con el otro.
- Es invariante la velocidad de la luz, que por tanto, sería la misma para todos los observadores.

Estas teorías vinieron a cambiar de modo radical la Física Teórica ya desde su aparición, cuando habían transcurrido poco más de dos siglos desde que Newton postulara su mecánica, a la cual venía no sólo a complementar, sino a corregir. Que se aplique una u otra va a seguir dependiendo del contexto en el que se esté trabajando.

La *Relatividad Especial*[721] fue la primera en publicarse, en el 1905, mientras que la forma final de la *Relatividad General*[722] lo sería en 1916. También

---

Universo ejercerá una influencia sobre todas las demás partículas. Se puede representar mentalmente con el experimento del "cubo de Mach". Se trata de un principio que influyó mucho sobre Einstein, en la época en que se estaba fraguando su Teoría General de la Relatividad, sólo que al no haber llegado a dársele una forma matemática precisa, no pasaría nunca a formar parte de su planteamiento explícito, pero estaba implícito, subyacente.

[720] El espacio-tiempo.

[721] RE, en acrónimo.

resulta distinto su campo de aplicación: la RE se aplica al estudio de las partículas elementales, mientras que la RG, a la Astrofísica y a la Cosmología.

Además, la RE fue rápidamente aceptada[723], mientras que la RG no parecía ser muy útil, aparte de la dificultad de las Matemáticas asociadas a su desarrollo. Pero en la década de los 1960´s hubo un resurgimiento del interés por ella. Hoy se aplica con naturalidad en el estudio de los fenómenos y los objetos de tipo astronómico, tal como los quasars, los pulsars, o los "agujeros negros", entre otros.

La conexión antes aludida entre ambas teorías es bien clara. La RE se puede aplicar a cualquier fenómeno físico de tipo inercial, salvo a la gravedad. Esta requiere de la RG, para establecer una Ley de Gravitación, y su relación con las otras fuerzas de la Naturaleza.

En cuanto a la *Mecánica Cuántica*[724], podemos constatar que hoy en día es una de las ramas principales de las Ciencias Físicas y Químicas, habiendo constituido uno de los más grandes cambios del conocimiento humano (de paradigma) en todo el siglo XX.

Esta Teoría (la QM) trata de explicar el comportamiento de materia y energía. No se trata sólo de un constructo teórico sin aplicaciones inmediatas, porque ha dado lugar a grandes avances tecnológicos, como es el caso de la aparición de los transistores.

---

[722] RG, en acrónimo.
[723] Salvo en la Alemania nazi, por tratarse de "ciencia judía", y no de "ciencia aria", según ellos.
[724] O *QM,* en acrónimo, como dijimos, por la *Quantum Mechanics.*

La Mecánica Cuántica nos describe cómo en cualquier sistema físico[725] existe toda una multiplicidad de estados, que son los llamados *Estados Cuánticos.* Mediante los cuales la QM puede explicar la existencia y la estructura del átomo, mucho mejor que lo hacía la Mecánica Clásica[726].

El físico alemán *Max Planck (1858-1947)* enunció una sorprendente hipótesis, a finales de 1900[727]. Según dicha hipótesis, toda radiación electromagnética se emite y se absorbe por la materia mediante "cuantos" de luz, o fotones de energía, interviniendo una constante, la conocida como constante de Planck, *h.* De ahí le viene el nombre a esta Mecánica, muy relacionada con las Teorías de la Relatividad[728].

Decía Ludovico Geymonat[729]:

"… queremos subrayar el nexo existente enre la actitud filosófica… y la que constituyó la base de los sucesivos progresos realizados por la ciencia entre finos del siglo XIX y principios del XX. Basta recordar los motivos que condujeron a idear la Relatividad Especial o la Mecánica Cuántica: en el primer caso, fue la observación de que no tiene sentido hablar de variación de la velocidad de la luz, siendo esta variación, en principio, imposible de medir; en el segundo caso, fue la observación de que no tiene sentido hablar de órbitas planetarias de los electrones que giran en torno al núcleo, ya que éstas no son observables cuando recorren una órbita, sino sólo en el momento en que saltan de una órbita a otra. En uno y en otro caso, como podemos

[725] Y por lo tanto, en todo el Universo, que lo es también.
[726] Aproximativa y deficiente, para algunos casos.
[727] Lo hizo en una sesión de la Academia de Ciencias de Berlín.
[728] Como puede verse analizando el efecto fotoeléctrico, descrito luego por Albert Einstein y por el cual –no por sus teorías relativistas- recibiría el Premio Nóbel.
[729] GEYMONAT, L., *Historia de la Filosofía y de la Ciencia,* vol. 3; p. 364.

constatar, el motivo que determinó el viraje fundamental de la ciencia fue la exigencia de liberarla de entidades inverificables y de problemas carentes de sentido".

El estudio de las implicaciones filosóficas de las teorías físicas puede verse bastante bien en las obras de *Peter Mittelstaedt* (1929-)[730], o en la explicación que sobre ellas da Nicholas Rescher, en su *Many-Valued Logic.* En especial, lo hace Mittelstaedt en una obra titulada *Problemas filosóficos de la Física Moderna*[731]*.* Este autor dijo, que[732]:

The logic of quantum physical propositions can be established by means of dialogs which take account of the general incommensurability of these propositions. Investigated first are meta-propositions which state the formal truth of object-propositions. It turns out that the logic of these meta-propositions is equivalent to ordinary logic. A special class of meta-propositions which state the material truth of object-propositions may be considered as quantum logical modalities. It is found that the logic of these modalities contains all the quantum logical restrictions and thus differs essentially from the modal calculi of ordinary logic.[733]

Sobre la relación de las Teorías de la Relatividad con el positivismo lógico nos habla el profesor Sánchez Meca en el siguiente texto:

Un apoyo importante para el cuestionamiento del realismo, todavía presente en los planteamientos neopositivistas, procede de la Teoría de la Relatividad: la materia se halla reabsorbida en el espacio-tiempo. Sus propiedades toman valores diferentes en

---

[730] Investigador alemán que tuvo como mentor nada menos que al propio Werner Heisenberg.
[731] Traducida hace años en España para la Editorial Alhambra; concretamente, en 1969. También tiene este autor un libro de bastante interés para todo lo que sigue:
MITTELSTAEDT, P., *Quantum Logic,* D. Reidel Verlag, de la Springer, 2008.
[732] En su trabajo:
MITTELSTAEDT, P., "The Metalogic of Quantum Logic". *Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association,* 1978.
[733] MITTELSTAEDT, P., *Problemas filosóficos de la física moderna*. Madrid, Editorial Alhambra, 1978; pp. 249-256.

sistemas de referencia distintos, sin que ninguno pueda considerarse el verdadero. Por tanto, es imposible determinar la masa de un objeto de una vez por todas, puesto que el objeto tendría siempre masas diferentes, según el sistema de referencia del que se trate. No tiene sentido, pues, seguir hablando de una realidad como algo independiente de nuestras teorías, con una consistencia propia y eterna.[734]

Así, pues, la importante relación de las Teorías de la Relatividad y la Teoría Cuántica con las Lógicas Multivaluadas estaría no sólo en que compartieron una misma época, de febril ebullición de nuevas ideas, en la que el ambiente era más que propicio para la puesta en cuestión de las hasta entonces consideradas como “verdades eternas”, “sacrosantas” e “intocables”, aquello establecido “a priori”, y en apariencia, ya válido para siempre. Tal había sido este el caso de lo sucedido con la Geometría Euclídea, reemplazada por la obra independiente del transilvano Janos Bolyai y del ruso Nikolai Lobatchevski para las Geometrías No-Euclidianas. De ahí vendrían modelos nuevos, como el de la Geometría Hiperbólica; o cuando Bernhard Riemann ideó la introducción de los espacios curvos, y de curvatura no constante, para representar la Geometría del Espacio-Tiempo; o más adelante, de cómo Bertrand Russell acabó con el sueño logicista de Gottlob Frege, al descubrir las antinomias subyacentes en su constructo aparentemente tan consistente y tan completo; o más adelante aún, cuando Kurt Gödel probaba sus Teoremas de Incompletitud, que hicieron tambalearse los fundamentos de las Matemáticas.

Es aún más que todo eso, porque el propio Janos Neumann llegó a plantear la necesidad de introducir ciertas Lógicas No-Clásicas para establecer los

[734] DSM, *op. cit.,* 2001; p. 442.

fundamentos de la Mecánica Cuántica. Y recordemos que la primera y más destacada de todas ellas sería la del matemático polaco Jan Lukasiewicz[735].

Hans Reichenbach sugería que el dominio de la Indeterminación o Incertidumbre, en el ámbito de la Mecánica Cuántica, se ha debido al hecho de que ciertos pares de afirmaciones acerca de la posición y la velocidad de las partículas elementales no pueden ser mantenidas de modo simultáneo. Piensa por ello que esto podría mejor ser manejado dentro de una lógica trivaluada, o de una lógica n-valuada, en general. Y que esto sería siempre preferible a la postura de Niels Bohr, quien proponía que las sentencias generadoras de conflicto fueran contempladas como meros sinsentidos (meaningless), es decir, como carentes de un valor de verdad.

Describe Hans Reichenbach posibles situaciones físicas, o más bien microfísicas, en las que resulta más adecuada la utilización de la lógica trivaluada. Tal es el caso de afirmaciones acerca de ciertas características físicas que no sean observacionalmente verificables, ni por tanto, tampoco sean falsables (falsifiable). Porque eso nos llevaría a que tales características no pueden ser clasificadas ni como verdaderas ni como falsas.

Dice Nicholas Rescher acerca de las "anomalías causales" de la Teoría Cuántica que crean una situación donde nos encontramos ante estas tres alternativas:

[735] Mucho de lo restante, y que ahora vamos a contar, se basará en una obra del ahora doctorando, ya terminada y en vías de publicación; lleva por título *Geometría del Espacio-Tiempo.*

1.ª) Adoptar una lógica bivalente (o bivaluada) y eliminar las afirmaciones que generan paradojas, como meros sinsentidos, invocando para ello el Principio de Complementariedad de Niels Bohr.

2.ª) Adoptar también una lógica bivaluada, mas ahora manteniendo las afirmaciones que generaban paradojas, sólo que ahora considerándolas con sentido (meaningful), y admitir de paso la existencia de "anomalías causales", en tanto que sucesos incompatibles con las que venimos aceptando como leyes de la Naturaleza.

3.ª) Adoptar, en vez de la clásica (bivalente), una lógica trivaluada, o incluso una de orden superior, n-valuada, reteniendo todas las sentencias físicas bien formada como plenas de sentido, al tiempo que se evitan sus anómalas consecuencias.

Esta última es, sin duda, la que presenta más ventajas de las tres expuestas. Por lo que Hans Reichenbach, siguiendo esa línea, propone la adopción de una lógica trivaluada, que nos permita a la vez mantener:

- las leyes de la Mecánica Cuántica, y
- el principio según el cual ninguna cadena causal puede viajar con rapidez (speed) mayor que la de la luz, con lo cual quedaría proscrita la "acción a distancia".

Pues si, por el contrario, usáramos lógica bivaluada, dicho principio sería incompatible con las leyes de la Mecánica Cuántica (QM). Aun cuando, según la QM, ninguna señal que viaje a una velocidad mayor que la de la luz podría ser detectada, Einstein, junto con sus colaboradores (Rosen y Podolsky), mostró que específicas características matemáticas de la QM requieren que en determinadas situaciones, una cadena causal pueda haber viajado a una velocidad mayor que esa supuesta cota máxima, la velocidad de la luz.

Por todo ello, parece posible llegar a establecer una sistematización coherente de la QM, que resuelva, o desmonte, ciertas contradicciones y anomalías que surgen cuando la mera lógica bivalente es utilizada[736].

Desde el mencionado filósofo Hans Reichenbach hasta nosotros, diversos pensadores han planteado que *la Física Moderna exige un aparato lógico que sea, cuando menos, trivaluado*[737]*.*

Asimismo, puede encontrarse material conectado con éstos temas en otras dos de mis obras, estas sí ya publicadas hace algún tiempo, que se llaman *Física del Sonido* y *Principios de Acústica*[738]*,* respectivamente, y que tratan de

---

[736] Si se aplica la lógica bivaluada a escala de los fenómenos que estudia la microfísica (por ejemplo, a la física de los átomos), aparecen consecuencias claramente inaceptables, según el juicio de relevantes autores, como Hans Reichenbach, Garreth Birkhoff o K. Lambert. Esto les lleva a la conclusión de que toda proposición de la física que defina simultáneamente la posición y el momento de los átomos ha de poseer necesariamente un tercer valor veritativo, distinto de los clásicos de \`verdad´ y de \`falsedad´. Por lo que sería preciso aplicar, para poder esclarecerlos bien, una lógica trivaluada.

[737] Téngase en cuenta que la QM puede ser considerada como una "mecánica difusa", o "fuzzy mechanics", en contraposición con la "crisp mechanics", o Mecánica Clásica. Porque en esta subyace una Lógica Clásica, mientras que la primera se apoyaría en una "fuzzy logic". Por todo lo cual podemos considerar la Mecánica Clásica como una especie de límite \`crisp´ de la QM, que es "fuzzy" en diverso grado. Incluso la frontera entre ambas sería "fuzzy", en cuanto no está definida nítidamente (porque en realidad no existe) la barrera a partir de la cual algo en Física es cuántico o es clásico. Hay todo un proceso, de "fuzificación" en un sentido, y de "defuzificación" en el contrario, que nos permite ir pasando de una a otra perspectiva, una gradual acomodación entre ambos modos de ver la realidad.

[738] Señalemos aquí que esa Ciencia del Sonido, conocida como \`Acústica´, ha jugado –al menos, en España- el papel de \`cenicienta´ dentro de los currícula oficiales de Física, a diferencia de la Óptica. Se considera una cuestión más bien técnica e \`ingenieril´. Craso error, pues se trata de una de las ramas de las ciencias físicas más bellas e interesantes, habiendo contado con los estudios clave de Sir Walter Raleigh (véase su *The Theory of Sound*), o del mismo Ernst Mach, gran precursor del Wiener Kreis y de la Teoría de la Relatividad. Recordemos el Número de Mach o el Cono de Mach, nombrados así en su honor. El autor de esta tesis ha intentado contribuir en alguna medida a su conocimiento.

Mecánica y Ondas, así como de Ecuaciones Diferenciales y Ecuaciones en Derivadas Parciales, que junto con las útiles, pero complicadas Series de Fourier, que constituyen el aparato matemático de todas estas estructuras conceptuales. Igualmente, las ideas principales de la Matemática pueden hallarse en otra de mis obras (publicada también); es, en este caso, la de *Fundamentos de Análisis.*

Había objeciones filosóficas de mucho peso acerca de ese cuestionamiento de la ciencia clásica. Porque todo marco teórico fijo utiliza determinadas categorías, esquemas y conceptos para mejor ordenar y clasificar los fenómenos. Para ello, se excluyen algunos aspectos, mientras que otros se resaltan. A partir de ese esquema de ordenación, se deducen ciertas propiedades generales correspondiente a los objetos bajo examen, pero sin conocimiento empírico, es decir, son "apriorísticos". La plasmación más cabal de esa idea la encontramos en Inmanuel Kant, cuando replica a David Hume, al afirmar éste que *"todo conocimiento sólo puede proceder de la experiencia".* Porque Kant veía como conocimientos válidos los antes mencionados: el de la estructura del espacio-tiempo; el de la geometría euclidiana; la ley de Causalidad; o el Principio de Conservación de la "sustancia".[739]

Y hablando de Ernst Mach, sus críticas bien dirigidas contra la Mecánica Newtoniana fueron de gran repercusión a la hora de cambiar de paradigma; especialmente, en el caso del `espacio absoluto´. Ello sirvió de base de lanzamiento para las teorías einstenianas, con obras como:
MACH, E., *El desarrollo de la mecánica,* 1883,
IBID., *El análisis de las sensaciones*, 1886.
Estas eran leidas con verdadera fruición por el entonces estudiante Albert Einstein y sus amigos en Zürich, el año 1902. Einstein vino a replantear las ideas `machianas´ con el llamado Principio de Mach, según el cual "la masa inercial no es una característica intrínseca de un móvil, sino una medida de su acoplamiento con el resto del Universo". Lo cual viene a implicar que la existencia de fuerzas inerciales va a depender de la existencia de otros cuerpos con los que interactuar.

[739] O de la materia.

Los argumentos en los que se basa la Lógica Moderna para afirmar la validez "a priori" de las leyes lógicas son de un nivel análogo al anterior. Las condiciones establecidas en las proposiciones acerca de los seres preestablece ya las Reglas a que deben atenerse necesariamente dichas proposiciones.

El punto de partida para la crítica, desde la Física, sobre los conceptos y las estructuras admitidas "a priori" estaría motivado por la falta en ocasiones de la justificación por la que deban ser admitidas estas estructuras independientemente de la experiencia. Tal admisión de resultados que en sí mismos no se apoyan sobre la experiencia, y sin embargo, pretendemos que sean aplicables a ella, ya vienen de antiguo en las Ciencias Exactas. Basta mencionar como ejemplo la geometría griega, expuesta por Euclides, o la silogística de Aristóteles, recogida en el *Organon.* Ambas teorías parten de proposiciones que pueden ser probadas a partir de una colección de axiomas, los cuales a su vez basan su validez en su "evidencia".

Volvamos sobre el determinismo en la Física, porque está claro que el determinismo en sus leyes fue una creencia dominante durante mucho tiempo[740]. Por ejemplo, algunos de sus principales defensores serían Laplace y Einstein.

[740] En el caso de la filosofía árabe también existe un fatalismo determinista asociado con el Islam. Se basaría en el siguiente argumento: como Dios lo conoce todo, incluso los actos que ha de realizar cada individuo, no sólo conoce a éste, sino también todas sus futuras elecciones. No habría, por tanto, modo de escapar de ese determinismo. En *El Corán* aparece como implícito ese fatalismo, como cuando se le dice a Dios en la sura Al-Fatiha: "Guíanos por el buen camino, el camino de aquellos que Tú has bendecido, no de aquellos que te desagradan, ni de aquellos que se pierden". Está claro en ese texto que presupone la realidad del fatalismo, y de la sola existencia de tres caminos, cuya elección sólo de Él depende.

Pierre Simon de Laplace[741] contribuyó al desarrollo de la física y del cálculo de probabilidades. Llegó a afirmar que:

> Podemos mirar el estado presente del universo como el efecto del pasado y la causa de su futuro. Se podría condensar un intelecto que en cualquier momento dado sabría todas las fuerzas que animan la naturaleza y las posiciones de los seres que la componen, si este intelecto fuera lo suficientemente vasto para someter los datos al análisis, podría condensar en una simple fórmula de movimiento de los grandes cuerpos del universo y del átomo más ligero; para tal intelecto nada podría ser incierto y el futuro así como el pasado estarían frente sus ojos.

Tanto la Mecánica Clásica, o Newtoniana, como las Teorías de la Relatividad[742] postulan leyes de evolución temporal, es decir, plantean "ecuaciones de movimiento" de tipo determinista. Ciertos autores, como Karl Popper o Ilya Prigogine, han intentado rebatir este determinismo en la física clásica con argumentos tales como la existencia de sistemas con bifurcaciones, con la introducción de la flecha del tiempo, la teoría del caos, etc., confundiendo el determinismo con la predictibilidad. Porque si el determinismo

---

En cambio, los budistas aseguran que existen formas de escapar de "la rueda de la vida". El *karma,* que a partir de las influencias del pasado viene a dar forma al presente, es para algunos la base de un cierto fatalismo determinista. Pero el budismo ha llegado a conciliar el destino con el libre albedrío. El *samsara* (o vida mundana) sería parte de esa "rueda de la vida", correspondiendo al estado de "no iluminación". Pero la realidad estaría formada por una especie de bucles, en los que si bien el pasado afectaría al presente, lo haría dejando espacio para la libre elección. El mismo Buda lo expresaba mediante una bella imagen: decía que era como el agua, que a veces nos arrastra tumultuosa, como el pasado, y a veces, se remansa, y con ello, nos permite influir en su curso, situación que reflejaría el futuro.

[741] El Marqués de Laplace vivió en Francia desde 1749 hasta 1827. Se le conoce como "el Newton francés". Fue defensor de un radical "determinismo causal".

[742] Resulta un comentario agudo e interesante el de Jean Piaget, cuando decía aquello de que el mundo de Einstein se parece más al aristotélico que al newtoniano. Son curiosos estos cambios de paradigmas parciales, que implican una parcial recuperación de ideas que parecían ya arrumbadas, pero adoptando nuevas y vívidas formas. Algo similar se podría decir de Jan Lukasiewicz con respecto de su vuelta (desde una visión crítica) al pensamiento aristotélico. Puede verse en lo comentado en:
PIAGET, J., *Estudios sobre Lógica y Filosofía;* p. 92.

pudiera ser característica inseparable de dichas teorías, no tanto lo sería la predictibilidad, dado que a pesar del hecho determinista en el modo en que éstas tratan la evolución temporal de los sistemas físicos, en la práctica existen muchas dificultades para lograr un conocimiento completo del estado físico de un sistema clásico o relativista.

Se suele considerar que la Mecánica Cuántica es una teoría no-determinista[743], en la que por tanto, el azar sí que juega un papel, aunque dicho azar tenga un papel restringido. Postula una evolución determinista de la función de onda cuando ésta no es observada o medida, junto con una "evolución" del estado de un sistema microscópico, al llevar a cabo una medida sobre dicho sistema.

Este tipo de evolución es la fuente del azar en la Mecánica Cuántica. Debido a su carácter limitado, muchos de los físicos consideran que si bien el

---

[743] Rudolf Carnap, destacado componente del Círculo de Viena, trató en extenso de todo ello. Así, nos dice que: "en mi opinión, el determinismo es una tesis especial acerca de la estructura causal de mundo. Es una tesis según la cual dicha estructura causal es tan fuerte que dada una descripción completa del mundo en cierto instante, entonces (con ayuda de las leyes) puede calcularse cualquier suceso pasado o futuro. Este fue el punto de vista mecanicista sostenido por Newton y analizado en detalle por Laplace. Dentro de la descripción de un estado instantáneo del mundo, incluye por supuesto no sólo una descripción de la posición de toda partícula del mundo, sino también su velocidad. Si la estructura causal del mundo es lo bastante fuerte como para permitir esta tesis…, se puede decir que este mundo no sólo tiene una estructura causal, sino también, más específicamente, una *estructura determinista.*
En la Física actual, la Mecánica Cuántica tiene una estructura causal que la mayoría de los físicos y de los filósofos de la ciencia describirían como *no determinista.* Es más débil, por decirlo así, que la estructura de la Física Clásica, porque contiene leyes básicas que son esencialmente probabilísticas; no se les puede dar una forma determinista como la siguiente: \`si ciertas magnitudes tienen ciertos valores, entonces otras magnitudes toman otros valores estrictamente especificados´. Una ley estadística o probabilística dice que si ciertas magnitudes tienen ciertos valores, hay una distribución de probabilidadespecífica de los valores de otras magnitudes. Si algunas leyes del mundo son probabilísticas, entonces la tesis del determinismo *no* es correcta. En la actualidad, la mayoría de los físicos no acepta el determinismo en el sentido estricto… Sólo una pequeña minoría cree que la Física puede volver algún día a él. El mismo Einstein nunca abandonó esta creencia. Durante toda su vida estuvo convencido de que el actual rechazo del determinismo en la Física era sólo una fase pasajera." Véase para más detalle la obra:
CARNAP, R., *Philosophical Foundations of Physics;* cap. XXII, pp. 287 y ss.

azar juega un papel relevante a escala atómica, sin embargo a escala humana el mundo sería[744] casi determinista.

Trataremos a continuación de una Lógica muy conectada con esas nuevas teorías que revolucionaron la Física del siglo XX, esto es, con las Teorías de la Relatividad y con la Teoría Cuántica, así como con el llamado Principio de Incertidumbre.

Estamos refiriéndonos a la *Quantum Logic,* o Lógica Cuántica. La idea subyacente apareció por vez primera en el capítulo III del famoso libro de Janos (o John Von) Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics,* publicado en 1943. Hacia el final de ese capítulo dice Neumann que:

> As can be seen, the relation between the properties of a physical system on one hand, and the projections on the other, makes possible a sort of logical calculus with these.[745]

Pero no entró entonces Neumann en más detalle. Fue ya en 1936 cuando junto con el matemático *Garreth Birkhoff* (1911-1996) llevó a cabo un intento sistemático para obtener un Cálculo Proposicional que fuese válido para la QL. Esa es la fecha de nacimiento, pues, de esta Lógica Cuántica. Después hubo un largo túnel de olvido, hasta que en la década de los 1950´s volvió a llamar la atención de científicos y de filósofos. Uno de los motivos de esa espera tal vez radicase en la bastante difícil inteligibilidad del escrito de ambos autores.

---

[744] Según ellos.
[745] NEUMANN, J., *op. cit.,*1943; p. 253.

La idea fundamental de la QL es el intento de "logicización" de las álgebras no-Booleanas[746]. Los aspectos semánticos y sintácticos de la Lógica de Proposiciones clásica se pueden describir en términos de la lógica Booleana. Pero ya dijo Paul Halmos[747] aquello de que *"el lógico clásico es el dual del algebrista Booleano"*, una caracterización ingeniosa que Dunn y Hardegree "dualizaron"[748], pasando a establecer que *"por dualidad, obtenemos que el algebrista es el dual del lógico".* La cuestión está en si esa dualidad se mantiene cuando son reemplazadas las álgebras Booleanas por otras, es decir, por estructuras algebraicas alternativas, más débiles en las condiciones que las definen, y las cuales aparecen dentro del formalismo matemático de la Mecánica Cuántica.

El artículo de Birkhoff y Von Neumann fue el primero en sugerir esa posibilidad por medio de una "lattice"[749] no-Booleana. Y en caso de existir más de una de ellas, ¿cuál sería la más conveniente? La candidata más obvia sería la "lattice" o retículo de Hilbert, propuesta en 1935 como candidata para servir de base al sistema proposicional de la QL. Pero no fue esta finalmente la elección de ambos, sino que concluyeron que *"the propositional calculus of Quantum Mechanics has the same structure as an abstract projective geometry".*

---

[746] La *QL* se reduce a un conjunto de reglas que sirven para razonar acerca de las proposiciones que se derivan de los principios de la teoría cuántica. Sus creadores, Birkhoff y Neumann, trataban de superar la inconsistencia que parecía mostrarse entre la Lógica Clásica y la medida de variables complementarias en la QM, tales como la posición y el momento. Se puede plantear de al menos dos modos alternativos: o bien como una versión modificada de la Lógica Proposicional, o bien como una Lógica Multivaluada que no cumpla ni la asociatividad ni la conmutatividad. Se distingue bien de la Lógica Clásica, dado que no cumple la ley distributiva de la Lógica Proposicional. Hilary Putnam ha planteado que la QL sea considerada como la lógica más adecuada para la inferencia proposicional.

[747] En 1962.

[748] En 2001.

[749] Malla, o mejor, *retículo,* dicho en términos matemáticos.

Von Neumann insistía en la necesidad de la propiedad de Modularidad para la QL. Esta se traduce, para una “lattice”, o retículo de Hilbert, del siguiente modo:

$$\text{Si } A \leq B \text{, entonces } A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

Puede probarse que una “lattice” o retículo de Hilbert, L(H), es modular si y sólo si el espacio de Hilbert es de dimensión finita, en cuanto espacio vectorial[750].

Esta ortomodularidad se expresa así:

$$\text{Si } A \leq B \text{ y } A' \leq C \text{, entonces } A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

La modularidad antes definida es más fuerte que esta ortomodularidad.

La insistencia de Von Neumann en el requisito necesario de modularidad para la QL es debido a que en la QL buscaba no sólo de establecer un cálculo proposicional para los sistemas mecano-cuánticos, sino que pensaba que debía servir como estructura dentro de un espacio de sucesos, en el sentido de la teoría probabilística. Es decir, que pretendía fijar un análogo cuántico de la situación clásica, según la cual un álgebra Booleana podía ser interpretada tanto como álgebra proposicional de una lógica proposicional clásica, como representando también el álgebra de sucesos aleatorios, constituyendo la probabilidad una medida aditiva y normalizada, sobre un álgebra de Boole.

En cuanto a la condición de aditividad, podemos distinguir dos “intensidades” o “grados” de la misma:

---

[750] Téngase en cuenta, además, que una geometría proyectiva abstracta es lo que se llama una “ortholattice” modular.

La de *aditividad fuerte* se escribe:

$$\mu (A) + \mu (B) = \mu (A \vee B) + \mu (A \wedge B)$$

Mientras que la de *subaditividad* sería ésta, más débil que la anterior:

$$\mu (A) + \mu (B) \geq \mu (A \vee B)$$

Como es obvio, la anterior propiedad implica ésta; es decir, que toda medida aditivamente fuerte es subaditiva, pero la recíproca dista de ser cierta.

Von Neumann proponía, en 1936, que se definiera una medida de probabilidad "a priori" sobre la Lógica Cuántica. Suponía que la QL es un retículo, o una "lattice", sobre la cual se encuentra definida esa probabilidad cuántica "a priori", o equivalentemente, una aplicación a la que vamos a llamar *D,* con una cantidad finita de valores no-negativos, y verificando las siguientes dos propiedades:

1) Si $A < B$, entonces $D (A) < D (B)$
2) $D (A) + D (B) = D (A \vee B) + D (A \wedge B)$

Dicha función D se llama `*aplicación dimensión´,* y puede probarse que si una "lattice" o retículo admite una función de ese tipo, y esta sólo toma una cantidad finita de valores, entonces es modular.

El "revival"[751] de dicha teoría tuvo lugar siguiendo dos vías:

- La de los intentos para establecer, mediante un Teorema de Representación, cuáles sería las condiciones necesarias y suficiente

[751] O renacimiento, redescubrimiento.

para un par event-state, (E, S), o suceso-estado, que nos llevan a un isomorfismo entre E y un retículo o una “lattice” de Hilbert.

- La investigación para dar con estructuras cuánticas cada vez más generales. Para ello, se han de ir debilitando progresivamente las condiciones exigidas sobre el retículo o “lattice” en cuestión.

Surge entonces una interesante cuestión:

¿podría ocurrir que una descripción formal del mundo cuántico
nos obligara a asumir una Lógica No-Clásica?

Birkhoff y Von Neumann se inclinaban por darle a esta pregunta una respuesta afirmativa. En su artículo antes citado, ambos puntualizaban que:

> one of the aspects of Quantum Theory which has attracted the most general attention is the novelty of the logical notions which it presupposes… The object of this paper is to discover what logical structures one may hope in physical theories which, like Quantum Mechanics, do not confirm to classical logic.

A pesar de lo cual nunca intentó ninguno de ambos llegar a desarrollar una versión técnica de la QL como una lógica formal.

La “vuelta de tuerca” a la QL en tanto en cuanto que lógica ha venido de la propuesta de un “Possible Semantic World”[752], que aparece como una abstracción natural en el formalismo subyacente a la teoría cuántica.

En 1972, el lógico ruso *Dishkant* publicaba su artículo *“Semantics of the minimal logic of Quantum Mechanics”,* pronto convertido en un punto de

[752] O Posible Mundo Semántico.

referencia de los más esenciales acerca del tema. Sus ideas fueron desarrolladas más adelante, en 1974, por otro autor, Goldblatt.

Dicho "*Possible Semantic World",* para la QL, se puede considerar como una variante natural del tipo de semánticas propuesto por Saul Kripke, tanto para Lógicas Modales (MLs) como para Lógica Intuicionista (IL). Por lo que se puede hablar de una *Semántica Kripkeana para la QL.* Recordemos que los modelos kripkeanos para la IL se basan en los conjuntos de mundos posibles.[753] Estos pueden o no estar relacionados entre sí mediante una relación llamada de *accesibilidad*, que cumple tanto la propiedad reflexiva como la transitiva. Por lo que sus mundos posibles se pueden considerar como "estados de conocimiento en progreso". Cuando un mundo posible, *J,* es accesible desde otro, *I,* decimos que el estado de conocimiento correspondiente a *J* es más informativo que el representado por *I.* Por lo cual en este sistema lógico el conocimiento es de tipo "conservative"[754], en el sentido que cuando el *I* conoce una determinada afirmación, entonces todos los estados de conocimiento accesibles desde *I* la conocen también. Por el contrario, la caracterización kripkeana de la QL es un poco distinta. Porque los mundos posibles son interpretados como estados de objetos cuánticos, mientras que la relación de accesibilidad es ahora identificada con una relación de *similaridad* entre los estados.

Dishkant le ha llamado la *"minimal quantum logic",* pero Goldblatt, por su parte, prefiere denominarla *"orthologic".* La Lógica Cuántica que se deriva a partir de la Lógica Proposicional nos proporciona un fundamento adecuado

[753] *PWs,* por Possible Worlds.
[754] O conservativo.

para la interpretación de los procesos cuánticos reversibles. Así, por ejemplo, podríamos mencionar el caso de aquellas transformaciones que relacionan dos sistemas de referencia entre sí, como sucede dentro de la Relatividad Especial[755]. La QL también nos proporciona una explicación satisfactoria de las llamadas matrices de densidad. Nos podríamos limitar a aquel tipo de procesos que responden simplemente a cuestiones del tipo Sí/No, acerca del estado cuántico. Pero tan pronto como pasemos a situaciones donde las medidas sean más generales, como es el caso de las medidas cuánticas, resulta necesario implementar una teoría que permita un filtrado de procesos más completo. Dicha aproximación nos la proporciona el formalismo de las "historias consistentes". Por otro lado, la QL puede también derivarse o ser deducida a partir de las Lógicas Multivaluadas (MVLs), de modo que nos permita de este modo ampliar su campo de aplicación, ahora ya válido para procesos cuánticos irreversibles y/o considerar sistemas cuánticos "abiertos", donde existen más opciones que el simple esquema bivalente antes señalado, el de la dicotomía Sí/No.

Sólo una pequeña observación final añadiríamos a este capítulo. Nos referiremos con ello a otra de las características esenciales de los componentes del Círculo de Viena. En él (empezando por el propio Moritz

[755] Otro campo de aplicación de la MVL a la Física que ha resultado muy fructífero, y en el cual se sigue trabajando actualmente, es la Teoría de los Circuitos Eléctricos (o de los "switching circuits"). Puesto que si bien la teoría de los simples conmutadores con dos posiciones (ON y OFF) podría ser manejada suficientemente con la maquinaria de la Lógica Proposicional clásica, la binaria o booleana, en cambio, la teoría de los circuitos multicanal, mucho más compleja, está claro que requiere -para ser adecuadamente tratada- del recurso a la maquinaria de las MVLs.

Schlick, que hizo la tesis doctoral en Física bajo la dirección de Max Planck) abundaban los que eran físicos de formación inicial, y de ahí su estar pendientes de los últimos `avances´ de su ciencia, así como la obsesión por ponerla como modelo y paradigma, como algo a imitar por los otros saberes (lo que se llama el `fisicalismo´). Pero esto no es así para los de la ELV, o no lo es en la misma medida, pues la formación básica en su caso era la de tipo lógico-filosófico, preocupados más bien por los fundamentos de la Matemática y el estudio de la historia de la lógica, salvo alguna rara excepción, como es el caso de Zygmunt Zawirski, que escribió acerca de las implicaciones filosóficas de ciertos problemas de la Física, pero en general, esto era para ellos de interés secundario y no lo central, como sí que lo fue para los del grupo vienés.

21. Algo más de nueva información sobre lo que suele conocerse como el “estado del arte”.

Como sabemos, la lógica es el estudio de la estructura y los principios del razonamiento correcto, y más específicamente, los intentos de establecer los principios que garantizan la validez de los argumentos deductivos. El concepto central de la lógica es el de validez, porque cuando afirmamos la validez de un argumento se nos está diciendo que es imposible que su conclusión sea falsa, si sus premisas son verdaderas.

Las proposiciones son descripciones del mundo, es decir, son afirmaciones o negaciones de eventos en diferentes mundos posibles, de los cuales el “mundo real” es sólo uno de los posibles. Existe una larga tradición filosófica de distinguir entre la verdad como algo necesario[756] y los hechos “contingentes”[757].

Ambos han abarcado realmente los dos conceptos de la verdad lógica, sin que se opongan entre sí, aunque son muy diferentes: la concepción de la verdad como coherencia, y la concepción de la verdad como correspondencia.

De acuerdo con el punto de vista de la coherencia, una proposición es verdadera o falsa dependiendo de su relación con respecto a un determinado conjunto de proposiciones, puesto que se han aplicado las normas de dicho sistema. Bajo los términos de dicha correspondencia, una proposición es

[756] A priori, o “lógico”.
[757] A posteriori, o “de hecho”, factuales.

verdadera o falsa, si está de acuerdo con la realidad, es decir, con el hecho de referencia.

La lógica es el estudio de la estructura y los principios del razonamiento correcto y abarca también todos los intentos para establecer los principios que garanticen la validez de los argumentos deductivos. El concepto de validez es central a la lógica, ya que cuando afirmamos la validez de un argumento, estamos diciendo que es imposible que su conclusión sea falsa, si sus premisas son verdaderas.

Esto nos lleva a dos cuestiones que son objeto de controversia. Así, las de

- *¿Cuáles son los "portadores de la verdad"?* Las respuestas son múltiples: sentencias, resoluciones, declaraciones, propuestas…
- *¿Y qué es la verdad?* Una cuestión mucho más radical y que no tiene una respuesta fácil. Intuitivamente, se suele tender a asignarle a la verdad dos propiedades fundamentales: la de universalidad y la de objetividad. La de *Universalidad,* ya que es una capacidad común de todos los seres humanos. Y la de *objetividad,* ya que es independiente de las consideraciones personales. A todos nos pueden decir o decimos la verdad, sin importar quién o qué somos[758]. Pero ambas propiedades por sí solas no garantizan nada, ni siquiera llegan a diferenciar la mera opinión o creencia de la verdad. Aunque no podemos analizar un argumento sobre el concepto de la verdad sin decidir primero qué cosas pueden ser verdaderas o qué cosas falsas.

[758] Aquello tan famoso del *Juan de Mairena,* el hermoso libro de don Antonio Machado, según el cual: "La verdad es la verdad, la diga Agamenón o su porquero".

Decimos que las proposiciones son aquellas que pueden ser verdaderas o falsas. Las proposiciones son meras descripciones del mundo.[759]

Como sabemos, existe toda una larga tradición filosófica de distinguir entre la verdad de lo que "es necesario/a priori/lógico" y lo que es "contingente/a posteriori/factual". Ambos han llevado realmente a los dos conceptos de verdad lógica, sin oponerse, pero siendo muy diferentes entre sí, en tanto en cuanto que la concepción de la verdad como coherencia, frente al concepto de la verdad como correspondencia. Desde el punto de vista de la coherencia, una proposición es verdadera o falsa en relación con un determinado conjunto de proposiciones, ya que siempre se han aplicado las normas de dicho sistema. Bajo los términos de la correspondencia, una proposición es verdadera o falsa, si está de acuerdo con la realidad, de hecho, es a ella a la que se hace referencia.

Otros puntos de vista han tratado de ir más allá de esta dicotomía, como es el caso del punto de vista semántico del matemático y filósofo polaco *Alfred Tarski (1902-1983),* que al final no deja de ser una variante del principio de correlación.

O el punto de vista de la *teoría de la redundancia,* desarrollada por el filósofo y matemático británico Frank P. Ramsey (1903-1930), que buscaba eludir el problema considerando el concepto de verdad como algo superfluo.

[759] Tan sólo, como dijimos, se reducirían a meras afirmaciones o negaciones de los acontecimientos en los diversos mundos posibles. Sobre estos, conviene la lectura de Saul A. Kripke, David K. Lewis y Robert Stalnaker.

Este autor, muerto prematuramente, se ha de estudiar en relación con Russell y con Wittgenstein[760].

Para aumentar aún más la complejidad del problema, debemos declarar que no sólo la verdad o falsedad puede predicarse de las proposiciones, sino también de las teorías, de las ideas y de los modelos. Y por lo tanto, hay nuevas y distintas concepciones de la verdad.

La concepción pragmática, de William James, afirmaba la verdad de esas ideas que nos ayudan a alcanzar relaciones satisfactorias con otras fuentes de nuestra experiencia.

El concepto de "falsabilidad", o de "falsación" (la \`falsation´), de Karl Popper, nos indica que una teoría será verdadera, si es satisfactoria para describir un determinado dominio de la realidad. Esta sería la línea o el *criterio de demarcación* entre lo científico y lo no-científico.

La idea básica que subyace en todos estos enfoques es el de una dicotomía intrínseca entre lo verdadero y lo falso. Esta oposición implica el necesario análisis sobre la validez de dos leyes fundamentales de la lógica clásica:

- *Principio del tercero excluido* (tertium non datur): Toda proposición es verdadera o falsa, y no hay otra posibilidad.

---

[760] De hecho, él sería el indicado por Russell para revisar y modificar los *Principia Mathematica* para una nueva edición, mientras que Wittgenstein, por su parte, opinaba que hacerlo no valía la pena. Véase para más detalle el interesante libro:
MONK, R., *Ludwig Wittgenstein: The Duty of Genius.* Vintage, London, 1991, trad. esp. Editorial Anagrama. Ver los comentarios de las pp. 234-236 y 385, entre otros.

- *Principio de No Contradicción,* por algunos conocido como *Principio de Contradicción:* No puede haber una proposición que sea verdadera y falsa al mismo tiempo.

Esta idea básica genera una serie de paradojas o antinomias, y una insatisfacción que se basa en la necesidad de superar la rigidez del concepto de verdad, esto es, la cómoda pero estrecha bivalencia de la lógica clásica.

Aceptar que una proposición acerca de un evento futuro es verdadera o falsa hace necesario o imposible, respectivamente, el evento expresado por la proposición.

La solución propuesta por Jan Lukasiewicz en su artículo es la aceptación de una lógica de tres valores de verdad[761], que además de verdadero y falso, acepta un valor de verdad indeterminado, al que le atribuye un valor de verdad o grado de pertenencia del 0.5, también representable, claro está, por 1/2.

Charles Sanders Peirce (1839-1914) lo anticipó en alguno de sus trabajos, pero ha habido muchos otros que también han ido contribuyendo a su construcción, así como al muchas veces agrio y tenso debate generado en torno a su aceptación en el tradicional mundo académico, como el caso conocido del matemático y científico de la computación americano Bart Kosko, acerado polemista y "apóstol" de nuestra teoría.

Conjuntamente con la contribución de *Jan Lukasiewicz* (1878-1955), también *Alfred Tarski* (1902-1983) formuló una lógica de *n* valores de verdad, siendo *n* mayor que dos, también aclarar muchas cuestiones técnicas

[761] O de tres grados de verdad, también llamada trivalente o trivaluada.

importantes, por la introducción inicial de la misma tercer valor, el llamado "posible", relacionado con la paradoja de la Sea Battle antes mencionada.

Jan Lukasiewicz consideraba, por su parte, los tres valores 0, 1 y 2, donde el valor adicional 2 es un valor de las sentencias futuro-contingentes, y se interpreta como "posibilidad", o "indeterminación", mientras que 0 y 1 son los valores clásicos de verdadero y falso, respectivamente. Pero pronto cambió la notación, poniendo ½ en lugar de 2, lo que sugiere que el "orden natural" de los tres valores habría reflejado mejor sus intuiciones sobre las conectivas proposicionales[762].

Como muchos otros de los matemáticos polacos de la Escuela de Lvóv-Varsovia, o de los emigrados, que también pertenecen a una tradición lógico-filosófica tan notable, también fue *Emil León Post* (1897-1954), que llegaría a ser otro gran defensor de la necesidad de introducir o asociar a los grados de verdad tales valores adicionales. Este lleva a cabo la formulación de dichos *n* grados adicionales, o "degrees", con *n* mayor que 2, donde *n* serían el cardinal del conjunto de los valores de verdad.

Podemos señalar[763] que se dice de Stanislaw Lesniewski que habría alcanzado el 100% de porcentaje de genios entre sus doctorandos, porque sólo dirigió a uno, y este era precisamente Alfred Tarski. De este autor es inevitable

---

[762] Lukasiewicz llevó a cabo importantes investigaciones sobre Lógica Proposicional. Sobre todo, en los aspectos referidos a su axiomatización. A él se le deben trabajos brillantes obre Metalógica; especialmente, los que tienen que ver con las pruebas de completitud, de consistencia, o de independencia en Lógica Proposicional. Y no deben olvidarse sus avances en Lógica Modal.
[763] Al menos, como curiosidad histórico-biográfica.

hacer muchas referencias, pues con razón se le considera uno de los mayores lógicos de la historia[764].

También merece reseñarse el filósofo suizo *Ferdinand Gonseth* (1890-1975), cuando planteó su observación acerca de la existencia de una cierta incompatibilidad entre esta manera de interpretar el tercer valor con otros principios de la lógica trivaluada, y nos mostró que la interpretación original de Lukasiewicz descuidaba la dependencia mutua de proposiciones posibles[765].

Podemos y debemos mencionar las aportaciones de *Joseph A. Goguen (1941-2006).* En su honor, entre otras aportaciones, la que hoy es una implicación estándar en la lógica difusa producto[766] se llama a menudo la "implicación Goguen". Asimismo, J. A. Goguen generalizó el concepto de conjunto borroso dado por L. A. Zadeh, relacionándolo con otras estructuras algebraicas. Por lo tanto, lo conecta con las lógicas infinito-valuadas.

J. A. Goguen desarrolló también un análisis formal de la lógica difusa, estudiando y comparando distintas Paradojas; entre ellas, las relacionadas con el Argumento o Paradoja Sorites. A partir de su segundo artículo, trabajó en lo

---

[764] Uno de los resultados matemáticos asociados al nombre de este lógico polaco es el "Teorema de Indefinibilidad". Lo planteó y demostró en 1936. Dicho de un modo informal, *la verdad aritmética no puede ser definida dentro de la propia aritmética.* Tiene claramente un efecto limitativo tanto en Lógica Matemática como en los Fundamentos y en la Semántica Formal. Se puede aplicar dicho resultado con carácter más general a cualquier sistema formal que sea suficientemente fuerte, mostrando que la verdad en el modelo estándar del sistema no podría ser definida dentro de dicho sistema. Luego la codificación no puede realizarse para conceptos tales como el de Verdad. Porque ningún lenguaje suficientemente "rico" se puede representar su propia semántica. Un *Corolario* suyo sería entonces que cualquier metalenguaje capaz de expresar la semántica de algún lenguaje objeto debe tener una capacidad o potencia expresiva que excede a la del lenguaje objeto. Por lo que habrá teoremas demostrables en el metalenguaje que no lo son en dicho lenguaje objeto. El Teorema se puede considerar también como un Corolario del Teorema de Post, sobre la Jerarquía Aritmética, probado más tarde del resultado de Tarski. Un modo más sofisticado de enunciar el Teorema de Indefinibilidad sería este: *Ningún lenguaje suficientemente potente ("powerful") es fuertemente semánticamente auto-representacional.*

[765] LUKASIEWICZ, J.; MALINOWSKI, G.

[766] GOGUEN, J. A.; NOVAK, V., ET AL.; HÁJEK, P.

que pudiéramos denominar la Lógica Difusa Formal, y que ahora se designa *FLn*[767].

Aclaremos ahora un importante concepto: Un *predicado borroso o difuso*[768] será aquel que se aplique sobre los distintos elementos de un conjunto en diversos grados, esto es, que no tiene porqué verificarse del todo o no verificarse en absoluto, sino que lo harán o dejarán de hacerlo en una cierta medida. Por lo cual uno de estos predicados no clasificará el Universo de Discurso en dos categorías disjuntas y complementarias entre sí, o sea, dicho en términos algebraicos, que no establece una partición de dicho Universo de Discurso. Esto es porque no introduce una distinción nítida y excluyente en dos clases disjuntas entre sí, radicalmente diferenciadas, sino que aparece como subyacente el concepto de "fuzzy boundary", o frontera borrosa, entre los valores de verdad extremos, el F y el V, el 0 y el 1. Por todo lo cual se precisa de unas nuevas herramientas matemáticas que nos permitan avanzar en los nuevos cálculos, donde intervengan los predicados borrosos. De ahí surgen los Fuzzy Sets, o conjuntos Borrosos, aunque cronológicamente, Lofti A. Zadeh expondría antes éstos que su posterior aplicación a una nueva lógica divergente: la Lógica Borrosa, o "Fuzzy Logic".

Según esta nueva teoría, tenemos una función de transferencia[769], que procede de la generalización de la llamada función característica, propia de la Lógica Booleana. Se suele llamar en castellano la "función de pertenencia", porque indica el grado de esta, y como aplicación se extiende desde el

[767] Recordemos que es el acrónimo de la Lógica Difusa en sentido estricto, o narrow sense.
[768] En inglés, "fuzzy predicate".
[769] O de pertenencia, la "membership function", o "belonginness function".

universo de discurso, U, hasta el intervalo unidad cerrado de los reales, que como sabemos, es el $I = [0, 1] \subset \mathbf{R}$.

No sucede así en los llamados *crisp sets*[770], donde el rango o recorrido[771] de la función se reduce a un conjunto que consta tan sólo de dos elementos, a saber, el {0, 1}. Por lo tanto, la Teoría de Conjuntos Difusos sería una generalización de la Teoría de Conjuntos Clásica, análogamente a como la Lógica Borrosa viene a generalizar la Lógica Clásica.

Las nuevas ideas surgieron del estudio de varios pensadores de diversas disciplinas, quienes tenían una visión divergente de los problemas respecto de la presentada por la lógica tradicional. La paradoja del conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos, que es muy famosa, o la del barbero, que fue propuesta por Bertrand Russell.

O el *principio de incertidumbre* de la física cuántica, enunciado por *Werner Heisenberg (1901-1976).* Concepto éste de la Incertidumbre muy emparentado con la idea anterior, pues "vagueness" y "uncertainty" son conceptos fuertemente imbricados en las modernas teorías cuánticas, y bastante conectados entre sí, pero que no deben en ningún caso confundirse con el de la ambigüedad.

La teoría de conjuntos "fuzzy"[772] parte realmente, ya en los tiempos modernos, del físico cuántico y filósofo alemán *Max Black* (en 1937), que también analizaba la cuestión de cómo intentar modelizar la "vaguedad".

[770] Los conjuntos "clásicos", o "conjuntos nítidos".
[771] El "range", dicho en inglés.
[772] Los llamados conjuntos borrosos, o conjuntos difusos.

Aunque Max Black se distingue de Russell en admitir que la lógica tradicional puede ser reinterpretada mediante la vaguedad, que representa un nivel adecuado de detalle, sugiriendo que la definición de Russell de la vaguedad confunde la vaguedad con la generalidad.

El mencionado Max Black analizaba la vaguedad de los términos o de los símbolos mediante el uso de casos extremos, en donde no está claro si el término puede ser utilizado o no para describir la situación. Cuando habla de tal medida, señala que “la indeterminación que es consustancial en la vaguedad está presente también en todas las mediciones científicas”. Una idea propuesta por Black es la idea de un perfil de consistencia o de una curva que nos permita el análisis de la ambigüedad de una palabra o de un símbolo. Para el investigador de la lógica difusa de hoy en día, estas curvas tendrían un gran parecido con las funciones de pertenencia de los llamados conjuntos difusos del Tipo-1. Recordemos que la distinción entre los del Tipo-1 y los del Tipo-2 radica, dicho brevemente, en que los primeros regulan los niveles de incertidumbre por medio de la función de pertenencia, sin que esta propiamente la muestre a su vez; cuando se admite la incertidumbre también sobre dichas funciones, estamos en los conjuntos difusos del segundo tipo.

Como queda dicho, también puede considerarse como muy esencial la contribución (algo posterior, pero clave) del lógico y matemático polaco *Jan Lukasiewiz (1878-1956).*

Por lo tanto, se debe en buena medida a tales influencias intelectuales el que *Lofti Asker Zadeh* (nacido en 1921) publicara su conocido artículo de la revista *Information and Control,* y tres años después (en 1968), otro sobre el llamado “algoritmo de aproximación”, para rematar sus objetivos con un nuevo trabajo, de 1975, donde trataba de extender estos resultados al campo de la lógica.

Al poner en circulación estas ideas de nuevo, si no de un modo más consistente y formalizado, sí más manejable, dichas ideas contenidas en los artículos publicados entonces por Lotfi A. Zadeh recordemos que no fueron nada bien recibidos en Occidente, sino que en muchos casos fueron rechazados con extrema dureza por los elementos más conservadores de la comunidad científica. No obstante, con el tiempo comenzaron a ir ganando más y más adeptos, lo que llevó a que estas teorías se extendieran cada vez más, estableciéndose con firmeza entre los científicos más innovadores y especialmente, entre los mejores profesionales. Más que en cualquier otro lugar lo fue inicialmente en el Japón, y luego en Corea del Sur, China y la India. Europa y Estados Unidos van siendo incorporadas a este nueva matemática, pero más lentamente.

Como cuestión pintoresca o anecdótica, si se quiere, pero que es bien cierta, podemos decir que el ahora reconocido por muchos como “el padre de la Lógica Difusa”, Lotfi A. Zadeh, en su día se reunió con los ejecutivos de la empresa IBM, quienes le dijeron que su “descubrimiento no tenía ningún interés ni utilidad futura ninguna”. Por supuesto, esto puede ser considerado como un modelo muy claro, un paradigma, de la inteligencia y de la visión comercial de ciertas grandes empresas de Occidente. Si no hubiera sido así, probablemente se hubieran desarrollado en los Estados Unidos, y en otros países occidentales, muchos de los notables avances tecnológicos derivados de esta nueva ciencia.

La intención de Lofti A. Zadeh era la de crear un formalismo que permitiese manejar de manera más eficiente la imprecisión del razonamiento humano. Fue en 1971 cuando publicó los elementos formales que condujeron a la metodología de la lógica difusa y sus aplicaciones, tal como se conocen hoy en día.

De lo anterior se deduce que es posible que necesitemos un replanteamiento radical de nuestros conceptos clásicos de la verdad y de la falsedad, mediante la introducción del concepto de borrosidad[773], y como resultado de lo cual, la verdad o falsedad de los distintos casos serían tan sólo sus situaciones más extremas.

Por "vagueness"[774] se puede entender el hecho según el cual una proposición puede ser parcialmente verdadera y parcialmente falsa a la vez. Una persona no es sólo alta o baja, sino que parcialmente puede participar de ambas características, mientras que en la zona intermedia de las dos alturas extremas ha de existir una especie de graduación, por la que está dejando de ser alta o empezando a ser baja.

Parece intuitivamente claro que el concepto de borrosidad tiene sus raíces en gran medida dentro de nuestras formas de pensar y de hablar. Otra cuestión

[773] Vaguedad o imprecisión.
[774] O `borrosidad´.

distinta es la valoración que cada individuo concede un carácter difuso[775], que dependen de los problemas psicológicos subjetivos y difíciles de evaluar.

El principio difuso clave es (según Kosko) que *todo es una cuestión de grado.* Podría ser este, sin duda, su más famoso “leitmotiv”. Todas las proposiciones adquieren un valor de verdad entre uno (cuando es totalmente verdadera) y cero (cuando es totalmente falsa), pudiendo tomar incluso alguno de ambos. La asignación de estos valores extremos sólo se dará en el caso de las verdades lógicas o falsedades o inducciones fuertes: “Todos los hombres son mortales” puede ser un ejemplo de inducción fuerte, ya que no hay hasta el momento contraejemplos, aunque sí muchos candidatos a serlo, pero que una vez tras otra vienen resultando fallidos.

Los argumentos para introducir el concepto de borrosidad en la lógica ya han sido expuestos, pero será necesario examinar en detalle algunos aspectos clave:

a) Los antecedentes históricos y el concepto metodológico.

b) La posibilidad de construir un lenguaje formal de valor infinito, y si es así, que tratemos de definir sus propiedades y sus leyes.

c) Las consecuencias filosóficas y prácticas derivadas de dicha introducción.

El conocido profesor norteamericano, matemático y científico de la computación, *Bart Kosko* puso de relieve las diferencias entre las filosofías orientales y occidentales con respecto del concepto de la verdad, que resume en la oposición de Aristóteles contra Buda. De hecho, Bart Kosko cree que la

[775] El vaso medio lleno o medio vacío.

filosofía occidental, en cuanto sucesora directa de Aristóteles, ha aceptado acríticamente la bivalencia como el sistema que resulta útil, pero que es en realidad demasiado simple, para una realidad que es cada vez más compleja. En pocas palabras: lo que se ha ganado en simplicidad se ha perdido en precisión.

Por otro lado, las filosofías orientales: las del Buda, Lao Tse, Confucio, etc., siempre han aceptado la estricta unidad de los opuestos, de lo que llaman (como sabemos), el Yin y el Yang, adoptando con gran naturalidad la teoría de los grados de verdad.

Además, que si bien es cierto que Aristóteles puede considerarse como el introductor de la bivalencia, no debemos por ello pensar que se le pasara por alto completamente la existencia de las características o propuestas difusas, como cuando comentó que

"En cualquier caso, lo que se dice de acuerdo con ellos (cualidades) apoya sin duda el más y el menos"[776]

o cuando nos hablaba de que podemos llegar al conocimiento, pero sin la certeza de ello. Si Aristóteles[777] no llegó a estudiar más este concepto, fue posiblemente porque aún faltaba por aquel entonces el conocimiento matemático tan necesario para hacer posible su desarrollo. No fue sino hasta la aparición de un cálculo cada vez más sistemático y operacional, de la combinatoria y la teoría de la probabilidad, de la teoría de juegos, o la nueva teoría, conocida ahora como "Crisp Set Theory", o teoría clásica de conjuntos,

---

[776] ARISTOTELES, *Peri hermenias,* ch. 9.
[777] Una mente sin duda de las más brillantes que haya habido nunca en la Historia.

iniciada por Cantor[778], así como la estadística moderna y el cálculo matricial, entre otros.

Como se dijo anteriormente, Aristóteles no tenía el aparato matemático que posibilitara el desarrollo de una lógica difusa. La gestación de esa construcción se inicia con Newton y Leibniz, que desarrollaron el cálculo en el siglo XVII. Tal vez, por la obsesión con la pretendida exactitud de las Matemáticas, se haya hecho perfectamente aplicable la famosa cita de Einstein:

> En la medida en que las matemáticas se refieren a la realidad, no son ciertas.
>
> Y en la medida en que son ciertas, no se refieren a la realidad.

Pero lo que no dice Einstein es que sin duda, el aparato deductivo desarrollado por la matemática facilita la comprensión de la realidad. La explicación dada por el movimiento de Aristóteles se sustituye por el más innovador tratamiento de Newton, pero gracias a una fuerte apoyatura en el cálculo, sin el cual no habría sido esto posible. Sin embargo, el cálculo infinitesimal en profundidad sólo se utilizó para el estudio de la física en los siglos siguientes, experimentando luego un crecimiento espectacular, con Euler, Laplace, Lagrange, Fourier, y así sucesivamente.

Hoy en día impregna ese *Análisis Matemático* todas las ciencias, tanto sociales y humanas como naturales. Todas pugnan ahora por aplicarlo en sus

---

[778] Todo lo referente a Cantor y a la historia de la teoría conjuntista se puede ampliar con las documentadas obras de José Ferreirós, de la Universidad de Sevilla; especialmente, en:
FERREIRÓS, J., *Labyrinth of Thought: A history of set theory and its role in modern mathematics.* Basel and Boston, Birkhäuser Verlag, 1999.
Ferreirós también es el traductor al español de Georg Cantor y de Richard Dedekind.

propias parcelas, para adquirir así un aspecto más sólido, más respetable. Pero también con el *Calculus* se introdujo[779] la esencial cuestión del grado.

La Lógica Clásica[780] se ha mostrado durante mucho tiempo bastante eficaz en las ciencias llamadas "duras", tales como las matemáticas o la física. Sin embargo, resulta insuficiente cuando los predicados contienen imprecisión, incertidumbre o vaguedad, pero se sabe ahora que de acuerdo ello es como el cerebro funciona realmente, así como el razonamiento humano o el lenguaje natural, y en general, es tal y como se comportan tdos los sistemas que nos rodean. El mundo es "fuzzy", podríamos decir, pero no lo es, en cambio, la lógica difusa, que lo interpreta. También ha ayudado la FL a que el software sea capaz de interpretar sentencias de ese tipo, con indeterminación sobre los datos.

La *Lógica Matemática Difusa*[781] es una subdisciplina de la Lógica Matemática. Se trata de un estudio matemático de una determinada familia de sistemas formales de lógica cuya semántica algebraica implica algún grado dentro de la noción de verdad. El papel central en MFL proviene de tres orígenes distintos, que han ido apareciendo según han sido las diversas peripecias históricas de esta disciplina:

(1) *Algunas Motivaciones Filosóficas:*

Cualquier teoría científica está, al menos inicialmente, impulsada por algún tipo de motivación externa, es decir, por una realidad

[779] Al menos, subliminalmente, sin darse tal vez cuenta.
[780] De esencia aristotélica.
[781] La *Mathematical Fuzzy Logic,* de la cual *MFL* sería su acrónimo.

independiente a uno mismo, que le gustaría entender y modelar por medio de la teoría.

La MFL está motivada por la necesidad de modelar el razonamiento correcto en algunos contextos particulares en los sistemas más convencionales, tales como la lógica clásica, y podría ser considerado como inapropiado. Es decir, estos contextos motivadores son aquellos en los que las proposiciones implicadas se resienten de una falta de precisión, típicamente debido a que contienen algún predicado vago, es decir, una propiedad que carecen de límites claros[782].

Los predicados “fuzzy” (vagos[783]) resultan omnipresentes en el lenguaje natural y en el razonamiento humano. Por tanto, tratar con ellos es también inevitable para la lingüística. Constituyen un importante problema lógico, como se ve claramente cuando se enfrenta a las Paradojas del tipo Sorites, donde un número suficiente de aplicaciones de una regla de la deducción legítima[784] nos arrastran (aparentemente) desde premisas verdaderas hasta una conclusión abiertamente falsa: (1) un grano de trigo no hace un montón, (2) un grupo de granos de trigo no se convierte en un montón sólo mediante la adición de un grano más; por lo tanto: (3) un millón granos de trigo no constituiría tampoco un montón.

[782] Fuzzy boundaries, se diría.
[783] Tales como “calvo”, “alto”, “inteligente”, “lento”, “rápido”, “pobre”, “serio”, “joven”, “hermoso”, “sutil”, “agradable”, “gracioso”, o “simple”.
[784] Como es el caso del Modus Ponens.

Una forma posible de resolver este problema es el enfoque basado en los grados de pertenencia, que está relacionado con los sistemas lógicos estudiados por la MFL.

En esta propuesta se asume que la verdad se presenta en grados que en el caso de la serie de las paradojas del tipo Sorites, varían desde la verdad absoluta de "un grano de trigo no hace un montón", a la falsedad absoluta de "Un millón de granos de trigo no pueden tampoco hacer un montón", a través de los grados intermedios decrecientes de la verdad "n granos de trigo no hacen un montón", con *n* como un valor creciente, al no haber una frontera bien definida, clara, no difusa, entre dónde termina "el montón" y comienza el "no-montón".

(2) Teoría de los Conjuntos Difusos[785]*:*

Fue en 1965 cuando Lotfi Zadeh propuso los conjuntos difusos como un nuevo paradigma matemático con el que hacer frente a la imprecisión y el cambio gradual, buscando ser útil, en aplicaciones, sobre todo, de ingeniería y de control[786].

Su simplicidad conceptual[787] proporcionó la base para una nueva área de investigación fundamental, así como para crecientes aplicaciones, siendo tal y como una especie de caja de herramientas versátiles, muy popular en el campo de la ingeniería, por ser

[785] O Fuzzy Sets.

[786] ZADEH, L. A., *op. cit.,* 1965.

[787] Un conjunto difuso se puede considerar que no es nada más que algo parecido a un conjunto clásico, pero en este caso dotado con un intervalo cerrado, [0, 1], como conjunto final para la función de pertenencia que representa el grado en el que un elemento pertenece al conjunto difuso, una diferencia aparentemente pequeña, pero esencial)

considerable su éxito en muchas aplicaciones tecnológicas; en particular, para el llamado control difuso[788].

Este campo ya se conoce como el de la Lógica Difusa, o Fuzzy Logic, aunque su maquinaria matemática y los conceptos investigados están en gran medida relacionados con los que normalmente utilizamos y estudiamos en la Lógica Matemática clásica.

Sin embargo, ha habido algunos intentos de presentar la lógica difusa[789] como una herramienta útil para tratar con ciertas paradojas relacionadas con la vaguedad, como por ejemplo, la famosa Paradoja Sorites. Estos intentos se han encontrado con una fuerte oposición entre los partidarios de otras teorías de la "vagueness".

(3) *Lógicas Multi-Valuadas:*

El siglo XX ha sido testigo de una proliferación de sistemas lógicos que trataban, entre otros aspectos, de la semántica algebraica, que a diferencia de lo que sucede en la lógica clásica, presentasen más de dos valores de verdad.

Ejemplos bien destacados de ellos podrían ser los sistemas de lógicas trivaluadas, 3-valuadas, ó 3-valoradas, entre las que pueden mencionarse la lógica de la indeterminación de S. C. Kleene, o los sistemas de las lógicas 4- valuadas, como pudiera ser la lógica de Dunn-Belnap; con *n* valores, como los sistemas de Jan Łukasiewicz y Emil L. Post, o la versión de la lógica infinito-valuada del propio Łukasiewicz.

---

[788] Fuzzy Control.
[789] En el sentido de Zadeh.

Estos sistemas fueron inspirados por muy distintas motivaciones, muchas veces sólo ocasionalmente relacionadas con los problemas que antes mencionábamos acerca de la vaguedad.

Más recientemente, la Lógica Algebraica ha desarrollado un paradigma en el que la mayoría de los sistemas de lógicas no-clásicas pueden ser vistos como multivaluados, ya que se les da una semántica en términos de álgebras con más de dos valores de verdad.

Desde este punto de vista, la lógica "many-valued" (MVL) abarcaría todo la intensamente estudiada clase de las familias de sistemas lógicos, como es el caso de la pertinencia[790], o el de la lógica intuicionista, las lógicas super-estructurales y las sub-lógicas en general.

La *Lógica Matemática Difusa* nació en el punto de intersección de estas tres áreas. A principios de los años noventa del siglo pasado, un pequeño grupo de investigadores[791], convencidos de que la teoría de conjuntos difusos podría ser un paradigma útil para hacer frente a los problemas lógicos relacionados con la vaguedad, comenzaron las investigaciones dedicadas a proporcionar sólidas bases lógicas para tal disciplina. En otras palabras, se empezaron a desarrollar sistemas lógicos, inicialmente un poco en la línea o tradición de la lógica matemática, pero estos ahora tendrían el intervalo cerrado unidad, el $[0, 1] \subset \mathbf{R}$, como el conjunto de valores de las distintas operaciones utilizadas en la teoría de conjuntos difusos, dotado de una semántica propia.

[790] En el sentido no de pertenecer, sino de ser pertinente.
[791] Incluyendo, entre otros, a Francesc Esteva, Lluis Godó, Siegfried Gottwald, Petr Hájek, Ulrich Höhle, Pedro Burillo, Humberto Bustince y Vilém Novak.

En el curso de estos desarrollos, se dieron cuenta de que algunos de estos sistemas lógicos ya eran conocidos, como los de Łukasiewicz y el de Gödel-Dummett, pero que lo eran en tanto que lógicas infinito-valuadas.

Resultó que tales sistemas estaban fuertemente relacionados con los conjuntos borrosos, porque tomando el [0, 1] como recorrido para sus valores de verdad y sus funciones de pertenencia,[792] serían de hecho de la misma clase[793] que aquellas que se utilizan para calcular la combinación[794] de los conjuntos borrosos.

Numerosas conferencias y proyectos de investigación han venido produciendo un número considerable de artículos, e incluso aparecen algunas monografías valiosas, sobre este ya hoy muy ramificado tema.

Como resultado de este trabajo, las lógicas difusas se han ido convertiendo en una familia respetable dentro del panorama general de las lógicas no clásicas estudiadas por los cultivadores de la lógica matemática. Se ha demostrado claramente que la lógica difusa puede ser contemplada como un tipo particular de las multivaluadas[795], cuya intención semántica se basa normalmente en las álgebras cuyos valores de verdad están linealmente ordenados.

Con el fin de distinguirlos de aquellos trabajos en torno a la teoría de conjuntos difusos y que muchas veces vienen engañosamente etiquetados

[792] O "membership functions". Que como sabemos, modulan el grado de verdad de las proposiciones, interpretando sus conectivas lógicas.
[793] t-normas, t-conormas o s-normas, Negaciones, etc.
[794] Respectivamente, la Intersección, la Unión, y el Complemento.
[795] La MVL, o la lógica subestructural.

como lógica difusa, el estudio de estos sistemas ha sido llamada Fuzzy Mathematical Logic.[796]

Además, por ser una subdisciplina de la lógica matemática ha adquirido el programa básico típico de este campo y es hoy en día estudiado por muchos investigadores que poseen desde el punto de vista filosófico y matemático de una mente abierta, independientemente de cuáles hayan sido sus motivaciones originales. Por lo tanto, en los últimos años hemos visto el florecimiento de la MFL, con la aparición de una gran cantidad de trabajos sobre análisis proposicional, sobre las Lógicas Modales de primer orden y de orden superior, acerca de su semántica, o bien podemos mencionar la Proof Theory, o Teoría de la Prueba[797], la Teoría de Modelos, sin olvidar los temas de Completitud y Consistencia, o últimamente, de la Complejidad y de la Decidibilidad, entre otros.

También se ha venido produciendo un intenso debate sobre el papel de la MFL en el estudio de la imprecisión y en general, en el análisis del razonamiento cuando sólo se dispone de información imprecisa. Ahora suele admitirse que puede que la MFL no sea la única teoría plausible, o incluso que no deba considerarse como la única y definitiva “lógica de la vaguedad”. Sin embargo, muchos de los argumentos filosóficos en contra de considerar la lógica difusa como una lógica de la “vagueness” no se aplican de hecho a la MFL, sino más bien a la lógica difusa en el sentido de Zadeh. De hecho, se ha producido una importante labor filosófica sobre la vaguedad utilizando elementos de MFL.

[796] FML, en acrónimo, o Lógica Difusa Matemática.
[797] Según algunos, otro nombre mal puesto.

La lógica difusa puede ser conceptualizada como una generalización de la lógica clásica, que trata matemáticamente con la información imprecisa, que es la habitualmente empleada por los seres humanos. Como lógica con varios valores, se extiende la lógica booleana, generalmente empleadas en la ciencia clásica.

Se pueden establecer por lo menos dos enfoques fundamentales para el tratamiento de la Lógica Fuzzy.

El primero de ellos se puede considerar relacionado con la tradición lógica multivaluada, propiamente, es la obra de la escuela de Petr Hájek[798], centrada sobre todo en la Universidad Carolina de Praga; queremos decir de Hájek y su grupo de investigadores; o también del grupo formado en la Universidad de Ostrava, con Vilém Novák, Irina Perfilieva y otros más El procedimiento sería el de establecer un conjunto de valores diseñados, y a continuación, definir una relación de vinculación. Podemos definir un conjunto adecuado de axiomas y reglas de inferencia, como motor de todo su aparato deductivo.

La segunda línea de avance estaría a cargo de Pavelka, Goguen, Belohlavek, y otros. Sus esfuerzos estarían dirigidos a proporcionar un aparato deductivo en que se pueda manejar el razonamiento aproximado. Se llegaría a un subconjunto borroso adecuado de axiomas lógicos, y a establecer mediante ellos las reglas de inferencia difusas.

Entre ambos enfoques, podemos decir que será muy diferente cómo abordan el operador de consecuencia lógica. En el primer caso, se da el

[798] HÁJEK, P., *Metamathematics of Fuzzy Logic.* Basel, Birkhäuser Verlag, 1998.

conjunto de consecuencias lógicas asociado a un conjunto dado de axiomas. Mientras que en el segundo caso se da el subconjunto difuso de consecuencias lógicas, en un determinado subconjunto borroso de hipótesis.

Janos Neumann (1903-1957) fue un matemático de origen húngaro, nacido en Budapest[799] y emigrado luego a los Estados Unidos, donde ya sería conocido como John Von Neumann; por cierto, que él fue seguramente una de las mentes más brillantes de todo el siglo XX.

Decía Von Neumann que la Mathematical Fuzzy Logic es una noble teoría lógica formal que generaliza la Lógica Clásica de un modo no trivial, proporcionándonos modelos para distintos problemas en los que juega un relevante papel la “vagueness”. La idea clave sería la de asumir que el fenómeno de la vaguedad puede ser modelado mediante la introducción de grados de verdad comparables, que formarían una “lattice” (traducible mediante “retículo”, “trama”, “enrejado”, o “celosía”; entre cuyas acepciones, la primera de las cuales es la que ahora más se utiliza en Matemáticas), siendo ampliada mediante operaciones especiales.

Para la lógica difusa, las declaraciones no son absolutamente ciertas o absolutamente falsas. Una cosa puede cumplir los requisitos pedidos en su caso en un 5% (técnicamente, su “grado de verdad” sería de 0.05). Y las variables (o categorías) no son números, manifestándose sin nombres ni

[799] Por cierto, que allí florecieron muchos brillantes científicos, en su mayoría judíos, que luego con su diáspora llevaron el nuevo impulso de la ciencia hacia el mundo anglosajón; principalmente a los Estados Unidos, muchos de cuyos Premios Nóbel en Física o en Química procedían de esa `Judapest´ tan denostada por el nazismo. Son de especial interés, desde el punto de vista matemático, las figuras de Pál Erdös, el pensador itinerante, o de su amigo, Pál Turán, de quien procede aquella ingeniosa frase según la cual: “Un matemático es una máquina de convertir café en teoremas. Y si el café es flojo, tan sólo en lemas”. Ambos se dedicaron al estudio de la Combinatoria y de la Teoría de Grafos.

fronteras lingüísticamente precisas: alto o bajo, rico o pobre, gordo o delgado, sano o enfermo, viejo o joven, caliente o frío, o bien si es “normal”, o en qué grado esto ocurre, etc. Los operadores que los modifican son los del tipo “bastante”, “apenas”, “mucho”, “poco”, “demasiado”, “casi”, “algo”, o “no demasiado”. Son los llamados *“fuzzy modifiers”* (o modificadores difusos).[800] Con estos *“hedges”* se consigue atribuir un valor típico del Análisis Matemático a cada una de esas características difusas, y dicho valor se acentúa o se diluye[801] según, por ejemplo, las diversas potencias o raíces de los valores iniciales, o con expresiones polinómicas que dependan de dichas funciones.

Entre otros, tenemos los modificadores de la “intensificación”[802], o de la “dilatación”[803], respectivamente, con efectos graduales y admitiendo todas las variaciones posibles; se combinan entre sí y se potencian o debilitan en función del orden o el número de veces en que se aplican. Las herramientas para trabajar con estas regiones en el borde o frontera se intenta que estén cada vez mejor definidas en esta nueva área de las Matemáticas contemporáneas.

De acuerdo con Lofti A. Zadeh,

More often than not, the classes of objects encountered in the real physical world do not have precisely defined criteria of membership... Clearly, the “class of all real numbers which are much greater than 1”, or “the class of beautiful women” ... , or “the class of tall men”, do not constitute classes or sets in the usual mathematical sense of these terms. Yet, the fact remains that such imprecisely defined “classes” play an

[800] Los “linguistic hedges”, o “modificadores difusos”.
[801] Esto es, se “gradúa”.
[802] El operador INT.
[803] O sea, el de dilatación, denotado por el operador DIL.

important role in human thinking, particularly in the domains of pattern recognition, communication of information, and abstraction.[804]

Con la creciente complejidad, la computacional y la del mundo real, nuestra habilidad para manejar los datos disminuye. Porque muchos de los problemas del mundo real son demasiado complejos, y la dificultad consiste precisamente en el grado de vaguedad que muestran.

La *Borrosidad*[805] describe la ambigüedad del suceso. Por lo tanto, mide el grado en que se produce o no se produce dicho suceso, y no si se produce a secas, mientras que la "Randomness"[806] describiría la incertidumbre que se tiene acerca de si va a suceder o no va a suceder el evento. Por lo tanto, si se produce o no un evento, es algo relativo al azar, mientras que en qué medida éste se produzca o no es algo de característica "fuzzy"; por eso, el tratamiento adecuado es el de la modelización difusa[807].

Las máquinas codifican lo que las personas les transmitimos, y calculan mucho más deprisa que nosotros, pero carecen del menor grado de generalización. Los últimos avances engloban métodos que junto con la lógica borrosa, pivotan sobre las redes neuronales y los algoritmos genéticos. Esta es una enriquecedora combinación de técnicas, llena de sinergias, conocida modernamente como la *Soft Computing.*[808]

El concepto de "soft computing" fue introducido por el ya varias veces mencionado matemático azerbaiyano-iraní Lofti Zadeh, de la Universidad de

[804] ZADEH, L. A., *op. cit.,* 1995.
[805] O "fuzziness".
[806] O \`aleatoridad´.
[807] O fuzzy modeling.
[808] Computación suave o blanda, podríamos decir, pero también flexible.

Berkeley. En 1973, con la teoría básica de Zadeh de los controladores borrosos, otros investigadores comenzaron a aplicar la lógica difusa a diversos procesos mecánicos e industriales, contribuyendo cada vez más a las mejoras existentes.

Se establecieron varios grupos de investigación en universidades japonesas trabajando sobre el análisis de los procesos difusos. De este modo, los profesores Terano y Shibata en Tokio, junto con los profesores Tanaka y Asai en Osaka, hicieron importantes contribuciones tanto para el desarrollo de la teoría de la lógica difusa como de sus aplicaciones[809].

En 1980 el profesor Ebrahim Mamdani, en el Reino Unido, diseñó el primer controlador difuso para un motor de vapor, que se aplicó para controlar una planta de cemento en Dinamarca, y lo hizo con un considerable éxito. En 1985, los investigadores de los Laboratorios BELL elaboraron el primer chip "fuzzy". En 1987, HITACHI utilizó un controlador de lógica difusa para el control del tren de Sendai, que utilizaba un innovador sistema para ser guiado autónomamente. Desde entonces, el controlador ha estado haciendo su trabajo de manera muy eficiente. Fue también durante este año de 1987 cuando la compañía OMRON desarrolló los primeros controladores difusos con fines comerciales. Así que el año 1987 se considera como el del "fuzzy boom", debido a la gran cantidad de productos basados en la lógica difusa que fueron creados para ser objeto de comercio.

[809] El japonés Kaoru Hirota explica bien todas esas investigaciones y sus aplicaciones industriales, a las que se dedica.

En 1993, la lógica difusa fue aplicada por la casa FUJI al control químico de inyección en las plantas de tratamiento del agua, por primera vez en Japón. Fue allí mismo, tanto en el país nipón como en Corea del Sur, donde la lógica difusa ha estado brillando a mayor altura, sobre todo, en su vertiente tecnológica, debido a una estrecha colaboración entre el gobierno, las universidades y la industria.

Paralelamente al estudio de las aplicaciones de la lógica difusa, los profesores Takagi y Sugeno ha desarrollado el primer método para la construcción de Fuzzy Inference Rules[810] a partir de los datos de formación, o del "Aprendizaje Automático".[811]

Las aplicaciones de la lógica difusa en la vida cotidiana han crecido desde entonces con suma rapidez. De hecho, ya es parte fundamental de la misma. Por ejemplo, algunas marcas de lavadora utilizan la lógica difusa, entre las que podemos citar las de Electrolux, AEG y MIELE, empleando esos métodos computacionales para moderar el programa, por ejemplo, si el programa de lavado ha de ser para ropa "no muy sucia", el cual es sin duda un concepto bastante vago.

La técnica también está extendida al ABS, esto es, a los sistemas de frenado en los automóviles, a las cámaras de enfoque automático, o al control

[810] Reglas Difusas de Inferencia.
[811] El "Fuzzy Learning".

de los ascensores, los filtros de correo basura, también conocido como “spam”, o a los videojuegos, que ahora están por todas partes.[812]

Para construir un sistema difuso, un científico o ingeniero podría comenzar con un conjunto de reglas difusas diseñadas por un experto. El científico-ingeniero puede definir los grados de pertenencia en la entrada de varios conjuntos borrosos, y los de salida mediante conjuntos de curvas. El sistema difuso se aproxima a una función matemática, o a una ecuación de causa y efecto.

Un resultado muy importante nos dice que mediante los sistemas difusos se puede aproximar cualquier función matemática continua. Bart Kosko demostró este teorema de la convergencia uniforme, mostrando que si tomamos los “parches”[813] difusos lo suficientemente pequeños, estos permiten recubrir suficientemente la gráfica de cualquier función, o bien la entrada/salida de una relación. El teorema también muestra que podemos elegir de antemano el error máximo de aproximación, y estar seguros que existe un número finito de reglas difusas para lograrlo.

Los últimos avances en las llamadas *Neural Networks,* las redes neuronales o redes neurales[814], y en los *Algoritmos Genéticos*[815]*,* son sin duda un complemento adecuado para la lógica difusa.

[812] Eso sí, los fabricantes no quieren dar mucha publicidad a la “fuzziness” implícita en estos hechos, y esto es por una razón obvia. Decir que el sistema de frenado de los vehículos está controlado por la lógica difusa no pertenece a la clase de mensajes que permita vender más coches.
[813] “Patches”, en inglés, algo semejante a los entornos de la teoría matemática, pero en este caso, con frontera borrosa.
[814] En términos de los programas que aprenden de la experiencia.
[815] Programas que evolucionan con el tiempo.

Otra de las razones clave para llevar a cabo una mayor investigación en este campo sería el interés en dichas redes neuronales por el parecido con los sistemas difusos. Buscando las relaciones entre las dos técnicas, y obteniendo de esta manera Tecnologías y Lógicas Neuro-Fuzzy[816], que utilizan métodos de aprendizaje basados en redes neuronales para identificar y optimizar sus parámetros. Entonces, como se dijo, aparecen los algoritmos genéticos, que junto con las redes neuronales y los sistemas difusos "son herramientas muy poderosas, y por lo tanto, de gran interés para la investigación futura, tanto para las matemáticas actuales como para la mayoría de las nuevas, que ya están aquí, y rápidamente van tomando forma".[817]

Las redes neuronales son un modelo diseñado a partir de conjunto de "neuronas" y de "sinapsis" artificiales, que cambian sus valores como respuesta a las entradas de las neuronas circundantes y de las sinapsis. La red neuronal actúa como una computadora, ya que asigna recursos y resultados. Las neuronas y las sinapsis pueden ser tanto componentes de silicio, o chips cuánticos, como ecuaciones incorporadas al software, que simulan su comportamiento.

El *Aprendizaje Supervisado*[818] llegó a través de las redes supervisadas, ajustando las reglas de un sistema difuso, como si fueran las sinapsis. El usuario proporciona el primer conjunto de reglas, que son refinadas por las redes neuronales mediante la ejecución a través de cientos de miles de entradas, que varían ligeramente de modo "fuzzy", estableciendo cada vez en

---

[816] Neuro-Difusas.
[817] Dubois-Prade.
[818] O "Supervised Learning".

qué medida está funcionando bien el sistema. La red tiende a mantener los cambios que mejoran el rendimiento y hacer caso omiso de los demás.

El modelado difuso es hoy día con mucha frecuencia utilizado para transformar el conocimiento de un experto en un modelo matemático. El énfasis está en la construcción de un sistema experto difuso que sustituya al experto humano. Asimismo, como una herramienta que puede ayudar a los observadores humanos en la difícil tarea de transformar sus observaciones en un modelo matemático. En muchos campos de la ciencia, algunos observadores humanos han proporcionado descripciones lingüísticas y las explicaciones para los diferentes sistemas. Sin embargo, a la hora de estudiar estos fenómenos, existe una necesidad de construir un modelo matemático adecuado, un proceso que normalmente requiere una comprensión matemática muy sutil. El modelado difuso es un enfoque mucho más directo y natural para la transformación de la descripción lingüística en dicho modelo.

Un modelo difuso representa el sistema real en una forma que se corresponde estrechamente con la manera en que los seres humanos lo percibimos. Así, el modelo es claramente comprensible, y cada parámetro tiene un significado fácilmente perceptible. El modelo puede ser hábilmente modificado, para así incorporar nuevos fenómenos, y si su comportamiento es distinto de lo esperado, puede resultar más fácil encontrar la regla que se ha de modificar y saber cómo hacerlo. Además, los procedimientos matemáticos utilizados en el modelado difuso se han probado muchas veces, y sus técnicas están relativamente bien documentadas.

La posible “mala reputación”, aparte de la agria polémica sobre la lógica difusa, además de los consabidos prejuicios, está posiblemente basada[819] en un nombre que fuera en su día posiblemente muy mal elegido, como se ha señalado en muchas ocasiones. Porque la lógica llamada difusa no es difusa en sí misma, ya que tiene una definición matemática precisa, pero sí lo es, en cambio, el mundo sobre el que se aplica, incluida nuestra percepción de sus límites y de las categorías.[820]

La investigación sigue adelante con el apoyo de la lógica difusa, lo que sirve para seguir avanzando la Ciencia en los principales países, si hablamos en términos de progreso económico y tecnológico, incluso en países con menor cultura científica, o más tradicional y de tipo más estático, como bien puede ser la del territorio español, o países similares. Pero los grupos que se han formado al menos intentan hacer avanzar la ciencia, siempre bastante precaria en diferentes “grados”, pero siguiendo esa misma y prometedora dirección. También cuando se analizan en profundidad tienen grandes derivaciones y consecuencias[821], lo que influye (querámoslo o no) en los más apasionantes desafíos del futuro.

Hay dos obstáculos principales que posiblemente vengan impidiendo su divulgación completa, así como la absorción progresiva de esta nueva forma de pensar frente a la ciencia; por lo menos, en algunos de sus campos. Se trata de la visión tradicional de los temas matemáticos, repetidos del mismo modo, hasta la saciedad, incluso cuando hace mucho que ya han perdido su interés y

[819] Al menos, en parte.
[820] ZADEH, L. A., *op. cit.*
[821] Sobre todo, en los fundamentos matemáticos y filosóficos.

su eficacia. Por lo tanto, hay quienes ignoran esta nueva ciencia, en parte por la ignorancia, por el arraigado prejuicio; en parte también por un irracional desdén hacia lo nuevo y no aprendido cuando aún se estudiaba (para muchos, en tiempos remotos). Ya sabemos lo de aquel viejo y sabio adagio, según el cual

"sólo el necio desprecia cuanto ignora"

Otra dificultad importante es que para algunos esta teoría se contempla como una herramienta útil para todo, una especie de "ungüento amarillo", pero no muy consistente desde el punto de vista teórico, considerada por ello con cierta altivez, ya que es a menudo vista como sólo dedicada a cuestiones técnicas, que además, se divisan con desapego desde la torre de marfil en que se han atrincherado tradicionalmente no pocos matemáticos. Y es que puede ser muy perniciosa, aparte de absurda, esta irrazonable situación, si por mucho tiempo subsiste, sobre todo, lo puede ser para determinados países no precisamente muy avanzados científicamente.

La Ciencia[822], su madre, la Filosofía, y también su hija, la Tecnología, se perderán o se salvarán juntas. Porque todas ellas vienen de un origen común, y sólo son distintos enfoques, pero a menudo convergentes, de una misma realidad, que presenta muchas facetas. Lógicamente, si una cosa resulta además que es útil, esta será la mejor situación posible. Ha de contar no sólo la belleza, sino también (aunque no exclusivamente) la utilidad de las cosas. Pero el mundo real no es en absoluto preciso, y por ello, las nociones de vaguedad, la de incertidumbre, la imprecisión, etc., son conceptos y percepciones que

[822] Junto con su hermana más próxima y semejante, la Filosofía.

resultan fundamentales en la manera como los seres humanos abordan y resuelven los problemas.

Es preciso señalar que algunos avances, entre los cuales podemos mencionar, por ejemplo, los operadores de agregación[823], así como todo lo relativo al modelado difuso, son cruciales. Y junto con todo ese desarrollo, está la posibilidad de nuevas generalizaciones de nuestras teorías matemáticas más conocidas, como los teoremas clásicos del Análisis, que así nos permitan avanzar en el tratamiento de la incertidumbre, a la espera de crear una nueva matemática, que sea más pegada a la realidad.

Es también importante observar que ciertos otros campos, aparentemente alejados del tratamiento de la borrosidad, tales como son los de la simetría y de la entropía, han entrado en nuevas vías de investigación, como es el caso de la simetría aproximada, la entropía aproximada, los gráficos borrosos, y así sucesivamente. Nosotros mismos hemos realizado algunas modestas aportaciones a este campo de investigación.

Recordemos que acerca de nuestro país[824], y por poner algunos ejemplos concretos, debemos mencionar al grupo de trabajo que funciona en el Departamento de Inteligencia Artificial de la Universidad de Granada, o el del Centro de Investigación en Inteligencia Artificial y Soft Computing, establecido en la localidad de Mieres, y que ha sido creado por el Gobierno del Principado de Asturias. Cuenta con grandes investigadores de prestigio internacional, y además, allí se encuentra el precursor de todos nosotros en España: el

[823] Las t-normas, las t-conormas, las cópulas -nombre en extremo pintoresco-, etc., y a los cuales nos referiremos más adelante.
[824] Tal como decíamos en el Capítulo II de esta Tesis.

profesor Enric Trillas. También hay un esforzado grupo de investigadores trabajando en Barcelona, en torno al Consejo Superior de Investigaciones Científicas (C. S. I. C.), como Lluis Godó, Francesc Esteva, etc. Otro, en la Universidad Pública de Navarra (dirigido por Humberto Bustince), e incluso alguno en Zaragoza o en Madrid, sobre diversos temas relacionados con la Lógica Difusa.

Cuando estábamos escribiendo algunas de estas páginas, el 16 de Enero de 2013, nos llegó la grata noticia[825] de la merecida concesión del importante *Premio "BBVA – Fronteras del Conocimiento"* a Lofti A. Zadeh, por "su invención de la Lógica Difusa". Este es, sin duda, de los premios más acertados que se han concedido desde hace ya mucho tiempo. Creemos que servirá como un gran soporte para un nuevo impulso en el reconocimiento de nuestras teorías y para que su difusión, en el mundo del pensamiento, y no sólo en el tecnológico, sea mayor aún, quebrando las resistencias de quienes se han constituido a sí mismos como las rémoras del pensamiento.

La candidatura había sido presentada por Enric Trillas y por Luis Magdalena[826], de quienes antes hemos hablado. Ha sido un indudable acierto por su parte, de quienes lo proponen y de quienes lo conceden. Además de la premura biológica, pues aunque siga trabajando con entusiasmo, Lofti A. Zadeh ya pasa de los noventa y dos años.

[825] A través de toda la prensa y de la Red.
[826] Del Centro de Investigación en Soft Computing, ubicado en la localidad asturiana de Mieres.

22. De la teoría de conjuntos clásica a la de los conjuntos borrosos (o fuzzy sets).

Como bien sabemos, en su forma clásica la Teoría de Conjuntos procede del matemático alemán[827] George Cantor, que decía en uno de sus trabajos:

> Unter einer Mannigfaltigkeit oder Menge verstehe ich nämlich allgenein jedes Viele, welches sich als Eines denken lässt, d. h. jeden Inbegriff bestimmter Elemente, welcher durch ein Gesetz zu einem Ganzen verbunden werden kann.[828]

Sin embargo, como a L. A. Zadeh[829], sus ideas le valieron el hacerse con numerosos enemigos. Muchos matemáticos demasiado tradicionales no aceptaban sus ideas revolucionarias, que amenazaban para ellos con terminar con el mundo tranquilo, seguro y a salvo de cambios, que era el de las matemáticas[830].

Menos mal que algunos otros buenos matemáticos[831] apoyaron a Cantor, haciendo frente a alguno de los más furibundos ataques procedentes de

---

[827] Que era de origen ruso, nacido en San Petersburgo, aunque en realidad, su formación luego fuera germana.

[828] Ver lo que aparece de (y sobre) Cantor en la Bibliografía final.

[829] Este, con la Lógica Borrosa y la Teoría de los Conjuntos Difusos, casos semejantes en un principio.

[830] Un matemático –y tan famoso- como fuera el francés Henri Poincaré llegaría a expresar también ese furibundo disgusto con la teoría de conjuntos de Cantor, afirmando que sus ideas habían de ser consideradas por las generaciones futuras como “una enfermedad pasajera, de la que pronto nos recuperaremos”.

[831] Como fuera el caso del escandinavo Gösta Mittag-Leffler, o de los alemanes Karl Weierstrass y Richard Dedekind.

Leopold Kronecker, que entonces actuaba, en cierta medida, como el respetado e inapelable oráculo oficial, desde su cátedra de Berlín.

La historia pone en algunas ocasiones las cosas en su sitio, y el trabajo de Georg Cantor es hoy de los más ampliamente aceptados por la comunidad matemática, mientras que los de su rival[832] han quedado en la más que discreta sombra, por decir algo.

La imaginativa e innovadora teoría de Cantor ha dado también lugar a muchas nuevas preguntas, especialmente acerca de los fundamentos de la teoría de conjuntos, como el análisis de la completitud y el de la consistencia de los sistemas, que pueden mantener ocupados a los matemáticos y filósofos futuros durante siglos. Así, por ejemplo, hay un buen filón para poder seguir trabajando en la Teoría de los Conjuntos Difusos[833] o en la Teoría de Conjuntos Rugosos[834]y muchas otras, como pueden ser las combinaciones de las anteriores, u otras nuevas que aparezcan.

Posteriormente, *Gottlob Frege (1848-1825)* pensaba tratar de conseguir la algebraización total de la Matemática, esto es, que dicha ciencia se redujera a una pura ramificación de la propia Lógica. Porque para él las matemáticas debían ser reducibles a la lógica[835] en el sentido de que todas las proposiciones de las Matemáticas son deducibles de las verdades de la lógica. Sólo que esto falló cuando estaba a punto de publicarse el segundo volumen

[832] Principalmente, sobre Teoría de Números.
[833] Fuzzy Sets.
[834] Rough Sets.
[835] Generando la corriente denominada *"logicismo".*

de su obra, nos referimos a la llamada *Leyes básicas de la aritmética*[836], que tantos esfuerzos le había costado. En 1902, con las pruebas ya corregidas para tal segundo volumen camino de la imprenta, recibió una carta de Russell en la que éste le advertía acerca de una grave inconsistencia en su sistema lógico[837]. Frege introdujo a toda prisa una modificación en uno de sus axiomas, de lo que dejó constancia en un apéndice de dicha obra. Este golpe a la estructura de su obra prácticamente puso fin a su actividad académica.

El descubridor de los fallos que supondrían uno de los mayores fiascos en la historia del pensamiento científico iba a ser un lord inglés, filósofo hábil y sutil dominador de la Lógica Matemática. Y este no era otro que Bertrand Russell, quien descubrió que la noción intuitiva de un conjunto determinado en el sentido de Cantor conduce a las llamadas paradojas o antinomias[838].

Una de las paradojas más conocidas es la llamada *Antinomia del "Power Set"*[839]. Esta es la siguiente: consideremos X, el conjunto[840] de todos los conjuntos. Así que X sería el conjunto más grande. Supongamos ahora que Y denota el conjunto de todos los subconjuntos de X. Obviamente, Y es mayor que X, lo abarca, porque el número de subconjuntos de un conjunto siempre es mayor el número de sus elementos. Por ejemplo, si X = {1, 2, 3}, entonces

$$Y = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

[836] FREGE, G., *Grundgesetze der Arithmetik.*
[837] Conocida de ahí en adelante como la "Paradoja de Russell".
[838] O contradicciones.
[839] O del conjunto de partes de un conjunto, también llamado conjunto potencia, que es lo que significa el "power set".
[840] Infinito.

donde ∅ denota el conjunto vacío. Al considerar el conjunto de los conjuntos que no se contienen a sí mismos, llegamos a la contradicción. Porque si pertenece a él, no le pertenece, y si no le pertenece, entonces le pertenece. Así que el concepto básico de las matemáticas, que es el concepto de conjunto, resultaba finalmente contradictorio.

Eso significaba, pues, que una teoría más sutil y más cuidadosa debiera ser planteada. Para lo cual se fueron proponiendo sucesivas “afinaciones” del instrumento matemático conjuntista, podríamos decir; así, la

- *Teoría Axiomática de Conjuntos,* de Ernest Zermelo y Abraham Fraenkel, de 1904.

- La *Teoría de Tipos,* del propio Bertrand Russell, elaborada junto con su maestro y amigo, Alfred North Whitehead, en 1910.

- La *Teoría de Clases,* de John Von Neumann[841], en 1920.

Todas estas progresivas “mejoras” consisten en ir introduciendo restricciones[842], y fueron impuestas sobre los objetos como requisitos previos para que puedan pasar formar un conjunto.

Comentemos alguno de los diversos sistemas axiomáticos que se han ido proponiendo para completar y hacer consistente la Teoría de Conjuntos, con el justificado propósito de evitar las paradojas señaladas por Russell y por otros. Así, tenemos la llamada Teoría de Zermelo-Fraenkel (ZF, como queda dicho en

[841] Janos Neumann, en su nombre originario de húngaro y judío de Budapest.
[842] Y manejando axiomas alternativos.

los acrónimos), o de la ZFC[843] (una variación de la anterior, puesto que ahora se admite el Axioma de Elección; el Axiom of Choice: de ahí la C), o la NBG (el sistema de Von Neumann-Bernays Gödel), más elegante, pero menos utilizado.

Los *axiomas del sistema de ZF* serían estos ocho:

1.º Axioma de Extensionalidad: Si los conjuntos A y B tienen los mismos elementos, entonces son iguales entre sí: A = B.

2.º Axioma de Emparejamiento (Pairing): Dados dos elementos, a y b, existe un conjunto, el {a, b}, que contiene exactamente al a y al b:

3.º Axioma de la Separación o Comprehensión, también llamado Axioma de los Subconjuntos, o del Esquema de Separación: Si p es una propiedad, con parámetro λ, entonces para todo x y para todo λ, existe un conjunto, el Y = $\{u \in X: P\ (u, \lambda)\}$, tal que contendrá a todos los $u \in X$ que cumplan la propiedad P.

4.º Axioma de la Unión, o de la Suma Conjuntista: Para todo conjunto X, existe otro conjunto, el Y = $\cup$ X, que es la unión de todos los elementos de X.

*5.º Axioma del Conjunto de Partes, o del `Power Set´:* Para todo conjunto X, existe un conjunto, Y = $\mathfrak{P}$ (X), que es una colección de todos los subconjuntos (o `partes´) del X.

6.º Axioma de Infinitud: Existe un conjunto que es infinito.

[843] La tesis del norteamericano Richard Montague (1930-1971), cuyo título fue “Contributions to the Axiomatic Foundations of Set Theory”, siendo dirigida por Alfred Tarski, expuso la primera prueba de que toda posible axiomatización de la teoría ZFC estándar debe contener infinitos axiomas. O dicho de otro modo: que la ZFC no puede ser finitamente axiomatizable.

7.º Axioma de Reemplazamiento (o del `Schema of Replacement´): Si una clase, F, es una función, entonces $\forall X\ \exists Y = F(X) = \{f(x): x \in X\}$.

8.º Axioma de la Fundamentación (o de ´Foundation´), también conocido como Axioma de Regularidad: Todos los conjuntos no-vacíos poseen un elemento minimal.

Hasta aquí llegan los ocho axiomas del sistema de Zermelo-Fraenkel (denotado ZF). Si a ellos le añadimos el que vamos a poner como noveno, que es el famoso `Axiom of Choice´, tenemos el que se denota como sistema axiomático ZFC:

9.º Axioma de Elección: Toda familia de conjuntos no vacíos posee una función de elección.

Otra opción sería tomar del primero al sexto, sin considerar el séptimo, e incluyendo el octavo. Este es el que se llama sistema de Zermelo. Pero no hay un acuerdo general, ni mucho menos, dentro de la literatura matemática, acerca de cuáles debieran ser los axiomas considerados para una teoría de Zermelo. Así, por ejemplo, Elliott Mendelson (en 1977) no incluía el Axioma de Elección, sino que en su lugar, ponía el séptimo, o Axioma de Reemplazamiento. En cambio, Enderton (también ese año de 1977) incluía el octavo y el noveno, pero no el séptimo. Otro caso a reseñar es el del matemático japonés Itô, quien les añadía un llamado `Axioma del Conjunto Vacío´, derivado del tercero y del sexto de los axiomas anteriores.

Otro ejemplo más es el de Abian, que en 1969 probaba la consistencia e independencia de cuatro de los axiomas del sistema axiomático de ZF.

De modo intuitivo, un conjunto vendría a ser una colección de objetos, o elementos, que cumplen una determinada propiedad. Eso nos induce la tentación de postular como cierta y necesaria esta Regla, que resulta ser falsa:

10) Axioma de Comprehensión: Si P es una propiedad, entonces existe un conjunto Y = $\{x: P(x)\}$.

Su falsedad queda mostrada por la famosa Paradoja de Russell: Consideremos el conjunto, C, cuyos elementos son todos aquellos (y sólo aquellos) conjuntos que no son miembros de sí mismos. La pregunta ahora sería la de si C pertenece o no pertenece a C. Porque si C le pertenece, entonces no será un miembro de sí mismo, y si por el contrario, no le pertenece, entonces es miembro de sí mismo. Todo lo cual es claramente contradictorio, llegando a la conclusión de que el $\{X: X \notin X\}$ no es en realidad ningún conjunto, por lo que debiera ser revisada la noción intuitiva que de estos tenemos.

El modo de eliminar esas paradojas consiste en sustituír el Esquema de Comprehensión por una versión suya más débil o atenuada, la del Esquema de Separación, que nos dice que si P es una propiedad, entonces para todo x, existe un conjunto Y = $\{x \in X: P(x)\}$. Así que una vez superado el escollo del Esquema de Comprehensión, se desactiva la Paradoja de Russell, y de paso, obtenemos una buena información: que el conjunto de todos los conjuntos no existe. De otro modo, se aplicaría el Esquema de Separación a la propiedad

$$x \notin x$$

O dicho en otras palabras: que es el propio concepto intuitivo de conjunto de todos los conjuntos lo que es paradójico, y no la idea de comprehensión en sí misma.

Se ha de mencionar también la existencia del sistema axiomático denotado por NBG, o con su nombre completo, *sistema de Neumann-Bernays-Gödel.* Este resulta de una estructura más elegante, pero más compleja; por ello, se ha ido conservando en su lugar el de ZFC. Pero el sistema de ZF no es finitamente axiomatizable[844]; en cambio, el NBG sí lo es. Se puede considerar que el NBG es una extensión del sistema de ZF, pues una afirmación sobre conjuntos es demostrable (o `provable´, en inglés) en NBG, si y sólo si (syss) lo es en ZF. El NBG se introduce considerando para ello como conceptos primitivos el de `clase´y el de `pertenencia´, en lugar del de `conjunto´, que era el habitual en las otras teorías conjuntistas. De todas modos, este sistema se fue conformando, a través de diversas y sucesivas aportaciones, de los tres autores cuyo nombre lleva.

También tenemos el *sistema axiomático de Kripke-Platek,* denotado por *KP.* Se denomina así en honor de Saul Kripke y Richard Platek, que fueron quienes lo propusieron. Como teoría conjuntista, es más débil que el sistema ZFC. A diferencia de éste, no incluye el Axioma del Conjunto de Partes (el quinto del otro sistema), y tan sólo acepta formas restringidas de los Axiomas de Separación y de Reemplazamiento (el tercero y el séptimo, respectivamente). Pero esto lleva a que el KP tenga conexiones con la teoría de la recursión

[844] Este resultado fue probado por Montague, en 1961. Lo que quiere decir es que no existe ninguna colección finita de axiomas que lógicamente equivalga al conjunto infinito de axiomas del sistema de ZF.

generalizada, entre otras. También cabe considerar la KP con `urelements´, la cual es una de las pocas teorías conjuntistas que contemplan a dichos objetos matemáticos. El nombre le viene del alemán, donde el prefjo `ur´quiere decir `primordial´. Se trata de un objeto, o constructo matemático, que no es un conjunto, pero que sí podría ser un elemento de un conjunto. También se les llama, a veces, los `átomos´. Hay diversos modos equivalentes de tratarlos dentro de una teoría de primer orden (o FOT, por first-order theory). No suelen mencionarse dentro de las exposiciones estándar de la ZF o de la ZFC, salvo en algún caso, como es el de Patrick Suppes.

Otra *teoría conjuntista* es la de *Paul Morse y John L. Kelley* (en acrónimo, MK), que sería una versión reforzada de la NBG. De hecho, puede la NBG ser consistente, mientras que la MK no lo es.

Willard Van Orman Quine propuso un nuevo sistema, el denominado *"New Foundations"* (NF, en acrónimo). Lo hizo al introducir una versión diferente del Axioma de Restricción o de Comprehensión. Dicho sistema axiomático, el NF, es muy distinto del de la teoría ZF, ya que éste último evita los conjuntos `demasiado grandes´. Se puede probar que en el NF no se verifica el Axioma de Elección.

Otro sistema más sería el de la llamada *"Modern Logic"* (ML, en acrónimo). Viene a ser a la NF como la NBG es a la ZF. Resulta más fuerte que el ZF, porque en él se pueden probar afirmaciones que en el NF no podrían demostrarse. Pero si el NF es consistente, entonces el ML también lo será.

Pero algunos matemáticos propusieron que en lugar de realizar sucesivos ajustes sobre la vieja teoría, se redefiniera la noción de “conjunto”, dando lugar con ello a la aparición de nuevas teorías, entre las que podemos mencionar éstas:

- La *Mereología,* propuesta por *Stanislaw Lesniewski*[845]*,* en 1915. Trata de las relaciones de la parte con el todo, que ordena el universo, y ha sido axiomatizada como una aplicación a la Ontología formal de la Lógica de Predicados[846]. Esa ordenación a la antes aludimos se basa en

[845] Lesniewski definía también la ontología, que es uno de los pilares fundamentales de sus tres sistemas: la prototética, la ontología y la mereología. Decía que era como un cierto tipo de `lógica tradicional´modernizada. De hecho, y durante el curso 1937/1938, Lesniewski dio un curso bajo el título de “Traditional `formal logic´, and traditional `set theory´ on the ground of ontology”. Su ontología estaría estrechamente relacionada con la lógica formal aristotélica tradicional, de la cual supone una extensión y una mejora, siendo por otra parte un punto de llegada en su intento de construír un cálculo de nombres, dentro del área de la lógica formal (entonces llamada `logística´).
No olvidemos tampoco que Lesniewski mantuvo una postura radical, “absolutista” podríamos decir, en relación con la Verdad, lo mismo que hiciera Twardowski, considerando la MVL como una especie de juego de ingenio, cual pudiera ser el ajedrez. En su artículo “The Critique of the Logical Principle of the Excluded Middle”, que es de 1913, Lesniewski distinguía entre un *Principio Ontológico* (todo objeto o bien es A, o bien es no A), y un *Principio Lógico* (según el cual, entre dos proposiciones contradictorias, al menos una debe ser verdadera). Pero rechazaba a continuación éste último principio, poniendo como contraejemplo que si tomamos `Algún centauro tiene cola´ y `Algún centauro no tiene cola´, serían ambas falsas, pues el término-sujeto, `centauro´, es vacío. En dicho escrito, Lesniewski argumentaba en contra de diversas construcciones filosóficas, como la teoría general de objetos, de Kazimierz Twardowski, o la teoría de los objetos imposibles, de Alexius Meinong. Al tiempo, ofrecía soluciones a las paradojas de Grelling y del Mentiroso. Durante la Primera Guerra Mundial dio fin a su obra *Foundations of a General Theory of Sets I,* en 1916. En ella hacía una presentación rigurosamente deductiva de la teoría de las partes, del todo y de las colecciones. No le parecía bien el término `mnogosc´ para designar al conjunto, y así dio lugar a su teoría `Mereology´, o Mereología, cuyo nombre proviene del griego antiguo: μεροζ, que significa `parte´. Pretendía con ello distinguirse de lo que irónicamente denominaba `Teoría oficial de Conjuntos´, con la que obviamente no estaba de acuerdo.

[846] Como sabemos, la herramienta fundamental para la comunicación humana es el lenguaje, que está formado por frases de diverso tipo: declarativas, imperativas o interrogativas. Las declarativas serían el elemento básico para describir el conocimiento. En Lógica tratamos de los métodos de formalización del conocimiento humano. Así, pues, se intenta con ella formalizar las frases declarativas. Existen para este propósito dos niveles de abstracción: uno, el de la Lógica Proposicional, y otro, el de la Lógica de Predicados. Que acudamos a uno ú otro va a depender de la “granulación”, o grado de detalle, que requiramos para la aplicación correspondiente. La Lógica Proposicional es también llamada Lógica de Enunciados. Toma como elementos básicos las proposiciones, o frases declarativas, en tanto en cuanto que son los elementos de una frase que constituyen una unidad de comunicación del conocimiento, y que puede ser considerada verdadera o falsa. Mientras que la Lógica de Predicados estudia las

que: el todo es una parte de sí mismo[847], que una parte de una parte de ese todo es también una parte de ese todo[848] y que dadas dos entidades distintas, una de ellas no puede ser una parte de la otra [849]. Pero los textos universitarios ignoran la nueva Ciencia de la Mereología, a pesar de haber sido desarrollada por ingenieros, científico y filósofos, y tener una prometedoras aplicaciones en Computación en general, y en particular, en la Inteligencia Artificial.

- La llamada *"Teoría Alternativa de Conjuntos"*[850]*(Alternative Set Theory, AST, en acrónimo),* que fue propuesta por Petr Vopenka en 1970.
- La *Teoría "Penumbral" de Conjuntos,* que es de Apostoli y Kanada, la cual fue planteada en el año 1999, etc.

Sin duda, la propuesta más interesante fue la dada por *Stanisław Lesniewski*[851] que como decíamos, propuso que en lugar de los grados en las relaciones de pertenencia entre los conjuntos y sus elementos, se tomara la relación de "being a part", la de "formar parte de". En su teoría llamada de la *Mereología,* esta relación juega un papel fundamental.

Ninguna de estas tres teorías que acabamos de mencionar obtuvieron, sin embargo, una buena acogida por parte del mundo académico de los matemáticos, pero sí que tuvieron mejor suerte (en especial, la Mereología) dentro del ámbito filosófico. Más recientemente, habrían encontrado cierta

---

frases declarativas también, pero con mayor granulación, esto es, con mayor grado de detalle, entrando para ello a considerar la estructura interna misma de las proposiciones. Se toman, en éste caso, como elementos básicos los objetos y las relaciones existentes entre ellos.

[847] Reflexividad.
[848] La Transitividad.
[849] La Antisimetría.
[850] AST, en acrónimo.
[851] Verlo en la obra de Wolenski.

repercusión entre los científicos de la computación, como es el caso de Lech Polkowski o de Andrezj Skowron.

Los conceptos fundamentales de la Teoría Clásica de Conjuntos fueron muy bien expuestos y desarrollados por el matemático alemán *Félix Hausdorff (1868-1942),* en su obra *Grundzüge der Mengenlehre.* En alguno de sus capítulos trata también de la Teoría de la Medida y de la Topología, que entonces se consideraban parte de la Teoría de Conjuntos, aunque luego se desarrollaron y son consideradas hoy en día como ramas aparte, aunque fuertemente interconectadas con la matriz original.

Otra gran aportación al esclarecimiento de estas ideas sería la obra del lógico germano-israelí Adolf Abraham Fraenkel (1891-1965). Su obra más conocida fue titulada[852] *Abstract Set Theory.* Se trata del mismo Fraenkel que mencionábamos antes, junto con Ernest Zermelo (1871-1953).

Abraham Fraenkel intentaría en dos ocasiones, en 1922 y 1925, axiomatizar la teoría de conjuntos, eliminando de ella las paradojas y mejorando el sistema axiomático de Zermelo. Para lo cual creó los llamados Axiomas de Zermelo-Fraenkel[853], que son diez, demostrando formalmente su independencia del Axioma de Elección.

---

[852] En su versión inglesa, de 1953. Antes ya había escrito su:
FRAENKEL, A. A., *Einleitung in die Mengenlehre,* Berlin, Springer Verlag, 1919.

[853] Z. F., en acrónimo, o en una de sus variantes, ZFC (cuando se admite el axioma de elección).

Fue en 1922 cuando Abraham A. Fraenkel y Thoralf Skolem[854] trataron de perfeccionar por primera vez el sistema axiomático de Zermelo. El sistema resultante es hoy el más usado dentro de la Teoría Axiomática de Conjuntos.

En tiempos más recientes, se pueden considerar las *Teorías Alternativas de Conjuntos*[855] *(AST,* en acrónimo inglés*)*. Como su nombre indica, se proponen como una alternativa a la teoría de conjuntos clásica, o Crisp Set Theory.

Algunas de las recogidas bajo ese epígrafe serían:

- La teoría de los *Semisets.*
- La teoría de conjuntos denominada *"New Foundations".*
- La *Positive Set Theory.*
- La *Internal Set Theory.*

La *AST* fue desarrollada, en las décadas de los 1970´s y 1980´s, por Petr Vopenka y sus alumnos[856]. Se construye a partir de algunos conceptos introducidos por la teoría de los "semisets", con algunos cambios radicales. Por ejemplo, se supone que todos los conjuntos que intervienen son "formalmente" finitos, lo cual permite aplicar la ley de inducción matemática para cualquier conjunto de fórmulas. O para ser más precisos: aquella parte de la AST que consiste en axiomas relacionados con conjuntos equivale a la teoría de ZF[857], en la que el axioma de infinitud es sustituido por su negación. Aunque algunos

[854] Parece ser que de forma independiente.
[855] La ya mencionada AST, como acrónimo de la "Alternative Set Theory".
[856] De introducir a Petr Vopenka y a Petr Hájek (esto es, la que podríamos llamar la Escuela de Praga) en los foros científicos internacionales se encargaría el lógico polaco Andrzej Mostowski (1913-1975), también integrante fundamental de la Escuela de Lvov-Varsovia.
[857] Zermelo-Fraenkel Theory.

de tales conjuntos puede contener subclases que no sean conjuntos, lo cual es una diferencia clave con la teoría cantoriana de conjuntos finitos, por lo que se llamarán infinitos en la AST.

Los antes mencionados *"semisets"* constituyen una clase propia contenida en un conjunto. Como teoría, fue propuesta por el autor antes citado, Petr Vopenka, y por el también checo Petr Hájek, en 1972[858].

Estos semiconjuntos pueden ser útiles para la representación de conjuntos con frontera borrosa[859]. Así, en 1984, Vilém Novák estudió la aproximación de los semiconjuntos mediante conjuntos borrosos, lo que parece más adecuado para conseguir el modelado de la imprecisión.

Existe en la teoría conjuntista más moderna, entre otros, el llamado *Principio de Vopenka*. Este asegura que para toda clase propia de relaciones binarias, existe una de ellas que es elementalmente "embeddable"[860] en otra. O lo que es equivalente: que para todo predicado, P, y toda clase propia, S, existe una "embedding" elemental, la:

$$J: (V_k, \in, P) \rightarrow (V_\lambda, \in, P)$$

para algún k y algún λ de S. Dicho intuitivamente, esto significa que el universo conjuntista es tan amplio que dentro de cada clase propia existirán elementos

[858] La idea procede en realidad de una modificación de la teoría de conjuntos de Von Neumann-Bernays-Gödel; en acrónimo NBG. Recordemos que esta teoría axiomática propone como nociones primitivas las de \`clase´ y \`pertenencia´, $\in$, en vez de la de \`conjunto´. A diferencia de otras teorías, esta es finitamente axiomatizable y evita las paradojas clásicas de la Teoría Intuitiva de Conjuntos.
[859] Las "fuzzy boundaries".
[860] Esto es, se puede ´sumergir´, o es incluible en ella, bajo determinadas condiciones.

que sean similares a los otros, y eso es lo que se formalizará por medio de los embeddings elementales antes aludidos.

Este matemático checo, Petr Vopenka, fue quien dirigió la tesis de otros brillantes lógicos, como Petr Hájek y Thomás Jech, ambos de la misma nacionalidad. El libro de este último, *Set Theory,* se mantiene como obra de referencia de nuestra teoría desde hace ya muchos años.

23. Introducción a los Conjuntos Borrosos, a los Números Borrosos y también a las Medidas Borrosas (Essentials of Fuzzy Sets, Fuzzy Numbers, and Fuzzy Measures).

Los “fuzzy numbers”[861] son subconjuntos borrosos de los números reales que satisfacen ciertas condiciones adicionales. Los números borrosos van a permitirnos modelar la incertidumbre, convirtiendo problemas muy difíciles en otros mucho más accesibles, y esto de una manera muy sencilla.

Las operaciones aritméticas con números difusos también se han ido desarrollando y se basan principalmente en el *Principio de Extensión,* que es un resultado crucial. Cuando se opera con números difusos, los resultados de nuestros cálculos dependen fuertemente de la forma de las funciones de pertenencia asociadas a estos números. Lógicamente, las funciones de pertenencia menos regulares puede que nos conduzcan a cálculos mucho más complicados. Por otra parte, los números difusos con una forma sencilla para sus funciones de pertenencia admiten interpretaciones más intuitivas y naturales.

Pero no sólo debemos aplicar los conceptos y métodos de los conjuntos borrosos, o para su caso particular, el de los números difusos, sino también la

---

[861] O números borrosos.

construcción[862] diseñada para generalizarlos a los números complejos difusos, que es mucho más que una simple ampliación para los números complejos típicos del Análisis Matemático. La perspectiva seleccionada aquí será la de avanzar a través de descripciones axiomáticas.

Históricamente, la ampliación del conjunto de los números se desarrolló a partir del conjunto de los números naturales hasta el de los números enteros, para pasar al de los números racionales, luego al de los números reales, y finalmente, en los últimos tiempos, al de los números complejos. Del mismo modo, el concepto de conjunto se ha ido ampliando en una gran variedad de maneras. Un conjunto difuso es una de entre las posibles extensiones de los conjuntos convencionales[863]. Desde el punto de vista de la ampliación de los rangos de las funciones características, es decir, de las extensiones del conjunto discreto {0,1} al intervalo cerrado unidad, [0,1], esto se parece en cierta medida a la extensión que vse produce desde los números naturales hasta los números reales, en tanto en cuanto que se da el paso desde un conjunto discreto, finito, hasta uno infinito no-numerable.

La complejificación de los conjuntos difusos, la cual fue propuesta por D. Ramot, se caracteriza por la introducción de funciones con valores complejos característicos. La extensión se puede ver entonces como una que va desde los números reales hasta los números complejos.

---

[862] Matemáticamente nueva e interesante.
[863] Clásicos, o “crisp sets”.

Estamos aquí tomando en consideración los conjuntos difusos complejos desde un punto de vista lógico y algebraico. Por lo tanto, será útil al tratar de aplicarlo[864] para el diseño de algoritmos de computadoras cuánticas.

La Lógica Difusa también se conoce como la teoría matemática de vaguedad, y asimismo como la teoría del "razonamiento de sentido común", que se basa principalmente en el uso del *NL.*[865]

Resulta hoy posible demostrar que la Lógica Borrosa se ha convertido ya en una teoría lógica bastante bien desarrollada. Incluyendo, entre otras, la teoría de los sistemas funcionales en FL, dando una explicación de qué y cómo se pueden representar por las fórmulas de la FL mediante los necesarios cálculos. Una interpretación más general de la FL dentro de otras categorías apropiadas de conjuntos difusos es también factible.

La lógica difusa es una herramienta sistemática para incorporar la experiencia humana. Se basa en tres conceptos fundamentales, a saber, conjuntos difusos, variables lingüísticas y las distribuciones de posibilidad. El conjunto difuso se utiliza para caracterizar las variables lingüísticas cuyos valores se pueden describir cualitativamente utilizando una expresión lingüística, y cuantitativamente utilizando una función de pertenencia. Las expresiones lingüísticas son útiles para la comunicación de conceptos y de conocimientos con los seres humanos, mientras que las funciones de pertenencia son útiles para el tratamiento de los datos de entrada numéricos. Cuando un conjunto difuso se asigna a una variable lingüística, impone una

---

[864] Sobre todo, en un futuro no muy lejano.
[865] El Natural Language, o lenguaje natural.

restricción elástica, llamado una distribución de posibilidad, sobre los posibles valores de la variable.

La lógica difusa es una disciplina muy rigurosa y matemática de creciente interés. El *Razonamiento Difuso*[866] es un formalismo sencillo que sirve para codificar el conocimiento humano o el sentido común dentro de un contexto numérico, y los sistemas de inferencia difusa[867] pueden aproximarse arbitrariamente bien mediante cualquier función continua sobre un dominio compacto.

Los FIS y las redes neuronales[868] se pueden aproximar entre sí con un grado de exactitud notable. Desde su primera aplicación industrial, que tuvo lugar en 1982, han despertado el interés general en la comunidad científica, y la lógica difusa ha sido ampliamente aplicada en el análisis de datos, los métodos de regresión y predicción, así como el tratamiento de señales y el procesamiento de imágenes. Muchos circuitos integrados[869] han sido diseñados ya específicamente para la lógica difusa.

Es bien sabido que podemos probar que la Lógica Proposicional es isomorfa a la Teoría de Conjuntos Clásica[870], para lo que basta con establecer una correspondencia adecuada entre los componentes relativos de estos dos sistemas matemáticos. Además, ambos sistemas son isomorfos a su vez a la estructura de un Álgebra de Boole, que se trata de un sistema matemático muy

---

[866] El “Fuzzy Reasoning”.
[867] Fuzzy Inference Systems; FIS, en siglas.
[868] Neural Networks, NNs, en acrónimo.
[869] Con los “fuzzy chips”.
[870] O Cantoriana, la “Set Theory”.

conocido, definido por entidades abstractas y por medio de sus propiedades axiomáticas.

El isomorfismo entre el Álgebra de Boole, la Lógica Proposicional, y la Teoría de Conjuntos nos garantiza que cada teorema en cualquiera de estas teorías tiene una contrapartida equivalente en cada una de las otras dos teorías. Ese isomorfismo nos permite estudiar paralelamente todas esas teorías, desarrollando tan sólo una de ellas.

Por lo tanto, no coviene pasar mucho tiempo ahora revisando la lógica matemática[871], porque suponemos que es suficientemente conocida, y si pasamos mucho tiempo con ella, no podremos detenernos a analizar con verdadera profundidad los conceptos comparables de la Lógica Fuzzy.

Las operaciones entre conjuntos borrosos, A y B, dentro de un Universo de Discurso, U, y relativas a las conocidas conectivas lógicas de complementario, intersección y unión[872] serían:

$$\mu_{U-A}(x) = 1 - \mu_A(x), \text{ para todo } x \in U,$$

$$\mu_{A \cup B}(x) = \text{máx } \{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \text{ para todo } x \in U,$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = \text{mín } \{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \text{ para todo } x \in U.$$

En los Fuzzy Sets complejos se debe administrar un complejo grado de pertenencia, representado mediante coordenadas polares, ya que se trata de una combinación de un grado de pertenencia de un conjunto borroso junto con un valor de fase crisp, o nítido, que indica la posición dentro del conjunto. El

[871] La “Crisp Logic”.
[872] La negación, NOR, y los operadores OR y AND.

valor compuesto contiene más información de la codificada en un conjunto difuso tradicional y permite así un razonamiento más eficiente.

Podemos presentar una interpretación nueva y generalizada de un grado complejo de pertenencia, entendiendo que un grado de pertenencia complejo definiría una clase difusa compleja.

La nueva definición nos ofrece así una rica semántica, que no estaría fácilmente disponible a través de los tradicionales conjuntos borrosos por un lado, o complejos por el otro, no limitándose a amalgamar un compuesto de "crisp data", cíclicamente, con datos borrosos. Además, ambas componentes de la clase difusa compleja llevarían también encriptada información difusa.

Una clase compleja se puede representar bien en coordenadas cartesianas o en coordenadas polares, donde ambos ejes inducirían interpretación difusa. Otra de las novedades de este sistema es que nos va a permitir el representar un conjunto infinito de conjuntos difusos.

Esto proporciona una nueva definición de clases complejas de conjuntos "fuzzy", junto con la definición axiomática de las operaciones básicas de clases difusas complejas. Además, la transformación de coordenadas, así como una extensión de las clases difusas en dos dimensiones a las de *n* dimensiones, que ahora son clases difusas que podremos representar.

Previamente, definamos qué es un conjunto borroso.

Un *conjunto borroso,* C, sobre la recta real, **R**, se puede definir[873] como una colección de pares ordenados:

$$S = \{x \mid m_c\ (x): x \in R\}$$

Aquí, $m_C(x)$ se llamaría la *función de pertenencia* de C, actuando sobre un elemento x, dándonos la información de en qué grado x pertenece a C.

El conjunto S se dirá que es *normal,* si existe al menos un punto real, x*, con

[873] Se puede distinguir, cuando se trabaja sobre conjuntos y sistemas borrosos, entre los que son del tipo-1 y los que son del tipo-2. Estos constituyen una generalización de los primeros, que son los usualmente considerados cuando empezamos a estudiarlos. Se trataría de conjuntos clásicos, o "crisp sets", ampliados, A, donde un elemento $x \in A$ ó $x \notin A$. Describiendo la vaguedad, pero no la incertidumbre. Pues en un principio fueron propuestos estos del tipo-1, pero se les ponía la objeción de que su función de pertenencia no admitiera la posible presencia de incertidumbre asociada con sus valores, lo cual no parecía demasiado "fuzzy".
Pues ¿por qué no ha de haber un cierto nivel de incertidumbre en los propios grados? Así que los conjuntos y sistemas borrosos del tipo-2 lo que hacen es incorporarlos. La notación los distingue con un símbolo \`~´ en los de tipo-2, sobrepuesto al nombre del conjunto borroso del tipo-1 al que vaya asociado. Lofti A. Zadeh los generalizaba, en 1976, a los de tipo-n, con n = 1, 2, 3,.... Existen dos "escuelas de pensamiento" o modos de mirar los "type-2 fuzzy sets". Una sería la de los *Interval type-2 fuzzy sets,* y otra, la de los *Generalized type-2 fuzzy sets.* Se caracterizan de modo dual, mediante las funciones de pertenencia superior (upper) e inferior (lower). Fueron estudiadas por diversos autores; entre ellos, podemos mencionar a Karnik, Mendel y John. Desde el punto de vista geométrico, la "membership function" de un fuzzy set de dicho tipo-2 será tridimensional, correspondiendo su tercera componente al valor que tome la función de pertenencia en cada punto sobre su dominio bidimensional (se refiere al de la proyección, o sea, de aquel de tipo-1 subyacente al mismo). Lo cual se concreta en que si la terna fuera, por ejemplo, [(a, b), v], entonces eso querría decir que: μ (a, b) = v.
Dicen Klir y Folger, *op. cit.,* p. 12 y 13, que la precisión de la función de pertenencia, sea cual sea esta, necesariamente ha de estar limitada; porque no sólo es problemático, sino también paradójico, que la borrosidad (o \`fuzziness´) se consiga mediante grados de pertenencia que ellos mismos sean números precisos. Pues aunque eso no resulte ningún problema en muchas de las aplicaciones, sería del mayor interés introducir una distinción según la cual los grados de pertenencia puedan ser también borrosos. A los conjuntos así descritos se les denominaría \`type-2 fuzzy sets´, esto es, conjuntos borrosos o difusos del tipo 2. Por tanto, un conjunto borroso del tipo 1 va a ser un conjunto difuso ordinario, mientras que los elementos de uno de tipo 2 estarán dotados de unos grados de pertenencia que ellos mismos serán a su vez conjuntos borrosos del tipo 1. Veámoslo sobre un ejemplo: supongamos definido el conjunto difuso de tipo 2 mediante la propiedad de \`ser inteligente´; con ello, los grados de pertenencia asignables a una población muestral (nuestro universo de discurso, en este caso) serán conjuntos borrosos del tipo 1, definidos por medio de \`por debajo de la media´, \`promedio´, \`por encima de la media´, \`superior´, \`genio´, etc. Tengamos presente que todo conjunto difuso de tipo 2 es un L-fuzzy set, donde L es una \`lattice´, o retículo. En caso de que los grados de pertenecia utilizados para definir un conjunto borroso de tipo 2 sean ellos mismos conjuntos difusos de tipo 2, debemos mirar al conjunto como de tipo 3. Y así en adelante, se podrían definir conjuntos borrosos de tipo más alto (tipo *n,* en general).

$$m_c\,(x^*) = 1$$

Un conjunto borroso, S, sobre **R**, se dice que es *convexo,* si para cada par de números reales, *x* e *y*, con cualquier parámetro t, tal que

$$0 \leq t \leq 1$$

Se verifica que

$$m_C\,[t\,x + (1 - t)\,y] \geq \min\,\{m_C\,(x)\,,\,m_C\,(y)\}$$

Un *"fuzzy number",* o *número borroso*[874] es de hecho un caso particular dentro de los conjuntos borrosos, N, sobre la recta real, **R**, que satisface las antes definidas condiciones de normalidad y convexidad[875]. Por lo tanto, un número borroso es una aplicación

$$N: \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$$

tal que

1) N es normal, o sea, que la altura de N sería igual a

$$\text{height of } N = \text{hgt}\,(N) = 1$$

2) N_α, el α-cut[876] de N será un intervalo cerrado, y esto es cierto para todos los valores de α comprendidos entre el 0 y el 1:

$$0 < \alpha \leq 1$$

[874] FN, en su acrónimo inglés.
[875] No confundir ese N, de número borroso o "fuzzy number", con el conjunto **N**, de los números naturales.
[876] El α-corte, o α-cortadura, del N.

Pero si todos los α-cuts son intervalos cerrados, entonces cada número borroso será un conjunto borroso convexo.

Observemos que su recíproco no es necesariamente cierto.

2) El *soporte* de N, denotado por *supp (N),* es acotado.

Como ejemplos bien ilustrativos de números borrosos, podemos mencionar algunos tipos de entre los más utilizados:

- los *Trapezoidal Fuzzy Numbers,* o números borrosos trapezoidales;

- los *Triangular Fuzzy Numbers,* o números borrosos triangulares, como un caso límite de los anteriores;

- La "bell-shaped membership function", o *función de pertenencia en forma de campana*, por ello también llamada Gausiana;

- los *L - R fuzzy numbers,* etc.

Un *Número Borroso Generalizado* o *GFN* (por Generalized Fuzzy Number, en acrónimo), F, será cualquier subconjunto borroso de la recta real tal que su función de pertenencia verifica los siguientes axiomas:

1) $m_F(x) = 0$, si $-\infty < x \leq a$;

2) $m_F(x) = L(x)$ es estrictamente creciente sobre $[a, b]$;

3) $m_F(x) = w$, si $b \leq x \leq c$;

4) $m_F(x) = R(x)$ es estrictamente decreciente sobre $[c, d]$;

5) $m_F(x) = 0$, si $d \leq x < +\infty$.

El modo más usual de denotar un *GFN* es

$$A = (a, b, c, d; w)$$

En el caso particular en que w = 1, podemos expresar el GFN mediante

$$A = (a, b, c, d)_{LR}$$

Obviamente, cuando las funciones L(x) y R(x) se pueden representar mediante líneas rectas, tenemos un *Trapezoidal Fuzzy Number,* siendo denotado por

$$(a, b, c, d)$$

Chen y Hsieh propusieron en 1999 una representación media a través de los grados, para los GFNs.

Los *Generalized Trapezoidal Fuzzy Numbers*[877] pueden denotarse como

$$(a, b, c, d; w)$$

Y los *Generalized Triangular Fuzzy Numbers*[878], como caso particular de los anteriores, pueden ser reducidos a una forma tal que

$$(a, b, d; w)$$

cuando identificamos entre sí los valores b y c.

Necesitamos a continuación introducir una nueva herramienta representacional, por diversos motivos, que vienen a justificar su necesidad y

[877] Los números borrosos trapezoidales generalizados.
[878] Los números borrosos triangulares generalizados.

su conveniencia, en lugar de hacerlo por medio de una medida de tipo vectorial, compuesta por dos elementos.

- Debe ser de cálculo sencillo.

- Debe ser físicamente precisa.

- Que resulte muy útil en las aplicaciones, usando para ello el álgebra compleja.

Sea U el universo de discurso. Entonces, definiremos un *Número Complejo Borroso*[879] y lo denotamos por C, mediante su función de pertenencia, o "membership function",

$$m_C (x) = r_C (x) \exp [i\ \phi_C(x)]$$

Observemos que ahí el *i* representa -como es de costumbre en Análisis Matemático- la unidad imaginaria, que corresponde a la raíz cuadrada de -1, siendo r_C y ϕ_C un par de funciones con valores reales, presentando una importante restricción sobre la r_C , que sería la siguiente:

$$0 \leq r_C (x) \leq 1$$

Podemos considerar la precedente "membership function", $m_C (x)$, como compuesta por dos factores,

- La amplitud de la pertenencia, o *membership amplitude,* $r_C (x)$, y

- La fase de pertenencia, o *membership phase,* $\phi_C (x)$.

Como un caso particular, cabe considerar el de un C con una "membership function" nula,

[879] Complex Fuzzy Set (CFS, en acrónimo).

$$m_C(x) = 0$$

Por ejemplo, este sería el caso cuando o bien el $r_C(x)$, o bien tanto el $r_C(x)$ como el $\phi_C(x)$, se anulan; por lo tanto, se trataría entonces del caso de fase y de amplitud nula.

Procedamos ahora a un análisis de la componente de fase, con respecto de las "fuzzy operations" más inmediatas, las de unión, intersección, la de paso al complementario, etc.

Sean A y B dos CFS. Entonces, podemos definir:

$$m_{A \cup B}(x) = [r_A(x) \blacktriangleright r_B(x)] \exp \{i\, \phi_{A \cup B}(x)\}$$

siendo el símbolo $\blacktriangleright$ algún operador del tipo t-conorma[880], también llamado S-norma.

De modo similar y dualmente, se podría definir

$$m_{A \cap B}(x) = [r_A(x) \blacktriangleleft r_B(x)] \exp \{i\, \phi_{A \cap B}(x)\}$$

siendo el $\blacktriangleleft$ en este caso una t-norma.[881]

Aún nos quedan por precisar o definir sus respectivas fases,

$$\phi_{A \cup B}(x)$$

y

$$\phi_{A \cap B}(x)$$

[880] El T-conorm operator.
[881] O lo que es lo mismo, un T-norm operator.

Para obtener tales definiciones, resulta muy conveniente introducir dos funciones auxiliares, digamos la *u* y la *v*, que nos permitan especificar la Unión Difusa y la Intersección Difusa de ambos conjuntos borrosos, el A y el B:

En ambos casos, el dominio sería el mismo producto de dominios difusos, y también compartirían el recorrido[882]:

$$rg\ (u) = rg\ (v) : \{a \in \mathbf{C}: |a| = 1\} \times \{b \in \mathbf{C}: |b| = 1\} \rightarrow \{d \in \mathbf{C}: |d| = 1\}$$

Los *Axiomas* que definen la *aplicación u* serían éstos:

Al menos, deben verificarse los siguientes:

1) $u\ (a, 0) = a$

2) if $|b| \leq |d|$, entonces $|u\ (a, b)| \leq |u\ (a, d)|$

3) $u\ (a, b) = u\ (b, a)$

4) $u\ (a, u\ (b, d)) = u\ (u\ (a, b), d)$

El nombre de tales axiomas sería:

1) condiciones de frontera, o boundary conditions;

2) monotonicidad (monotonicity);

3) conmutatividad, y

4) asociatividad, respectivamente.

---

[882] O "range", denotado por rg.

En ciertos casos, puede que sea conveniente disponer de ciertos axiomas adicionales para *u*; entre ellos, podemos citar los de:

5) u es una función continua;

6) |u (a, a)| > |a|;

7) If |a| ≤ |c|, y |b| ≤ |d |, entonces |u (a, b)| ≤ u (c, d).

Son llamadas, de modo respectivo,

5) continuidad;

6) superidempotencia, y

7) estricta monotonicidad, respectivamente.

Además, hemos de reseñar las siguientes propiedades, requeridas para la "phase intersection function", esto es, la v:

Axiomas de la aplicación v.

Al menos, deben verificarse las siguientes condiciones,

1) v (a, 0) = a

2) si |b| ≤ |d|, entonces |v (a, b)| ≤ |v (a, d)|

3) v (a, b) = v (b, a)

4) v (a, v (b, d)) = v (v (a, b), d)

Los nombres adecuados para tales axiomas serían

1) boundary conditions;

2) monotonicidad;

3) conmutatividad;

4) asociatividad, de modo respectivo.

También para esta función es conveniente que en algunos casos se disponga de algunos axiomas adicionales, como éstos:

5) v es una función continua;

6) $|v (a, a)| < |a|$;

7) If $|a| \leq |c|$, y $|b| \leq |d|$, entonces $|v(a, b)| \leq v(c, d)$.

Se llaman:

5) continuidad;

6) subidempotencia (esta vez, con "b");

7) estricta monotonicidad, respectivamente.

Tratemos ahora de recordar algunos conceptos acerca de las *Lattices*[883] de Números Borrosos, o "Fuzzy Numbers".

Para exponer las operaciones fundamentales entre los "fuzzy numbers", primero hemos de analizar las llamadas *Interval Operations,* u operaciones sobre intervalos:

- La de *Adición,*

[883] Traducibles como Mallas o Celosías, pero también "tramas", o en el mundo matemático, como "retículos"; posiblemente esta interpretación sea la más plausible.

$$[a, b]\ (+)\ [c, d] = [a + c, b + d]$$

- La de *Diferencia,*

$$[a, b]\ (-)\ [c, d] = [a - d, b - c]$$

- La del *Producto,*

$$[a, b]\ (*)\ [c, d] = [ac \wedge ad \wedge bc \wedge bd, ac \vee ad \vee bc \vee bd]$$

- La de *División,*

$$[a, b]\ (:)\ [c, d] = [a : c \wedge a : d \wedge b : c \wedge b : d, a : c \vee a : d \vee b : c \vee b : d]$$

Para este último caso, puede definirse de este modo, salvo cuando:

$$c = d = 0$$

Dos ejemplos concretos podrían ser el de

$$[1, 2]\ (+)\ [3, 4] = [1 + 3, 2 + 4] = [4, 6]$$

O el siguiente

$$[0, 1]\ (+)\ [- 3, 5] = [0 + (-3), 1 + 5] = [- 3, 6]$$

La diferencia entre los mismos “fuzzy numbers” sería, para los dos primeros,

$$[1, 2]\ (-)\ [3, 4] = [1 - 4, 2 - 3] = [- 3, -1]$$

O para los segundos,

$$[0, 1]\ (-)\ [- 3, 5] = [0 – 5, 1 - (-3)] = [0, 4]$$

En el primero de los ejemplos, para la multiplicación, se tendría:

$$[1, 2]\ (*)\ [3, 4] = [1 * 3 \wedge 1 * 4 \wedge 2 * 3 \wedge 2 * 4,\ 1 * 3 \vee 1 * 4 \vee 2 * 3 \vee 2 * 4] =$$

$$= [3 \wedge 4 \wedge 6 \wedge 8,\ 3 \vee 4 \vee 6 \vee 8] = [3, 8]$$

Y en el caso de la división entre ambos números borrosos de ese mismo ejemplo, tenemos que

$$[1, 2]\ (:)\ [3, 4] =$$

$$= [1 : 3 \wedge 1 : 4 \wedge 2 : 3 \wedge 2 : 4,\ 1 : 3 \vee 1 : 4 \vee 2 : 3 \vee 2 : 4] =$$

$$= [1 : 4,\ 2 : 3]$$

Las *Propiedades de las "Interval Operations"* son las siguientes:

1) Conmutativa,

$$A\ (+)\ B = B\ (+)\ A$$

$$A\ (-)\ B = B\ (-)\ A$$

2) Asociativa,

$$[A\ (+)\ B]\ (+)\ C = A\ (+)\ [B\ (+)\ C]$$

$$[A\ (-)\ B]\ (-)\ C = A\ (-)\ [B\ (-)\ C]$$

3) Identidad,

$$A = A\ (+)\ 0 = 0\ (+)\ A$$

$$A = A\ (*)\ 1 = 1\ (*)\ A$$

4) Subdistributiva,

$$A\ (*)\ [B\ (+)\ C] \rightarrow [A\ (*)\ B]\ (+)\ [A\ (*)\ C]$$

5) Inversa,

$$0 = A\ (-)\ A$$

$$1 \ \ = A\ (:)\ A$$

6) Monotonicidad para cualquier operación.

Recordemos que una *Lattice* (*retículo* o trama) es un *poset*[884] con una relación de orden subyacente.

Sea $\perp \in \{(+), (-), (*), (:)\}$ con la restricción de que para cada una de tales operaciones sea $0 \notin B^{\alpha}$, siendo

$$0 < \alpha \leq 1$$

---

[884] Acrónimo de *"partially ordered set",* o sea, un conjunto, α, sobre el que se ha establecido un orden parcial. Esto quiere decir que la relación binaria, denotada por $\leq$, cumple las propiedades Reflexiva, Antisimétrica y Transitiva. Así, a un par ordenado $\langle \alpha, \leq \rangle$ se le llamará un poset o conjunto parcialmente ordenado. Se puede caracterizar a los posets considerando sus cotas superiores y sus cotas inferiores. Dentro de los posets, se denomina un Retículo (o `lattice´) a aquel que verifique que para todo $\{x, y\} \subseteq \alpha$, existen tanto un supremo, el $x \vee y$, como un ínfimo, el $x \wedge y$. Se dirá que el retículo es acotado, si las cotas sup α e inf α existen en α. Y se dirá completo, si $\forall \beta \subseteq \alpha$, tanto el sup β como el inf βestán en α. Será linealmente ordenado, o lo que es equivalente, que se trata de una cadena, cuando $x \leq y$ ó $y\ \alpha \leq x$, $\forall x, y \in \alpha$. Que es denso, si siempre que $x < y$, para algún $x, y \in \alpha$, se tiene que $x < y < z$, para algún $z \in \alpha$. Y está bien ordenado (well-ordered), si no existe ninguna sucesión, $\{x_i\}_{i \in \mathbf{N}}$, en α, tal que $x_{i+1} < x_i$, $\forall i \in \mathbf{N}$. Podemos proponer como ejemplo la estructura más "clásica", que es la $\langle \{0, 1\}, \leq \rangle$, en cuanto conjunto de valores veritativos, y que es la más conocida.
Pero hay otras elecciones posibles, como la de subdividir el intervalo cerrado unidad de los reales en subintervalos cada vez más finos (o de menor tamaño), de modo conveniente para el caso finito-valuado; así, $\{0, 1/(n-1), 2/(n-1), \ldots, (n-2)/(n-1), 1\}$, para n = 2, 3, …; cada uno de estos posets sería completo, acotado, linealmente ordenado, bien ordenado y un retículo, sin por ello llegar a ser densos. Como límite de este proceso de subdivisión, se obtendrían infinitos conjuntos de valores de verdad, los del $[0, 1] \subset \mathbf{R}$. También se podría considerar el conjunto de los números racionales contenidos en el intervalo real unidad, el $Q \cap [0, 1]$, que como sabemos, es numerable, no como el anterior, que tenía la potencia del continuo. Pero en ambos caso, estamos ante retículos acotados, densos y que no están bien ordenados. El [0, 1] es también completo. Si consideramos los conjuntos de los reales, los racionales, los enteros o los naturales (**R, Q, Z** ó **N***,* respectivamente). Todos ellos están linealmente ordenados, y en el caso de los dos primeros, son densos. Sólo el último (el **N**) está bien ordenado. Pero ninguno de ellos es completo, aunque se puedan completar, añadiéndoles el $+\infty$ y el $-\infty$.

Entonces, obtendremos este número borroso:

$$A (\perp) B = \cup_{\alpha \in (0, 1]} [A (\perp) B]^{\alpha}$$

Su generalización es de hecho posible, pues disponemos para ello del llamado *Principio de Extensión*[885] para cualquier operación aritmética, ($\perp$).

Esto puede ser expresado mediante el crucial resultado,

$$[A (\perp) B] (z) = \sup_{z = x (\perp) y} [\min \{A(x), B(y)\}]$$

Disponemos para ello de las operaciones:

- *Meet*[886]

  y

- *Join.*[887]

Así, se puede describir la *"Lattice", Retículo ó Malla de los Números Borrosos*[888], mediante:

$$MIN (A, B) = \sup_{z = \min(x, y)} \{\min [A(x), B (y)]\} = MEET (A, B)$$

Conjuntamente con ella,

$$MAX (A, B) = \sup_{z = \max(x, y)} \{\min [A(x), B (y)]\} = JOIN (A, B)$$

Una lattice o retículo distributivo, en este caso, significaría que

$$MIN [A, MAX (B, C)] = MAX [MIN (A, B), MIN (A, C)]$$

[885] O \`Extension Principle´.
[886] El *g. l. b.,* acrónimo de greater lower bound, o mayor cota superior.
[887] El *l. u. b.,* acrónimo de lower upper bound, o menor cota superior.
[888] La "Lattice of Fuzzy Numbers".

$$\text{MAX } [A, \text{MIN } (B, C)] = \text{MIN } [\text{MAX } (A, B), \text{MAX } (A, C)]$$

Por tanto, la terna

$$< R_F, \text{MIN}, \text{MAX} >$$

sería una lattice o retículo distributivo, constituyendo R_F la familia, o colección, de todos los conjuntos borrosos, o fuzzy sets.

Expresando todo esta estructura por medio de definiciones y de fórmulas adecuadas para su funcionamiento en términos de números borrosos, resulta en la actualidad un conocimiento matemático muy inspirado y muy útil. De hecho, su aplicación se extiende a los ámbitos más diversos, siendo sus perspectivas muy prometedoras, ya que puede servirnos tanto para el desarrollo y la aplicación de las Lógicas No Clásicas, como para el Análisis Matemático en su versión Fuzzy, para la Física, en especial para su Teoría Cuántica, en la Informática Teórica[889], en la Teoría de la Computación y los Lenguajes Formales, así como para la Inteligencia Artificial en su famosa Teoría de Autómatas, o en la Teoría de Redes Complejas[890], etc.

Recordemos que paralelamente a la contribución de Jan Lukasiewicz (1878-1955), su en tiempos ayudante, *Alfred Tarski* (1902-1983), formuló una lógica de *n* valores de verdad, siendo dicho *n* mayor que dos. También trabajaron juntos, viniendo a aclarar muchas cuestiones técnicas importantes, por la introducción inicial en la misma del tercer valor, el llamado "posible". Lukasiewicz consideraba los tres valores 0, 1 y 2, donde el valor adicional 2

[889] O en general, en la Computer Science.
[890] Actualmente, en rápida expansión.

sería un valor de verdad asignable a las sentencias futuro-contingentes, y se interpretaría como “posibilidad” o “indeterminación”, mientras que el 0 y 1 son los valores clásicos de verdadero y falso, respectivamente. Pero tras de lo que vamos realmente es de aclarar cómo se han desarrollado estas ideas posteriormente. Así, *Vilém Novák* (de la Universidad de Ostrava) ha conseguido una versión ampliada[891] de los resultados de Pavelka a la *FOFL* (First Order Fuzzy Logic) de primer orden[892], en 1990. Y el investigador checo *Petr Hájek*, de la Universidad Charles (o Carolina), de Praga, ha obtenido simplificaciones verdaderamente notables para estos sistemas, introduciendo en 1998 la lógica básica, o *Basic Logic,* la $\mathfrak{BL}$, que es un sistema axiomático útil para conseguir “capturar” los elementos comunes entre las principales Lógicas Fuzzy formales, con la creación de un tipo correspondiente del álgebra, la llamada *$\mathfrak{BL}$-álgebra*[893].

Desde la década de 1990 los autores mencionados, y sus respectivos grupos, han venido jugando un papel muy predominante en muchos campos de la lógica difusa, siendo para ella sus obras y artículos más que buenas referencias.

Vamos ahora a tratar de las *Medidas Borrosas*[894]*,* o *Fuzzy Measures,* para poder exponer a continuación, pero ya en el capítulo siguiente, algunos de nuestros resultados originales.

---

[891] Véase V. Novák.
[892] First-Order Fuzzy Logic; o lógica difusa de primer orden.
[893] Ver P. Hájek.
[894] Es importante distinguir bien entre conjunto borroso y medida borrosa (la cual es otra representación de la incertidumbre). Porque si consideramos un elemento arbitrario, x, cuyo grado de pertenencia a una colección de subconjuntos `crisp´, o clásicos, distintos, contenidos

Porque para ello primero hemos de definir la noción de *Medida Clásica,* o simplemente *Medida*. Este es uno de los conceptos fundamentales de la Geometría Euclídea. Se suele asociar con el cálculo de longitudes, áreas, volúmenes,…, de segmentos o intervalos, cuadrados o rectángulos, cubos, etc., es decir, de cuerpos sólidos en dimensiones uno, dos, tres, etc., respectivamente.

La idea clásica consistía en tratar de establecer una partición de dicho cuerpo sólido en una cantidad finita de subcomponentes suyas, de las cuales supiéramos calcular su medida. Por si la figura no fuese una de las ya

---

en un universo de discurso, Ω, la función g va a ser una medida borrosa (o `fuzzy measure´), si le asigna a x un grado de pertenencia a cada uno de tales conjuntos clásicos, indicándonos la certeza subjetiva o grado de evidencia de que esté en él.
En términos matemáticos, sería una función g: $P(\Omega) \rightarrow [0, 1]$, cumpliendo ciertas propiedades que señalaremos más adelante. Cuál es la diferencia entre conjunto y medida borrosa puede verse en el siguiente ejemplo: Consideremos una persona cualesquiera; entonces, cabe que nos falte cierta evidencia sobre la edad que nos permita clasificarla con algo de certidumbre en uno de los grupos de edad: `veinteañeros´, `treintañeros´, `cuarentañeros´, etc. Tales conjuntos son `crisp´, en el sentido de cantorianos o clásicos, no existiendo para ellos fronteras borrosas asociadas.
Dicen Klir y Folger, en *op. cit.,* que:
"The set assigned the highest value in this particular fuzzy measure iour best guess until of the person´s age; the next highest value indicates the degree of certainty associated with our next best guess until absolute proof would result in a higher value for the best guess until absolute proof would allow us to assign a grade of 1 to a single crisp set, and 0 to all the others. This can be contrasted with a problem formulated in terms of fuzzy sets in which we know the person´s age, but must determine to what degree he or she is considered; for instance, `old´ or `young´. Thus, the type of uncertainty represented by fuzzy sets."
Proponen también dichos autores, en la p. 107 de ese libro, el siguiente ejemplo, ilustrativo de la diferencia entre conjuntos y medidas borrosas: "the jury members for a criminal trial, who are uncertain about the guilt or innocence of the defendant. The uncertainty in this situation seems to be of a different type; the set of people who are guilty of the crime and the set of innocent people are assumed have distinct boundaries. The concern, therefore, is not with the degree to which the defendant is guilty, but with the degree to which the evidence proves his or her membership in either the crisp set of guilty people, or in the crisp set of innocent people. We assume that perfect evidence would point to full membership in one and only one of these sets. Our evidence, however, is rarely, if ever, perfect, and some uncertainty prevails. In order to represent this type of uncertainty, we could assign a value to each possible crisp set to which the element in questionmight belong. This value would indicate the degree of evidence or certainty of the element´s membership in the set. Such a representation of uncertainty is known as a fuzzy measure. Note how this method differs from the assignment of membership grades in fuzzy sets. In the latter case, a value is assigned to each element of the universal setsignifying its degree of membership a particular set with unsharp boundaries. The fuzzy measure, on the other hand, assigns a value to each crisp set of the universal set signifying the of evidence, or belief, that a particular element belongs in the set".

conocidas, se le podrían aplicar algunos de los llamados movimientos rígidos, como el de rotación o el de traslación, para luego, reajustando las "piezas", llegar a su equivalencia con una que ya fuera de medida conocida. También sería posible obtener cotas inferiores o superiores de la medida de ese cuerpo rígido, mediante el cálculo de algún otro conocido, inscrito o circunscrito en él. Es la idea del "método" expuesto en la Antigüedad por Arquímedes de Siracusa[895].

Como podemos ver, todos estos argumentos estarían basados en la intuición geométrica, por lo que es posible afirmar la existencia de una medida, *m(E),* que cabe asignar a todo cuerpo sólido rígido, *E,* si establecemos un conjunto de axiomas razonable.

Asimismo, es factible pensar en el concepto de "medida" sobre lo que podríamos llamar una "base reduccionista", según la cual la medida de un cuerpo "macroscópico" sería la suma de las medidas de sus componentes "microscópicas". Pero el problema surge cuando intervienen componentes de naturaleza "patológica"[896], pues entonces vamos a requerir del Axioma de Elección. Motivo por el cual se ha llegado a abandonar la idea de buscar la medida de todos los subconjuntos del espacio euclídeo n-dimensional, $\mathbf{R}^n$, limitando nuestras pretensiones a la subclase de los "objetos no-patológicos" que contiene. Es a estos a los que se llamará *Conjuntos Medibles.*

Cabe entonces plantearse las siguientes cuestiones:

[895] Véase, por ejemplo, la edición de Heath de las *Obras de Arquímedes,* o el libro que sobre él escribiera Dijksterhuis.

[896] De lo cual se trata en Topología, de "topos" y "logos", estudio del lugar o del entorno, útil en Análisis Matemático, por ejemplo. En un principio, la Topología fue llamada `Analisis situs´, y estudia propiedades como las de conexión, separación, compacidad, paracompacidad, compactificación, etc., de los conjuntos.

- ¿Qué significa que uno de tales subconjuntos sea medible?
- Y si fuera medible, ¿cómo conviene definir esa medida?
- ¿Qué propiedades deberíamos exigir a la medida?
- ¿Serían medibles los conjuntos “ordinarios”, tales como cubos, bolas, poliedros, etc.?
- ¿Y serían las medidas de tales conjuntos “ordinarios” coincidentes con las que a ellos les asignaba la geometría ingenua, o “naive”? Por ejemplo, que la medida del rectángulo de lados cuyas longitudes sean a y b nos dé igual al producto de a por b.

Pero la respuesta a todas estas preguntas no es única. Porque siempre podremos o expandir o reducir las condiciones exigidas a los conjuntos para ser medibles, como son las de finitud, la de aditividad numerable, la propiedad de ser invariante frente a rotaciones, o frente a traslaciones, etc.

Vamos a referirnos a dos de las principales[897]:

- *La medida, o contenido, de Jordan.*[898]

Esta medida estaría muy relacionada con el concepto de Integral de Bernhard Riemann, también llamada de Gaston Darboux. Es la que casi todo el mundo conoce, o de la que se ha oído hablar, porque resulta ser la que hoy se enseña en los Institutos y en los primeros cursos de Universidad. Pero resulta insuficiente cuando se abordan, dentro del Análisis Matemático, los conjuntos que surgen como límite de otros conjuntos. Por eso es necesario pasar a un concepto más general, el de la *Medida de Lebesgue*. Es decir, el concepto de

---

[897] Porque también hemos de ver, más adelante, la de las medidas borrosas.
[898] Por la matemática francesa Camille Jordan (1838-1932).

qué sea esto de la medibilidad en el sentido de Henri Lebesgue. Como teoría, ya hemos dicho que puede se considerada como una complección de la teoría anterior, la de Jordan-Darboux-Riemann. Su ventaja está en que disponemos de unas buenas propiedades adicionales, que son preservadas bajo el paso al límite, entre las cuales se pueden mencionar los teoremas de convergencia, como el de la convergencia monótona o el de la convergencia dominada.

Pero hemos de hacer una observación importante: sería injusto silenciar el nombre de otro importante matemático francés: *Emile Borel (1871-1956),* quien desarrolló, previamente a la de Lebesgue, una teoría que nos permite ahora resolver determinados problemas cruciales en el Análisis Matemático. La planteó en 1898. En ella trabajaba con un nuevo constructo matemático, la sigma-álgebra, o σ - *álgebra.* Es la clase de conjuntos cerrados bajo la unión conjuntista de una colección numerable de conjuntos, junto con el complementario. Estaría generada dicha clase por la familia de todos los intervalos abiertos o semiabiertos de la recta real.

Así, Borel define una medida que asocia a cada subconjunto acotado de la σ - álgebra un número real positivo. Por ejemplo, en el caso del intervalo abierto (a, b), la medida asignable sería la longitud del mismo, que como sabemos, es b – a.

La medida sería aditiva, en el sentido que su valor, para una unión acotada de una sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos, es igual a la suma de los valores asociados a los conjuntos individuales.

El caso es que durante la segunda mitad del siglo XIX se prestó un gran interés al estudio de las funciones con valores reales arbitrarios, incluso en el caso de algunas funciones verdaderamente extrañas, como aquellas que no son continuas en ninguno de sus puntos, o las que aun siendo continuas, no son diferenciables en ninguno de ellos.

Precisamente, el primer ejemplo de una función continua no diferenciable fue propuesto nada menos que por nuestro Bernardo Bolzano (1781-1848), el mismo Bolzano precursor de los pensadores que aquí estudiamos. Son funciones que más adelante están llamadas a jugar un gran papel, como en el caso de la teoría[899] de la Geometría Fractal, con sus conjuntos de Waclaw Sierpinski, de Gaston Julià, de Benoit Mandelbrojt, etc. Pero Emile Borel no llegó a conectar su teoría con la de integración. Esa conexión fue la que luego establecería, entre 1899 y 1902, el también matemático francés *Henri Lebesgue (1875-1941).*

En 1901 definió Henri Lebesgue una integral, más general que la de Riemann, basándose en una medida que subsume la de Borel como un caso particular. Esto lo desarrolló en su tesis doctoral[900]. Por tanto, su indudable mérito consiste en haber llegado a conectar de un modo natural la medida de conjuntos con la medida de funciones.

Tras seis décadas de existencia y desarrollo de la teoría de la medida clásica, se vuelve objeto de controversia la condición de aditividad, dado que algunos piensan que pudiera ser demasiado restrictiva; sobre todo, en

[899] Relativamente nueva.
[900] Que luego fue publicada en la revista *Annali di Matematica,* en 1902.

determinados contextos. Pues no se trata sólo de manejar modelos idealizados, que estarían libres de error, sino de plantearse condiciones físicas, reales. Porque algunas medidas son intrínsecamente no-aditivas.

El primer desafío a la teoría clásica de la medida vendrá de otro matemático francés, *Gustave Choquet (1915-2006).* Éste elaboró una teoría basada en una familia[901] de diferentes tipos de medidas no-aditivas, que estarían totalmente[902] ordenadas. Pudiendo ir desde las capacidades de orden dos[903] hasta las de orden infinito[904].

Cada una de estas capacidades de Choquet sería una función a valores reales, definida sobre una clase de subconjuntos de un conjunto universal dado[905], que es monótona creciente con respecto de la inclusión conjuntista, y que dependiendo de qué tipo sea, va a tener que cumplir ciertos axiomas. Para cada capacidad de Choquet existe una dual, llamada “alternating capacity”.

A partir de todo ello, Choquet desarrolló integrales que fuesen aplicables a sus capacidades, y que serían llamadas *Integrales de Choquet.* Todo esto lo trabajó durante su estancia en la Universidad de Kansas, durante el curso 1953-54.

Subrayaba Choquet la fuerte relación entre su Teoría de las Capacidades y la Teoría del Potencial. Hoy sigue jugando un importante papel en otros campos de investigación, como es el de la formalización de las probabilidades imprecisas.

---

[901] Potencialmente, infinita.
[902] O lo que es lo mismo, linealmente ordenadas.
[903] Que constituyen el caso más general.
[904] Que son las más raras, por infrecuentes.
[905] Dotado de una estructura algebraica apropiada.

Otra aproximación a la generalización de las medidas se realizó durante la década de los 1970´s. Sería la del profesor japonés *Michio Sugeno.* Trataba éste de comparar las funciones de pertenencia de los conjuntos borrosos con la probabilidad, y como no veía posible una comparación directa, pensó en el paso de las medidas clásicas a las no-clásicas[906], como una especie de paralela analogía al paso de los conjuntos clásicos a los conjuntos borrosos. Usando dicha analogía, acuñó el término de *"fuzzy measures",* o *medidas borrosas.*

Sugeno refería, en su tesis doctoral, cómo las medidas borrosas serían obtenidas reemplazando la condición de aditividad de las medidas cásicas por la[907] de monotonía creciente respecto de la inclusión conjuntista, junto con la de continuidad. Incluso ésta última fue luego considerada demasiado restrictiva, y reemplazada por la semicontinuidad. Por ejemplo, las medidas superior e inferior de probabilidad muestran semicontinuidad, en las distintas teorías existentes sobre probabilidades imprecisas. Algunas de dichas medidas borrosas[908] fueron luego introducidas por Glenn Shafer en su *Teoría*

[906] En tanto que no-aditivas.
[907] Más débil.
[908] Como sabemos, los conjuntos borrosos proponen un método idóneo para representar una forma de incertidumbre. Entre la medidas difusas tenemos las `belief measures´ (o medidas de creencia) y las `plausibility measures´ (las de plausibilidad).
Una *medida de creencia* es una función Bel: $\mathrm{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$, que verifica los siguientes axiomas: a) $\mathrm{Bel}(\emptyset) = 0$ y $\mathrm{Bel}(\Omega) = 1$; b) $\forall$ sucesión de subconjuntos de Ω, la $\{A_i\}_{i\in I} \in \mathrm{P}(\Omega)$ que sea monótona, es decir, tal que $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$, o bien $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$, se tiene que $\text{lím}_{i\rightarrow+\infty} \mathrm{Bel}(A_i) = \mathrm{Bel}(\text{lím}_{i\rightarrow+\infty} A_i)$; y c) $\mathrm{Bel}(\cup_{i=1, 2,\ldots,n} A_i) \geq \Sigma_i \mathrm{Bel}(A_i) - \Sigma_{i<j} \mathrm{Bel}(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n+1} \mathrm{Bel}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$, $\forall n \in \mathbf{N}$ y $\forall$ subconjunto de Ω. En el caso más sencillo, esto es, cuando $n = 2$, se reduce a: $\mathrm{Bel}(A_1 \cap A_2) \geq \mathrm{Bel}(A_1) + \mathrm{Bel}(A_2) - \mathrm{Bel}(A_1 \cap A_2)$, etc. Para cualquier $A \in \mathrm{P}(\Omega)$, dicho valor, Bel (A), puede interpretarse como el grado de creencia, o de evidencia (por estar basado en la evidencia disponible) de que un elemento dado de Ω pertenezca al conjunto A. Se podrían considerar los subconjuntos de Ω como respuestas a una cuestión en particular. Suponemos que dichas respuestas son correctas; lo que no podemos precisar es con qué grado de certidumbre lo serán. Cuando los conjuntos A_i son disjuntos dos a dos, el tercer axioma nos dice que que el grado de creencia asociado con la unión de conjuntos no será menor que la suma de los grados de creencia de la pertenencia a los conjuntos individuales. Así que dicho

Matemática de la Evidencia, también llamada Teoría de Glenn-Shafer. Esto ya sería en 1976.

Y otra teoría basada en las medidas no-aditivas se suele denominar "Teoría de las Posibilidades Graduadas", la cual proviene de la idea de Conjunto Borroso, habiendo sido ésta idea la propuesta por Lofti A. Zadeh[909], en 1965. Sus medidas duales serían llamadas las *Medidas de Necesidad.*

Zenyuan Wang, en 1984, llegó a detectar las características fundamentales que nos permiten capturar las propiedades matemáticas de las funciones medibles, sobre los espacios de medidas generalizados, lo cual es, sin duda, un claro prerrequisito para llegar a desarrollar una "Teoría Generalizada de las Integrales"[910].

Volvamos sobre nuestros pasos, y ahora definamos las medidas de Jordan y de Lebesgue, pero de un modo verdaderamente axiomático:

---

axioma, básico para las `belief measures´, resulta ser una versión debilitada del axioma de aditividad del cálculo de probabilidades. Esto implica que tales probabilidades serán un caso especial de las `belief measures´; concretamente, de aquellas para las cuales se exige el tercer axioma.
Una *medida de plausibilidad* sería, por su parte, una función Pl: P $(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ que verificando las condiciones a) y b), cumpla, además, la propiedad de `monotonicity´ (o monotonía), según la cual: $\forall$ A, B $\in$ P (Ω), si $A \subseteq B$, entonces Pl (A) $\leq$ Pl (B); pero también esta adicional: Pl $(\cap A_i)$ $\leq \Sigma$ Pl (A_i) - $\Sigma_{i<j}$ Pl $(A_i \cap A_j)$ + … + $(-1)^{n+1}$ Pl $(\cup A_i)$, $\forall n \in N$ y toda colección de subconjuntos de Ω.
El significado de la medida de plausibilidad es el de la representación no sólo de la total creencia, o evidencia, de que el elemento en cuestión pertenezca al A, o bien a cualquiera de sus subconjuntos, sino asimismo de la evidencia adicional o creencia asociada con conjuntos que se solapan con el A. De modo que Pl (A) $\geq$ Bel (A), $\forall$ A $\in$ P (Ω).
Si sustituimos el axioma adicional de las medidas de creencia por éste: Bel $(A \cup B)$ = Bel (A) + Bel (B), con $A \cap B = \emptyset$, se llega a un tipo muy especial de las `belief measures´, como son las medidas cásicas de probabilidad, que también se conocen como las `Bayesian belief measures´.
Las clases de las medidas de creencia y las de plausibilidad son duales entre sí, en el sentido de que una de ellas puede ser determinada unívocamente a partir de la otra. Reunidas, forman la llamada *Teoría Matemática de la Evidencia,* desarrollada por Glenn y Shafer. Ambas clases están caracterizadas –como hemos visto- por un par de axiomas duales de subaditividad.
[909] Como ya con toda seguridad sabemos.
[910] Es lo que más adelante se compendia en el segundo de sus libros, que es de 2010.

Medida de Jordan.

Sea E un subconjunto acotado del espacio euclídeo n-dimensional, $\mathbf{R}^n$.

Se llama *medida interior de Jordan* de E al:

$$M_{*J}(E) \equiv \sup \{m(A): A \subset E, \text{ con A conjunto elemental}\}$$

Mientras que la *medida exterior de Jordan* de E sería:

$$M^{*J}(E) \equiv \sup \{m(B): E \subset B, \text{ con B conjunto elemental}\}$$

En el caso que ambas medidas coincida, se hablará de la *Medida de Jordan* de E, denotada por M (E):

$$M_{*J}(E) \equiv M^{*J}(E) \equiv M(E)$$

Medida de Lebesgue

Llamaremos *medida exterior de Lebesgue,* y la denotaremos por $M^*(E)$, a la siguiente:

$$M^*(E) \equiv \{\Sigma\, |B_i|: E \subset \cup B_i, \text{ con la } B_i \text{ como cajas o “boxes”, para } i \in \mathbf{N}^*\}$$

Así que podría definirse de modo geométrico como el mínimo coste que necesitamos para recubrir E mediante una unión numerable de conjuntos. Recordemos lo que significa el símbolo $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} \cup \{0\}$.

Observemos que la suma anterior puede ser infinita, y en ese caso, diremos que:

$$M^*(E) \equiv +\infty$$

Obviamente, se tiene la siguiente acotación:

$$M^{*}(E) \leq M^{*J}(E),\ \forall\ E \subset \mathbf{R}^{n}$$

Se dice que un conjunto es *medible - Lebesgue*[911], si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \text{ un abierto, } U \subset \mathbf{R}^{n},$$

$$\text{que contiene al E, y tal que } M^{*}(U - E) \leq \varepsilon$$

Si E es medible-Lebesgue, entonces nos referiremos al valor $M^{*}(E)$ como la *medida de Lebesgue de E.*

Las *propiedades de la Medida de Lebesgue* serían éstas:

1) $M^{*}(\emptyset) = 0$
2) Si $E \subset F \subset \mathbf{R}^{n}$, entonces $M^{*}(E) \leq M^{*}(F)$, que es la llamada *Propiedad de Monotonía*[912].
3) La propiedad de *aditividad numerable,* según la cual:

   Si $\{E_i\}^{\infty}_{i=1} \subset \mathbf{R}^{n}$ es una sucesión numerable de conjuntos, entonces:

$$M^{*}(\cup^{\infty}_{i=1} E_i) \leq \Sigma^{\infty}_{i=1} M^{*}(E_i)$$

Por lo que hemos dicho, para muchos la idea moderna de medida sería debida al matemático francés *Henri Lebesgue* (1875-1941). Este definió la hoy conocida en su honor como *Integral de Lebesgue,* que generaliza la noción precedente de Integral de Riemann, extendiendo el concepto de área bajo una curva, para poder incluir funciones discontinuas, que no eran integrables en el sentido de Riemann.

---

911 O medible en el sentido de Lebesgue.
912 O de “monotonicity”, en inglés.

Ya sabemos que en 1974 el profesor japonés Michio Sugeno introdujo las novedosas ideas de "fuzzy measure"[913], y de "fuzzy integral".[914] Para esto, elaboró una generalización de esa definición clásica de la Medida de Lebesgue, reemplazando su tercera propiedad, la de aditividad numerable, por una condición más suave. Y analizado desde una perspectiva histórica, su idea proviene del concepto de "capacity", o capacidad, que había sido propuesto ya por el matemático francés Gustave Choquet, veinte años atrás.

En los años siguientes se han ido realizando diversos intentos para establecer medidas que fueran no-aditivas, como los llevados a cabo por:

- Glenn Shafer, con su *Teoría de la Evidencia.*[915]
- G. L. S. Shackle, con su *Teoría de la Sorpresa.*[916]
- L. A. Zadeh, con su *Teoría de la Posibilidad.*[917]

Desde entonces, las medidas borrosas y las integrales difusas han sido estudiadas, tanto desde el punto de vista matemático[918] como desde sus implicaciones filosóficas y de las Ciencias de la Computación; especialmente, en la Inteligencia Artificial. Pero también es verdad que mucho mayor interés se

---

[913] O medida borrosa.
[914] O integral borrosa.
[915] O "Evidence Theory".
[916] O "Surprise Theory".
[917] O "Possibility Theory".
De la cual dice Velarde, comparándola con lo Probabilístico, en la p. 140 de su *Gnoseología de los Sistemas Difusos,* que:
"La teoría de los conjuntos difusos, y más concretamente, la desarrollada por Zadeh, presenta semejanzas y deiferencias con la teoría de la probabilidad… la teoría de la probabilidad constituye una parte de las Matemáticas, en tanto que la teoría de la posibilidad debe situarse en el campo de la Lógica. Ambas trabajan con la imprecisión y con la incertidumbre, pero dando la razón a Zadeh, los dominios de aplicación de las dos teorías son disjuntos, más bien que coextensivos, si bien cabe conjuntar las técnicas posibilísticas y las probabilísticas, en la tarea de cubrir el espacio entero de la incertidumbre y la imprecisión. Los métodos probabilísticos y los posibilísticos resultan, así, complementarios y no competitivos."
[918]Muchas veces ignorados sus resultados; eso sí, por las con frecuencia apoltronadas instancias académicas, más inmovilistas y arcaizantes cada día que pasa, o lo son en multitud de casos. Pero afortunadamente, no es siempre así, ni en todas partes.

ha venido poniendo en proponer la definición de nuevas medidas, originales y diversas, así como en el estudio de sus propiedades, que en la inclusión de esta en teorías o estructuras preexistentes, más amplias, como puede ser la Teoría de la Decisión para entornos con Incertidumbre, calibrándose ésta mediante las medidas borrosas.

Esta Teoría de la Medida[919] ha sido, y lo sigue siendo, uno de los mayores logros de todo el Análisis Matemático moderno, que con ello consigue extender el alcance del Análisis de Fourier, omnipresente, por ejemplo, en la Física y en la Química. La teoría admite una importante genaralización, lo que ha dado lugar a la potente *Fuzzy Measure Theory.*

Volvamos de nuevo sobre el tema, para procurar dar con una aún más detallada matematización de éste concepto. La *Medida de Lebesgue* sería una extensión de las nociones clásicas de longitud y de área, para que de este modo resulten aplicables a conjuntos más complicados, siempre que se cumplan ciertas condiciones.

Dado un conjunto abierto,

$$S \equiv \cup_k (a_k, b_k)$$

que contiene intervalos disjuntos, su *Medida de Lebesgue* se define como:

$$\mu_L (S) \equiv \Sigma_k (b_k - a_k)$$

Dado un conjunto cerrado,

[919] Y no sólo la hoy denominada como “Clásica”.

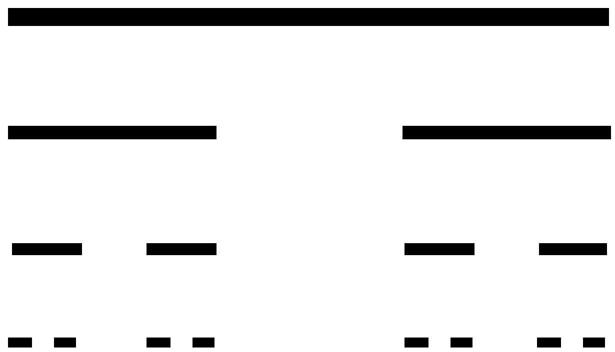
$$S^* \equiv [a, b] - \cup_k (a_k, b_k)$$

se tiene que:

$$\mu_L (S^*) \equiv (b - a) - \{\cup_k (b_k - a_k)\}$$

Así, un segmento de la recta real de anchura unidad tendría medida de Lebesgue igual a 1. Por su parte, el llamado *Conjunto de Cantor* tendría medida de Lebesgue nula.

Véase a continuación cómo se va formando dicho famoso conjunto:



Para construirlo, eliminamos del intervalo cerrado unidad, esto es, del [0, 1], todos los puntos cuya primera cifra decimal sea igual a 1. Luego, en el siguiente paso, eliminaríamos aquellos cuya segunda cifra decimal sea un 1, y así sucesivamente, hasta el infinito. Lo que queda sin eliminar es el llamado *Conjunto de Cantor.* Son, por lo tanto, todos aquellos números que estando entre el 0 y el 1, sus cifras decimales sólo contienen ceros ó doses (no se olvide que estamos en el sistema posicional ternario, o de base 3).

Expresado geométricamente, y partiendo de dicho intervalo unidad, lo dividimos en tres segmentos, todos ellos de igual longitud, y ahora quitamos el del centro. A continuación, en cada uno de los dos que nos quedan se elimina la parte central, y así en adelante. Lo que subsiste al final del proceso sería el llamado “Cantor Set”, que es de dimensión cero.

Fue probado por Ko, en 1995, que la Medida de Minkowski de un conjunto cerrado y acotado coincide con su Medida de Lebesgue.

Resumidamente, por una *medida,* μ, en un espacio medible entendemos una función no negativa

$$\mu: A \rightarrow [0, 1]$$

que satisface:

(a) $\mu (\emptyset) = 0$

(b) μ es *numerablemente aditiva,* es decir, que dados A_1, A_2, …, An, conjuntos disjuntos dos a dos, o sea, tales que $A_i \cap A_j = \emptyset$, para $i \neq j$, con i, j = 1, 2, …, n, entonces

$$\mu (\cup^n_{i=1} A_i) = \Sigma^n_{i=1} \mu (A_i)$$

Si ésta última condición sólo es válida para colecciones finitas de conjuntos, A_i, entonces se dice que la medida μ es finitamente aditiva, o simplemente *aditiva.*

Diremos que una medida μ es σ – *finita,* si existe una colección de conjuntos disjuntos entre sí, y medibles, tales que su unión da todo el espacio, Ω, y la medida de cada uno de ellos es finita.

Decimos *espacio medible* al par (Ω, B), donde Ω es un conjunto, y B es una σ- álgebra de Ω. Evitamos aquí dar la definición axiomática de lo que es una σ-álgebra[920]. Se llama *conjuntos medibles* a los elementos de B. Un caso particular de estas medidas es la de probabilidad. Otras, las medidas de posibilidad, las medidas de creencia[921], las medidas borrosas[922]; entre ellas, las de entropía o las de simetría / antisimetría, sobre las que hemos venido trabajando desde hace años, y publicado algunos resultados que dicen qu son interesantes, etc. Aunque está claro que hay que ir modificando para ello los axiomas que debieran cumplirse.

Una λ *- Medida Borrosa*[923] será una función

$$\mu: U \rightarrow [0, 1]$$

que verifique las siguientes propiedades:

I) $\mu(\emptyset) = 0$

II) $\mu(U) = 1$

III) También la llamada *Condición de Continuidad Monótona,* que es la siguiente:

$$\text{Si } A_i \in \wp,\ \forall\, i, \text{ y } A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_i \subseteq A_{i+1} \subseteq \ldots, \text{ entonces}$$

[920] Puede verse en cualquier libro de Teoría de la Medida o del Cálculo de Probabilidades, como el de Wang (en el primer caso), o el de Kallenberg (en el segundo).
[921] Las “belief measures”.
[922] Las “fuzzy measures”.
[923] En el sentido con que fue introducida por el japonés Michio Sugeno, en 1974.

$$\lim_{i\to\infty} g(A_i) = g\,(\lim_{i\to\infty}(A_i))$$

George Klir[924] mantiene en su definición las dos primeras condiciones para llegar a ser una medida borrosa, pero sustituye la tercera por esta otra[925]:

III´) Si $A \subset B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Entre los ejemplos, podemos citar no sólo las medidas σ-aditivas, sino también las λ-medidas de Sugeno, las de posibilidad, las de plausibilidad, las de creencia, las de necesidad, etc.

Definamos ahora de modo axiomático dicha *Medida de Sugeno:*

Sea $\lambda \in (-1, +\infty)$ y sea $(X, \wp)$ un espacio medible.

Se dice entonces que una función

$$g_\lambda: \wp \to [0, 1]$$

es una *λ-medida borrosa*[926], de parámetro λ, si para todo par, (A, B), de subconjuntos disjuntos de $\wp$, se tiene que:

$$g_\lambda(A \cup B) = g_\lambda(A) + g_\lambda(B) + \lambda\, g_\lambda(A)\, g_\lambda(B)$$

Por su parte, Enric Trillas[927] introdujo esta definición para la *"fuzzy measure":* Sea $(\Omega, <)$, donde $<$ es un preorden. Entonces,

$$\mu: \Omega \to [0, 1]$$

[924] Junto con H. T. Nguyen y E. A. Walker.
[925] Es la llamada "Propiedad de Monotonía".
[926] O medida en el sentido de Sugeno.
[927] El gran pionero español de la Lógica Borrosa.

será una $<$- *medida* en Ω, si verifica que:

- I) Si $x_0 \in \Omega$ es minimal para $<$, entonces $\mu(x_0) = 0$
- II) Si $x_1 \in \Omega$ es maximal, para $<$, entonces $\mu(x_1) = 1$
- III) Si $x < y$, entonces $\mu(x) \leq \mu(y)$.

Ejemplos de este tipo de medida podrían ser[928]:

- Las medidas sigma aditivas, o σ - additives.[929]
- Las λ-medidas de Sugeno.
- Las medidas de Entropía.[930]
- Ser aproximadamente una potencia de tres, o de siete, etc.

Porque en realidad, existe relación de isomorfía entre dichas medidas, que cumplen por ello condiciones equivalentes.

La propiedad III) se puede “relajar” o “debilitar”, de modo que se vuelva más flexible y con ello, sea aplicable a un espectro más amplio de problemas. Con ello, introduciremos la no-aditivividad, o no-σ-aditividad, respetando las dos primeras condiciones, la I) y la II).

La que ahora queremos proponer la planteamos del siguiente modo:

III*) μ es *numerablemente no-aditiva,* es decir, que dados $A_1, A_2, \ldots, A_n$, conjuntos disjuntos dos a dos, o sea, tales que $A_i \cap A_j = \emptyset$, para $i \neq j$, con $i, j = 1, 2, \ldots, n$, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

928 Algunas son lógicamente mencionadas de nuevo.
929 Las σ-additive measures.
930 Así, entre otras, podemos citar las De Luca y Termini.

Esta desigualdad incluye dos posibilidades, la del menor estricto y la de la igualdad, que es la que coincide como caso particular con la enunciada antes como III).

La Medida de Entropía[931].

Sea X un conjunto y sea $\wp$ la familia de conjunto de todos los subconjuntos borrosos[932] sobre X.

Las medidas de borrosidad, también llamadas *medidas de entropía,* asocian a cada conjunto difuso de $\wp$ el grado en que dicho conjunto es borroso, esto es, su grado o nivel de `borrosidad´. Según axiomatizaron De Luca y Termini, en 1972, una *entropía* o medida de borrosidad, denotada por H, verificaría que:

1. H (A) = 0, si A es clásico, o "crisp".
2. H (A) es maximal, si A es el conjunto constante, esto es, tal que

$$A(x) = 1 / 2, \text{ para todo } x \in \Omega$$

3. H (A) ≥ H (B), si A es 'más borroso' (o fuzzy) que B, según el orden siguiente:

$$\text{si } B(x) \leq A(x), \text{ cuando } A(x) \leq 1/2,$$

$$\text{y}$$

$$B(x) \geq A(x), \text{ cuando } A(x) \geq 1/2.$$

4. H (A) = H (X – A) = H (A^c).

[931] Antes de la introducción de los conjuntos borrosos (en 1965) ya eran conocidas dos importantes medidas borrosas. Eran éstas la de Entropía y la de Información.
[932] Subconjuntos o partes difusas.

Sea Ω un conjunto de elementos $\{x_i\}$, y sea $[0, 1]^{\Omega}$ la colección de todos los conjuntos borrosos, o fuzzy sets, sobre Ω.

Una *medida de especificidad* (denotada por *Sp*) sería una función definida mediante:

$$Sp: [0, 1]^{\Omega} \rightarrow [0, 1]$$

tal que:

1. Sp (μ) = 1 si y sólo si μ es un "singleton".[933]
2. Sp (∅) = 0.
3. Si μ y η son conjuntos borrosos normales sobre X, y además, $\mu \subset \eta$, entonces tendremos que

$$Sp(\mu) \geq Sp(\eta)$$

Hemos reseñado toda esta serie de medidas borrosas porque las vamos a necesitar para entender (al menos, mínimamente) los resultados presentados en el siguiente capítulo.

Convendría, no obstante, señalar qué se entiende cuando decimos que una medida es `normal´.

Sea (X, $\wp$) un espacio medible.

Una medida

$$\mu: \wp \rightarrow [0, 1]$$

[933] Es decir, un conjunto unitario, con $\mu = \{x_1\}$.

se dice que es una *medida normal,* si existen tanto un subconjunto minimal, A_0, como otro maximal, $A_{m,}$ de $\wp$, tales que:

1. μ $(A_0) = 0$.

2. μ $(A_m) = 1$.

Podemos poner algún *ejemplo,* como el de las medidas de probabilidad sobre un espacio $(\Omega, \wp)$, que son medidas normales. Basta para comprobarlo con tomar $A_0 = \emptyset$ y $A_m = \Omega$. Las medidas de Lebesgue, en cambio, no son necesariamente normales. Pueden serlo o pueden no serlo, porque las hay de los dos tipos.

Estas medidas borrosas[934], las de simetría, de antisimetría, de entropía, de especificidad, etc., son fundamentales, como sabemos, para el desarrollo y la fundamentación lógica de teorías como la Mecánica Cuántica, o de las Teorías de la Relatividad, y se sigue trabajando en ellas para poder alcanzar un tratamiento más sutil de todo este tipo de sistemas, y que no se queden sólo en los casos más simples y por ello más alejados del mundo real, que son los que funcionan bajo las leyes de la Lógica Clásica. De aquí que toda la nueva Matemática generada a partir de la aparición de la Lógica Borrosa y de la Teoría de los Conjuntos Borrosos sea tan vital para el avance de la Ciencia y de la Filosofía, a través de los análisis cada vez más profundos que ambas generan.

[934] Tanto las ya planteadas por otros como las que nosotros mismos hemos ido planteando con el tiempo en nuestros artículos.

24. Algunos otros resultados obtenidos por el autor en los artículos que lleva publicados, hasta la fecha, acerca de diversos problemas que estaban abiertos en estos campos.

Principales contribuciones del doctorando.

Nuestra labor ha sido tanto de aclaración y generalización de muchos de los conceptos que vamos a exponer, como también de introducir nuevos resultados, como por ejemplo, de las nuevas medidas de simetría y de antisimetría, o de entropía, en cuanto medidas borrosas de gran utilidad en Inteligencia Artificial.

La *entropía*[935] es una medida probabilística de la incertidumbre o de la ignorancia acerca de los datos. Por su parte, la *información* es una medida de la reducción en la incertidumbre. Tenemos que definirlas en términos de las medidas borrosas.[936]

Las propiedades de la *medida de información,* denotada por *I,* serían:

1) I (t) $\geq$ 0, es decir, el contenido de información será siempre una cantidad no negativa.

[935] En lo que entendemos como un sentido estadístico.

[936] Hay que evitar, según Frank Lambert, la interpretación de la entropía como desorden. Así, en lugar propone la noción de “dispersión de la energía”.

2) I (1) = 0, esto es, que si un suceso tiene una probabilidad igual a 1, entonces no se obtiene ninguna información sobre que ocurra dicho suceso.

3) Si se producen dos sucesos independientes entre sí, la información que obtenemos de la observación de los hechos será la suma de la información de ambos.

4) La medida de la información debe ser continua, y también una función monotónica, o monótona, de la probabilidad, por lo que ligeros cambios en la probabilidad deberían traducirse en cambios leves en esa medida de la Información.

Desde un punto de vista matemático avanzado, el francés *A. Kaufmann* (en 1975) introdujo el llamado *"índice de borrosidad"* como una distancia normal, utilizando la forma funcional de la entropía de Shannon para definir un conjunto discreto difuso, A.

Vamos a rehuir en esta exposición todo lo posible un grado de matematización excesivo; la reduciremos a lo imprescindible para entender el resto.

Pero también debemos mencionar la muy notable *Iosifescu-Theodorescu Entropy*[937]*.* Por ejemplo, cuando ésta se define sobre una cadena de Markov estacionaria y homogénea. Así, podemos considerar la IT-entropía como una medida de la movilidad de los procesos sociales sobre distintas cadenas de Markov. Estaría justificado, ya que la IT-entropía de una cadena de Markov

[937] Denotada como *IT - entropía*, en 1961.

alcanza un máximo cuando X (r) es independiente de todos sus estados precedentes.

Yager, en 1979, así como Higashi y Klir, en 1983, mostraron la medida de la entropía como la diferencia entre dos conjuntos borrosos. Más concretamente, sería la diferencia entre un conjunto difuso y su complementario, que es también un conjunto difuso.

Pal, N. R., y Pal, S. K., en 1989, introdujeron una definición de la entropía de tipo probabilístico; en este caso, lo hicieron sobre la base de una "función de ganancia" exponencial, y la utilizaron como base para la definición de su medida de borrosidad.

Bhandari y Pal, en 1993, utilizaron la entropía en el sentido de Alfred Renyi para definir una entropía que ya era no probabilística, o sea, una medida de borrosidad, para los conjuntos borrosos.

Jumaire, en 1990, propuso una definición de la entropía mediante funciones de pertenencia diferenciables.

La *entropía de Shannon*[938] es una medida del contenido de información promedio que se pierde cuando no se conoce el valor de la variable aleatoria. Estos conceptos parten de 1948, del artículo de Shannon que se hizo muy famoso, por sus derivaciones, es decir, la llamada *"Teoría Matemática de la Comunicación".* Por lo tanto, representa un límite absoluto en la compresión

[938] Denotada como *H*; en vez de como es la notación propia de la Termodinámica, donde se suele designar por *S.*

sin pérdida de información, o al menos, la mejor posible para cualquier comunicación.

Bajo ciertas limitaciones, se ocupa del tratamiento de los mensajes codificados como una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.). La información que recibe de una observación es igual al grado en que la incertidumbre se reduce.

Por lo tanto,

$$I = H \text{ (antes de recibirlo) } - H \text{ (después de recibirlo)}$$

Entre sus características principales, tenemos la continuidad. La H, en cuanto medida, debe ser continua, en el sentido de que ante la modificación de los valores de las probabilidades en una cantidad muy pequeña, sólo se legará a cambiar el valor de H en una pequeña magnitud.

<u>Propiedades de la Entropía, H:</u>

Maximalidad: La medida H será máxima, si todos los resultados son igualmente probables, es decir, la incertidumbre es mayor cuando todos los eventos posibles son equiprobables,

$$H_n (p_1, p_2, ..., p_n) \leq H_n (1 / n, 1 / n, ..., 1 / n)$$

Y H se incrementará con el número de resultados

$$H_n (1 / n, 1 / n, ..., 1 / n) < H_{n+1} (1 / n +1, 1 / n +1, ..., 1 / n +1)$$

Aditividad: La cantidad de entropía debe ser independiente de cómo el proceso se considera, es decir, de cómo sea dividido en partes. Dicha relación funcional caracteriza la entropía de un sistema respecto de sus subsistemas. Se exige, pues, que la entropía de cada sistema pueda ser identificada, y a continuación, se calculan a partir de ella las entropías de sus subsistemas.

IFS

Sería interesante analizar un nuevo tipo de constructo matemático, relacionado con los anteriores, y que se ha ido desarrollando en los últimos tiempos: los *Intuitionistic Fuzzy Sets.*[939]

La noción de conjunto intuicionista borroso fue presentada por K. Atanassov en 1986, y luego, desarrollada por autores como Hung y Yang, entre otros. Recordemos que un conjunto intuicionista es una especie de conjunto que no se conoce completamente. Un *IFS* debe representar los grados de su pertenencia o no pertenencia, pero con un cierto grado de indecisión. Por este motivo, se han utilizado ampliamente en muchas áreas de las aplicaciones computacionales.

Una medida muy frecuente de falta de claridad es la *entropía de conjuntos difusos* [940]*,* cuya posibilidad fue mencionada por primera vez por Lofti A. Zadeh, en 1965.

Pero recientemente dos nuevas definiciones han sido propuestas por Szmidt y J. Kacprzyk, en 2001, de un lado; por Burillo y Bustince de otro, en 1996. La primera es una medida de la entropía no probabilística, que aparece

---

[939] Los IFS, en acrónimo.
[940] O "Fuzzy Entropy".

en una interpretación geométrica de lo que es un IFS. Y mediante la segunda, sería posible medir el grado de intuicionismo que presenta un IFS.

También podemos generalizar, a partir de un IFS, al llamado *conjunto "neutrosófico"*[941], abreviadamente *N-Set,* concepto debido al filósofo-matemático de origen rumano, que hoy vive en los Estados Unidos, Florentin Smarandache. Lo expuso a partir de 1995. Ha generado su noción toda una secuela de literatura filosófico-matemática, especialmente las obras del propio autor, pero también de otros, como las que provienen de China[942].

El *N-set* es un conjunto que generaliza muchas clases existentes de conjuntos. En particular, los denominados conjuntos borrosos, o *FS,* y su generalización en primer lugar, la de los *IFS.*

Sea U el universo de discurso, y M un conjunto incluido en U. Un elemento x de U se puede denotar, en relación con el conjunto M, como $x(T, I, F)$.

Cuando pertenece a M, lo hace de la siguiente manera: se trata de que está un T% en el conjunto[943], un I% indeterminado[944], y un F% de no estar en el conjunto.[945] Aquí, T, I, F son subconjuntos estándar / no estándar de componentes reales, incluidos en el intervalo unidad no estándar, el $(^-0, 1^+)$,

[941] Los "Neutrosophic Sets".
[942] Cabe mencionar las *Paradojas de Smarandache*. Para ello, consideraremos algún atributo, como el de ser posible, el de ser perfecto, etc. Si todo es A, entonces el no-A también debe ser A. Por ejemplo, "Todo es posible. Lo imposible también", o con este otro planteamiento: "Nada es perfecto, ni siquiera lo perfecto". Está claro que se están utilizando dos niveles, como distinguía Tarski: el del lenguaje objeto y el del metalenguaje. También es conocida la Función de Smarandache en Teoría de Números, que a su vez, conecta con otros resultados, como la Conjetura de Andrica, que acota el "salto", o "gap", entre dos números primos consecutivos.
[943] Su grado de pertenencia.
[944] En tanto en cuanto se desconoce hasta ese grado si está en el conjunto.
[945] No pertenencia, un nivel o grado nulo de estar en él.

que representarían los porcentajes de verdad, de indeterminación y de falsedad, respectivamente.

Como dice el propio autor de ese concepto y de la corriente de investigación que parte de ella, Smarandache, origen rumano enseñante en la Universidad de Nuevo Méjico, de los Estados Unidos:

> Neutrosophy studies the origin, nature, and scope of neutralities, as well as their interactions with different ideational spectra. It considers that every idea, <A>, tends to be neutralized, balanced by <Non-A> ideas; as a state of equilibrium. Neutrosophy is the basis of neutrosophic logic, neutrosophic set which generalizes the fuzzy set, and of neutrosphic probability and neutrosophic statistics, which generalize the classical and imprecise probability and statistics respectively. Neutrosophic Logic is a multiple-valued logic in which each proposition is estimated to have percentages of truth, indeterminacy, and falsity in T, I, and F respectively, where T, I, F are standard or non-standard subsets included in the non-standard unit interval.[946]

Es posible definir una medida de *Neutrosophic Entropy,* H, o *N-entropía,* como la suma de las entropías respectivas de los tres subconjuntos, T, I y F, esto es, por medio de:

$$H_{NS} = H_T + H_I + H_F$$

Podemos considerar también la *entropía métrica,* también llamada *entropía de Kolmogorov*[947].

[946] SMARANDACHE, F., University of New Mexico, 1995.
[947] La entropía de Kolmogorov-Sinai, en siglas K-S.

En un sistema dinámico, la entropía métrica es igual a cero para un movimiento no caótico, y es estrictamente mayor que cero cuando el movimiento es caótico.

En Termodinámica, la entropía en el sentido de Ilya Prigogine es un término muy a menudo utilizado para referirse a la división de la entropía en dos variables, una que refleja lo que se "intercambia" con el entorno, y la otra, el resultado de procesos "internos".

La entropía de un sistema es una propiedad extensiva, es decir,

a) Si el sistema consta de varias partes, la entropía total es igual a la suma de las entropías de cada parte,

y

b) La variación de entropía se puede dividir en dos partes digamos una debida a factores internos y otra debida a factores externos.

G. E.

Veamos ahora la llamada *Graph Entropy,* o entropía asociada a un grafo. De ella se puede considerar también la "versión fuzzy", esto es la Fuzzy Graph Entropy, al estudio de la cual algo hemos contribuido.

Consideramos un funcional sobre un grafo, G = (V, E), con una distribución de probabilidad P asociada a su conjunto de nodos, V. El constructo matemático denominado como entropía de grafos se puede denotar mediante GE, o H_{GE}. Tal función es convexa. Se puede observar que tiende a más infinito en el límite del "ortante" no negativo del n-espacio euclídeo, $\mathbf{R}^n$. Y converge monótonamente a menos infinito a lo largo de los rayos que parten del origen. Así que dicho mínimo se alcanza siempre, y será finito.

La entropía de un sistema[948] representa la cantidad de incertidumbre que un observador tiene acerca del estado del sistema.

El ejemplo más simple de un sistema podría ser una variable aleatoria y se muestra como un nodo en el grafo, lo que da como consecuencia la representación de la relación mutua a través de las aristas[949] correspondientes.

La *Información* cuantifica la cantidad de correlación entre los dos sistemas, y se reduce a una diferencia de entropías. Por lo tanto, la entropía de un grafo es una medida de la estructura del grafo, o de la ausencia de ella. Por lo tanto, se puede interpretar como la cantidad de información, o el grado de sorpresa, comunicada por un mensaje. Y puesto que la unidad básica de información es el bit, la entropía también puede ser vista como el número de bits de "randomness"[950] en el grafo, confirmando que cuanto mayor sea la entropía, más aleatorio va a ser el grafo.

SIMETRÍA:

Pierre Curie (1859-1906)[951] estableció que:

"It is asymmetry that creates a phenomenon".

Paul Renaud generalizó esta idea de Curie diciendo que:

If an ensemble of causes is invariant with respect to any transformation,

[948] Denotada generalmente por H.
[949] Edges, links o enlaces.
[950] Aleatoriedad.
[951] El esposo de Maria Schlodowska, también llamada Marie Curie.

the ensemble of their effects is invariant with respect to the same transformation.

Joe Rosen, por su parte, enunció su postulado acerca de la simetría[952]:

The symmetry group of the cause is a subgroup of the symmetry group of the effect.

O de un modo más sencillo:

The effect is at least as symmetric as the cause (and might be greater).

También es de Joe Rosen aquella afirmación según la cual:

Recognized causal relations in nature are expressed as laws. Laws impose equivalence relations in the state sets of causes and of effects. So, Equivalent states of a cause are mapped to (i.e., correlated with) equivalent states of its effect.

Este sería el "Equivalence Principle", o Principio de Equivalencia. De un modo menos preciso, pero más sintético, tal principio puede expresarse como:

Equivalent causes are associated with equivalent effects.

Concerniente al "Equivalence Principle" para procesos sobre sistemas físicos aislados, se puede también decir que:

Equivalent initial states must evolve into equivalent states.[953]

Y el "General Symmetry Evolution Principle" establecer que:

The "initial" symmetry group is a subgroup of the "final" symmetry group.

Esta afirmación puede también ser enunciada como:

For an isolated physical system the degree of symmetry cannot decrease

[952] Llamado el "Symmetry Principle".
[953] Pero estados que no son equivalentes pueden evolucionar hasta llegar a serlo.

as the system evolves; instead, it either remains constant or increases.

Finalmente, tendríamos el "Special Symmetry Evolution Principle":

> As an isolated system evolves, the populations of the equivalence classes of the sequence of states through which it passes cannot decrease, but either remain constant or increase.

Planteado de modo equivalente,

> The degree of symmetry of the state of an isolated system cannot decrease during evolution; instead, it either remains constant or increases.

Como una implicación posterior, Joe Rosen propuso este teorema general:

> The degree of symmetry of a macrostate of stable equilibrium must be relatively high.

De acuerdo con el punto de vista tradicional, mayor simetría estaría relacionada con un mayor orden, con menos entropía y con más estabilidad[954].

En la teoría de Ilya Prigogine, la simetría ha sido mirada como orden, o reducción de la entropía. Para algunos, sin embargo, esta idea sería incorrecta. El Principio de Simetría sería, desde luego, lo más opuesto a tal teoría.

[954] No olvidemos los conocidos Principios complementarios de Máxima y de Mínima Entropía, relacionados con la Incertidumbre y con la Información; por tanto, con la Simetría. El primero de ellos está vinculado al *Principio de Simplificación* (de la complejidad de un sistema), mientras el segundo estaría relacionado con el *Principio de Razón Insuficiente o de Indiferencia*, planteado por Laplace y los Bernoulli. Según éste principio, cuando no hay razón para pensar que una de las opciones disponibles sea más verosímil que las otras, a todas debe asignárseles la misma probabilidad.

El químico chino Shu-Kun Lin, ubicado en Suiza y presidente en la ciudad de Basel perteneciente al grupo MDPI, había probado ambos resultados:

- el *Symmetry Principle,* en torno a una relación continua de mayor similaridad - mayor entropía; y el
- *Rosen's Symmetry Principle,* en torno a una relación de mayor simetría - mayor estabilidad. Él fue quien propuso que la entropía es el grado de simetría, y la información es el grado de asimetría, dentro de una estructura.

De acuerdo con Shu-Kun Lin,

symmetry is in principle ugly,

because it is related to entropy and information loss

Acogiéndose bajo el lema:

Ugly Symmetry - Beautiful Diversity

Esto viene a contradecir la más usual y tópica visión de la simetría en tanto que concepto que se cree equivale al de belleza, a lo más deseable, a la total proporción y armonía. Lo cual puede resultar para algunos muy sorprendente, pero Shu-Kun Lin lo argumenta de un modo convencido:

Si es simétrica la estructura, entonces podemos decir que será estable, pero no asegurar que necesariamente sea bella. Porque todos los procesos espontáneos conducen al más alto grado de simetría, que es el de equilibrio final, o un estado de "muerte".

Así,

“Life is beautiful but full of asymmetry”

Basándose en ello, S. K. Lin concluye que:

Beauty = Stability + Information

Intuitivamente, la simetría, como la perfección o belleza, hasta alcanzar un cierto nivel, puede ser preciosa, pero a partir de él[955] puede significar el final del ser humano, que es por naturaleza[956] imperfecto.

La *Simetría* en un sistema significa o equivale a la invariancia de sus elementos bajo ciertas condiciones, las del grupo de transformaciones. Cuando tomamos las estructuras de una red, viene a significar la invariancia de la adyacencia entre los nodos, bajo las permutaciones del conjunto de vértices. El isomorfismo de grafos sería una relación de equivalencia o de igualdad, en tanto en cuanto que relación dentro del conjunto de grafos. Por lo tanto, establece las particiones de la clase de todos los grafos en clases de equivalencia.

La idea subyacente en el isomorfismo es que algunos objetos tienen la misma estructura, si se omite el carácter individual de sus componentes. Un conjunto de grafos isomorfos los unos a los otros se denomina una clase de isomorfía de grafos.

El *automorfismo* de un grafo, G = (V, E), será un isomorfismo de G sobre sí mismo. La familia de todos los automorfismos de un grafo, G, es un grupo de las permutaciones en V(G). El funcionamiento interno de dicho grupo será

[955] Aparte de ser inexistente en el mundo real.
[956] Y afortunadamente.

mediante la composición de sus permutaciones. Su nombre es bastante conocido: se suele llamar el *grupo de automorfismos de G,* y abreviadamente, se denota por *Aut (G).* Por otra parte, sabemos también que todos los grupos pueden ser representados como el grupo de automorfismos de un cierto grafo conexo.

El grupo de automorfismos sería un invariante algebraico de un grafo. Por lo tanto, se puede decir que el automorfismo de un grafo es una forma de simetría mediante la cual se hace corresponder el grafo consigo mismo, al tiempo que se preserva la conectividad arista - nodo. Tal herramienta de lo “automorphic” puede aplicarse tanto en gráficos dirigidos[957] como en los grafos no dirigidos.[958] Por lo tanto, un invariante o propiedad será una característica del grafo, no dependiendo de la correspondiente representación que se efectúe de él. La diferencia semántica también consiste en su carácter: según que sea uno cualitativo o uno cuantitativo.

Cuando decimos “el grafo no posee aristas dirigidas”, ésta sería una propiedad, porque nos da como resultado una declaración cualitativa. Mientras que cuando decimos “el número de nodos de grado dos en el grafo es tal”, este ya sería un invariante, porque es una declaración cuantitativa. Desde un punto de vista estrictamente matemático, una propiedad de un grafo puede interpretarse como una clase de grafos, al estar compuesto por los grafos que tienen en común el cumplimiento de algunas condiciones. Por lo tanto, una propiedad de un grafo también se puede definir como una función cuyo dominio sea el conjunto de los grafos, y su recorrido será el conjunto bivaluado

[957] O Directed Graphs; D. G., o simplemente DG, en acrónimo.
[958] O Undirected Graphs, U. G., o simplemente UG, bajo acrónimo.

compuesto por las dos opciones lógicas más tradicionales, las de verdadero y falso, según la cual una condición determinada es o verificada o vulnerada por el grafo.

Una propiedad de los grafos se llama *hereditaria,* si es heredada por sus subgrafos inducidos. Y es *aditiva,* si resulta cerrada bajo la unión disjunta. Así, por ejemplo, la propiedad de que un grafo sea plano[959] es tanto aditiva como hereditaria. En lugar de esto, la propiedad de "estar conectado con" no es ni lo uno ni lo otro.

El cálculo de invariantes de determinados grafos puede sernos muy útil. En efecto, porque cumplen el objetivo de discriminar cuándo dos grafos son isomorfos, o más bien cuándo no son isomorfos.

El soporte teórico de estos criterios radica en que para cualquier invariante en general que podamos considerar, dos grafos sobre los que ellos tomen valores diferentes no podrán ser nunca isomorfos entre sí. Pero, sin embargo, dos grafos con los mismos valores en sus invariantes sí que puede que sean o no sean isomorfos entre ellos. Por lo tanto, llegamos a la necesidad de la noción de *completitud.*

Se puede probar que:

Un digrafo[960] no contiene ningún ciclo si y sólo si todos los autovalores[961] de su matriz de adyacencia son iguales a cero.

---

[959] La "planar condition".
[960] O grafo dirigido.
[961] O "eigenvalues".

También es demostrable que cualquier grupo es el grupo de automorfismos de un grafo. Si el grupo es finito, el grafo puede ser llevado a ser también finito.

George Polya observó que no todos los grupos son el grupo de automorfismos de un árbol[962]. El contenido de información estructural será la entropía de la topología de su grafo subyacente.

Una *red* se dice que es *asimétrica,* si su grupo de automorfismos se reduce a la identidad del grupo. Es decir, que sólo contiene la permutación identidad. De lo contrario, la red se denomina *simétrica.*

El estudio de los diferentes conceptos de entropía está siendo muy interesante para la investigación actual, y no sólo en la física, sino también en la teoría de la información y en otras ciencias de naturaleza matemática, consideradas en su visión más general[963]. También puede ser una herramienta muy útil en Bioinformática, por ejemplo, o en muchas otras esferas del conocimiento, como el estudio de las Ciencias Ambientales. Porque, entre otras interpretaciones, con importantes consecuencias prácticas, la ley de la entropía significa que la energía no puede ser totalmente "reciclada", que hay un grado de disipación inevitable.

[962] Un "tree", o árbol; es como una forma de red, de net o network.

[963] Ya antes del planteamiento por Zadeh de la Teoría de Conjuntos Borrosos, se manejaban dos medidas de incertidumbre. Estas eran la de Información de Hartley (1928) y la de Entropía de Shannon (1948). La primera de ellas se basaba en la Teoría Clásica de Conjuntos, mientras que la segunda, en la Teoría de la Probabilidad. Cada una de ellas intenta una aproximación a la ambigüedad desde un ángulo distinto. La de Hartley trataría de la no-especificidad, pero la de Shannon lo que mide es la disonancia o conflicto dentro de la evidencia. Medidas, por tanto, propuestas para calibrar la información en términos de incertidumbre, esto es, son medidas de información. A la segunda se le suele denominar la \`entropía de Shannon´, con un nombre sugerido por el propio Shannon, dado el \`aire de familia´ con la que aparece en Mecánica Estadística.

Muchas citas se han hecho hasta ahora, referentes al contenido y a la importancia de esta medida difusa.

Entre ellas, podemos escoger

El resultado de la entropía siempre significa

la pérdida de la información, y nada más.[964]

La información es sólo entropía conocida.

La entropía es sólo información desconocida.[965]

La *Información Mutua,* o *entropía relativa*[966], entre otros conceptos bastante relacionados entre sí, ha sido muy útil para los sistemas de aprendizaje[967], tanto para el caso supervisado[968] como para el caso no supervisado[969].

Sería interesante analizar, si bien no ahora, la relación mutua entre los distintos tipos de entropías, como pueden ser:

- La *entropía cuántica*[970], también llamada entropía de Von Neumann;

- La *KS - entropía*[971], que también es llamada *entropía métrica*.

- La *entropía topológica,* o

- La *Graph Entropy,* antes ya descrita, entre otras.

---

964 [G. N. Lewis].
965 [M. P. Frank, escribiendo *Sobre los límites físicos de la Informática*].
966 También llamada la divergencia de Kullback-Leibler.
967 Los “learning systems”, en Inteligencia Artificial.
968 El “supervised learning”.
969 “Unsupervised learning”.
970 La QE, por Quantum Entropy.
971 Definida por Andrei N. Kolmogorov y por su discípulo, Yakov Sinai.

La *entropía algorítmica* (AE, bajo acrónimo) es el tamaño del programa más pequeño que genera una cadena.[972] Recibe otros muchos nombres, como puede ser, por ejemplo, el de la Complejidad de Kolmogorov-Chaitin, o se dice tan sólo la Complejidad de Kolmogorov.[973]

Dicha *AE* es una medida de la cantidad de información contenida en un objeto, x. Por lo tanto, también mide su grado de aleatoriedad. Por tanto, la AE de un objeto sería una medida de los recursos computacionales necesarios para especificar dicho objeto. O sea, el AE de una cadena será la longitud del programa más corto que puede producir esta cadena como salida. Así, la entropía cuántica algorítmica[974] sería la longitud de la más corta de entrada cuántica a una máquina universal de Turing[975] que produce la inicial cadena de los "qubit", o bit cuánticos, con alta fidelidad. Por lo tanto, el concepto es muy diferente del de la entropía de Shannon, porque mientras que éste se basaba en distribuciones de probabilidad, la AE se basa en el tamaño de los programas.

Uno de los resultados más trascendentales de la física, y en cualquiera de las otras ciencias, fue el obtenido por la gran matemática judío-alemana *Emmy Noether (1882-1935).* Esta lo demostró en 1915, y fue publicado algo más tarde, en 1918.

Establecía que cualquier simetría diferenciable de la acción de un sistema físico tiene asociada biunívocamente una ley de conservación. Por lo tanto, a

---

[972] Se denota por K(x), o AE.
[973] Pero también la Complejidad Estocástica, o del Tamaño del Programa.
[974] La Q. A. E., o Quantum Algorithmic Entropy, también llamada complejidad cuántica de Kolmogorov: Q. K. C., o Quantum Algorithmic Complexity.
[975] La U. Q. T. M., o Universal Turing Quantum Machine.

cada simetría continua de una teoría física le corresponde una cantidad conservada, es decir, una cantidad física que no cambia con el tiempo. Por lo tanto, la simetría bajo traslación se ajusta a la ley de conservación del momento. O la Simetría bajo rotación, a la conservación del momento angular. La Simetría en el tiempo, a la conservación de la energía. También está dicha correspondencia presente en las Teorías de la Relatividad, o en la Mecánica Cuántica, y así sucesivamente. Es un resultado muy importante, ya que nos permite obtener cantidades conservadas a partir de la forma matemática de nuestras teorías.

Hay que recordar que la acción de un sistema físico se calcula mediante la integral de una función Lagrangiana, o función de Lagrange, *L,* a partir de la cual puede ser determinado el comportamiento del sistema por medio del Principio de Mínima Acción. Tengamos, sin embargo, bien presente que este teorema no se podrá aplicar a los sistemas que no puedan modelarse mediante una función de Lagrange. Por ejemplo, este no sería aplicable sobre los sistemas disipativos.

El *Teorema de Noether* se ha convertido, con el paso del tiempo, en algo esencial, no sólo en la Física Teórica moderna, sino también en el Cálculo de Variaciones, y por lo tanto, en campos como el del modelado y el de la optimización.

De hecho, toda la física moderna se basa en un grupo de principios de simetría, de los que el resto se pueden deducir o derivar. Por lo tanto, podemos decir que las leyes de la naturaleza se ven limitadas, o regidas, por la simetría implícita en ella.

Tal teorema admite distintos enunciados, pero que son esencialmente equivalentes, como pudiera ser el de:

to every differentiable symmetry generated by local actions,

there corresponds a conserved current.

Esto puede conectarse con los temas hoy en día de más rápida evolución dentro de la física moderna, como la “Gauge Symmetry”[976], en la Mecánica Cuántica[977], para los resultados de Edward Witten[978], y en muchos otros.

Emmy Noether será recordada no sólo por este teorema[979], sino por sus muchas contribuciones al Álgebra Abstracta.

También ha sido propuesta una versión cuántica de dicho teorema de Emmy Noether. Es conocida como la *Identidad de Ward – Takahasi.*

La ley de conservación de una cantidad física se expresa mediante una ecuación de continuidad, donde se denomina la cantidad conservada la

Carga de Noether

y el flujo de transporte que “carga” sería la

Corriente de Noether

Para la QM (o Mecánica Cuántica), la invariancia bajo un cambio de fase de la función de onda conduce a la conservación del número de partículas.

---

[976] O simetría de norma.
[977] QM, por Quantum Mechanics.
[978] En la String Theory, o Teoría de Cuerdas.
[979] En realidad, se trata de dos resultados, con muchas consecuencias.

En las últimas décadas, la expansión de la matemática borrosa, o "Fuzzy Mathematics", así como de sus aplicaciones, ha sido formidable. La versión paralela de diferentes campos matemáticos, pero adaptados a la nueva teoría de los grados de verdad, está muy adelantada en algunas de sus ramas. La idea básica según la cual un elemento no necesariamente pertenece totalmente, o no pertenece en absoluto, a un conjunto, pero puede pertenecerle más o menos, en cierto grado, significa una interesante especie de revolución en el pensamiento científico, implicando un cierto cambio de paradigma, con la necesaria adaptación del tantas veces denostado hieratismo matemático frente a las características del mundo real.

Por lo tanto, está produciendo ya nuevos campos mejorados, a partir de los clásicos, como es la teoría de la medida aproximada[980], que generaliza la teoría de la medida clásica de autores como Lebesgue y otros. Puede ser muy útil, como herramienta más dúctil en muchos de nuestros propios trabajos. Y así puede ocurrir en todos los campos matemáticos.

En el *Modelado Difuso*[981] intentamos ir construyendo sistemas difusos. Muchas veces será una tarea muy difícil, debido a que sería necesaria para ello la identificación de muchos parámetros. Pero cuenta con un gran potencial para el análisis de estructuras con organizaciones de tipo no estocástico, para así poder introducir y procesar la información imprecisa.

---

980 La "Fuzzy Measure Theory".
981 El "Fuzzy Modeling".

En la *Optimización Difusa*[982], nuestro objetivo será maximizar o minimizar un conjunto difuso sometido a ciertas restricciones borrosas. Pero no podemos hacer esto directamente, a través del mero “valor” de un conjunto difuso.

Por esta razón, en áreas como las de la Economía o de las Finanzas, tratamos de maximizar o minimizar el valor de una variable aleatoria discreta o continua, siendo restringido mediante una función de masa de probabilidad o función de densidad. Entonces, cambiamos el problema multi-objetivo en un único objetivo “crisp”, o nítido, sometido a restricciones difusas. Y es posible generar buenas soluciones aproximadas por medio de los llamados Algoritmos Genéticos. Pero existen también diferentes problemas de optimización difusos, que incluyen el aprendizaje de una red neuronal difusa, los cuales pueden resultar útiles para resolver problemas de programación lineal difusa[983], y de control de inventario difuso[984], utilizando para ello esos algoritmos genéticos.

Es esencial el concepto axiomatizado de *entropía*, indicado como dijimos por H. Muchas de sus ideas fundamentales se derivan de Claude E. Shannon, y de Alfred Rényi. También está relacionado con la longitud de codificación de la variable aleatoria. De hecho, con algunas suposiciones simples, H es la longitud de codificación de la propia variable aleatoria.

La entropía resulta sin duda el concepto básico de toda la Teoría de la Información. Se puede interpretar, para una variable aleatoria, como el grado de información que la observación de la variable produce. Cuanto más

[982] La “Fuzzy Optimization”.
[983] FLP, por “Fuzzy Linear Programming”.
[984] El “Fuzzy Inventory Control”.

“aleatoriedad” presenta la variable, mayor es su entropía. Se suele definir para una variable aleatoria discreta.

Existe un resultado muy importante en *Teoría de la Información,* de acuerdo con el cual una variable aleatoria gaussiana tiene la mayor entropía posible, de entre todas las variables aleatorias que tengan la misma varianza. Por lo tanto, la Normal o Gaussiana es la distribución de probabilidad “menos estructurada”, o lo que es equivalente, la “más aleatoria” de entre todas las distribuciones.

Aún tenemos una segunda medida, y muy importante, la de la no “gausanidad”, o sea, la de no ser del tipo de Gauss, o de no serlo en cierto grado, o simplemente, de una desviación de la Normal. Se le llama con distintos nombres, aunque habitualmente como *Negentropía*[985]*.* En realidad, se trata de una versión ligeramente modificada de la entropía diferencial.

De acuerdo con lo que dice en una de sus obras Erwin Schrödinger; concretamente, en la llamada *¿Qué es la vida?:*

Negentropy of a living system is the entropy that it exports,

to maintain its own entropy low.

Y Leon Brillouin también decía que:

A living system imports negentropy, and stores it.

[985] Ya sea como Entropía Negativa, o Sintropía, denotándose usualmente con el símbolo *J.*

El llamado *Principio de Simetría de Curie,* debido a Pierre Curie[986], postula que:

El grupo de simetría de la causa es un subgrupo

del grupo de simetría del efecto.

Esta idea puede producir aún consecuencias bastante profundas en la Teoría de la Causalidad, así como llega a ser muy útil en el futuro para analizar las relaciones entre los fundamentos de las distintas teorías físicas.

Resumiendo:

La *entropía* es, por tanto, una medida probabilística de la incertidumbre o de la ignorancia acerca de los datos. Sin embargo, la *información* debe ser una medida de la reducción de esa incertidumbre.

La entropía de una distribución de probabilidad es el valor esperado de la información de dicha distribución.

Todas estas herramientas, una vez mejoradas, nos permiten avanzar no sólo en campos como el vital de la Teoría de Optimización, sino también en el no menos importante, y conectado con ellas, de las medidas difusas generalizadas, en la Economía, en el modelado en temas de Biomedicina, etc.

Por lo tanto, hemos mostrado algunas medidas diferentes de la entropía, más o menos útiles en función de su contexto, viendo su necesidad dentro de las posibles aplicaciones, según las ideas sugeridas en su día por el gran matemático húngaro Alfred Rényi.

[986] Ya sabemos, "el marido de la Curie".

ALGUNOS DE NUESTROS RESULTADOS MÁS ORIGINALES, QUE TRATAN SOBRE LAS MEDIDAS BORROSAS, TANTO LAS DE SIMETRÍA COMO LAS DE ANTISIMETRÍA, Y TAMBIÉN LAS MEDIDAS DE ENTROPÍA:

Los resultados que recogemos a continuación proceden de algunos de nuestros artículos aparecidos en la revista *SYMMETRY,* pero que continúan en esta línea, clasificando medidas borrosas, como las de entropía y de simetría, dilucidando su significado, en otras revistas, tales como *AXIOMS,* también publicada en Basel (Suiza). Figura en su texto original, en inglés:

We proceed to define our new fuzzy measures. Such functions might be defined as some of the type

$$\{L_i\}_{i \in \{s,a\}}$$

where *s* denotes symmetry, and *a* denotes asymmetry.

Suppose that from here we denote by c(A) the cardinal of a fuzzy set, A.

We denote by H(A) its entropy measure, and by Sp(A) its corresponding specificity measure.

Theorem 1.

Let (E, d) be a fuzzy metric space, with A as a subset of E, and let H and Sp be both above fuzzy measures defined on (E, d).

Then, the first function, operating on A, may be defined as

$$L_s (A) = Sp(A) [(1 - c(A)) / (1 + c(A)) + (1 / (1 + H(A)]$$

and will be also a fuzzy measure.

This measure is called an *Symmetry Level Function.*

Theorem 2.

Let (E, d) be a fuzzy metric space, with A as any subset of E, and let H and Sp be both above fuzzy measures defined on (E, d).

Then, the function

$$L_a (A) = 1 - \{Sp(A) [(1 - c(A)) / (1 + c(A)) + (1 / (1 + H(A)]\}$$

Also will be a fuzzy measure. This measure will be called an *Asymmetry Level Function.*

Corollary 1.

In the same precedent hypotheses of precedent Theorems, the Symmetry Level Function is a Normal Fuzzy Measure.

Corollary 2.

Also, in such conditions the Asymmetry Level Function will be a Normal Fuzzy Measure.

Recall that the values of a fuzzy measure, Sp, are decreasing when the size of the considered set is increasing. And the Range of the Specificity Measure, denoted by Sp, will be [0, 1]."

Esto lleva a la posibilidad de continuar con el estudio de la simetría de los sistemas, basándonos en lo que allí apuntábamos:

"Recall the line which was open by the *Three Laws of Similarity,* according to which, in parallel to the first and the second laws of thermodynamics, we have:

i) *The first law of information theory.*

The logarithmic function L = ln w, or the sum of entropy and information, L = S + I, of an isolated system remains unchanged, where S denotes the entropy and I the information content of the system.

ii) *The second law of information theory.*

Information of an isolated system decreases to a minimum at equilibrium.

iii) *The third law of information theory.*

For a perfect crystal (at zero absolute thermodynamic temperature), the information is zero and the static entropy is at the maximum. Or in a more general form, "for a perfect symmetric static structure, the information is zero and the static entropy is the maximum.

Analyzing the Gibbs' paradox, Dr. Lin arrives to its well-known:

iv) *Similarity principle.*

The higher the similarity among the components is, the higher the value of entropy will be and the higher the stability will be.

Los principales resultados conseguidos por el autor de estas páginas (el ahora doctorando) serían los relativos a las nuevas medidas de nivel de simetría y de asimetría, así como los que tratan de la clasificación de las medidas de entropía, de similaridad, de especificidad, etc., esto es, de establecer una taxonomía dentro de la clase de las medidas borrosas.

En la nota al pie podemos ver algunas de las publicaciones del doctorando en que aparecen demostrados la mayoría de los resultados antes citados, o de las consecuencias o corolarios de estos (según consta en las *principales bases de datos, como son la de la AMS - Mathematical Reviews, ó la del Zentralblatt für Mathematik[987]).*

En nuestro artículo sobre la *Lógica de Lukasiewicz,* de 2010, exponíamos:

Fuzzy Rules are linguistic IF-THEN constructions that have the general form "IF A THEN B", where A and B are propositions containing linguistic variables.

A is called the premise, or antecedent, and B is the consequent (or action) of the Rule.

---

[987] MR2845294 Reviewed Garrido, Angel Classifying entropy measures. Symmetry 3 (2011), no. 3, 487–502. 94A17 (94D05) MR2807009 Reviewed Garrido, Angel Symmetry in complex networks. Symmetry 3 (2011), no. 1, 1–15. 05C82 MR2889920 Indexed Garrido, Angel Improving some combinatorial tools. Adv. Model. Optim. 12 (2010), no. 3, 411–415. 05C30 (05C20) MR2889912 Indexed Garrido, Angel Asymmetry and complex networks. Adv. Model. Optim. 12 (2010), no. 2, 283–290. 68R10 (05C82) MR2889904 Pending Garrido, Angel Some distances as new information measures. Adv. Model. Optim. 12 (2010), no. 2, 193–204. 94A17 (03E72 28E10) MR2804859 Reviewed Garrido, Angel Symmetry and asymmetry level measures. Symmetry 2 (2010), no. 2, 707–721. (Reviewer: Adrian Ioan Ban) 28E10 (03E72) MR2677489 Indexed Garrido, Angel Analysis of entropy measures. Sci. Stud. Res. Ser. Math. Inform. 19 (2009), no. 2, 257–263. 94A17 (94A15) MR2656777 Indexed Garrido, Angel On specificity and entropy measures. Acta Univ. Apulensis Math. Inform. No. 20 (2009), 93–97. 94A15 (94A17) MR2554312 Indexed Garrido, Angel Asymmetry level as a fuzzy measure. Acta Univ. Apulensis Math. Inform. No. 18 (2009), 11–18. 28E10 (03E72 26E50); MR2486729 Indexed Garrido, Angel Measuring asymmetries by Fourier series. Adv. Model. Optim. 11 (2009), no. 2, 77–90. 42C99 (03E72 26E50); MR2430255 Indexed Garrido, Angel Fuzzifying asymmetries. Adv. Model. Optim. 10 (2008), no. 2, 221–232. 68T30 (26E50 28E10 68T01); MR2417367 Indexed Garrido, Angel Analysis of asymmetry measures. Adv. Model. Optim. 10 (2008), no. 2, 199–211. 00A71 (00A79 20P05 68R10 78A02 93C42); MR2424935 Indexed Garrido, Angel Fusion modeling to analyze the asymmetry as continuous feature. Adv. Model. Optim. 10 (2008), no. 1, 135–146. 03E72 (68R10 68T37); MR2318971 Indexed Garrido, Angel Additivity and monotonicity in fuzzy measures. Stud. Cercet. Ştiinţ. Ser. Mat. Univ. Bacău No. 16, suppl. (2006), 445–457. 28E10 (03E72) Symmetry vs. asymmetry. (English) Acta Univ. Apulensis, Math. Inform. 17, 69-75 (2009). MSC 2010: 26E50 28E10 68T30 68T01. Acontinuación, las que aparecen en los Zentralblatt MATH: Zbl 1199.26110 Garrido, Angel Asymmetry level as a fuzzy measure. (English) Acta Univ. Apulensis, Math. Inform. 18, 11-18 (2009). MSC 2010: 26E50 28E10 68T30 68T01; Zbl 1176.68206 Garrido, Angel Measuring asymmetries by Fourier series. (English) Adv. Model. Optim. 11, No. 2, 77-90 (2009). MSC 2010: 68T27 03E72 26E50; Zbl 1212.28041 Garrido, Angel Classifying fuzzy measures. (English) Breaz, Daniel (ed.) et al., Proceedings of the 5th international conference on theory and applications of mathematics and informatics, ICTAMI 2007, Alba Iulia, Romania, August 30--September 2, 2007. Alba Iulia: Aeternitas Publishing House (ISBN 978-973-1890-01-2). 115-123 (2008). MSC 2010: 28E10; Zbl 1164.03015 Garrido, Angel Maximizing and minimizing fuzzy sets. (English) Acta Univ. Apulensis, Math. Inform. 13, 13-20 (2007). MSC 2010: 03E72 90C70 • Reviewer: Witold Pedrycz (Edmonton); Zbl 1164.28017 Garrido, Angel Some remarks about fuzzy integration. (English) Acta Univ. Apulensis, Math. Inform. 13, 3-12 (2007). MSC 2010: 28E10 03E72 • Reviewer: Witold Pedrycz (Edmonton); Zbl 1146.68458 Garrido, Angel Special functions in fuzzy analysis. (English) Opusc. Math. 26, No. 3, 457-464 (2006). MSC 2010: 68T27 03B52 03E72 26E50.

In fact the use of linguistic variables and fuzzy IF-THEN rules exploits the tolerance for imprecision and uncertainty. In this respect, Fuzzy Logic imitates the ability of the human mind to summarize data and focus on decision-relevant information.

Hereditary Principle

For each fuzzy set, A, associated to a fuzzy predicate, as a fuzzy subset of B, every element with the property A will inherit the property B. Schematically,

$$\frac{A(x) \qquad A \subset B}{B(x),\ \forall x \in U,\ A, B \subset U}$$

Observe the inclusion between fuzzy sets A and B: $A \subset B$, means, once translated to membership degree functions,

$$\mu_A(x) < \mu_B(x),\ \forall x \in U$$

Composition Rule

For each $x \in U$ that verifies the property defining the fuzzy set A, and such that this element is related (by R) with other element y, that belongs to a different universe, U_2, it is possible to associate to this element the composition between A and R. That is,

A (x)

R (x, y)

____

$\forall x \in U, \forall y \in V, A \subset U, R \subset U \times V$

Generalized Modus Ponens Rule

A (x)

B (x) → C (y)

$[A \circ (B \times C)]\ (y), \forall x \in U, \forall y \in V, A, B \subset U, C \subset V$

being

$$\mu_{A\circ(B\times C)}\ (y) \equiv \max \{\min [\mu_A\ (x), \mu_{B\times C}\ (x, y)]\}$$

but then, according to the definition of Cartesian product of fuzzy sets,

$$\mu_{A\circ(B\times C)}\ (y) \equiv \max_{x\in U} (\min \{\mu_A\ (x), \min [\mu_B\ (x), \mu_C\ (y)]\})$$

Generalized Modus Tollens Rule

D (y)

B (x) → C (y)

$[D \circ (C \times B)]\ (x), \forall x \in U, \forall y \in V, B \subset U, C, D \subset V$

where

$$\mu_{[D\circ(C\times B)]}\ (x) = \max_{y\in V} \{\min [\mu_D\ (y), \mu_{C\times B}\ (y, x)]\}$$

and so,

$$\mu_{[D\circ(C\times B)]}\ (x) = \max_{y\in V} (\min \{\mu_D\ (y), \min [\mu_B\ (x), \mu_C\ (y)]\})$$

Note.

The basic difference between Modus Ponens and Modus Tollens is that whereas in the former case, exact inference is produced, in the latter we may infer generalizations from a set of events.

Abduction Inference Rule

Abduction infers plausible causes from an effect; concretely, they infer the more plausible causes. So,

B (y)

A (x) → B (x)

A (y), ∀x ∈ U, ∀y ∈ V

Hypothetical Syllogism

A (x) → B (y)

B (y) → C (z)

[(A × B) ◦ (B × C)] (x, z), ∀x ∈ U, ∀y ∈ V, ∀z ∈ W, A ⊂ U, B ⊂ V, C ⊂ W

Sobre la axiomatización de Relaciones Borrosas, decíamos en el mismo artículo lo siguiente:

The composition of fuzzy relations is defined by the so called ”max-min product”, introduced previously by two fuzzy relations acting on subsequent universes of discourse, U_1, U_2, U_3,

$$R_1 (U_1, U_2) \circ R_2 (U_2, U_3) = R_3 (U_1, U_3)$$

where

$$R_3 (U_1, U_3) = \{(x, z) \mid \mu_{R1 \circ R2} (x, z), \forall x \in U_1, \forall z \in U\}$$

being

$$\mu_{R1 \circ R2} (x, z) = \max_{\forall y \in U_2} \{ \min [\mu_{R1} (x, y), \mu_{R2} (y, z)]\} =$$

$$= \max_{y \in U2} \{\min [\mu_{R1} (x, y), \mu_{R2} (y, z)]\}$$

Remark.

For this reason, the composition ($\circ$) of fuzzy relations will be often denominated *"max-min matricial product".* But note that it is very different from the usual product among matrices.

As a particular case of the previous definition for the composition of fuzzy relations, we can introduce the composition of a fuzzy set and a fuzzy relation.

The usual properties of the classical relations can be translated to fuzzy relations, but modified in the following sense

- R is *Reflexive,* if $R (x, x) = 1, \forall x \in C \subset U$.

Each element would be totally related with itself, when R is reflexive.

- R is *Symmetric,* if $R (x, y) = R (y, x), \forall (x, y) \in C \times C \subset U \times U$.

The principal diagonal, Δ, acts as a mirror, in the associated matrix.

- R is *Transitive,* not in the usual way for relations or associated matrices, but when the following holds

$$R (x, z) \geq \max_{y \in U} (\min \{R (x, y), R (y, z)\}), \forall (x, y) \in C \times C \subset U \times U$$

All these mathematical methods can be very interesting in Fuzzy Logic and also in many branches of Artificial Intelligence.[988]

Sobre las *conectivas y los conjuntos borrosos,* escribíamos allí:

"We may define the classical operations among crisp, or classical sets, generalizing to fuzzy versions. So, they may be characterized by its membership functions.

We have, for the union of fuzzy sets, defined by

$$\mu_{F \cup G}(x) = \max\{\mu_F(x), \mu_G(x)\}$$

and on the intersection of fuzzy sets, by

$$\mu_{F \cap G}(x) = \min\{\mu_F(x), \mu_G(x)\}$$

and also the complement of a fuzzy set, F, by

$$\mu_{c(F)}(x) = 1 - \mu_F(x)$$

The strict inclusion among two Fuzzy sets may be introduced by:

$$F \subset G \Leftrightarrow \mu_F(x) < \mu_G(x)$$

And in its more general (non strict) version,

$$F \subseteq G \Leftrightarrow \mu_F(x) \leq \mu_G(x)$$

The difference among two fuzzy sets, F and G, is expressed by

$$\mu_{F-G}(x) = \mu_{F \cap c(G)}(x) = \min\{\mu_F(x), \mu_{c(G)}(x)\}$$

Hence, the symmetric difference of both fuzzy sets, very useful in many applications, would be

[988] Ver A. Garrido, 2010 y ss.

$$\mu_{F \Delta G}(x) = \mu_{(F-G) \cup (G-F)}(x) = \mu_{(F \cup G)-(F \cap G)}(x) = \mu_{(F \cup G) \cap c(F \cap G)}(x)$$

With these equalities, we can express, alternatively,

$$\mu_{F \Delta G}(x) = \max \{\mu_{F-G}(x), \mu_{G-F}(x) =$$

$$= \max \{\mu_{F \cap c(G)}(x), \mu_{G \cap c(F)}(x) = \max \{\min [\mu_F(x), \mu_{c(G)}(x)]\}$$

Or also, in an equivalent way,

$$\mu_{F \Delta G}(x) = \mu_{(F \cup G) \cap c(F \cap G)}(x) = \min \{\mu_{F \cup G}(x), \mu_{c(F \cap G)}(x)\}$$

$$= \min \{\max [\mu_F(x), \mu_G(x)], 1 - \mu_{F \cap G}(x)\} =$$

$$= \min (\max [\mu_F(x), \mu_G(x)], 1 - [\min (\mu_F(x), \mu_G(x))])$$

The origin the name symmetric difference is clear, because the roles of F and G can be swapped, without changing the previous result,

$$\mu_{F \Delta G}(x) = \mu_{(F-G) \cup (G-F)}(x) = \mu_{(G-F) \cup (F-G)}(x) = \mu_{G \Delta F}(x)$$

Sobre la *Ley de Tercio Excluso y el Principio de Contradicción* decíamos allí que a partir de esas definiciones clásicas de la actuación de las conectivas sobre conjuntos borrosos, se puede asegurar que:

"In the first case *(LEM, Law of Excluded Middle),* the algebraic proof consists in seeing how the equality

$$X \cup c(X) = U$$

can be violated.

Translating to the membership functions characterization,

$$\mu_{X \cup c(X)} = \mu_U$$

we see that

$$\mu_{X \cup c(X)}(x) = \mu_U(x),\ \forall x \in U$$

is wrong, for some $x \in U$.

Because we know that

$$\mu_U(x) = 1,\ \forall x$$

since $x \in U$ necessarily (all our elements are into U).

In the first member, we have

$$\mu_{X \cup c(X)} = \max\{\mu_X, \mu_{c(X)}(x)\} = \max\{\mu_X(x), [1 - \mu_X](x)\}$$

through the definition of the membership function for the union of fuzzy sets.

But if we take

$$x \mid \mu_X(x)$$

such that

$$0 < \mu_X(x) < 1$$

i. e.

$$\mu_X(x) \in (0, 1)$$

the above equality does not holds.

For instance, if $\mu_X(x) = 0.2$, then

$$\mu_{c(X)}(x) = 0.8$$

and so, we obtain

$$\mu_{X \cup c(X)} = \max \{0.2, 0.8\} = 0.8 \neq 1 = \mu_U (x)$$

This clearly fails. So, the Third Excluded (or Middle Excluded) Law is not satisfied in the family of Fuzzy Sets, if we take the precedent definitions of logical connectives.

Through a geometrical procedure, such proof can be showed by a very easy diagram.

For the *Contradiction Law*, in Fuzzy Sets, we must prove the possibility of

$$F \cap c (F) = \emptyset$$

or equivalently, that there exists $x \in U$ such that

$$\mu_{F \cap c(F)} (x) = \min \{\mu_F (x), \mu_{c(F)} (x) = \min \{\mu_F (x), 1 - \mu_F (x)\} = 0.6$$

As in the previous case, it is enough with taking x with membership degree between 0 and 1, both ends excluded.

For instance, if $\mu_F (x) = 0.3$, then

$$\mu_{c(F)} (x) = 0.7$$

So,

$$\mu_{F \cap c(F)} (x) = \min \{\mu_F (x), \mu_{c(F)} (x) = \min (0.3, 0.7) = 0.3 \neq 0 = \mu_{\emptyset} (x)$$

Also here, through geometrical procedures, such proof can be showed by an easy diagram.

Therefore, we conclude that neither the Contradiction Law nor the Excluded Middle Law works in the class of Fuzzy Sets.

But if instead of these, we apply the Lukasiewicz alternative definitions:

It will be related with the Lukasiewicz T-norm,

$$T_{Luk}\ (a, b) \equiv \max \{0, a + b - 1\}$$

which is the standard semantics for strong conjunction in Lukasiewicz fuzzy logic.

And the Lukasiewicz T-conorm, also called S-norm, its dual, being the standard semantics for strong disjunction in Lukasiewicz fuzzy logic, given as

$$S_{Luk}\ (a, b) \equiv \min \{a + b, 1\}$$

Recall that given a T-norm, its complementary T-conorm, or S-norm, will be defined by the De Morgan´s Laws, by

$$S_{Luk}\ (a, b) \equiv 1 - T_{Luk}\ (1 - a, 1 - b)$$

So, we have for the union of two fuzzy sets, A and B, included into the universe

of discourse U, according to Lukasiewicz,

$$A \cup B = \min \{1, A + B\} \Leftrightarrow \mu_{A \cup B} \equiv \min \{\mu_U, \mu_{A \cup B}\}$$

And for the intersection of both fuzzy sets, also according Lukasiewicz,

$$A \cap B = \max \{0, A + B - 1\} \Leftrightarrow \mu_{A \cap B} \equiv \max \{\mu_\emptyset, \mu_A + \mu_B - \mu_U\}$$

So, it holds

$$\mu_{A \cup A^c} \equiv \max \{\mu_U, \mu_{A \cup A^c}\}$$

where A^c is the fuzzy set complementary of A.

Let $x \in U$ be such that

$$\mu_A\ (x) = 0.4$$

Then,

$$\mu_{A^c}(x) = 0.6$$

Therefore,

$$\mu_{A \cup A^c} \equiv \min \{\mu_U (x), \mu_A (x) + \mu_A{}^c(x)\} =$$

$$= \min \{1, 0.4 + 0.6\} = \min \{1, 1\} = 1 = \mu_U(x)$$

So, it appears verifying the Excluded Middle Law.

In a very similar way, we can proceed with the Contradiction Principle, because

$$A \cap A^c = \emptyset \Leftrightarrow \mu_{A \cap A^c} (x) = \mu_\emptyset (x), \forall x \in U$$

According to the definition of intersection given by Lukasiewicz, and supposing newly the precedent belonging degrees,

$$\mu_{A \cap A^c} \equiv \max \{\mu_\emptyset (x), \mu_A(x) + \mu_A{}^c(x) - \mu_U(x)\} =$$

$$= \max \{0, \mu_A (x) + \mu_A{}^c (x) - 1\} =$$

$$= \max \{0, 0.4 + 0.6 - 1\} = \max \{0, 0\} = 0 = \mu_\emptyset (x)$$

Therefore, it verifies the Non-Contradiction Law.[989]

Tan extensa cita procede de nuestro artículo aparecido en la revista de la Universidad de Alba Iulia (Transilvania), Acta Universitatis Apulensis, ISSN: 1582-5329, No. 22/2010, pp. 101-111, y titulado:

"FUZZY BOOLEAN ALGEBRAS AND LUKASIEWICZ LOGIC".

Otros trabajos de índole filosófico-matemático-conceptual, en este caso sobre la idea de *Complejidad Computacional,* estarían basados a su vez en la llamada Máquina de Turing[990], con sus posibles aplicaciones en Inteligencia

---

[989] GARRIDO, A., 2010.

[990] Otra de las líneas seguidas en nuestras investigaciones es aquella que trata de las Teorías sobre la Mente, esto es, acerca del Conexionismo y de aquel tipo de problemas tan filosóficos

Artificial y Computación en general se pueden localizar entre nuestros artículos publicados. Así, en nuestro trabajo "Computational Complexity and Graphs", del volumen

ADVANCES IN NETWORK COMPLEXITY

(NEW ADVANCES IN BIOLOGY, CHEMISTRY, AND MEDICINE)

publicado por la prestigiosa casa editorial americana de Wiley-Blackwell-VCH, en Nueva York, siendo sus editores Matthias Dehmer, Abbe Mowshowitz y Frank Emmert-Streib. Ha aparecido como capítulo 2 de dicho volumen, en Julio de 2013. Tanto el tema como la casa editora le conceden una repercusión internacional.

En dicho segundo capítulo, decimos que:

---

como los planteados por Alan M. Turing, sobre en qué momento y bajo qué circunstancias podemos afirmar de una máquina que tiene "inteligencia". Es la cuestión abierta por él en uno de sus artículos, "Computing Machinery and Intelligence", según el cual: `If a machine acts as intelligently as a human being, then it is as intelligent as a human being´. Esto desencadenó el posterior y enconado debate, ese del famoso experimento mental propuesto por el filósofo John Searle: el de la Caja China, sobre si es posible que un ordenador que permanezca encerrado en una habitación pueda engañar a un observador externo, que desde fuera no lo ve, sino que sólo obtiene sus respuestas a través de una cinta, haciéndole llegar a creer que quien responde es una persona. Recordemos que Turing postulaba que un ordenador sería inteligente si llegaba a ser capaz de engañar al ser humano, o de hacerle dudar; con ello pasaría el llamado Test de Turing. De aquí partiría luego la base de muchos trabajos para rebatir dicha posibilidad, como el de John Searle. Con su experimento trataba de demostrar que el pensamiento no se reduce a una mera concatenación de procesos computacionales. Nosotros tratábamos dicha cuestión, por ejemplo, en:
GARRIDO, A., "Connectionism vs Computational Theory of Mind". *Brain,* 2010),
buscando sus interrelaciones con la Inteligencia Artificial y con los modernos problemas de la ciencia.
Decíamos, en su *Abstract,* que: "Usually, the problems in AI may be many times related to Philosophy of Mind, and perhaps because this reason may be in essence very disputable. So, for instance, the famous question: Can a machine think? It was proposed by Alan Turing . And it may be the more decisive question, but for many people it would be a nonsense. So, two of the very fundamental and more confronted positions usually considered according this line include the Connectionism and the Computational Theory of Mind. We analyze here its content, with their past disputes, and current situation".

By associating inputs and outputs, a Turing Machine (TM, by acronym) defines a partial function from n-tuples of integers onto the integers, with $n \geq 1$. We call such a function partial recursive, or computable.

If the Turing Machine halts for all inputs, then the function computed is defined for all arguments, and is called total recursive, or simply recursive.

For some countable set of objects, S, we can assume some standard enumeration where x is associated with a natural number n(x). We want to know if there exists another specification for x more space efficient than n, i.e. a method f is a partial function over the set of natural numbers, where n(x) = f(p).

It is convenient to think of *p* as a program and *f* as the programming language, compiler, and computer. We may denote its length by l (p), and we can define this by

$$C_f(x) = \min \{l(p): f(p) = n(x)\}$$

being *p* the shortest program that generates *x* (with no input) with respect to some partial function, *f* .

We call to $C_f(x)$ as the unconditional Kolmogorov complexity with respect to f .

If no such *p* exists, then we say $C_f(x) = +\infty$.

If for all x in S,

$$C_f(x) \leq C_g(x) + c$$

we say that the method *f* minorizes the method *g.*

And *f* and *g* are equivalent if they minorize each other.

Each $x \in S$ might rely on any of the different methods, denoted by $f_1, f_2, \ldots, f_r$, for a minimal Kolmogorov complexity.

By reserving the first log r bits of p to indicate which fi is used for producing x from p, we have a method f minorized by all f_i , where $c \approx \log r$.

Let C be a subclass of partial functions over **N**.

A function *f* is universal (or additively optimal) for C, if it belongs to C and if for every function $g \in C$ there is a constant, $c_{f, g}$, such that

$$C_f(x) \leq C_g(x) + c_{f,g}, \text{ for all } x$$

Observe that here $c_{f,g}$ depends on *f* and *g,* but not on x.

We say additively optimal methods, *f and g,* of specifying objects in S are equivalent in the following way,

$$|C_f(x) - C_g(x)| \leq K_{f,g}, \text{ for all } x$$

where $K_{f,g}$ is a constant depending only on *f* and *g*.

There is no universal partial function *f* for all programs *p.*

However, there exists an universal element in the class of partial recursive functions.

We consider the class of description methods

{f: f is a partial recursive function}

and we may to use f_0 for denote the universal description method, which gives us the following definition[991].

[991] LI & VITÁNYI, 1997; pp. 95-97.

Let *x, y, p* be natural numbers. We call *p* a *program to compute x by f, given y*. By selecting a fixed f_0 as our reference function for C, we can drop the subscript to denote the *Conditional Kolmogorov Complexity,* where

$$C\ (x\ /\ y) = C_{f^0}(x\ /\ y)$$

Note that the unconditional Kolmogorov complexity

$$C\ (x) = C\ (x \mid e)$$

Finally, we have sufficiently well-defined the basic concepts, and many of the notation necessary to see some powerful theorems, and interesting results.

The Invariance Theorem, jointly with the Incompressibility Theorem, elegant and even simple to prove, form the basis for the whole study of Kolmogorov Complexity, and are sufficient for many important proofs.

Lemma.

There is a universal partial recursive function.

The Invariance Theorem.

There is a universal partial recursive function, f_0, for the class of partial recursive functions to compute x given y.

Formally this says that

$$C_f^0(x \mid y) \leq C_f(x \mid y) + K_f$$

for all partial recursive functions *f* and all x and y, where c_f is a constant depending on *f,* but not on x or y.

Theorem.

There is a constant, c, such that for all x and y

$$C(x) \leq I(x) + k$$

and

$$C(x / y) \leq C(x) + k$$

In the case of objects conditionally belonging to finite sets, we can offer an improved upper bound by the following theorem, and then explore some simple examples of how the Invariance theorem can be used.

Más adelante, en el mismo artículo, tratamos de esclarecer lo que es una *Medida de Similaridad.* Decíamos allí que:

It is possible to use a Similarity Measure, denoted by S. Our purpose is to reduce the redundancy among the fuzzy sets in the model. Such measure is based on the operations of union and intersection of sets.

The *Similarity Measure,* given two fuzzy sets, F and G, will be defined as

$$S(F, G) = ((|F \cap G|) / (|F \cup G|))$$

where |.| is, as usual, the cardinality of the set included between both symbols ´|´.

This may be translated, and very easily indeed, to the case of discrete input variables,

$$x = (x_i)$$

by

$$S(F, G) = (|\sum\{\mu_F(x_i) \wedge \mu_G(x_i)|) / (|\sum\{\mu_F(x_i) \vee \mu_G(x_i)\}|)$$

where $\wedge$ and $\vee$ denotes the minimum and maximum operators, respectively.

The essential *properties* of such *Similarity Measure* will be

- It is symmetric in the closed unit real interval, [0, 1].

- When S (F, G) = 1, both membership functions, μ_F and μ_G, are identical.

- When S (F, G) = 0, both membership functions, μ_F and μ_G, are non-overlapping.

We can consider that a collection of fuzzy sets to be merged (or similar), when their similarity measures exceeds a previously fixed threshold, comprised between zero and one. The more usual value must be 0.5.

One of the usefulness of this measure is that permits us to reduce the number of different fuzzy sets in the model. When all the Fuzzy Sets, or Fuzzy Systems, are similar to the universal set, or merging results in only one membership function, the input variable can be removed from the model.

Y acerca de los *Sistemas Difusos,* puntualizábamos en el mismo escrito que:

Fuzzy systems have demonstrated a notable ability to formalize in computationally efficient manner the approximate reasoning capability typical of human mind. One of the important research challenges today is the design of intelligent systems with a higher level of flexibility, so that complex (nonlinear and / or uncertain) dynamic systems can be modeled, and controlled efficiently.

The newly established concept of computational intelligence is the result of a fusion, between conventional methods of model-based control, and fuzzy systems with applications in robotics, industrial processes, medicine, etc.

A very interesting characteristic of the fuzzy systems may be its capability to handle in the same framework numeric and linguistic information. This characteristic made these systems very useful for modeling and control complex dynamical systems.

The universal approximation property of the fuzzy models is not the only remarkable property. Fuzzy model add a new dimension to the information that can be extracted from the system. The new dimension is the linguistic information, which provides intuitive descriptions over the behavior of the modeled system.

Different types of fuzzy models have been proposed in the current literature, and they can be characterized by having fuzzy propositions as antecedents and consequences of the rules (Mamdani fuzzy models), or by having the consequences of the rules as functional expressions of the antecedents (Takagi-Sugeno-Kang fuzzy models).

To address the problems of modeling, control, prediction, classification and data processing on a nonlinear and/or uncertain environment, the fuzzy system must be able to fully adapt its structure, adjust its parameters, or use a robust fixed structure that overcomes the nonlinearities and/or uncertainties".[992]

Aparte de todo este análisis de las Máquinas de Turing y de las Funciones Recursivas, nos hemos dedicado a estudiar otro tema, también muy filosófico, como lo es el relativo a la "inteligencia de máquina" (lo de si una máquina puede `pensar´), o sea, lo relativo al famoso Test de Turing, con su versión original del artículo del propio Alan M. Turing y la polémica suscitada posteriormente, con su cénit en el contraejemplo de la "caja china", del filósofo americano John R. Searle, de la Universidad de Berkeley.

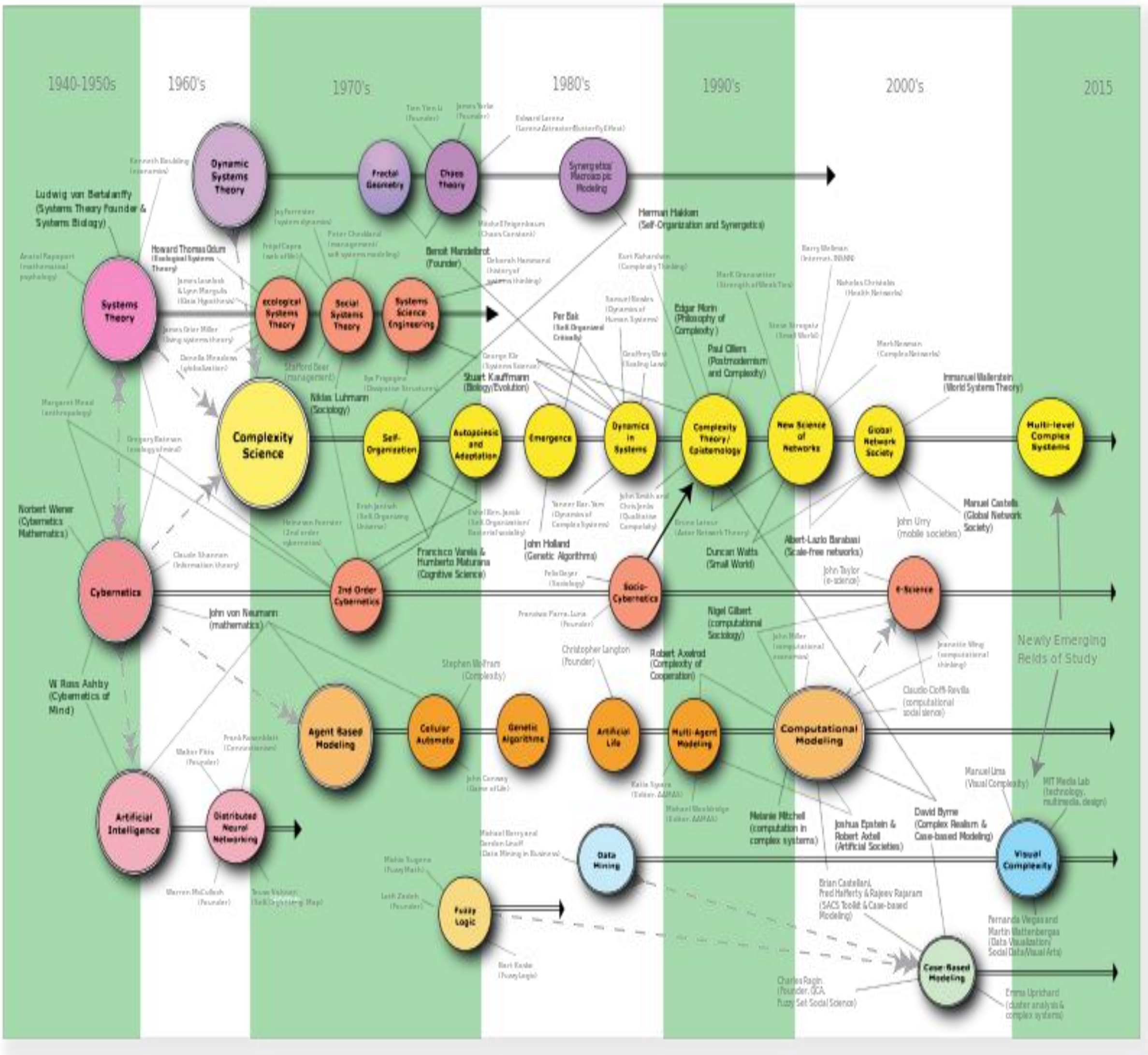
[992] GARRIDO, A., 2013a.

A intentar dilucidar lo esencial de estos problemas hemos venido dedicando varios de nuestros artículos.[993]

GRAFO IMPORTANTE

La Complejidad Computacional, que viene asociada a la resolución de problemas (matemáticos, de Inteligencia Artificial, de Modelización, de Optimización, etc.) está recogida en la siguiente clasificación[994], que distingue por campos y herramientas utilizadas, haciendo mención también a los autores que trabajaron en cada área:

[993] En la revista BRAIN, que está muy en la línea de ese tipo de temas, relacionados con la IA y la Neurociencia.
[994] Que hemos de agradecer a Brian Castellani.



Sobre la Matemática Discreta y en particular, la *Teoría de Grafos,* que como sabemos, comienza con la resolución por Leonhard Euler del problema de los puentes de Königsberg, hemos intentado mejorar el conocimiento sobre los Grafos Esenciales, que al caracterizar a todos los de su clase, facilitan la labor computacional, al reducir la complejidad de los algoritmos a través de los cuales finalmente estos se manejan:

The structural information content will be the entropy of the underlying graph topology. A network is said to be asymmetric, if its automorphism group reduces to the identity group. I.e. it only contains the identity permutation. Otherwise, the network is called symmetric. It will be also interesting to give some very important concepts, as that of line graph, vertex transitivity, edge-transitivity, and so on. So, let G be a graph. Suppose that we denote by V(G) its set of nodes, and by E(G) its set of edges.

The so-called line graph of G will be the graph whose set of nodes is E (therefore, it coincides with the set of edges of G), and whose edges connect all pairs of E which have one common end (or extremity) in G. Usually, it is abridged by L (G). Hence, the Line Graph of G is another graph that represents the mutual adjacencies between edges on G.

The Line Graph is sometimes also called Adjoint Graph, Interchange Graph, Edge Graph, Derived Graph of G, and so on.

A graph, G, is said to be node-transitive (or vertex-transitive), if for any two of its nodes, n_i and n_j, there is an automorphism which maps n_i to n_j.

A simple graph, G, is said to be edge-transitive (or link-transitive), if for any two of its edges, e and e*, there is an automorphism which maps e into e*.

A simple graph, G, is said to be symmetric, when it is both, node-transitive and edge-transitive. But a simple graph, G, which is edge-transitive, but not node-transitive, is said semi-symmetric. Obviously, such a graph will be necessarily a bipartite graph.

An auxiliary concept, which many times appear at Graph Theory problems, will be the *Chordality.*

Let G be an undirected graph (UG, by acronym).

We say that G is *chordal,* if every cycle of length greater than three possesses a "chord". This name ("chord") means an edge joining two non-consecutive nodes of the cycle.

Therefore, an UG will be *chordal,* if it does not contain an induced subgraph isomorphic to the C_n, the cyclic group of order n, when n > 3.

The chordality results a hereditary property, because all the induced sub-graphs of a chordal graph will be also chordal. For instance, the interval graphs are chordal.

The *Incidence Matrix* of a digraph is a (pxq)-matrix, which will be denoted by

$$(b_{i\,j})_{i=1,2,\ldots,p;\; j=1,2\ldots,q}$$

where *p* denotes the number of their nodes, and *q* denotes the number of their edges. So, an incidence matrix is a matrix that shows the relationship between two classes of mathematical objects. If the first class is C and the second class is C^*, then the matrix has one row for each element of C; and one column for each element of C^*. By this way, the corresponding entry in row i and column j will be equal to one, if i and j are related, in the sense of incident, and zero otherwise (i.e. if they are not incident).

In Graph theory we can to find two kinds of Incidence Matrices, unoriented, and oriented, respectively.

Generalyzing these concepts, we may to define the Incidence Matrix of an Incidence Structure as a (pxq)-matrix, where p and q are their number of points and the number of lines, respectively.

In this case, the Incidence Matrix will be also a biadjacency matrix of the Levi Graph of the structure. And because there is a Hypergraph for every Levi graph, and a Levi graph for every Hypergraph (or vice versa), it is possible to conclude that the incidence matrix of an incidence structure describes a hypergraph.

Return to the aforementioned ideas on the Adjacency Matrix of a graph. And we now introduce the matrix of valencies, or also called degrees (deg), of the nodes in the graph.

And there you are three fundamental matrices which may appears associated with a graph,

- the *Incidence Matrix* encapsulates node-edge relationships;

- the *Adjacency Matrix* encapsulates node-node relationships;

- the *Degree Matrix* encapsulates information about the degrees.

But also there is one last and many times interesting matrix, which will be called the Laplacian Matrix. Let G be a graph.

We can denote the *Laplacian Matrix* of G as L (G). Then,

$$L(G) = D(G) - A(G)$$

when we denote as D (G) the degree matrix of G, and A (G) will be the adjacency matrix of G.

Among the different type of graphs, the *Bayesian Networks* are perhaps the most interesting class of models to represent uncertain knowledge. But the representation of conditional independencies (CIs, by acronym) does not have uniqueness. The reason is that probabilistically equivalent models may have different representations. And this problem is overcome by the introduction of the concept of Essential Graph, as unique representative of each equivalence class. They represent CI models by graphs. Such mathematical and graphical tools containing both, directed or/and undirected edges; hence, producing respectively Directed Graphs (DGs), in particular acyclic elements, or Directed Acyclic Graphs (DAGs), either Undirected Graphs (UGs), or Chain Graphs

(CGs), on the mixed case. So, DAG models are generally represented as Essential Graphs (EGs).

Knowing the ratio of EGs to DAGs is a valuable tool, because through this information we may decide in which space to search. If the ratio is low, we may prefer to search the space of DAG models, rather than the space of DAGs directly, as it was usual until now. The most common approach to learning DAG models is that of performing a search into the space of either DAGS or DAG models (EGs).

It is preferable, from a mathematical point of view, to obtain the more exact solution possible, studying its asymptotic behavior. But also it is feasible to propose a Monte Carlo Chain Method (MCMC) to approach the ratio, avoiding the straightforward enumeration of EGs. And a many more elegant construct, if very difficult, through the Ihara Zeta function for counting graphs.

Recall that a DAG, G, is *essential,* if every directed edge of G is protected. So, an Essential Graph (EG) is a graphical representation of a Markov equivalence class. In relation with the Essential Graph, each directed edge would have the same direction in all the graphs that belongs to its equivalence class. There is a bijective correspondence (one-to-one) among the set of Markov equivalence classes and the set of essential graphs, its representatives. The labeled or unlabeled character of the graph means whether its nodes or edges are distinguishable or not. For this, we will say that it is vertex-labeled, vertex-unlabeled, edge-labeled, or edge-unlabeled. The labeling will be considered as a mathematical function, referred to a value or name (label).[995]

---

[995] GARRIDO, A., en Bibliografía.

Podemos establecer también la *clasificación de las complejidades computacionales*, según las llamadas *Hierarchies*[996]. Esto lo hacemos más adelante, en el mismo trabajo, pero dada su dificultad técnica, nos remitimos al contenido esencial del mismo. Se trata de una línea de avance de la investigación con creciente actividad en el momento actual, y con gran proyección de futuro. Lo expusimos en un Congreso sobre dicho tema, Lógica y Complejidad Computacional, que se celebró en al Universidad Técnica de Berlín.

Estas y otras ideas, así como nuevos resultados, están contenidas en algunos de nuestros artículos; de entre los que aparecen en MathSciNet y en Zentralblatt, podemos mencionar los que vienen reseñados[997] al pie de página.

Otra línea de investigación que hemos cultivado en los últimos años ha sido la de una afanosa búsqueda de los

Orígenes y Fundamentos de las Lógicas Multivaluadas

---

[996] O Jerarquías de Complejidad.

[997] MR2889920 Indexed Garrido, Angel Improving some combinatorial tools. Adv. Model. Optim. 12 (2010), no. 3, 411–415. 05C30 (05C20); MR2720379 Indexed Garrido, Angel Observations on a certain comment about zeta functions [MR2720377; MR2505717]. Adv. Model. Optim. 12 (2010), no. 3, 323–326. 05C90 (68R05 68R10); MR2720377 Reviewed Shanker, O. Comment on Combinatorial analysis by the Ihara zeta function of graphs [MR2505717]. Adv. Model. Optim. 12 (2010), no. 3, 305–308. 05C90 (68R05 68R10); MR2515429 Indexed Garrido, Angel Asymptotical behaviour of directed graphs. Adv. Model. Optim. 11 (2009), no. 4, 395–406. 68R10 (05C20 68T30); MR2515428 Indexed Garrido, Angel Analysis of digraphs. Adv. Model. Optim. 11 (2009), no. 4, 377–394. 68R10 (05C10 05C20);MR2515427 Indexed Garrido, Angel Optimizing by graphs. Adv. Model. Optim. 11 (2009), no. 4, 367–376. 68R10 (05C10 90C35); MR2505722 Indexed Garrido, Angel Graph properties and invariants, by their associate matrices. Adv. Model. Optim. 11 (2009), no. 3, 337–348. 05C50 (68R10); MR2505715 Indexed Garrido, Angel Enumerating graphs. Adv. Model. Optim. 11 (2009), no. 3, 227–246. 05C30 (68R05 68R10); MR2505713 Indexed Garrido, Angel Asymptotic behaviour of essential graphs. Adv. Model. Optim. 11 (2009), no. 3, 195–210. 68R10 (05C20 05C30 68R05); MR2316433 Indexed Garrido, A. Primitive recursion and μ-recursivity. JNAIAM J. Numer. Anal. Ind. Appl. Math. 1 (2006), no. 3, 273–280. 03D20

y en particular, de la Lógica Borrosa, tanto en los aspectos de sus contextos históricos (China, India, etc.) como de sus fundamentos filosóficos en Grecia. Mucha de esa información nos ha servido ahora como fuente para ciertos aspectos y contenidos de la presente Tesis.

Entre otros artículos acerca de ello, podemos consignar los que figuran en esta nueva nota[998] al pie. Y los de la revista BRAIN (acrónimo de *Broad Research in Artificial Intelligence and Neuroscience),* de la Universidad de Bacau, que podemos ver más abajo[999].

La concentración de tantos artículos en esta misma publicación obedece no sólo a que hayan obtenido una acogida bastante buena, sino a que están muy en la línea científico-filosófica-computacional de su Editorial Board.

Dicha revista científica está publicada por la Facultad de Ciencias y Letras de la Universidad "Vasile Alecsandri"[1000] de Bacau, que finalmente decidió

---

[998] MR2341127 Indexed Garrido, Angel Mathematical approach to vagueness. Int. Math. Forum 2 (2007), no. 33-36, 1617–1623. 03E72 (93C42 94D05); MR2656233 Indexed Garrido, Angel Fuzzy Boolean algebras and Lukasiewicz logic. Acta Univ. Apulensis Math. Inform. No. 22 (2010), 101–111. 68T37 (03B52)

[999] ISSUE TITLE: Vol 1, No 1 (2010): Happy BRAINew Year! Improving Tools in Artificial Intelligence, Angel Garrido; Vol 1, No 1 (2010): Happy BRAINew Year! Connectionism vs. Computational Theory of Mind; Vol 1, No 1 (2010): Happy BRAINew Year! Computational Methods in Medicine Angel Garrido, Vol 2, No 2 (2011): May-June 2011 Searching the Arcane Origins of Fuzzy Logic Angel Garrido, Vol 2, No 1 (2011): January 2011 A Survey on Complex Networks; Angel Garrido, Vol 1, No 2 (2010): Happy Spring 2010! Some Results on Fuzzy Theory; Angel Garrido, Vol 1 (2010): Special Issue on Advances in Applied Sciences, Mathematical Properties of Complex Networks; Angel Garrido, Vol 1, No 4 (2010): BRAIN Autumn 2010 Computational Mathematics in Medicine; Angel Garrido, Vol 2, No 1 (2011): January 2011 Triangular Norms, Triangular Conorms, and Some Related Concepts; Angel Garrido, Vol 3, No 1 (2012) A Brief History of Fuzzy Logic; Angel Garrido, Vol 1, No 3 (2010): Happy Summer 2010! Some Notes About Artificial Intelligence as a New Mathematical Tool Angel Garrido; Vol 1, No 2 (2010): Happy Spring 2010! Logical Foundations of Artificial Intelligence; Angel Garrido, Vol 1, No 1 (2010): Happy BRAINew Year! Editorial On BRAIN Angel Garrido

[1000] Éste de Vasile Alecsandri (1821-1890) corresponde al nombre del poeta local más sobresaliente dentro de la historia de la literatura rumana. Dicha Universidad es estatal; descuella bastante en campos no sólo científicos y de computación, sino también literarios. Sostiene activas revistas, como, por ejemplo, la de *BRAIN (Broad Research in Artificial* concederme por mis contribuciones en estos campos de investigación la *Medalla de Oro de la Investigación,* en dicho centro universitario.

También pueden mencionarse las contribuciones a Congresos y publicaciones del ámbito de las *Ciencias de la Educación* y de sus relaciones con la *Inteligencia Artificial* y con las nuevas *Tecnologías de la Información y de la Comunicación* (las tan traídas y llevadas *TICS*).

Entre ellas se encuentra:

- *"Fuzzy Logic and Mathematical Education*", presentado como Invited Speaker en el Congreso WCIT 2010, en la Universidad Bahcesehir, de Estambul (Turquía), y publicado en PROCEDIA-COMPUTER SCIENCES, por el grupo holandés ELSEVIER.

En el cual se menciona esa posible conexión entre ambas áreas; por ejemplo, en uno de sus párrafos decíamos allí:

> All these problems, their methods of solution or approximation tools, may be implemented in the class-room. For instance, to apply mathematical games, as Chess or Go, must improve the logical capacities of the students, in any scholar level. Because if it is in elemental level, it may be an interesting stimulant to promote hidden potentialities. And in higher levels, it may to contribute to strengthen the logical and deductive qualities of the beginner researchers. In the case of the aforementioned tools, currently very useful in Mathematics and AI, as Graph Theory tools, it may be used in explain classical and very exciting questions, as the Halting Problem, or the Traveling Salesman Problem (TSP),

---

Intelligence and Neuroscience), dirigida por Bogdan Patrut, o los *Studii si Cercetari Sciintifice...,* dirigidos por Marcelina Mocanu.

or the open question for the 20th century generations, P vs NP, with multiple implications from them.

Not only may be very useful into the class-room give Mathematics with support on the aforementioned Games (Chess, Checkers, Stratego, Sudoku…), but also our students can be introduced in subtle analyses, as the Prissoner´s Dilemma.

Also it will be disposable any information about games as Chess, Go,…, its Rules, Tricks, Hints, and so, in the Web pages, being as well possible to play with them. And we can obtain information of papers, web explanations, etc., about the history of such games, which will be very illustrative and motivating for the students.

All these techniques has been implemented in the class-room with students of secondary level, increasing with them its interest in Mathematics and simultaneously, in TIC new technologies and its fundamental basis. Furthermore, with students of undergraduate university level, in studies of Mathematics and Computer Science, reaching a very positive reaction, which increments their interest and results.

By this new approach we defend, Computer Science occupies, partially and in a natural way, the role Physics and its problems have played as support of mathematical reasoning, a fact in the past two centuries (although Physics do not disappear from the view, being a necessary aid).

We propose showing such Methods through the parallel study of Mathematics and Computer Science foundations. Other Computer Science subfields could be carriers of this method too, but perhaps AI is the current better choice, given its characteristics, which practically coincide with many mathematical techniques and objectives.

> The benefits of such an innovative educative method must consist in a more progressive adaptation of Mathematical Education to modern times, with the final purpose of producing adaptive and creative minds, capable of solving new problems and challenges.

En el Congreso *FLINS 2012* (también celebrado en Estambul, pero esta vez en la I. T. Ü, o Istanbul Technik Universitat), se presentó -conjuntamente con la profesora Piedad Yuste- un trabajo para exponer el mejor modo de explicar varios de los métodos fundamentales en la Inteligencia Artificial y el Análisis Matemático. Dicho tema fue abordado como: *"Fuzzy Modeling and Fuzzy Optimization",* y presentado por el ahora doctorando, siendo el Chairman de la correspondiente sesión. En él expusimos, por ejemplo, que:

> The creation of a theoretical model for explaining the workings of natural phenomena and for organizing and interpreting the data gathered from experience is a sign that marks the step from empirical knowledge to the scientific process. Theoretical models are shaped around a set of assumptions or hypotheses that are the culmination of a long process of observation. We can find a first theoretical model in some of the texts of the Chaldean astronomers; it is not expressed as such, but in the form of a rule or algorithm with which the learned men of Babylon calculated the movements and positions of the stars (Ephemerides, Goal Year Texts). Some Hippocratic medical schools also conceived a theoretical model when they conjectured that our organism is made up of four humors that coexist in equilibrium and harmony (On the Nature of Man); they thought that the imbalance of these substances gave rise to illness or provoked death. Other doctors of the same period attributed illness to an excess of heat or cold, humidity or dryness. None of them had irrefutable proof

that demonstrated the truth of their assertions; however, they designed a model to which they adjusted their observations.

In other areas of research, such as geometry, no one opposed the Greek mathematicians' use of hypotheses in their proofs. Plato, admiring the results, introduced these kinds of formulations into philosophical argumentation (Meno 86b-e).

The mere observation of natural phenomena is not a sufficient condition for the appearance of a science; not even the extraction of a general law applicable to all the events of the same kind is, nor is the knowledge of the causes that trigger these phenomena. All these factors are necessary but not sufficient for creating a science. The learned Greeks, contrary to their eastern predecessors, sought the origin of phenomena in nature itself (physis), not in the whim or will of gods and demons. But nature showed itself to be unstable and changing. The constant flow made it impossible to establish a permanent and lasting knowledge of the beings that make it up. How is it possible to know something that is so today but ceases to be so tomorrow?

The first Greek cosmologists sought the substance that endures as opposed to change; the unity of the being as opposed to the plurality of its forms. They formulated so many hypotheses that, in the end, some philosophers, such Protagoras, concluded that all knowledge is reduced to sensation: "Man is the measure of all things" (Sextus Empiricus, *Adversus Mathematicos* VII, 60). The difficulty of establishing scientific knowledge led Parmenides of Elea to formulate the principle of non-contradiction: "it is impossible for something to be and not to be at the same time" (*On Nature*). This basic and unprovable formulation, in Aristotle's (*Metaphysics* IV, 4, 1009a-1010a) judgment, together with other axioms with analogous qualities, lays the foundation for western science. This principle rises above the discordances that we notice in nature: it stops time at that instant and captures the immutable being that does not experience change. For Parmenides of Elea, everything in nature is Being, to the point that it is impossible to conceive of Non-Being.

From our point of view, this hypothesis is hard to accept because we all see how things transform themselves from what they are not now to what they will be later on. In short, all organisms seem to be and not to be at the same time. Plato gave being to the Non-Being Parmenidean (*Teaethetus* 257c). How can this be explained? A man is an animal, a mammal, etc., but not a bird or a stone or a fountain. Shortly afterward, Aristotle went farther with this idea and proposed an ontological model that got around these contradictions: natural beings are here and now, actualized, but they possess potential qualities that they will develop later on (*Metaphysics* IV, 5 1010a). Thus, a boy is a potential man and a seed will become a tree in time. Aristotle attempted in this way to achieve a universal and necessary knowledge, from its causes, rising above appearances and sensations. In his cognitive model, the principle of non-contradiction acquires the role of a basic, irrefutable axiom: “the same attribute cannot at the same time belong and not belong to the same subject” (*Metaphysics* IV, 3 1005a).

Aristotle reduces the formulations of science to propositions in which a predicate is affirmed or denied regarding one or several subjects. But between both extremes of the contradiction -possessing and not-possessing a certain quality- there sometimes exists a range of attributes that are more or less close to these extremes: “there is a more and a less in the nature of beings” (Metaphysics IV 4 1009a). Aristotle knows that, in cases such as the move from white to black, from large to small, from slow to fast, there is not one but many intermediate terms located more or less close to both extremes. However, in his theoretical model, he only contemplates those qualities that do not admit the existence of an element that simultaneously denies the extremes of the contradiction (*Metaphysics* IV, 7 1011b), such as when we decide between even and odd numbers. Thus, he avoids the vagueness existing in the sensible world and chooses for the science the concepts which designating only the actualized essence. He draws a bivalent universe, without nuance, lopsided towards the ends, too rigid to be a mirror of reality.

The Aristotelian paradigm is clearly insufficient to decide on events involved in human discernment and natural language, but was not questioned until well into the 20th century, when thinkers such as Max Black, Bertrand Russell, and Jan Lukasiewicz already had enough theoretical tools available to rescue and interpret the notion of vagueness. And after these the seminal papers of Lofti Asker Zadeh, from which derives many of the more innovative and interesting new Mathematics, with very surprising applications."

Este trabajo tuvo una buena aceptación, siendo seleccionado para aparecer entre los mejores "papers" presentados al Congreso.

También puede encontrarse mucha información nueva sobre estos temas en nuestro libro de investigación, publicado junto con el profesor de la Universidad de Bacau, Vasile Postolica:

- A. Garrido, and V. Postoliça, *Modern Optimization,* Matrix-Rom Editura, Bucharest (2011).

Obra que es bastante reconocida en el campo de la Optimización y del Análisis Matemático.

En el reciente *Congreso de la Sociedad Europea de Historia de la Ciencia* celebrado (ESHS 2012), organizado en la Kapodistrian University of Athens y la

Hellenic Research Foundation, expusimos de nuevo el tema, ampliado en un sentido más filosófico, en un trabajo que llevaba por nombre *"History and Philosophy of Fuzzy Modeling".*

Asimismo, sobre estas líneas de investigación hemos tratado en Congresos como los sucesivos que llevan el nombre genérico de ICTAMI, y que se celebran en la Universidad de Alba Iulia, de Transilvania, o en los del CAIM, en las Universidades de Iasi, o en la Romanian Academy de Bucarest, etc.

En el ámbito de lengua española, hemos publicado artículos sobre el juego de Go, o sobre el de Ajedrez, desde el punto de vista del estudio de su complejidad computacional, o sobre la Historia de la Matemática en la España Musulmana, o en otros períodos, en diversa reuniones científicas y publicaciones. Por citar algunas de ellas, los tres artículos aparecidos en *CONEXIONES,* de la Universidad de la Cuenca del Plata, en la ciudad de Corrientes, del Norte de la República Argentina.

O también los trabajos presentados a los *Congresos Internacionales sobre Educación y Nuevas Tecnologías* que se organizan en la UNED. Uno de ellos en el curso 2008/2009 (con un paper de curioso nombre: "El Ajedrez, mosca Drosophila de la Inteligencia Artificial", resaltando esa característica de banco de prueba que ha tenido dicho juego para la Computación, puesto que ahora, tras el triunfo del Deep Blue, ha pasado a ocupar un juego oriental: el del Go, o del "cercado", mucho más complejo aún que el anterior). Se presenta otro más, este sobre "Fuzzy Logic y Educación", en el 2012/2013. En este curso de 2012/2013, aparte de una comunicación sobre "Lógica Borrosa en Acción", para el Congreso Euro-Iberoamericano de Educación, hemos presentado comunicaciones a las VI Jornadas sobre Redes de Innovación Docente, tratando acerca de las dos Redes que hemos implementado en los Grados de Química y de Matemáticas en la UNED:

- *Historia del Cálculo,* en el Grado de Matemáticas,

  y
- *La influencia de las Matemáticas en el estudio de la Química,* en el Grado de dicha especialidad.

Hemos conseguido, además, la aceptación de dos Cursos del Plan de Formación del Profesorado, que habíamos diseñado para ser impartidos en la UNED, bajo la dirección de este doctorando, y que ya están en funcionamiento, de modo on-line y presencial, bajo los títulos de:

- "LÓGICAS NO-CLÁSICAS"

  y
- "MATEMÁTICAS Y LÓGICA BORROSA",

  respectivamente.

En ellos se utilizarán todos los recursos que por ahora tenemos a nuestro alcance, como la elaboración de material específico, el comentario crítico del ya existente, con presentaciones y entrevistas para la radio y la televisión de la UNED, etc.[1001] También se está comenzando a redactar, con base en los documentos anteriores, un par de manuales para los alumnos, que

[1001] En los últimos tiempos hemos diseñado un futuro Proyecto de Divulgación Científica, patrocinado por la FECYT (con referencia FCT-13-6182), que lleva por nombre "Ciencias de Oriente y Occidente". El apoyo de los temas sería de tipo audiovisual, con intervenciones y programas de radio y televisión.

han de servir tanto para la asignatura de *Lógica Matemática* del Grado en Matemáticas, como para la posterior de *Lógicas No-Clásicas,* del Máster en Matemáticas Avanzadas.

Comentarios, y esperamos que sean pertinentes.

Se ha venido aplicando con gran éxito la Lógica Borrosa para producir grandes avances tecnológicos, pero por su propia naturaleza, y a pesar de todo, parece ser más adecuada aún para trabajar en las Ciencias Sociales y en las Humanísticas, donde hasta ahora tan sólo han hecho unos primeros intentos, en comparación con el "fuzzy boom" de la tecnología oriental. No se ha llegado, pues, a explotar todas las potencialidades que esta nueva herramienta encierra; así, en campos como el filosófico, el pedagógico, etc.

Lofti A. Zadeh introdujo la teoría del razonamiento aproximado, y otros muchos autores han hecho desde entonces contribuciones importantes a dicho esperanzador campo abierto. Aunque superficialmente nos pueda parecer que la teoría del razonamiento aproximado y la de la lógica clásica se diferencian radicalmente, la lógica clásica puede ser vista como un caso especial, una "excepción" que se muestra a partir de un raciocinio explicativo-positivista. En ambos sistemas, se pueden ver las premisas como las inductoras de subconjuntos de mundos posibles que las satisfagan, aunque en el caso de la teoría del razonamiento aproximado, esos conjuntos estén integrados por subconjuntos borrosos que entre ellos se superpongan, y al solaparse arrojen nuevos constructos informativos, pero no menos importantes ni menos significativos que las respuestas obtenidas a partir de la Lógica Clásica[1002].

La inferencia en ambos sistemas está basada en una regla de inclusión: una hipótesis se infiere de una colección de premisas, si el subconjunto de mundos posibles que satisfacen la conjunción de las premisas está contenido en el subconjunto de mundos posibles que satisfagan dicha hipótesis.

La contribución fundamental del razonamiento aproximado es el uso que hace de las variables y de la representación de las proposiciones, en términos de valores de verdad lingüísticos[1003], como valores de esas variables.

La Lógica Clásica sólo usa de modo implícito la idea de variable, en el sentido del valor de verdad asociado a una proposición. Sin embargo, su naturaleza binaria le permite ocultar este hecho, ya que nos podemos referir a una proposición que sea verdadera por su denotación, p, y a una que sea falsa simplemente por su negación, ¬ p, evitando así la introducción de una variable Vp, cuyo valor sea la valoración de la proposición p.

El uso del concepto de variable en la teoría del razonamiento aproximado conduce a tratar dominios que no están dentro del ámbito de la Lógica Clásica,

---

[1002] No olvidemos que dentro de la Semántica de la Lógica Modal, una proposición sería necesaria, cuando es verdadera en todos los mundos posibles; y que se tiene la posibilidad, cuando es verdadera en alguno de los mundos posibles; contingente, si lo es en algunos sí y en otros no. Pero también se puede considerar que hay un cierto grado de certeza para las proposiciones en los distintos mundos posibles; esto llevaría a la coexistencia de diversos grados de verdad para la misma proposición, dependiendo del mundo elegido para cada caso: en un mundo 0.3, y en otro, 0.6, por ejemplo. Así tendremos una \`Fuzzy Modal Logic´, que permita un manejo más flexible de todas esas herramientas y terminología.

[1003] Hablamos, claro está, de los subconjuntos borrosos.

como es el caso de los problemas que tratan los Sistemas Expertos Borrosos[1004], o los Controladores Borrosos.

La teoría del razonamiento aproximado permite representar también cuantificadores lingüísticos situados entre dos extremos de lo difuso. Zadeh indicó que un cuantificador como “la mayoría” puede ser representado como un subconjunto borroso sobre un universo de discurso. Los cuantificadores aproximados se usan también para representar el conocimiento llamado “de sentido común”.

Una extensión interesante de la teoría del razonamiento aproximado es la posibilidad de tratar con ella el “conocimiento prototípico”. *Reiter* sugirió una aproximación a la representación de conocimiento de sentido común usando para ello las *“reglas por defecto”,* y *Ronald R. Yager* lo estudió en el marco de la teoría del razonamiento aproximado. De acuerdo con Reiter, una regla por defecto tal como “generalmente, los pájaros vuelan”, puede ser interpretada así:

> Si un objeto es un pájaro y nuestro conocimiento disponible no es incompatible con que el objeto vuele, entonces asumimos que el pájaro vuela.

Por tanto, la lógica binaria puede ser vista como un caso especial de la teoría del razonamiento aproximado en la cual los conjuntos de base tienen sólo dos elementos, el T y el F[1005], mientras que los grados de pertenencia se restringen al 1 y al 0.

[1004] Los “Fuzzy Expert Systems”.

[1005] Verdadero y falso, en tanto en cuanto que posibilidades totalizadoras y mutuamente excluyentes.

La Lógica Posibilista puede ser contemplada como una mera extensión de la Lógica Borrosa, en tanto que aunque en la primera se restringen los conjuntos-base de valores a que estos tengan sólo dos elementos, el T y el F, en la segunda se permite que los grados de pertenencia sean cualesquiera números dentro de todo el intervalo unidad real, el $[0, 1] \subset \mathbf{R}$. Es por esta percepción cuántica por lo que la Lógica Borrosa va más allá de la lógica binaria, permitiendo su formalización en términos de la teoría del razonamiento aproximado. Así, lo que es verdadero alcanzaría distintas representaciones, y lo que es asumido como falso también; ambas indican que el valor de verdad absoluta de la proposición es desconocido.

Lo cual se hace posible porque una inferencia en el fondo es una evaluación que realiza la mente entre conceptos que al interactuar, muestran sus propiedades de forma discreta, necesitando utilizar la abstracción para lograr entender las unidades que componen el problema, o creando un punto axiomático o circunstancial, que permita trazar una línea lógica de relación de causa-efecto, entre los diferentes puntos inferidos en la resolución del problema. Una vez resuelto el problema, nace lo que conocemos como postulado, o una premisa transformada de la original, de la que al estar enmarcada en un contexto referencial distinto, se obtiene un significado equivalente.

Aunque la intención original del profesor Zadeh fuera la de crear un formalismo que permitiera manejar de un modo más eficiente la imprecisión y la vaguedad del razonamiento humano expresado lingüísticamente, causó cierta sorpresa que el éxito de la Lógica Borrosa llegase primero al campo del control automático de los procesos. Coo sabemos, esto se debió principalmente al "boom" de lo borroso en Japón, iniciado en 1987 y que alcanzó su máximo apogeo a principios de los noventa. Desde entonces, han sido infinidad los productos lanzados al mercado que usan tecnología borrosa, muchos de ellos utilizando la etiqueta "fuzzy" como símbolo de calidad y prestaciones avanzadas. Un ejemplo de ello puede ser el anuncio publicitario de la lavadora Bosch, con sistemas eco-fuzzy.

Otras nuevas *aplicaciones de la Lógica Borrosa* (en este caso, a los campos humanísticos, como son la Educación, la Historia, la Economía, la Psicología, el Derecho, la Ciencia Política y sobre todo, la Filosofía), están adquiriendo un notable impulso en las nuevas naciones emergentes. Tal es el caso de Turquía, la India o el Brasil. Podrían citarse muchas contribuciones en este sentido, tanto en revistas como en Congresos. Lo hemos constatado personalmente, al haber podido participar en muchos de esos eventos y a través de diálogos con otros investigadores que trataban acerca de la situación actual de la investigación en estos campos.

Otro área de pensamiento -bastante filosófico, por cierto- en el que pensamos haber realizado algunas (aunque modestas) aportaciones es el de la *Teoría de Autómatas y los Lenguajes Formales,* al cual pertenecen, entre otros, los problemas de Complejidad Computacional y aquellos en los que intervienen las famosas Máquinas de Turing. Dentro de ella, hemos intentado profundizar y completar lo conocido hasta hoy mediante la llamada Función de Ackermann, con las nociones de *Recursividad Primitiva* y de μ - *Recursividad.* A estas cuestiones le dedicamos, por ejemplo, lo presentado en el Congreso sobre

Ciencias de Computación, celebrado en Loutraki (Grecia), en el 2006, luego aparecido como artículo, una vez ampliado y mejorado, en la revista *JNAIAM.*[1006] El título era el de *"Primitive Recursion and μ - Recursivity",* y en su \`Abstract´ anunciábamos nuestro propósito principal:

> We analyze the different types of recursivity and their mutual relationships. Finally, we will use the Ackermann-Peter function to prove that μ-recursivity does not imply the primitive recursion, a fact with crucial consequences in Automata Theory.

En su *Introducción* decíamos esto:

> As basic element, the function f. Its domain will be composed by m-tuples of non-negative integers, and its range must be n-tuples of the same type of numbers.
>
> So,
>
> $$f : (N^*)^m \to (N^*)^n$$
>
> where
>
> $$N^* = N \cup \{0\}$$
>
> The first distinction will be between total and partial functions, according to that the original set coincides or not with their domain.
>
> We can construct *f, primitive recursive function,* from the set of initial functions, clearly computable, by standard operations, such as combination, composition and primitive recursion, applied infinite number.
>
> Into the set of initial functions, we have the subsequent: zero function; successor function; and projection functions.

[1006] Que es el *Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics,* en su volumen 1, no. 3, 2006, pp. 273-280, ISSN 1790-8140, publicada por la European Society of Computational Methods in Sciences and Engineering, ESCMSE, en acrónimo.

The recursivity can be introduced, from *f* and *g,* by

$$f(x, 0) = g(x)$$

$$f(x, y + 1) = h(x, y, f(x, y))$$

Primitive recursive functions will be, for instance: predecessor, mult, exp, monus, eq; their negation ($\neg$ eq); the tabular functions; coc (not div), and so on.

In the classification into the set of functions, according to more restricted conditions each time, we have: initial functions, primitive recursive function, computable functions, etc.

Also, we know that:

if f is primitive recursive, then f is total.

That is,

primitive recursive functions $\Rightarrow$ total functions

For instance, the initial functions.

But the converse of the inclusion above is not true:

There exist computable functions which are not primitive recursive.

Because they are only partial, no total functions. So, is the div function (note that is very different to the previous coc). Such function is not primitive recursive.

Sobre estas funciones recursivas primitivas ya trabajaron tanto Kurt Gödel como Rozsa Péter, Lászlo Kálmar, Alonzo Church o Alan Turing, entre otros, aunque no pretendemos compararnos con ellos, sino tan sólo reconocerles como grandes precursores de esta línea de investigación.

De la μ - *Recursividad* decíamos allí que:

At first, it might be thought that there is coincidence between primitive recursive function and computable total (also called μ-recursive) function classes. But this is false. There exists a famous counterexample, due to Wilhelm Ackermann, by the function A, named after him.

It is possible to proof the existence of a μ-recursive (total and computable) function,

$$f : N^* \rightarrow N^*$$

which is not recursive primitive.

Allí probamos este resultado, en las diversas variantes posibles, y finalmente llegábamos con ello a establecer la siguiente clasificación entre clases de equivalencia de recursividad:

$$\{\text{initial functions}\} \subseteq \{\text{primitive recursive function}\} \subseteq$$
$$\subseteq \{\mu \text{ - recursive functions}\} \subseteq \{\text{computable functions}\}$$

improving the initial known sequence by the new class of functions.

Otro tema de interés, muy filosófico y de gran proyección en las Ciencias Computacionales, sería el de

la Causalidad y los Contrafactuales

(Causality and Counter-Factuals)

Están entroncados en toda una larga tradición de pensadores como G. W. Leibniz o David Hume, y llega hasta el mundo contemporáneo, con *David Kellogg Lewis, Robert Stalnaker* y *Judea Pearl,* entre otros.

Por cierto, que el *Principio de Causalidad* fue también abordado en sus obras por Moritz Schlick, el fundador y \`alma´ del Círculo de Viena, hasta que fuera asesinado en las escaleras de su Universidad (la de Viena). Para Schlick, una ley causal es simplemente el hecho de que los sucesos admitan predictibilidad. La incertidumbre cuántica va a imponer límites a esa condición de `ser predecibles´, por lo que ciertos físicos anunciaban ya el fracaso del Principio de Causalidad, al no poderse realizar predicciones con un grado concreto de precisión.

Max Born, quien fuera uno de los profesores de Moritz Schlick (y su director de tesis en Física), decía que:

La imposibilidad de medir exactamente todos los datos de un estado va a prevenirnos de la predeterminación de su ulterior desarrollo. Es por esto que el Principio de Causalidad pierde su sentido.

Pero Moritz Schlick no estaba de acuerdo con ello, replicándole que:

La Causalidad como tal, la existencia de leyes, no quedaría desbancada. Aún existen predicciones válidas; sólo que éstas no consisten en la expresión de valores de magnitudes exactas, sino de la forma: la magnitud de X está en el intervalo entre a y a + Δa.

Sobre el significado del indeterminismo sobre el problema del libre albedrío, no ve Schlick que exista contradicción, sino una *responsabilidad,* la cual requiere -a su vez- de la Causalidad. Decía Moritz acerca de este punto que:

La libertad moral que el concepto de responsabilidad presupone no entra en contraposición con la Causalidad, pero sí que quedaría totalmente destruido sin ella.

Añadiendo algo más, que:

Todo orden de los sucesos en el tiempo, de cualquier tipo que sea, ha de ser tenido como una relación causal. Sólo el completo caos, la irregularidad completa, puede ser designada como un suceso no-causal (`acausal occurrence´), como puro azar… La única alternativa que nos encontramos es la de: ¿orden o desorden? La causalidad y la ley son idénticas (o identificables) con el orden; la irregularidad y el azar, con el desorden.

Otra de sus citas interesantes a este respecto sería la recogida por Karl Popper:

La libertad de acción, la responsabilidad y la salud mental no pueden sobrepasar el reino de la causalidad: se detienen allí donde el azar comienza…; un alto grado de aleatoridad [significa tan sólo] un mayor grado de irresponsablidad[1007].

Albert Einstein y Moritz Schlick mantuvieron una nutrida correspondencia a partir de 1915, cuando el segundo de ellos publicaba un artículo sobre el significado filosófico de la Relatividad. Moritz tenía fascinado a Einstein, sobre quien ejerció una notable influencia, como también lo hiciera Ernst Mach, lo cual se hace visible en su posterior elaboración de una versión matemática que recogió todo ello: su Teoría de la Relatividad. Pero esa amistad se enfriaría siete años después, cuando a Einstein le `chocaron´ y repelieron las posturas antimetafísicas y anti-religiosas de los componentes del Círculo de Viena, con las que no podía estar de acuerdo[1008].

[1007] POPPER, K., *Objective Knowledge - Of Clouds and Clocks;* p. 226.

[1008] Conectado con el problema de la Causalidad, hemos de mencionar el *Universo de Gödel.* Este lo planteó cuando trataba de resolver las ecuaciones de campo de la Teoría General de la Relatividad (GTR). En dicho universo gödeliano serían posibles los viajes hacia atrás en el tiempo. Se trata de un universo de naturaleza estática (por tanto, no expansivo), infinito, rotatorio (rotating) y con una constante cosmológica no nula. Pero no olvidemos lo mucho que se ha venido argumentando en contra de esos `viajes en el tiempo´ (o `time travels´); así, tenemos la *Paradoja del Abuelo* (ó `Grandfather Paradox´), según la cual se nos abriría la posibilidad de que -yendo hacia el pasado- asesináramos a nuestro propio abuelo, y así, volver imposible nuestro nacimiento, que sin embargo, ya se ha producido. O retorciendo más el caso, viajando hacia atrás en el tiempo, asesinar a una versión más joven de uno mismo, lo cual es abiertamente paradójico, pues ahora resulta que vivimos. Significa, pues, una clara violación de la Causalidad, al eliminar la causa de un fenómeno que ya en el presente habría tenido lugar. Está claro que tales `viajes en el tiempo´ son imposibles (meros recursos

Luego estos temas (el determinismo, el libre albedrío, la causalidad, etc.) serán tratado como verdaderas `claves de bóveda´ de su pensamiento por nuestro Jan Lukasiewicz; especialmente, en su llamado primer periodo, o "periodo metafísico". Según exponía nuestro filósofo polaco, el argumento en que se basan los deterministas es de difícil explicación, ya que ni la propia definición de "causa" ni tan siquiera el Principio de Causalidad disponen aún en la Ciencia de un significado bien establecido. En su artículo "On determinism"[1009], decía que:

> Por Principio de Causalidad entiendo la proposición de que todo hecho, G, que se produce en un instante, t, tiene su causa en algún hecho, F, que se produce en el instante s, anterior a t, y que en todo instante posterior a s y anterior a t, se producen hechos que son, a la vez, efectos del hecho F y causas del hecho G.

Jan Lukasiewicz derivaba de la anterior exposición *cuatro propiedades de la Causalidad,* que serían éstas:

- *La causa es anterior al efecto.* Por ejemplo, cuando apretamos el timbre, este a continuación suena, pero no se trata de sucesos en realidad simultáneos, aunque a nosotros nos lo parezcan.
- *El efecto sigue inevitablemente a la causa.* Por ejemplo, el timbre no suena solo, porque sí, ni por sí mismo. Porque si suena, es debido a hechos precedentes a la producción de ese sonido. Si apretamos el

literarios), porque es imposible revertir los sucesos que ya han ocurrido. Además, sería como si dispusiéramos de una suerte de infinitos mundos posibles, todos ellos `el mismo´, pero con ligeras modificaciones de cada uno al siguiente, esperando nuestra intervención. Sólo sería posible imaginar que se tratase de distintos mundos posibles, y que en uno de ellos se eliminara al pobre abuelo, pero en los otros no.

[1009] JL.,1920, *Selected Works,* 1970; pp. 117-118.

botón, entonces el timbre suena. Por lo que es posible inferir el efecto a partir de la causa.

- *En el conjunto de hechos que se suceden por causalidad no puede haber ni saltos ni vacíos.* Volviendo al ejemplo del botón y del timbre, entre cuando apretamos el botón y suena el timbre existe una cadena de hechos, que se producen constantemente, con continuidad. Cada uno de estos hechos es simultáneamente un efecto de nuestra presión sobre el botón, y es a su vez la causa del sonido del timbre. Además, todos los hechos producidos antes serían la causa de cada uno de los que se producen después.
- *La sucesión, o secuencia, de las causas es infinita.* Porque como todo hecho tiene una causa anterior, y este proceso se puede repetir una vez y otra, se obtendría con ello una sucesión infinita de hechos, que regresarían indefinidamente; así,

$$\text{“}\ldots, F_{n+1}, F_n, F_{n-1}, \ldots, F_2, F_1, F\text{”}.$$

De estas cuatro propiedades o premisas algunos concluyen el determinismo como una consecuencia que es inevitable. Lo que argumentan tales deterministas, según Lukasiewicz, sería lo siguiente:

> Como la secuencia de hechos que ocurren antes de F, y que son la causa de ése hecho, F, es infinita, en todo instante anterior a t (y por tanto, en todo instante pasado y presente) ocurre algún hecho que es la causa de F. Si es el caso que Jan va a estar en casa mañana al mediodía, entonces la causa de este hecho existe ya hoy, y también en todo instante anterior a mañana a mediodía. Si la causa existe o existió, todos los efectos de la causa deben inevitablemente existir. Por tanto, es ya verdadero

ahora, y lo ha sido desde toda la eternidad, que Jan estaría en casa mañana a mediodía. En general, si A es b en el instante t, es verdadero en todo instante anterior a t que A es b en el instante t, porque en todo instante anterior a t, existen las causas de este hecho.[1010]

Para Jan Lukasiewicz, esta argumentación sería incorrecta, pues entre cada dos números existe otro número, y por tanto, infinitos de ellos.[1011] De donde él deduce que de seguir con este razonamiento, nos llevaría a la posible existencia de sucesiones causales infinitas que no han comenzado aún y que pertenecen enteramente al futuro. Por lo cual propone su explicación mediante el siguiente ejemplo:

Hay un error en el argumento que deriva la tesis del determinismo a partir del principio de causalidad. Porque no es el caso que si Jan está en casa mañana, entonces la sucesión infinita de causas de este hecho deba alcanzar el instante presente y todo instante pasado. Esa sucesión puede tener su cota o límite inferior en un instante anterior al instante presente: un instante, por tanto, que aún no ha llegado a pasar.

Con esto cree dar por zanjado Lukasiewicz el problema planteado por dicho principio de causalidad. Desde entonces su atención se va a concentrar en el de Tertium Non Datur, o Principio de Tercio Excluso, ya que lo ve como la nueva piedra fundamental para conseguir dilucidar su problema principal: el del determinismo. Así, en el mismo escrito nos dice que:

… el argumento basado en el principio de causalidad cae derribado. Se puede tener un firme convecimiento de que nada sucede sin causa, y de que todo hecho

[1010] Se trata del mismo paper de Lukasiewicz citado en la nota anterior.
[1011] Obviamente, debía estar pensando Lukasiewicz en el conjunto de los números reales.

tiene su causa en algún hecho anterior, sin por ello ser un determinista. Nos quedaría por examinar el argumento basado en el Principio de Tercio Excluso…

Tiene esta línea de investigación conexiones con las de la Vaguedad y la Incertidumbre, puesto que esas relaciones, como la relación modal de accesibilidad entre mundos posibles, puede obtenerse también en su versión “fuzzy”, introduciendo los “grados de accesibilidad”.

Ese problema de la causalidad y de sus formas de representación, así como del modo de interactuar unas causas sobre otras, se remonta al menos al Estagirita, con sus cuatro tipos de causas; sigue luego por los pensadores medievales, y llega, a través de David Hume, hasta los filósofos, los matemáticos y los científicos de la computación contemporáneos, como es el caso de David Kellogg Lewis, con su Teoría de los Contrafactuales, o posteriormente, con Judea Pearl y su grupo de la Universidad de California.[1012] También J. Pearl es, por cierto, otro notable pensador judío.

No olvidemos tampoco que este problema de la causación (o de la causalidad) es uno de los que ocupan la mente de Lukasiewicz durante su “periodo metafísico”, que es el que va desde 1902 hasta 1915.

Recordemos también que el *contrafactual* $A \Box \rightarrow B$ (que debe leerse: “B if it were A”) se declara *cierto* en un mundo, W, si B es cierto en todos los A-mundos más próximos a W. Llamamos *A-mundo* a todo aquel mundo en el que A se verifica. Dado que todos estos mundos satisfacen B, la sentencia contrafactual $A \Box \rightarrow B$ será declarada cierta para W.

[1012] Tal como puede verse en su conocida obra *Causality.*

Pero su semántica queda cuestiones sin responder, como la de:

> *¿qué elección de medida de similaridad podría hacer que el razonamiento contrafactual fuese compatible con las usuales concepciones de causa y efecto?*

En su propuesta inicial, David K. Lewis puso gran cuidado en mantener un grado de formalismo tan general como fuera posible. Salvo por el requerimiento de que cada mundo debe ser el más próximo a sí mismo, Lewis no impuso otras estructuras sobre la Medida[1013] de Similaridad. Pero esta medida no debiera ser arbitraria, teniendo que respetar nuestra concepción de las leyes causales. Para ello, en 1979 David K. Lewis elaboró un intrincado sistema de "pesos" y de "prioridades", entre varios aspectos de la Similaridad: el tamaño de los "milagros" (miracles)[1014], en cuanto estos significan una violación de las leyes causales; los *matching of facts*[1015]; precedencia temporal, etc. Intentando lograr con ello una similaridad más próxima a la intuición causal. Pero todo resultaba demasiado "ad hoc", pudiendo llegar a obtenerse inferencias contrarias a la intuición.

A diferencia de lo que venía sucediendo con los Contrafactuales, estas dificultades no aparecerían ya, cuando abordábamos nuestro Análisis Estructural con el soporte matemático de las medidas difusas. En contraste con

---

[1013] Que como probamos nosotros allí, había de ser Fuzzy, o Borrosa.
[1014] *"Size of miracles".* Recordemos que en la "economía ontológica" de Leibniz ya se mencionaban esas rupturas ocasionales de las leyes naturales. Pues según dicho pensador sajón, Dios actuaría de acuerdo con los medios más económicos para llegar a alcanzar los fines más abundantes y provechosos. Esta es una de las bases de toda su Metafísica. Tal economía se basará en el uso de reglas, de las cuales unas son conocidas, o cognoscibles por los humanos, mientras que otras son ocultas ("hidden rules"). Son éstas últimas las que entran en juego cuando se produce un `milagro´, que no es un suceso irregular, sino que se produce conforme a regularidades más generales. Esta línea de pensamiento la retoma David K. Lewis, de un modo propio y ajustado a su estudio de la Causalidad.
[1015] Cumplimiento de los hechos.

lo que sucedía para la teoría de David K. Lewis, los contrafactuales no estarían ya basados en la noción abstracta de "crisp similarity"[1016] entre mundos hipotéticos. En vez de lo cual, se apoyarían directamente sobre los mecanismos que producen aquellos mundos y en las propiedades invariantes de tales mecanismos.

Los "milagros" de Lewis serían reemplazados por minicirugías[1017], del tipo: *do (X = x)*, que representan el cambio mínimo que necesita un modelo para establecer el antecedente: *X = x.* Lo cual presupone no sólo conocer la existencia de tales "minicambios", sino también la posibilidad de cuantificarlos. Por lo que similaridades y prioridades, si es que llegan a ser necesarias, podrán ser leídas desde el operador *do (.),* sin que resulten básicas para nuestro análisis.

Podemos comparar de modo axiomático ambas aproximaciones a una misma situación. Si nuestra valoración de la distancia entre mundos procede del conocimiento causal, la cuestión que puede surgir es la de si ese conocimiento no impondrá su propia estructura sobre las distancias. Se trataría de una estructura que ya no estuviese "capturada" por la lógica de David K. Lewis. O dicho de otra forma: para medir proximidades entre los mundos, sobre la base de relaciones causales, ¿deberemos restringir el conjunto de afirmaciones contrafactuales que damos como válidas?

[1016] O Similaridad Nítida, Rígida.
[1017] Las "minisurgeries".

Aprovecharemos para ello, tanto en nuestras presentaciones como en el subsiguiente artículo publicado en *AUA*[1018], la construcción que previamente habíamos realizado, y que antes nos servía para mostrar de modo geométrico la idea de David K. Lewis sobre la Similaridad. Pero ahora de lo que se trata es de visualizar cuál sería la situación del modelo que nos lleva a la contradicción implícita en la tan criticada explicación de David K. Lewis sobre la Asimetría, sirviéndose para ello dicho autor de la noción de "similaridad entre mundos".[1019]

Aquí se estudiaba la citada contradicción, apoyándose para aclararlo, fundamentalmente, en la conocida noción algebraica de DCC o Condición de Cadena Descendente, que es debida a Emmy Noether. Así, podíamos visualizar[1020] la situación que subyace en el contraejemplo que ya en su día le presentaran sus acerados críticos a David K. Lewis para rebatir su explicación de la Antisimetría.

Disponemos para ello de dos secuencias de submundos que podemos suponer que verifican la Condición de Cadena Descendente, en el sentido de Noether. Admitiendo esta condición la posibilidad de que desde un subíndice en adelante, la sucesión "colapse", es decir, que todos los mundos de la sucesión, a partir de uno dado en adelante, coincidan con el mundo límite, el A o el S, respectivamente.

[1018] Las *"Acta Universitatis Apulensis",* revista publicada bajo los auspicios de la Universidad de Alba Iulia.

[1019] La insistencia en escribir el nombre completo o casi de este investigador bajo la forma David Kellogg Lewis, o David K. Lewis, o D. K. Lewis, es por la posible confusión con Clarence Irving Lewis, el C. I. Lewis que aparece cuando hablamos de Lógica Modal, y el cual, por cierto es también el autor de las *Crónicas de Narnia,* recientemente llevadas al cine.

[1020] En una representación del autor de esta tesis y del propio artículo.

La medida[1021] de similaridad nos viene dada a través del tamaño de la intersección que contiene a los submundos más próximos al W que cumplen el antecedente contrafactual de cada etapa. Pero dicha intersección se va a ir contrayendo conforme la sucesión avanza. Así que también se puede observar ese encadenamiento en la familia de intersecciones de los submundos. Esto nos llevará a una cadena de desigualdades entre las distancias, que entra en contradicción con la hipótesis según la cual todos los términos de la sucesión fueran asimétricos menos el último.[1022] Pero también se podría haber modelizado este problema mediante una sucesión que cumpliera la condición dual, la de cadena ascendente (ACC), en el sentido de Noether.

Acerca de la Transitividad, David K. Lewis construye su definición en términos de las cadenas de dependencia causal. Pero se han ido mostrando en los últimos tiempos ciertos sutiles contraejemplos. Así, el de Mc Dermott de 1995, que es el de dos personas situadas ante sendos commutadores y una tercera persona que les observa…

Sobre la "preemption", o precedencia / preferencia, concepto aparecido al emplear Lewis su estrategia para definir la Causación en términos de cadenas de dependencia, logra hacerla transitiva.

David K. Lewis establecía la distinción entre "early and late preemption". Las dificultades relativas a la "preemption" resultaron con el tiempo las mayores pesadillas para la Teoría de Lewis. En el primer caso[1023], el proceso en marcha

[1021] O "score".
[1022] Porque en tal caso, debiera haber resultado la distancia de S a W nula.
[1023] El de la "early preemption".

desde la alternativa preferida[1024] sería interrumpido, o cortado, poco antes de que el proceso principal[1025] llegara a completarse.

La Teoría de Causación en términos de las cadenas de dependencia causal puede manejar bien este tipo de casos. Por su parte, los casos de “late preemption” serían aquellos en los cuales el proceso en marcha desde la causa “preempted” fuese cortado poco después de que el proceso principal alcanzara su completitud final y se produjera el efecto[1026].

En estos trabajos hemos analizado las concepciones de David K. Lewis, las objeciones de sus detractores y la posible solución a las supuestas contradicciones que presenta. Las hemos investigado también largamente, y sobre ello dimos dos conferencias en los Cursos de Doctorado Interuniversitario en Inteligencia Artificial, intervenciones que fueron solicitadas al autor por aquellos profesores que venían dirigiendo dichos Cursos.

También, acerca de dicho tema de la Causalidad y de los otros abordados por él, como los Grafos, la Historia de la Lógica, o las Medidas Borrosas, ha venido siendo muy solicitado el doctorando para hacer de “referee” de alrededor de cuarenta artículos y trabajos, por el Editorial Board o el Comité Científico de distintos Congresos y revistas internacionales[1027]. Asimismo, para realizar informes acerca de las publicaciones e idoneidad de los candidatos para que pudieran promocionar de plaza, en diversas

[1024] O “preempted”.
[1025] Que partía de la causa “preempting”.
[1026] Es clásico el ejemplo de Hall, del 2001.
[1027] La última de las publicaciones que han pedido al doctorando que se incorpore a su Consejo Editorial (o Editorial Board) ha sido en el mes de Abril de éste mismo año; en el mencionado caso, es a la revista *Mathematics. Education Trends and Research,* de carácter internacional y que está publicada por ISPACS, con sede en Mannheim, Alemania. Ya ha sido aceptado e incorporado al mismo.

Universidades, como las de Israel[1028], las de las universidades húngaro-transilvanas, o la King Saud University, de la Arabia Saudí, en varias ocasiones, por poner sólo algunos ejemplos concretos.

No hemos de pasar por alto que la Fuzzy Logic dio lugar a la Fuzzy Set Theory (o Teoría de Conjuntos Difusos), y que como un desarrollo natural de ella tenemos los Fuzzy Numbers (o Números Borrosos), y de los cuales un tipo especialmente interesante y novedosos son los Complex Fuzzy Numbers (o Números Complejos Borrosos), en los que se subsumen como caso particular los anteriores. A todos ellos hemos dedicado también nuestro esfuerzo, con diversas publicaciones que dan cuenta de algunos de nuestros resultados. Podríamos poner como ejemplo el de "Axiomatic of Fuzzy Complex Numbers", aparecido no hace mucho en la revista *AXIOMS.*

Otro tema más, que me pareció interesante y poco estudiado, al menos desde un punto de vista filosófico-matemático, es *el que relaciona las Series de Fourier con las medidas difusas de simetría y de antisimetría.* A su análisis dedicamos entre otros un artículo[1029] que recibió muchos comentarios favorables; por ejemplo, el de la American Mathematical Society (AMS), en sus *Mathematical Reviews,* así como del CAMO, institución dedicada a la investigación de los Sistemas Fuzzy, de la Modelización y de la Optimización, ubicada en Rumanía, bajo la dirección del profesor Neculai Andrei; entre otras

[1028] Así, para la Universidad de Haifa, o para el Holon Institute of Technology. Por cierto, que la mayor institución científica israelí, el llamado "Technion" Institute of Technology –con numerosos Premios Nobel dentro de su "staff"- , ubicado en la ciudad costera de Haifa, invitó al doctorando a participar como "speaker" en uno de sus importantes Congresos Internacionales; en este caso, era sobre Álgebra Lineal e Inteligencia Artificial.
[1029] Como podemos ver en la Bibliografía final.

actividades, dicha institución se dedica a publicar los *Advances on Modeling Optimization (AMO),* donde han aparecido buena parte de nuestros trabajos.

En distintas bases de datos y publicaciones internacionales son citados mis artículos. Uno de los más recientes casos ha sido el del nuevo "paper" del profesor Alejandro Sobrino, de la Facultad de Filosofía de la Universidad de Santiago de Compostela, que aparte de ser muy interesante por el tema mismo que trata, contiene la siempre grata sorpresa de que alguien más te cita. Es el que lleva por título *"Fuzzy logic and education: Teaching the basics of fuzzy logic through an example (by way of cycling)"*, y que ha aparecido en el último número de la revista *EDUCATION SCIENCES,* en Basilea, siendo esta una publicación de MDPI accesible por la red y de gran interés; en él se explica cómo se puede y se debe introducir cada vez más el estudio de la lógica borrosa en los curricula. Reconoce A. Sobrino que se inspira dicho trabajo en mi anterior publicación, en la misma revista suiza, del artículo que llevaba por nombre:

"AI and Mathematical Education"

Y la más reciente noticia al respecto es la de haber sido invitado el autor de esta tesis por la IEEE Computer Society[1030] y por la Universidad de Sfax (Túnez), para participar como Plenary Speaker en el Congreso Internacional CoDIT´13, sobre Incertidumbre, Lógica Borrosa y Control, con todos los gastos pagados. Había sido organizado para celebrarse en la ciudad tunecina de

[1030] Posiblemente, la máxima autoridad en este campo.

Hammamet, del 6 al 8 de Mayo de 2013. Habíamos aceptado el desafío, para dar la conferencia, aceptada y lista para ser impartida[1031], bajo el título:

ANALYSIS OF FUZZY LOGIC

En esta ocasión pensábamos aprovechar para ir anunciando algunas de las líneas generales de lo que hemos venido investigando cuando pensábamos en esta tesis, aparte de apuntar algunos de los resultados hasta ahora obtenidos. Pero finalmente, debido a problemas recientes de salud y de agotamiento, así como de la no muy clara situación política del país tunecino, terminamos declinando la generosa oferta.

Hemos de mencionar algo que es de justicia reconocer: ya que durante más de catorce cursos el ahora doctorando ha venido impartiendo Tutorías Presenciales en el Centro Asociado de Madrid, con una temática de lo más variada[1032], como serían las de:

- *Introducción a la Inteligencia Artificial,*
- *Fundamentos de Inteligencia Artificial,*
- *Teoría de Autómatas,*
- *Análisis Matemático,*
- *Álgebra,*
- las más diversas *Estadísticas,*
- *Ampliación de Matemáticas,*
- *Fundamentos Matemáticos de la Informática,* …

[1031] Y posteriormente, editada por la IEEE Computer Society, donde ya tenemos otras publicaciones.
[1032] Debido a lo cual nos hemos permitido bromear con estos humildes versos, que nos recuerdan aquellos del Fénix de los Ingenios, nuestro gran Lope de Vega.

Todo lo cual me ha llevado a decir:

A mis tutorías voy.

De mis tutorías vengo.

Que de tantas como doy,

Ya no sé ni las que tengo.

El reestudiar y repensar todas estas cuestiones, en contacto directo y constante con nuestros alumnos, con sus a veces sorprendentes y casi siempre desprejudicadas preguntas, han resultado extremadamente útiles para nuestro trabajo.

25. Otras teorías alternativas para el tratamiento de problemas en contextos con vaguedad e incertidumbre.

A partir de 1920, fecha en que se estableció la lógica de Lukasiewicz trivaluada, muchas otras versiones se han intentado, con el propósito de mejorar o generalizar el sistema precedente. La Lógica Borrosa, o Difusa, se fue apartando de la perspectiva lógica de los conjuntos de valores de verdad de cardinalidad finita, de la primitiva dualidad, pasando a la generalización por medio de valores de verdad reales en el intervalo unidad cerrado, esto es, en notación matemática, definidos sobre el $[0, 1] \subset \mathbf{R}$.

Nuestro trabajo viene tratando hasta ahora, básicamente, sobre las analogías y las diferencias entre los métodos y los conceptos de los conjuntos difusos, en sí mismos y en comparación con los clásicos. Ahora vamos a tratar de ellos más aún, pero comparándolos con los "rugosos"[1033]. Por lo tanto, todo esto pertenece a dos campos relativamente nuevos, el del Análisis Matemático Difuso[1034], y también el del Rough Analysis, o Análisis Rugoso.

Como ya sabemos, la Teoría Fuzzy fue iniciada por el ingeniero y matemático de Bakú (Azerbaidjan), *Lofti A. Zadeh,* en 1965, pero la teoría de los *Rough Sets,* o Conjuntos Rugosos, fue creada o propuesta por alguien que

[1033] Los "rough sets", o conjuntos rugosos.
[1034] El "Fuzzy Analysis".

también fue matemático[1035], pero ya fallecido: el polaco *Zdzislaw Pawlak (1926-2006)*. Su nueva teoría la propuso durante el bienio 1981-1982. Como propósito general, se pretendía obtener una forma de modelar unas restricciones flexibles construidas a partir de fragmentos de información vagos. A partir de entonces, los grandes avances han continuado pujantes, no sólo en los aspectos teóricos, sino también en los que tienen que ver con sus aplicaciones. Trataremos de dar una visión clara y sucinta de sus fundamentos conceptuales y algunas de sus aplicaciones, comparando las distintas teorías cuando sea preciso.

A partir de la década de los 1920s, cuando presentó su lógica trivaluada Jan Lukasiewicz, $\mathfrak{L}_{3,}$ muchas otras versiones se han venido desarrollando, siempre tratando con ellas de mejorar o de generalizar el sistema precedente.

Entre ellos, uno de los más conocidos sería el *sistema de lógica de Stephen C. Kleene.* Se trata de un caso especial respecto del sistema de la lógica de Lukasiewicz. Una vez generalizada, la lógica difusa toma en este caso como valores de verdad todos los números reales comprendidos en el intervalo unidad cerrado, el [0, 1], en vez de reducirse al conjunto binario $\{0, 1\}$, o al ternario $\{0, ½, 1\}$.

Así, en una etapa anterior (la lógica clásica), tendríamos dos valores de verdad, el 0 y el 1. En la etapa siguiente[1036], se dispone de tres valores de verdad, el 0, el ½ y el 1. En una fase intermedia general, cuando se trata de la

[1035] Pero en este caso también polaco, como Lukasiewicz, Post, Tarski y tantos otros pensadores estudiados aquí.
[1036] Con la primera propuesta de Lukasiewicz.

lógica n-valuada, tendremos n posibles valores de verdad; concretamente, los siguientes,

$$0, 1 / n\text{-}1, 2 / n\text{-}1, . . ., (n\text{-}1) / n\text{-}1 = 1$$

Y el paso final sería tomar todo el intervalo unitario cerrado como el nuevo rango de los valores de verdad. Por lo tanto, el sistema difuso, o “fuzzy”, es el de una lógica que dispone de infinitos valores de verdad.

Es posible introducir nuevas versiones generalizadas de la Lógica Clásica. Tal es el caso de las siguientes generalizaciones, adaptadas al nuevo contexto:

- *El Modus Ponens generalizado,*
- *El Modus Tollens generalizado,*

  ó
- *El Silogismo Hipotético.*

A cada predicado Fuzzy, le podemos asociar un conjunto borroso, que sería el definido por dicha propiedad, es decir, el compuesto por aquellos elementos del universo de discurso que total o parcialmente verifiquen esa condición. Por lo tanto, es posible demostrar que la clase de los conjuntos difusos, con las operaciones habituales de la unión, la intersección y del paso del complemento, no constituye un álgebra booleana, ya que ni el Principio de contradicción ni el Principio de Tercio Excluso se verifican en ella.

Las demostraciones geométricas y algebraicas son relativamente fáciles de visualizar, incluso de demostrar algebraicamente. Basta para convencerse con poner un contraejemplo: si tomamos un elemento con grado de pertenencia que pertenezca al interior del intervalo abierto unidad, esto es, tal que

$$0 < \mu (x) < 1$$

Supongamos ahora un predicado difuso o vago, P, en la lógica multivaluada. Como sabemos, el valor de verdad establecido en este caso pertenecerá al intervalo [0, 1]. Entonces, P(x) o equivalentemente $x \in P$ serán identificados como su grado de pertenencia, es decir, la intensidad de x en la realización de la propiedad correspondiente, descrita por P. Y recíprocamente, si partimos del μ_P (x) dentro del intervalo unidad cerrado, llamándole el grado de pertenencia de x a P, entonces se interpreta como el valor de verdad de $x \in P$, en nuestra lógica multivaluada.

Esto implica, obviamente, que de la misma manera que la lógica difusa es una extensión de la lógica clásica, la teoría de conjuntos difusos será una generalización de la teoría de conjuntos clásica.

Por otra parte, podemos introducir la gradualidad progresiva, creciente o decreciente, mediante todos los modificadores lingüísticos[1037], y con ellos, introducir la estructura y los problemas derivados del lenguaje natural (NL). Así que aparece en escena la posibilidad del tratamiento del razonamiento aproximado.

El concepto de conjunto está en la propia fundamentación de la matemática moderna. La teoría de conjuntos, en su versión que podríamos denominar clásica, fue formulada por el matemático, de formación alemana,

[1037] Llamados en inglés “fuzzy modifiers”, o “hedges”.

George Cantor (1845-1918). Se le considera el padre de la Teoría Clásica de Conjuntos, junto con Richard Dedekind y Gottlob Frege. En 1874 apareció su clásico trabajo donde expuso los fundamentos de esta teoría.

Fue precisamente Gottlob Frege quien intentó una formalización completa y consistente de la Matemática, reduciéndola a un edificio basado únicamente en los principios de la Lógica. Pero Bertrand Russell descubrió que la noción intuitiva de conjunto propuesta por Cantor conducía a antinomias, o contradicciones.

En 1930, los Teoremas de Incompletitud de Gödel socavaron buena parte del proyecto logicista de Frege. Dichos teoremas demuestran que para cualquier sistema formal que tenga el poder suficiente para expresar la aritmética, habrá proposiciones verdaderas en el sistema que no pueden ser demostradas, ni sus negaciones tampoco refutadas.

Hay dos tipos de posible remedio para el problema al que antes nos referimos, el de la aparición de las contradicciones. Para tratar de resolverlo, se fueron proponiendo nuevas axiomatizaciones que completaran la de la teoría de conjuntos cantoriana, que pudiéramos llamar primitiva, y aparecieron las teorías conjuntistas alternativas.[1038]

Otro aspecto que se debe analizar en relación con la noción de conjunto es el de la de *vaguedad.* Porque las Matemáticas que podríamos llamar "clásicas" requieren que todas las nociones[1039] sean "exactas".[1040]

[1038] Entre ellas, la teoría de conjuntos difusos, o Fuzzy Sets, y la teoría de los conjuntos rugosos, o Rough Sets.
[1039] Incluyendo la de conjunto.

Sin embargo, ciertos científicos, filósofos, matemáticos, físicos, …, y más recientemente, algunos científicos de la computación, se interesaron en el análisis de los conceptos "fuzzy", difusos, vagos, o borrosos. La noción de un conjunto difuso propuesta por Lotfi Zadeh resultó el primer enfoque matemático con éxito de la vaguedad. En este enfoque, los conjuntos se definen a través de la pertenencia parcial, o grado de pertenencia, en contraste con la pertenencia restringida a los valores 0 y 1 de los miembros "crisp", utilizada[1041] en la definición clásica de un conjunto en sentido cantoriano, o de los conjuntos clásicos.

La teoría de *conjuntos rugosos*[1042] también expresaba a su modo la noción de vaguedad, pero no por medio de la integración, sino empleando la región frontera de un conjunto. Si dicha región de la frontera de un conjunto está vacía, se interpreta como que el conjunto es "crisp" o nítido; de lo contrario, el conjunto se dice que es rugoso: un "rough set".

El concepto de *"Rough Set"* también se introdujo con el propósito de conseguir una herramienta útil para la aproximación; en este caso, por el mencionado matemático polaco *Zdzislaw Pawlak (1926-2006),* en 1982. Este pensador ya desaparecido perteneció al Institute for Computer Science, de la Warsaw University of Technology.

Resulta verdaderamente impresionante la contribución de la escuela polaca de lógica y filosofía a campos tan variados y tan recientes, como pueden ser los de la lógica y las ciencias computacionales. Su máximo esplendor sabemos

---

[1040] Gottlob Frege.
[1041] Mediante la función característica.
[1042] Introducida por Z. Pawlak.

que fue durante el periodo “interbellum” desde 1918 hasta 1939, pero luego, tras la imposición en Polonia de la férrea ortodoxia marxista, se difundieron en el exterior las ideas de los miembros de la Escuela de Lvóv-Varsovia, como consecuencia de la diáspora a la que se vieron sometidos sus miembros. Así, por ejemplo, Alfred Tarski prosiguió su labor en los Estados Unidos, y Jan Lukasiewicz, en Irlanda e Inglaterra. También la fenomenología, a través del movimiento personalista, tuvo en Polonia su arraigo, tras la Segunda Guerra Mundial, como apuntábamos.

Volvamos al tratamiento de los conjuntos borrosos. Tomando objetos, atributos o valores de decisión, se llega a crear reglas para ellos; concretamente, una aproximación superior y otra aproximación inferior, y también una aproximación límite. Será, por tanto, una manera diferente de gestionar la incertidumbre.

Cada objeto se clasifica en una de estas regiones.

Para cada conjunto áspero, $A \subset U$, disponemos de:

- *Aproximación Inferior de A:* colección de objetos que se pueden clasificar con certeza plena como miembros de A.

- *Aproximación Superior de A:* colección de objetos que posiblemente pueden ser clasificados como miembros de A.

Obviamente, esta clase es más amplia que la anterior, y ambas contienen entre ellas, como en una especie de “sandwich”, al Rough Set. Este haría el papel, permítasenos la tal vez prosaica imagen, del chorizo dentro del emparedado. Pero no era mi intención hablar de política.

El proceso de formación del conjunto rugoso se articularía mediante estos tres pasos:

Primer Paso: Partiremos de una base de datos relacional, compuesta por una tabla de objetos junto con sus atributos y sus valores correspondientes.

Segundo paso: Organizaremos dichos objetos en función de su atributo, y los correspondientes valores de tales atributos para cada clase. Así, se obtiene una clasificación. En términos matemáticos, una partición en clases de equivalencia.

Tercer paso: Es posible formar la matriz de "indiscernibilidad", que nos muestre las clases de equivalencia y los valores de los atributos de cada clase.

No olvidemos que la *Teoría de los Rough Sets* es un modelo de razonamiento aproximado. De acuerdo con la cual se interpreta el método como una forma de conocimiento que sirve para clasificar objetos.

Se dice que un objeto, o categoría, es *R-áspero*[1043], si no es R-exacto.

Para cada conjunto R-rough, $Y \subset U$, se definen dos R-series asociadas exactas. Estas serían:

- *La aproximación R-inferior de Y:*

$$R_{-}Y = \{x \in U : [x]_R \subseteq Y\}$$

[1043] R-rough, ó R-rugosos.

- *La aproximación R-superior de Y:*

$$R_{+} Y = \{x \in U : [x]_{R} \cap Y \neq \emptyset\}$$

Entonces, podríamos representar el conjunto rugoso (el Rough Set), digamos el Y, a través del par formado por los dos elementos anteriormente definidos.

Observemos que:

$$R_{-} Y \subset Y \subset R_{+} Y, \forall Y \subseteq U$$

Así, podemos asegurar que

$$Y \text{ es } \textit{R-exacto} \text{ si y sólo si } (\Leftrightarrow)\ R_{-} Y = R_{+} Y$$

Dado un X, al conjunto

$$\partial R (X) = R_{+} (X) - R_{-} (X)$$

se le llama la R-frontera, o *R-boundary,* de X.

Lógicamente, si

$$\partial R (X) = \emptyset$$

el conjunto X se dice que es crisp, o clásico, etc.

Pero si por el contrario,

$$\partial R (X) \neq \emptyset$$

se dice que el X es un conjunto rugoso.

Los Rough Sets pueden ser también caracterizados numéricamente por medio del siguiente coeficiente:

$$\alpha_X = \text{card } (R_- X) / \text{card } (R_+ X)$$

Llamado el *grado de aproximación de X.*

Obviamente,

$$0 \leq \alpha_X \leq 1$$

Si su valor es igual a la unidad, se dice que X es “crisp”, o “nítido”, y en otro caso, se dirá que es “rough”, o “rugoso”.

Dada una base de conocimiento, $K \equiv (U, R)$, tomaremos la colección formada por las clases

$$E_K = \{\text{R-set exactos sobre U}\}$$

que es cerrada con respecto a las operaciones habituales que tenemos establecidas, es decir, las de la unión, la intersección y paso al complementario. Verificándose las propiedades bien conocidas de lo que es un Álgebra de Boole. Más concretamente, se puede hablar de que posee una estructura algebraica de Campo.

Pero no es éste el caso cuando se trata de conjuntos R-rough. Porque, por ejemplo, la unión de dos conjuntos R-rough puede ser un conjunto R-exacto. Por esta razón, se representa el conjunto aproximado como un par (A, B), donde A y B son dos conjuntos exactos tales que

$$A \cap B = \emptyset$$

Muchas estructuras algebraicas se pueden aplicar también para generalizar la representación de los conjuntos aproximados.

Por ejemplo,

- *el Algebra de Emil Post,*
- *el Algebra de Jan Lukasiewicz,*
- y así sucesivamente.

La Teoría de los Conjuntos Rugosos está relacionada con la lógica de los 3 valores, o trivaluada, de Jan Lukasiewicz y de Grigore Moisil, en la forma de la

"Lindenbaum - Tarski Algebra"

reduciéndose en este caso al tratamiento de los conocidos tres valores de verdad, el 0, el 1/2 y el 1.

Porque cuando interpretamos como conjunto aproximado un par de conjuntos exactos, (A, B), automáticamente se pueden inducir tres objetos:

- el A, que representa el valor lógico de la verdad;
- el U \ B, que contiene el valor lógico de la falsedad,

  y finalmente,
- el (U\B)\A, lo que supone el tercer caso, esto es, el de la indeterminación o de la incertidumbre.

  Aquí, el símbolo `/´ tiene el significado matemático de diferencia de conjuntos.

También puede estar relacionado con la lógica modal (ML), con sus conceptos y los operadores asociados (o “modos”), los de la necesidad y de la posibilidad.

El carácter inmanente de estas ideas en la Lógica Modal (ML) se muestra de la siguiente forma:

Sea Y un conjunto aproximado y B un conjunto de atributos. Cuando decimos: $x \in \Box Y$, esto significa que x pertenece necesariamente a Y. Considerando que cuando decimos que $x \in \lozenge Y$, queremos decir que x posiblemente pertenezca al Y.

Sea U el universo de discurso, X un conjunto de objetos en U, y B un conjunto de atributos. A continuación, se procede a introducir la función de pertenencia rugosa (“Rough”),

$$\mu_B: (X, B) \rightarrow [0, 1]$$

mediante la asignación, para cada x, de su grado de pertenencia:

$$\mu_B (x) \equiv \text{cardinal} ([x]_B \cap X)$$

Obviamente,

$$X \text{ es } \textit{R-exacta} \Leftrightarrow \mu_B X \equiv \chi_X$$

es decir, cuando la función de pertenencia asociada al conjunto X coincide sobre él con su función característica.

Por lo tanto, la coincidencia de esta teoría con la teoría clásica de conjuntos se produce cuando nos restringimos a trabajar sólo con las R-series exactas.

Como dijera el propio Z. Pawlak en torno a su relativamente famoso artículo:

> Rough set theory is a new mathematical approach to imperfect knowledge. The problem of imperfect knowledge has been tackled for a long time by philosophers, logicians and mathematicians. Recently it became also a crucial issue for computer scientists, particularly in the area of artificial intelligence. There are many approaches to the problem of how to understand and manipulate imperfect knowledge. The most successful one is, no doubt, the fuzzy set theory proposed by Zadeh.[1044]

La teoría de los Rough Sets ha venido atrayendo la atención de muchos investigadores y de profesionales de todo el mundo, que han contribuido esencialmente a su desarrollo y a sus aplicaciones.

Esta teoría de conjuntos alternativa presenta ciertas zonas podríamos decir que de superposición, o que se yuxtapone en parte, con otras distintas teorías. Sin embargo, nos abstendremos de discutir esas conexiones aquí, por razones de extensión de nuestro trabajo, no porque carezcan de interés en sí mismas.

A pesar de las conexiones mencionadas, la teoría de los Rough Sets se puede considerar como una disciplina independiente con sus propios derechos a entrar con honores en la clasificación de las teorías conjuntistas.

[1044] PAWLAK, Z., *op. cit.*

La teoría de los conjuntos aproximados ha encontrado muchas aplicaciones, algunas desde luego muy interesantes. El enfoque conjuntista a la aproximación parece ser, por ejemplo, de importancia fundamental para la Inteligencia Artificial y las ciencias cognitivas, especialmente en las áreas de aprendizaje automático[1045], en la adquisición de conocimientos, en la teoría del análisis de las decisiones, en la recuperación de información o de conocimiento en bases de datos, para los sistemas expertos, el razonamiento inductivo o el reconocimiento de patrones.[1046]

La principal ventaja de la teoría de los conjuntos rugosos en el análisis de datos es que no necesita ningún tipo de información previa ni aportaciones adicionales acerca de los datos.

Hoy en día las principales tendencias en la investigación de los Rough Sets consistirían, dicho brevemente, en:

- Intentar llegar al mayor grado de robustez posible en el diseño de las reglas de decisión. Por lo tanto, se trataría de intentar obtener la mayor estabilidad con respecto de pequeños cambios en el conjunto de la información sobre los objetos sometidos a análisis.

- Para llegar a lograr la resistencia al "ruido", o entropía de la información, controlar el desorden del sistema, etc. Esto es, conseguir la preservación de la forma de clasificación cuando ese "ruido" esté presente.

A estos efectos, es necesario disponer de:

[1045] Machine Learning.
[1046] El llamado Pattern Recognition, en el que actualmente se sigue trabajando, y mucho.

- Un conjunto adecuado de atributos.

- Unas técnicas adecuadas en la búsqueda de patrones, y también unos métodos adecuados de descomposición.

Recogemos aquí lo que dice en su trabajo Z. Pawlak acerca de esta teoría:

The rough set philosophy is based on the assumption that, in contrast to classical set theory, we have some additional information (knowledge, data) about elements of a universe of discourse. Elements that exhibit the same information are indiscernible (similar) and form blocks that can be understood as elementary granules of knowledge about the universe. For example, patients suffering from a certain disease, displaying the same symptoms are indiscernible and may be thought of as representing a granule (disease unit) of medical knowledge. These granules are called elementary sets (concepts), and can be considered as elementary building blocks of knowledge. Elementary concepts can be combined into compound concepts, i.e., concepts that are uniquely determined in terms of elementary concepts. Any union of elementary sets is called a crisp set, and any other sets are referred to as rough (vague, imprecise).

Due to the granularity of knowledge, rough sets cannot be characterized by using available knowledge. Therefore with every rough set we associate two crisp sets, called its lower and upper approximation. Intuitively, the lower approximation of a set consists of all elements that surely belong to the set, whereas the upper approximation of the set constitutes of all elements that possibly belong to the set. The difference of the upper and the lower approximation is a boundary region. It consists of all elements that cannot be classified uniquely to the set or its complement, by employing available knowledge. Thus any rough set, in contrast to a crisp set, has a non-empty boundary region.

In rough set theory sets are defined by approximations. Notice, that sets are usually defined by the membership function. Rough sets can be also defined using, instead of approximations, membership function, however the membership function is not a primitive concept in this approach, and both definitions are not equivalent.[1047]

En trabajos posteriores, se ha podido analizar la relación recíproca entre ambas teorías[1048], estableciendo el apoyo mutuo en los avances a través de estos diferentes, pero bastante afines campos. De hecho, se trabaja en métodos híbridos, que pretenden mantener las virtudes de ambas herramientas; así, tendríamos los llamados conjuntos "Rough-Fuzzy" y también paralelamente los "Fuzzy-Rough", según cuál elaboramos primero y luego sometemos al segundo de los procedimientos.

Para concluir la comparación entre ambas teorías, volvamos al propio Z. Pawlak, cuando dijo que:

(The) basic concept of mathematics, the set, leads to antinomies, i.e. it is contradictory. This deficiency of sets, has rather philosophical than practical meaning, for sets used in mathematics are (relatively) free from the above discussed faults. Antinomies are associated with very "artificial" sets constructed in logic but not found in sets used in (classical) mathematics. That is why we can use mathematics (relatively) safely. Fuzzy set and rough set theory are two different approaches to vagueness... Both theories represent two different approaches to vagueness. Fuzzy set theory addresses gradualness of knowledge, expressed by the fuzzy membership – whereas rough set theory addresses granularity of knowledge, expressed by the indiscernibility relation.

[1047] PAWLAK, Z., *op. cit.*

[1048] Bastante interconectadas entre sí; nos referimos a las de los Conjuntos Borrosos y los Conjuntos Rugosos.

También analizamos los fundamentos de esta Lógica en la segunda parte de nuestro artículo "Mathematical Theories of Vagueness", publicado en la revista *IMF (International Mathematical Forum).*[1049]

<u>*NUEVAS VÍAS DE ACCESO PARA ABORDAR ESTE PROBLEMA DE LA "VAGUENESS"*</u>

La problemática filosófica acerca de cuál sería el mejor tratamiento del problema de la "Vagueness" se mantiene no sólo hoy día vigente, sino que crece el interés por él en círculos científico y sobre todo, filosóficos. Y es que como sabemos, se trata de unas cuestiones estrechamente relacionadas (entre otras) con la aparición y la posible resolución de antinomias del tipo sorítico, como la del "montón de arena", o muchas similares.

Hasta ahora, hemos analizado con cierto detalle dos de estas aproximaciones:

- la de la *"fuzziness",* esto es, a través de la Lógica Fuzzy, siguiendo la propuesta de Zadeh, como una transición gradual desde la "perfecta falsedad" hasta la "perfecta verdad", a las cuales se asigna los valores de verdad 0 y 1, respectivamente. Al resto de las situaciones [1050] se les asigna un valor veritativo funcional comprendido en el intervalo abierto unidad, el (0, 1). Muchos han sido los pensadores que han apoyado esta aproximación. Aparte de los muchos ya mencionados, podríamos citar a

[1049] La revista *International Mathematical Forum.*
[1050] Y por tanto, de los llamados "borderline cases".

K. F. Machine (1976) o a Dorothy Edgington (1993), filósofa inglesa activa aún en Metafísica y en Lógica Filosófica.

- La de la *“roughness”,* que propuesta por el también polaco Zdzisław I. Pawlak, aproximación que acabamos de estudiar.
- La del *“supervaluacionismo”,* que es otro modo de abordar la “vagueness”. Este punto de vista bastante diferente de su análisis ha sido defendido por filósofos como Kit Fine o Rosanna Keefe, entre otros. La postura de Fine es que con la aplicación a los casos frontera[1051] de los predicados vagos no serían estos ni verdaderos ni falsos. Más bien, pudiéramos hablar de “truth-value gaps”.[1052] Defienden con ello un sistema bastante complejo y sofisticado de “semántica vaga”, postulando que un predicado vago[1053] puede volverse preciso de diversos modos alternativos. Dada una semántica supervaluacionista, es posible definir el *predicado super-verdadero*[1054], o “verdadero para todas las `precisifications´”. Con ello no se cambia la semántica de las afirmaciones[1055] atómicas (como la de “Pedro es calvo”), pero sí que tiene consecuencias sobre las complejas. Así, por ejemplo, en tautologías como “Pedro es calvo o Pedro no es calvo”, esta sería super-verdad en ese sentido, pues para cualquier `precisification´ que se lleve a cabo, “o bien `Pedro es calvo´ o bien `Pedro no es calvo´” sería verdad. La presencia de “borderline cases” lleva a rescatar el principio

[1051] O “borderline cases”.
[1052] En el sentido de “saltos” en los valores veritativos.
[1053] Se dice que un predicado es vago, si su región de penumbra es no vacía, y además, o bien su significado depende de un predicado que expresa de modo no concluyente (inconclusively) una propiedad gradual por sí misma.
[1054] Super-true.
[1055] Statements.

de tercio excluso, un hecho que ha sido considerado bastante valioso y que funciona a favor de este enfoque del problema. Más adelante ampliaremos esta línea de análisis de la “vagueness”.

- La *postura “epistémica”,* que ha sido defendida por notables filósofos, como Timothy Williamson (en 1994), Roy A. Sorensen (en 1988 y 2001, entre otras ocasiones), o por Nicholas Rescher (éste, en 2009). Postulan que los predicados vagos delimitan fronteras claras[1056], sólo que no sabemos dónde están[1057]. Nuestro estado de confusión sobre si alguna palabra o término vago no resulta aplicable en los casos fronterizos[1058] lo explican diciendo que puede ser debido a nuestra ignorancia. Por poner un ejemplo, bajo el punto de vista de los epistemicistas, es un hecho de importancia personal si se es joven o viejo, aunque muchas veces prefiramos mantenernos en una discreta ignorancia sobre este hecho.
- *La vaguedad como una propiedad de los objetos.* Una de las posibilidades a considerar es que las palabras y los conceptos que uno maneja sean completamente precisos, pero que sean los objetos en sí mismos los que sean vagos. Cabe poner el famoso ejemplo de Peter Unger, que trata sobre el término “cloud” (nube). Porque no está nada claro dónde empieza y dónde termina una nube, esto es, dónde está su

[1056] Sharp boundaries.

[1057] Otra importante característica de la “vagueness” es que ésta no coincide ni con la ambigüedad ni con la universalidad. Roy A. Sorensen da un ejemplo bastante ilustrativo: el nombre “niño” (“child”) es ambiguo, porque puede que sea un “vástago”, o un “joven vástago” (offspring or young offspring, en inglés). O bien porque existen casos fronterizos (borderline cases) de los mismos. Y es universal, puesto que podría designar tanto a un chico como a una chica. Es interesante observar que en el término “niño” se filtra (“seeps”) tanto la ambigüedad como la universalidad, porque las fronteras entre vástago y joven vástago, ni entre chico y chica están bien claras (y menos hoy en día: es broma).

[1058] Los ya mencionados “borderline cases”.

frontera. Pues dada una porción de vapor de agua, podemos preguntarnos si éste pertenece o no pertenece a dicha formación nubosa, y en muchos casos, no cabe darle respuesta. Así que tal vez el término "nube" que tenemos denota un objeto vago con precisión. Hoy día algunos filósofos están defendiendo que en la "vagueness" tenemos algún tipo de fenómeno de tipo metafísico, proponiendo reglas de deducción alternativas que lleven consigo la ley de Leibniz, de Identidad de los Indiscernibles[1059], u otras reglas similares acerca de la validez. Entre ellos, podemos mencionar a Peter van Inwagen (1990), Trenton Merricks, o Terence Parsons (2000).

Vamos a realizar un estudio más pormenorizado de cada una de estos puntos de vista acerca del fenómeno de la "vagueness". Este ha sido tratado muchas veces como un problema de tipo lingüístico. Pues hablando de la "vaguedad", solemos pensar que hay ciertos fallos en los nombres, predicados o sentencias. Pero eso no significa que no pueda haber problemas de vaguedad de tipo extralingüístico. Porque independientemente de si aceptamos la vaguedad en un mundo material o no, sigue siendo una cuestión aparte la de si la vaguedad lingüística tan sólo tiene un carácter de tipo pragmático, o también semántico.

Es de interés introducir ahora un nuevo personaje: es el de *Tadeusz Kubinski (1923-1991).* Fue otro interesante filósofo polaco, también desaparecido; por cierto, que pertenecía a la tercera generación de la Escuela

[1059] La *Ley de Identidad de los Indiscernibles* es, como sabemos, un principio ontológico que establece que no es posible separar objetos o entidades que tengan todas sus propiedades en común.

de Lvóv-Varsovia, lo cual le conecta con nuestros comentarios anteriores sobre la misma. Fue en su artículo de 1958, “Nazwy Nieostre”, donde presentó sus tres aproximaciones a la definición de los “nombres vagos”:

- *Definición pragmática:* Un *nombre, a,* es vago en el lenguaje *J* si y sólo si[1060] existe un objeto que no esté considerado una designación[1061] del nombre *a,* o una designación de un nombre *no-a,* para todo “speaker” del lenguaje J que entienda ese nombre.
- *Definición semántica:* Un nombre es *vago,* si su frontera es no vacía[1062].
- *Definición sintáctica:* Un *nombre,* a, es *vago* en un sistema, S, syss ni la expresión “b es a”, ni la expresión “b es no-a” son “statements”[1063] dentro del sistema S. Donde “b” es un nombre propio, esto es, que designa únicamente un objeto.

Recordemos que la *extensión positiva de un nombre vago* estaría formada por aquellos objetos (o casos) de los que el nombre puede ser total y verdaderamente[1064] predicado. Por lo que la *extensión negativa*[1065] *de un nombre vago* estará formada por aquellos objetos (o casos) de los que el nombre no puede ser totalmente y verdaderamente predicado.

[1060] Se escribiría “syss”, en abreviatura, la más usual en Matemáticas.
[1061] Por “designate”.
[1062] Una frontera del nombre es la diferencia entre el universo de discurso y la suma (o unión) de ambos ámbitos, el positivo y el negativo, del nombre. O dicho con otras palabras, la frontera de un nombre estaría formada por todos aquellos objetos que no pertenecen ni a su extensión positiva ni a su extensión negativa.
[1063] Expresiones, a veces llamadas afirmaciones, enunciados, proposiciones, etc. Lo de “statement”, en inglés, se refiere al contenido de una sentencia que afirma o niega algo, pudiendo ser verdadera o falsa.
[1064] Truth-fully predicate.
[1065] También llamada “anti-extensión”.

No cabe duda que la vaguedad tiene un carácter pragmático. Tampoco se le podría negar su carácter semántico. Sin embargo, el carácter sintáctico es algo bastante inusual, y estaría relacionado con la aproximación de Kubinski a los "nombres vagos", quien a su vez se inspira en la ontología de Stanislaw Lesniewski.

La vaguedad[1066] está estrechamente vinculada con los llamados "casos frontera"; o "fronterizos"[1067], se podría también decir. La existencia de tales casos nos proporciona una prueba bien palpable de la existencia de la vaguedad. Ésa es la opinión de Roy A. Sorensen[1068].

La determinación precisa de los casos frontera requerirá la introducción de los conceptos de:

- *Extensión positiva,*

  y de

- *Extensión negativa.*

De un nombre dado o de un predicado, se entiende.

Se dice que *un objeto cae dentro de la extensión positiva de un predicado* cuando dicho objeto cumple la condición de poseer de modo definido[1069] la propiedad relevante.

Por tanto, *un objeto cae en la extensión negativa de un predicado* cuando al objeto de modo definido le falta dicha propiedad.

[1066] Todo el tiempo estamos considerándolo –como vemos- un término intercambiable por el inglés de "vagueness".
[1067] O "borderline cases".
[1068] En su entrada en la *Stanford Encyclopedy of Philosophy (internet edition).*
[1069] Definitely.

De otro modo, esto es, si no cae en ninguna de ellas, entonces el objeto “caería” en la zona o *región de penumbra.*

Basta utilizar los conceptos de verdad y falsedad para que ambas extensiones puedan ser expresadas así:

Un objeto, O, pertenece a la extensión positiva de un predicado, P, cuando una sentencia, P(O), que predica que el objeto O tiene una propiedad expresada mediante P, es verdad.

Análogamente, un objeto, O, pertenecería a la extensión negativa del predicado P, si una sentencia, P(O), es falsa.

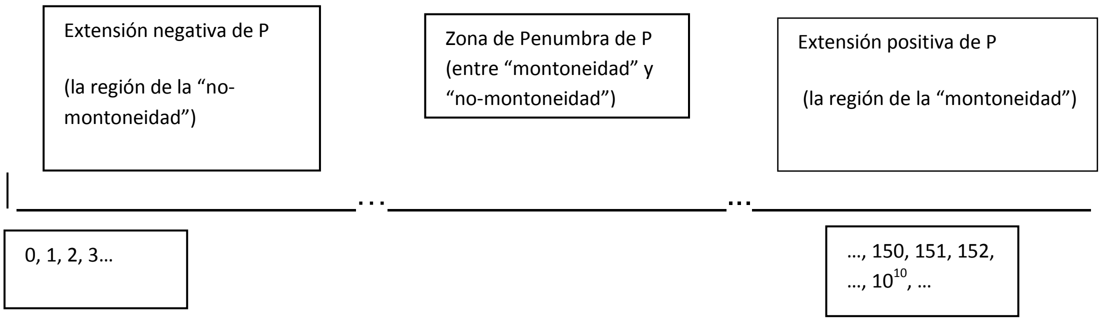
La región de “penumbra” es también llamada:

- “border”, por borde o frontera;
- “vagueness area” (región de vaguedad);
- “border case area”, etc.

Pero la existencia de “borderline cases” no constituye una prueba de la vaguedad de un nombre o predicado, porque los casos frontera también caracterizan expresiones no especificadas o parcialmete definidas.

Puede ser clave que el área de vaguedad esté vagamente delimitada. Pues el distinguir entre lo vago y la penumbra, partiendo de cualquier extensión, parece constituir la esencia de la “vagueness”. Se podría proponer el ejemplo de M. Black, que consideraba una fila de objetos, el primero de los cuales sería una silla completa y perfecta, de un determinado modelo; al segundo, aun siendo el mismo modelo, ya la falta algo; al tercero, algo más le falta; etc.; así hasta llegar a la última de la cadena, que sólo consiste en un trozo dañado de una pata.

Lo cual se podría transferir igualmente al caso del montón de arena de las antinomias de tipo sorítico. La propiedad de "ser un montón", la cual se podría denominar con un neologismo como "montoneidad", cabe ser diseñada por medio del siguiente esquema:



La línea punteada (o discontinua) del dibujo representaría la ausencia de un borde preciso, que se daría tanto entre la extensión negativa y la zona de penumbra, como entre dicha zona de penumbra y la extensión positiva.

Otro pensador interesante sería el italiano *Achille C. Varzi,* que entiende la "vagueness" de distinto modo: su definición contiene un elemento que nos muestra la imposibilidad de delimitar una frontera para una cierta colección de casos frontera. Aparte de esto, Varzi apunta la posibilidad de distintas interpretaciones de una y la misma definición. Pues para él, la expresión "posee casos frontera" no es precisa, y por ello sería responsable de la ambigüedad de la anterior definición.

Sugiere Varzi dos extensiones alternativas de dicha definición, a las que denomina: definición *"de re",* y definición *"de facto".* Así, el término *t* designa una entidad, *x,* tal que es indeterminada, si tales y cuales objetos objetos caen dentro de las fronteras de *x.* O para el otro caso, es indeterminada, si el término *t* designa una entidad, x*,* de modo que tales y cuales objetos caen dentro de las fronteras de *x.*

Achille Varzi relaciona la definición "de re" con lo ontológico, mientras que la "de dicto" con la interpretción lingüística o conceptual de la vaguedad. Él ilustra ambas definiciones por medio del ejemplo de la "alopeceidad", esto es, la del predicado "ser calvo". Este predicado sería vago en el primer sentido, esto es, ontológico, si definimos un conjunto vago de gente, pues ningún hecho objetivo puede decidir si un hombre que esté en el caso frontera[1070] pertenece o no pertenece a dicho conjunto.

El mismo predicado sería vago con respecto con respecto de la segunda definición[1071], si ningún hecho objetivo puede decidir cuál de los dos posibles conjuntos de personas están definidos por el predicado "ser calvo". Porque como sabemos, si *n* es el número de peronas que viven hoy, entonces tendríamos 2^n conjuntos distintos de personas, y según la definición "de dicto", no está decidido cuál de todos esos conjuntos le corresponde al predicado "ser calvo". Por su parte, desde el punto de vista de la definición "de re", ninguno de los anteriores conjuntos estaría definido para el predicado en cuestión. Cree Varzi que algunas propuesta de identificar las dos formas de definir la

[1070] Esto es, alguien cuya calvicie, o "alopeceidad", sea cuestionable, pertenecerá o no pertenecerá al conjunto.
[1071] Por tanto, en sentido lingüístico.

vaguedad parecen poco afortunadas, y esto es porque algunas son reconocibles como “ontológicas”, y otras, como “lingüísticas”. Pero concluye Varzi que ambas interpretaciones no tienen porqué ser mutuamente excluyentes.

La “fuzziness”[1072] de una típica región de vaguedad tiene también algunas consecuencias, pues podemos considerar la vaguedad de la penumbre, y la vaguedad de la vaguedad, y así, hasta el infinito. Esto quiere decir que la vaguedad de un enunciado o expresión dada puede generar sucesivas vaguedades, cuyo grado iría aumentando cuando avanzamos en ese proceso de gradualización, y disminuyendo en el contrario. Se trata de la así llamada “higher order vagueness”.

De donde se podría llega a poner en duda que el meta-lenguaje nos consiga proporcionar herramientas que permitan tratar el problema de la vaguedad. Por lo que para resolver cuestiones como si la vaguedad es precisa, o de si la vaguedad es a su vez vaga, algunos pensadores plantean irle añadiendo condiciones, como que si el predicado “ser vago” es vagamente vago, o si no es vago en determinadas ocasiones, dependiendo del contexto, etc.[1073]

Aun corriendo el riesgo de incurrir en la “circularidad”, estos autores tratan de resolver el problema por medio del análisis del sentido de lo que es la “vagueness”. Se podría construír, por ejemplo, una sucesión de predicados

[1072] Esto es, la “borrosidad”.
[1073] Lo cual es tratado por filósofos contemporáneos; por ejemplo, podemos citar a Roy A. Sorensen, M. Tye, D. Hyde, o Achille Varzi.

adecuada, que[1074] nos llevase de un modo, si se quiere, imperceptible, desde un predicado vago hasta uno preciso, y también el “camino de vuelta”.

Bertrand Russell, en su famosa conferencia[1075], afirmaba que la vaguedad es un fenómeno que caracteriza sólo aquello que representa, y no aquello que es representado. De manera que se trataría de un fenómeno puramente mental o lingüístico. Porque al considerar la vaguedad en objetos extra-lingüísticos[1076], es posible caer en el error típico[1077] del “verbalismo”, en el que se incurre cuando las propiedades de las palabras son adscritas a los objetos representados por ellas.

Por su lado, el filósofo Michael Dummett concluye que no es razonable compartir la opinión según la cual las cosas (en sí) son vagas, así como aquella otra que dice que las cosas lo que están es vagamente descritas.

Con respecto de la cuestión de la “vagueness”, David K. Lewis está bastante próximo a las posiciones de Russell y Dummett. Dice Lewis que el pensamiento y el lenguaje son los únicos emplazamientos donde la vaguedad puede ser localizada. Cree que la causa de la vaguedad lingüística no es la existencia de objetos vagos, sino el gran número de objetos precisos, que van variando con respecto de la posición de sus fronteras. Por lo que la “vagueness” sería una especie de indecisión semántica.[1078]

[1074] De modo similar a la cadena de sillas/no-sillas de M. Black, antes comentada.
[1075] Que llevaba por nombre, precisamente, “Vagueness”.
[1076] Es decir, objetos que son representados mediante el lenguaje.
[1077] Apuntado por Russell.
[1078] Una “semantic hesitation”. Ver su obra:
LEWIS, D. K., *On the plurality of the worlds;* p. 212.

De una opinión similar es Timothy Williamson, quien como representante del `epistemicismo´:

"… no sólo niega la existencia de la vaguedad material, sino que también cree que las expresiones del lenguaje son precisas, y que la vaguedad sería tan sólo una consecuencia de la falta de conocimiento, o de habilidad, para reconocer las fronteras precisas que separan la extensión positiva de la extensión negativa. Tal interpretación es lo que se llamaría vaguedad epistémica".[1079]

Aun cuando la posición filosófica que niega la existencia de vaguedad en el mundo material ha gozado de defensores, como los tres antes mencionados[1080], también existen pensadores que no sólo admiten que tal vaguedad sea posible, sino que sostienen incluso que los objetos del mundo material son vagos en sí mismos. Dicha interpretación recibe diversos nombres, como: *Objetiva, Metafísica, ú Ontológica.*

La posición filosófica según la cual la vaguedad de las expresiones del lenguaje tienen su fuente en la vaguedad extralingüística presenta entre sus representates a *Tadeusz Pawlowski (1926-1996),* el cual escribía[1081] que:

"… the cause of vagueness is not be found in a person´s lack of knowledge or actions, but in the nature of objects signified by vague expressions, in the specific features of those objects. They are, namely, gradual properties, such that moving from the state presence to the state of absence of a given property has successive character. This means that it is impossible to place a precise boundary between the two states.

[1079] Epistemic vagueness. Ver:
WILLIAMSON, T., 1992; p. 222.
[1080] Bertrand Russell, Michael Dummett, o David K. Lewis.
[1081] PAWLOWSKI, T., *op. cit.;* p. 72.

Tye formula una opinión similar a la de Pawlowski, pero argumentando de otro modo: puesto que el predicado “ser rojo” es vago, la propiedad expresada por él también lo será. Ahora bien; existen objetos que no son ni puramente[1082] rojos, ni puramente no-rojos. De donde se llega a que la vaguedad de una propiedad parece requerir de objetos que sean *“posibles instancias fronterizas”.*[1083]

Acerca de los *“supervaluacionistas”,* debemos indicar que dicha teoría parte de Kit Fine, que éste aplica[1084] a la “vagueness”. Luego fue introducida en la Lógica Formal por Bas van Fraasen. Fine nos dice que la clase de las valoraciones admisibles[1085] se basa en las llamadas “precisifications”.

Aún podemos hacer referencia a otras posiciones filosóficas, como son las “subvaluations”, o el “dialetheism”, incluso a otra denominada “nihilism”.[1086]

La opinión según la cual algunas sentencias pueden ser verdaderas y falsas a la vez es defendida por quienes abogan en favor de ese pensameinto dialetéico, que cree en las que ellos llaman “contradicciones verdaderas”. Además, según afirman, muchos ejemplos hay que confirmarían la validez del dialeteísmo basándose en las sentencias con términos vagos.

[1082] O totalmente.
[1083] Posible borderline instances.
[1084] En su artículo “Vagueness, truth, and logic”.
[1085] Las “admissible valuations”.
[1086] Lo primero que podemos decir es que tal vez no existan nombres tan inapropiados como éste para designar la teoría presentada por el pensador Peter Unger en 1979. Lo hizo a través de artículos de títulos tan provocativos como: “I Do Not Exist”, “There Are No Ordinary Things”, o “Why There Are No People”. Los nombres de tales papers sugieren algo que en realidad es lo opuesto. Unger acepta el llamado “argumento del montón” (heap argument) como una prueba `ad absurdum´, sin defectos, y que totalmente concuerda con la leyes de la lógica. Desde su punto de vista, sólo hemos de buscar qué afirmaciones entran en contradicción con él. Puede que el problema de la vaguedad, según su opinión, radique en el lenguaje que utilizamos. Nuestro lenguaje no sería el adecuado para el mundo que pretende expresar, o representar. Con el paso del tiempo, Peter Unger ha llegado a abandonar las posiciones de ese nihilismo, concentrando su atención en el problema de los “many” (el de la nube, ya comentado, en el artículo de 1993, p. 164), que como paradoja, remueve los problemas subyacentes en el nihilismo, como sería el conflicto entre “naming” (el nombrar) y la realidad.

Graham Priest propone el conocido ejemplo de una persona que está atravesando bajo el dintel de una puerta existente entre la habitación y el pasillo. En su opinión la afirmación según la cual estaría en ese momento a la vez dentro y fuera de la habitación sería verdadera y falsa a la vez.

La versión más conocida de la idea de "dialeteísmo" es la conocida por *"Teoría de la Subvaluación".* Si bien su autoría se le suele atribuír a Dominic Hyde[1087], lo cierto es que ya había sido presentado antes, por el filósofo polaco Stanislaw Jaskowski[1088], en 1948. Éste introdujo unos "sistemas de discusión" que formalizaban los diálogos entre personas que disintieran entre sí sobre sus opiniones acerca de la verdad de las sentencias utilizadas durante el debate. Dentro de este tipo de sistemas, el más notable es el designado como $\mathfrak{D}_2$.

Stanislaw Jaskowski se inspiró para sus sistemas en la aparición de términos vagos dentro del lenguaje natural[1089]: puede suceder que una misma sentencia sea entendida de distintos modos por los diversos participantes en una discusión, así que su valor lógico va a diferir de unos a otros. Observemos que dos sentencias aparentemente contradictorias, como la A y $\neg$A, pueden entoces ser aceptadas simultáneamente, cuando A es aceptada con un significado de términos, mientras que $\neg$A lo es con otro significado distinto de los mismos términos.

Análogamente al caso de la teoría de la "super-valuation", que aparecieron en la propuesta de D. Hyde, aquí nos apoyaríamos sobre la clase de las "precisifications". Pero los conceptos de "super-verdad" y de "super-falsedad"

[1087] Quien la planteó en su artículo "From heaps and gaps to heaps of gluts", de 1997.
[1088] En su artículo "Propositional calculus…"
[1089] El "natural language", o NL, en acrónimo.

serían sustituídos por los de “sub-verdad” y “sub-falsedad”. En ciertas precisificaciones, una sentencia verdadera sería sub-verdadera, mientras que una sentencia falsa puede que sea en otra sub-falsa, dependiendo de cuál precisificación se aplique. Por lo que[1090] algunas sentencias, o enunciados, pueden ser simultáneamente subverdaderas y subfalsas. De ahí que dicho autor introduzca nuevos conceptos, como los de:

- *Definite truth*[1091]*.*
- *Definite falsehood.*[1092]

Así que desde el punto de vista de la teoría de las “sub-valuations”, existirían tres tipos de sentencias:

- *Definitely True.*
- *Definitely False.*
- *Las que son, a la vez, verdaderas y falsas.*

Las paradojas relacionadas con la vaguedad (o la “vagueness”) pueden llegar a ser evitadas, moviéndonos en el contexto de dichos sistemas. Entre ellas podemos señalar las siguientes:

- La llamada *Paradoja de Bonini* (en honor de quien la planteó, Charles Bonini). Viene a decirnos que las simulaciones o modelos “bien hechos” son imposibles de construír, pues cuanto más sencillo intentemos que sea, para hacerlo más entendible, va a resultar menos completo, y con ello, menos preciso. Y recíprocamente, si el modelo se hace cada vez

[1090] HYDE, D., 1997; p. 653.
[1091] Que viene a coincidir con el de “super-truth”.
[1092] Que viene a coincidir con el de “super-falsehood”.

más preciso, entonces va a ser tan difícil de entender como el proceso del mundo real que pretendía modelizar. Esto lo resumían Dutton y Starbuck así, en 1971:

As a model of a complex system becomes more complete, it becomes less understandable. Alterantively, as a model grows more realistic, it also becomes just as difficult to undersatand as the real-world processes it represents.

Resumiendo: que hay que optar por algo menos claro, pero más preciso, o bien algo más claro, pero a costa de ser con ello menos preciso. Y esto con todas las posibles modulaciones introducidas por los respectivos grados que se le vayan asignando.

- La *"Code-Talker Paradox",* que hunde sus raíces en la Lingüística, al venir a cuestionar ideas fundamentales acerca del lenguaje, destacando el hecho de que éste puede servir tanto para facilitar la comunicación como para bloquearla.
- La *Paradoja del Barco de Teseo* (o `Ship of Teseus´). Supongamos que disponemos de un barco y que en él vamos reemplazando una a una las piezas. Reemplazamos una y siegue siendo el barco. Reemplazamos otra, y también … Así hasta cuando resulta que hemos ya reemplazado todas las piezas. La pregunta es: ¿sigue siendo en realidad el mismo barco?
- Luego estarían las *"Paradojas Soríticas",* porque como sabemos, existe toda una panoplia de ellas, que suponen una variante de la Paradoja del Montón de Arena (o Sorites, del griego `soros´, que significa montón). Entre ellas, tendríamos la "Bald Paradox", o Paradoja del Calvo:

¿Cuántos pelos hay que perder para ser considerado calvo? ¿Todos o parte de ellos? Y en éste caso, ¿cuántos? Claro está que la antinomia queda disuelta, si se introducen los grados; en este caso, hablaríamos del de “alopeceidad”, con grados de pertenencia al intervalo real unidad, [0, 1], según el nivel de cumplimiento de la propiedad de `ser alopécico´.

- Merecen, sin duda, una mención las dos paradojas que comenta Lesniewski: estás serían, en primer lugar, la de Alexius Meinong (recordemos que fue otro de los miembros de la ELV), y en segundo lugar, la de Nelson y Grelling[1093].

  La de Meinong puede abordarse por una de estas dos vías: una, la directa, a través del rechazo de dicha antinomia; la otra, indirecta, abundando en la crítica de los por él llamados `objetos contradictorios´.

  El razonamiento de Meinong[1094] es así planteado por Lesniewski:

  “Si fuera verdad que no existen objetos contradictorios…, sería verdadero que `un objeto contradictorio no es un objeto´. Sin embargo, sólo puede ser verdadero que un objeto contradictorio no sea un objeto en el caso de que un cierto objeto sea `contradictorio´. Si algún objeto fuera `contradictorio´, entonces ninguna proposición sobre los objetos contradictorios podría ser verdadera, incluida la proposición `un objeto contradictorio no es un objeto´. Y sin embargo, si fuera verdad que un objeto contradictorio no fuera un objeto, entonces debería ser verdadero que un cierto objeto sea contradictorio… La aceptación de los objetos contradictorios se torna, pues, lógicamente inevitable”.

[1093] El artículo donde la propusieron es de 1908, y sus datos se encuentran en la Bibliografía final que acompaña a nuestro trabajo.

[1094] Véanse tanto la obra de PDP, *op. cit.*, p. 124, como el artículo del propio Meinong que da pie a este comentario:
MEINONG, A., “Über die Stellung…”, Leipzig, 1907; p. 17.

La solución que da Lesniewski a esta “paradoja de Meinong” es sencilla: si es verdadero que algún objeto es `contradictorio´, entonces [y contrariamente a la opinión de Meinong] la proposición `un objeto contradictorio no es un objeto´es falsa, pues posee un objeto que no denota. De donde viene a deducirse, de paso, la no aceptabilidad de tales `objetos contradictorios´. Esta crítica de Lesniewski es directa y sin contemplaciones. Se basa en que Meinong no distingue entre el ámbito de la Lógica y el de la Metafísica, una distinción que sin embargo, sí que establece Lesniewski. Razón por la que éste deduce que el término `objeto contradictorio´ va a ejercer ahí una función lingüística de sujeto, mientras que no posee en absoluto una función simbólica.

En cuanto a la segunda paradoja abordada por Lesniewski, la propuesta por Nelson y Grelling, esta surge cuando se intenta responder a la siguiente pregunta. Un hombre que mata a todos los que no se suicidan, ¿debe matarse a sí mismo? (Aquí se oyen resonar los ecos de la paradoja del barbero que afeita a todos aquellos que no se afeitan a sí mismos). En cualquiera de los casos que consideremos, según sus autores, esta proposición va a aparecer como falsa, porque si no se suicida, no está matando a todos los que no se suicidan; y si no se suicida, está matando a uno que sí se suicida. ¡Contradicción (aparente)!

Lesniewski la resuelve apoyándose en sus propios planteamientos:

> “Aquel hombre que mata a todos los que no se suicidan, y no mata a los suicidas, no es objeto alguno… Por lo tanto, todas las proposiciones que posean tal sujeto son falsas”.[1095]

No existiendo, por tanto, contradicción finalmente, si ninguna de las frases que posea tal sujeto es verdadera.

Luego estarían las llamadas *Paradojas Insolubles,* que como dice el profesor Sánchez Meca[1096], se pueden clasificar en diversos subapartados, como son:

1. *Las proposiciones que expresan hechos generales.*
2. *Las proposiciones que expresan hechos negativos.*
3. *Las proposiciones que expresan creencias.*

Las del primer tipo darían lugar a la siguiente paradoja: no se podrá decir que una proposición sea la simple conjunción de proposiciones atómicas, que signifiquen cosas como “éste cuervo es negro, y éste también, y éste …”; así, hasta que todos los cuervos hayan sido enumerados. Ya que aun admitiendo la posibilidad de llegar a enumerar todos los cuervos (lo cual es absurdo), habría que admitir finalmente que el cardinal del conjunto de los cuervos enumerados coincide con el cardinal de todos los cuervos existentes. Y con ello aparecería el elemento de generalidad. Así que lo que hace que una proposición como ésta sea sea verdadera o falsa no es la conjunción de una serie más o menos larga de hechos generales, sino la consideración final de un hecho irreductible

[1095] El trabajo de St. Lesniewski sería el que lleva por nombre “The critique…”. LESNIEWSKI, S., *Collected Works,* pp. 62 y ss.
[1096] DSM, *op. cit.,* cap. 10, pp. 407 y ss. De lectura ciertamente muy amena y recomendable; en particular, para entender bien el pensamiento de Wittgenstein, no siempre fácil de descifrar.

general. Lo que nos hace ver que de la mera enumeración de cosas singulares nunca se va a poder establecer de modo axiomático una proposición general. Él motivo es la imposibilidad de establecer que las cosas enumeradas singularmente sean todas las que existen.

Las del segundo tipo corresponden a proposiciones del tipo: “Sócrates no está vivo”. Porque si es falsa, será porque no se corresponde con los hechos, pero ¿con qué hechos en concreto? Debería ser con el hecho de que no está vivo, pero si tal hecho no existe, y no se puede alcanzar del mismo experiencia directa, ¿cómo entonces cabe seguirla considerarla falsa? Así que la teoría de la verdad como simple correspondencia con los hechos particulares y presentes de la experiencia viene a dificultar la explicación de los hechos negativos.

En cuanto a las del tercer tipo, dichas proposiciones vienen a incrementar el grado de dificultad, como ocurre con las frases del discurso indirecto. Un ejemplo podría ser “Juan cree que la Tierra es redonda”. Pero el problema radica en que aun cuando esta proposiciones parezcan moleculares, no lo son. Pues la verdad o falsedad de la proposición: “Esto es verde y aquello gris” va a depender del grado de verdad de cada una de las afirmaciones que contiene. Volviendo al ejemplo anterior, la afirmación acerca de la creencia de Juan en la redondez de la Tierra es independiente de que esta sea una característica de nuestro planeta, pues podría serlo y que no lo creyera. De modo que no está claro que este tipo de proposiciones sean funciones de verdad de las proposiciones atómicas. Por esa razón, Bertrand Russell llegó a admitir que los hechos atómicos resultan insuficientes a la hora de aclarar en qué consiste la verdad o falsedad de este tipo de proposiciones.

No olvidemos que su discípulo, Ludwig Wittgenstein, hace un planteamiento más radical que su maestro. Porque para Wittgenstein, la unidad de significado es más la proposición que el término general, dado que una plabra sólo tiene un significado dentro de una proposición. Y una proposición sería una representación de la realidad.

Dado que un objeto es algo que puede formar parte de una configuración, no puede ser que sea él mismo una configuración; esto es, debe ser simple. El problema está en que no todas la proposiciones son atómicas, en los distintos lenguajes posibles. Entonces, ¿cuáles han de ser las proposiciones que consideremos? La respuesta sería que las veritativo-funcionales, compuestas por proposiciones atómicas.

Dice Wittgenstein que:

"Entre los posibles grupos de condiciones de verdad, existen dos casos extremos. En uno, la proposición es verdadera, para todas las posibilidades de verdad de las proposiciones elementales. Nosotros decimos [en ése caso] que las condiciones de verdad son *tautológicas.* En el otro caso, la proposición es falsa, para todas las psibilidades de verdad: las condiciones de verdad son *contradictorias.* La proposición muestra aquello que dice: la tautología y la cntradicción muestran que no dicen nada… Tautología y contradicción no son figuras de la realidad. No representan ningún posible estado de cosas…". [1097]

[1097] WITTGENSTEIN, L., *Tractatus Logico-Philosophicus,* pp. 107-108.

ALGUNAS LÓGICAS ALTERNATIVAS

Llamaremos *Lógica No-Monótona*[1098] a un sistema lógico tal que en él la relación de consecuencia lógica sea no monótona, o "non-monotonic".

Muchos de los sistemas lógicos, como por ejemplo, el constructo que en el fondo suponen las Matemáticas Clásicas, guardan una relación de consecuencia lógica que es de tipo monótona. Esto se debe a que al añadir alguna nueva fórmula a esa teoría, esto nunca va a provocar una reducción o alteración en la serie de las consecuencias.

Simbólicamente, esto se puede visualizar mediante la expresión:

$$\text{Si } F \vdash A, \text{ entonces } F \cup G \vdash A, \ \forall\, G$$

Siendo A una fórmula arbitraria, con F y G ambos unos conjuntos de fórmulas, y también simbolizando por medio de ⊢ la consecuencia lógica antes mencionada. Esto es,

Si $S \rightarrow C$, y siempre $S \cup T \rightarrow C$, para cualesquiera S y T, conjuntos de proposiciones válidas, entonces esta lógica es de tipo "monotonic", o monótona.

En lugar de esto: Si $\exists\, T$ tal que $S \cup T \rightarrow \neg\, C$, entonces será una non-monotonic logic, o *lógica no-monótona.*

La adecuación entre lenguaje y realidad, o entre el lenguaje y los hechos, no puede ser conocida y expresada por medio del lenguaje: es aquello según lo cual "el sentido del lenguaje no puede ser expresado por el lenguaje". Se trata de una postura de Ludwig Wittgenstein que luego fue ampliamente asumida por el resto de los integrantes del Círculo de Viena.

[1098] *NML,* por Non-Monotonic Logic.

Podemos señalar un punto crucial: no se modifica aquí nuestra base de afirmaciones, o base hechos[1099], porque si lo hiciéramos así, sería evidente la posibilidad de modificar el conjunto de consecuencias. Pero en lugar de esto, nuestra argumentación se distancia de mantener los mismos elementos en la base de conocimiento original, pues ahora vamos ampliándola con nuevas propuestas, o con información nueva.

Esto ocurre con mucha frecuencia en la Medicina, donde continuamente los nuevos descubrimientos van dejando las viejas creencias como no válidas. Así, de acuerdo con el conocimiento va avanzando, esto que ahora se prescribe, será mañana proscrito como un auténtico disparate por la ciencia médica oficial. Y esto genera la necesidad de salir rápidamente en muchos casos de la esfera de la lógica aristotélica, o más general, de la formal, donde el razonamiento es siempre de tipo monótono, como en las Matemáticas Clásicas, por poner un ejemplo.

Esta descripción muestra el mecanismo del razonamiento no monótono, con un carácter totalmente provisional y siempre revisable, nunca cristalizado de forma perenne, evolucionando con el tiempo, al contrario de lo que ocurre en las Matemáticas: las mismas premisas llevan siempre a la misma conclusión.

También conviene tratar algo de la *Lógica Cuántica*[1100], debida principalmente a los matemáticos G. Birkhoff y a J. Neumann[1101]; claro está

[1099] Según la terminología propia de la IA, o Inteligencia Artificial. También, y cada vez más, denominada Inteligencia Computacional.
[1100] La *QL,* en acrónimo inglés.

que para analizarla necesitaremos de alguna referencia previa a los propios conceptos mecano-cuánticos.

Otra cuestión fundamental en la Ciencia de Computación en general y en la Inteligencia Artificial en particular, es el de la *Computabilidad,* es decir, el de si los problemas pueden ser computables o no, y en caso de serlo, cuál es el grado de esa complejidad.

Para ello se ha establecido toda una jerarquía[1102] de clases anidadas, en cada una de las cuales estarán incluídos todos aquellos problemas de una complejidad equivalente. Sobre esos niveles y para mejorar la clasificación obtenida hasta esa fecha, presentamos un trabajo en el Congreso Europeo de Matemáticas, celebrado en la Universidad Técnica de Berlín. Este llevaba por nombre "Improving the Classification of Complexities", y luego, una vez revisado y ampliado, fue publicado.[1103]

En su *Abstract* decíamos:

When we estimate the temporal complexity of an algorithm that we suppose useful to solve a certain problem, some difficulties can appear. As we know, classical problems exist, and many other remain open, only conjectured. So, we consider the last attempts to see the relation between the classes P and NP. Our purpose is to contribute to clarify this question.

Y en su *Introducción:*

[1101] En realidad, este último, el Húngaro Janos Neumann, sería un buen ejemplo de lo que hoy se llama un "polymath", esto es, un moderno hombre del Renacimiento, que domina diversas áreas del saber, y puede ver con sutileza las relaciones que guardan unas con otras.

[1102] O "Hyerarchy".

[1103] Por la revista *AUA (Acta Universitatis Apulensis),* en su Vol. 10, de 2005

“Can a certain problem be resoluble? Is it possible to reach such solution in a reasonable amount of time? Because it may be very necessary too many time.

The Theory of Complexity attempts to classify all the known solvable problems, according to their degrees of difficulty, so as the power of the tools we may use to solve them. We can establish some results, known as Hierarchy Theorems. For instance, the famous classes P and NP are the first in the tower of complexity classes, if we consider the polynomial-time hierarchy”.

Luego abordábamos allí tanto el *caso Determinista* como el *No-Determinista:*

“Such aforementioned Hierarchy Theorems constitute the result of successive attempts to clarify such relation between the class P and NP. We will consider many other classes, modulating our requirements.

We need, previously, some definitions. Supposing known our reference model, the TM, in its respective varieties: deterministic, non-deterministic, and alternating.

As we known, the most relevant resources would be the space and the time. The space considered as the number of different cells of the work tape that are accessed during the computation. And the time as the number of transformations, possibly on the same position of memory, that intervening during the process, until its final state”.

Y para el *caso no-determinista:*

“We can also consider a non-deterministic Turing Machine, NTM, which can be viewed as a formalization of a proof system. So, works interacting between an all-powerful prover and a computationally limited verifier. Such NTM permits the characterization of the complexity for more general computational problems”.

Enunciando y demostrando a continuación diversos teoremas que permiten clasificarlos por medio de las respectivas clases de complejidad.

Para el *caso alternado*[1104], decíamos entonces que:

"An *ATM* (Alternate Turing Machine, by acronym) is a generalization of a NTM, intended to capture the complexity of certain languages. These can be defined by quantified logical formulas, where alternate existential (∃) and universal (∀) quantifiers.

Remember that in NTM we can only handle formulas with ∃. The use of ATM is for decision problems. They possess an additional resource: the number of changes, in the machine, from ∃ to ∀, and vice versa, into a computational path. Such change or switch is called an alternation".

Aparte de lo que a continuación vamos a mencionar, en dicha revista internacional, SYMMETRY, se le pidió al doctorando que fuera Guest-Editor de un Special Issue, o volumen especial, dedicado al tema "Symmetry Measures on Complex Networks", publicado en 2011, conteniendo en total una selección de seis trabajos de investigación.

Asimismo, se le pidió que contribuyera con un trabajo suyo a otro Special Issue; éste fue el de "Feature Papers: Symmetry Concepts and Applications", publicado en 2009.

Hasta el mes de Marzo de 2013 había publicado el doctorando doscientos sesenta y seis artículos, de los cuales una buena parte tratan acerca de la fundamentación lógico-matemática e histórico-filosófica de los problemas abordados. Entre otros, los publicados en las revistas de la institución de

[1104] A veces determinista y a veces no-determinista.

investigación MDPI, con sede central en Basilea (Basel, Suiza), y otra sede en Pekín, como: AXIOMS (MATHEMATICAL LOGIC AND MATHEMATICAL PHYSICS); SYMMETRY; ENTROPY; EDUCATION SCIENCES, etc.

Entre todas ellas, y hasta la fecha antes mencionada, han tenido seis de mis artículos allí publicados más de diez mil “Full-Text Views”, esto es, al ser revistas electrónicas, esas serían visitas por la red de gente que los ha consultado y se los ha estado bajando de la red. Eso implicaría cierto grado de aceptación entre los investigadores internacionales.

Asimismo, durante estos años ha venido asistiendo este doctorando a unos cincuenta Congresos Internacionales, en los que se trataba de las cuestiones sobre las que trabaja, analizadas desde distintas perspectivas; conferencias a las cuales ha sido muchas veces invitado como Plenary Speaker, Chairman o miembro del Scientific Committee.

Las publicaciones acerca de estos temas le llevaron a ser propuesto como Editor en Jefe de la nueva revista: AXIOMS. MATHEMATICAL LOGIC AND MATHEMATICAL PHYSICS, que está siendo editada, como muchas otras y desde hace años, bajo el patrocinio de la institución MDPI, con doble sede en Basilea (Basel, Suiza) y en Beijing (Pekín, República Popular de China).

En cuanto a España, hemos luchado continuamente porque estos temas se estudien y difundan, en todos los niveles educativos, a ser posible. Así, hemos conseguido -por ejemplo- que en los estudios del Grado de Matemáticas impartidos en la UNED se incorpore al currículo como materia importante la *Lógica Matemática,* que sorprendentemente no se cursaba hasta ahora en esos estudios. Asimismo, se ha conseguido que algunos de nuestros alumnos de Máster preparen trabajos sobre Números Borrosos, sobre Fuzzy Logic, o sobre Conjuntos Borrosos, con resultados y aceptación muy notable.

A todo lo cual hemos de añadir que hemos logrado la aceptación y la puesta en marcha de dos nuevos Cursos de Formación del Profesorado: “LOGICAS NO-CLASICAS” y “MATEMATICAS Y CONJUNTOS BORROSOS”. Ambos cursos son de posgrado organizados en la UNED, y están bajo la dirección de este doctorando.

O nuestra participación -como codirector y ponente- sobre el mismo tema (el de las LÓGICAS BORROSAS), en el Curso de Verano de la UNED, impartido en Alcalá la Real:

“La aventura intelectual de nuestro tiempo” (Julio de 2013)

O la contribución como ponente en el Congreso Euro-Iberoamericano sobre Educación, organizado en Julio de 2013 por la UNED, tratando nuevamente de nuestro tema, bajo el nombre:

“Enseñando la nueva matemática: conjuntos y lógica borrosa”

Otras líneas de investigación que a lo largo de estos años he venido siguiendo, paralelamente y a veces interconectadas con la anterior, son:

- la de la causalidad y las estructuras contrafactuales ;

- los grafos esenciales, en los que muchas veces los estudios sobre la causalidad se apoyan, y que también son de aplicación en el estudio de las Redes Complejas;

- pasando por el planteamiento axiomático-deductivo de nuevas medidas borrosas y del trasfondo filosófico que subyace dentro de las mismas, etc.

Resumiendo, que nuestro objetivo al emprender este trabajo era doble: primero, investigar en las raíces histórico-filosóficas (no suficientemente bien conocidas; al menos, hasta ahora) de las ideas que han conducido a la pujante introducción de las lógicas multivaluadas, y en particular, de la lógica borrosa, así como en la fundamentación rigurosa de todas ellas, de lo que implican y de sus aplicaciones; en segundo lugar, exponer con cierto detalle las líneas de investigación que (siempre relacionadas con ello) ha venido siguiendo hasta la fecha el propio doctorando, las cuales le han llevado a cierto número de resultados, que aparecen ya en diversas publicaciones internacionales.

Una reciente noticia (del 31 de Marzo de 2013) ha venido a llenarnos de alegría. Se nos ha propuesto, por parte del profesor Barna Iántovics, de la Universidad "Petru Maior", de Tirgu Mures (Marosvasárhely), en Transilvania, pasar a formar parte de un importante Grupo de Investigación Internacional: el denominado "Research Group for the Study of Complexity and Intelligence of Biological and Artificial Complex Systems". Dicho grupo está formado por relevantes investigadores de las Ciencias de Computación e Inteligencia Artificial, así como en muchas de sus implicaciones matemáticas y filosóficas, especialmente cuando se estudian Sistemas Complejos y sus aplicaciones a la Biología o a la Medicina, como Matthias Dehmer, el propio Barna Iántovics, Lászlo Kovács, Janusz Kapcpryk, Witold Pedryck, Florentin Smarandache, Bogdan Patrut, Adrian Gligor, etc., quienes trabajan en Universidades de Austria, Bielo-Rusia, Hungría, Polonia, Estados Unidos, Canadá, entre otras, lo cual mencionamos para resaltar su nivel y el carácter internacional que tiene. Dentro del mismo, este doctorando trabaja en el grupo investigador denominado "Natural Computing for Intelligent Solving of Complex Problems". Su andadura comenzará en unos meses. Lógicamente, el doctorando lo ha aceptado.

Aparte de lo que acabamos de mencionar, en dicha revista internacional, SYMMETRY, se pidió al doctorando que fuera el Guest-Editor de un Special Issue, o volumen especial, dedicado al tema "Symmetry Measures on Complex Networks", publicado en 2011, conteniendo seis trabajos de investigación. Asimismo, se le pidió que contribuyese a otro Special Issue, éste el de "Feature Papers: Symmetry Concepts and Applications", publicado en 2009.

Asimismo, durante estos años ha ido asistiendo este doctorando a cerca de cincuenta Congresos Internacionales, que trataban sobre las cuestiones sobre las que ha venido trabajando, analizadas desde distintas perspectivas; conferencias a las cuales ha sido muchas veces invitado como Plenary Speaker, Chairman o miembro del Scientific Committee que lo dirige.

Las publicaciones acerca de estos temas le llevaron a ser propuesto como Editor en Jefe de la nueva revista:

AXIOMS. MATHEMATICAL LOGIC AND MATHEMATICAL PHYSICS

Esperamos seguir contribuyendo a ese interés por la nueva ciencia, y estamos escribiendo un par de manuales (uno, de "Lógica Matemática", y otro, de "Lógicas No-Clásicas"; para el Grado y el Máster en Matemáticas, respectivamente), que no sólo ayuden a nuestros alumnos, sino que siendo de lo más inteligible, puedan llegar a todos y serles útiles.

Resumiendo, que nuestro objetivo al emprender este trabajo había sido doble: primero, investigar en las raíces histórico-filosóficas (no suficientemente bien conocidas; al menos, hasta ahora) de las ideas que han conducido a la pujante introducción de las lógicas multivaluadas, y en particular, de la lógica borrosa, así como en la fundamentación rigurosa de todas ellas, de lo que implican y de sus aplicaciones; en segundo lugar, exponer con cierto detalle las líneas de investigación que (siempre relacionadas con ello) ha venido siguiendo hasta la fecha el propio doctorando, las cuales le han llevado a cierto número de resultados, que aparecen ya en diversas publicaciones internacionales.

26. Aplicaciones de Lógica Borrosa, o Fuzzy Logic.

En general, en la lógica difusa, o borrosa, las proposiciones no son absolutamente ciertas o absolutamente falsas. Una cosa puede ser verdadera al 5% (técnicamente, su "grado de verdad" sería del 0,05). Y las variables[1105] ya no son números, sino nombres sin fronteras lingüísticamente precisas: alto o bajo, rico o pobre, gordo o delgado, está sano o está enfermo, es viejo o es joven, está caliente o está frío, o por el contrario, si "es normal", y con qué grado esto ocurre, etc.

Los operadores que los modifican son del tipo siguiente, "mucho", "bastante", "demasiado", "casi", o "no demasiado". Son los llamados modificadores difusos[1106]. Mediante ellos se atribuye un valor a cada una de estas características difusas, y ese valor se acentúa o es diluido (o debilitado) de acuerdo, por ejemplo, con las diferentes potencias o raíces de los valores iniciales, o con expresiones polinómicas que dependen de estas funciones.

Así, tenemos los llamados modificadores de "intensificación", o los de "expansión" (dilatación), respectivamente, con efectos graduales y de variación. La característica de trabajar con esas regiones fronterizas no está final y definitivamente definida para esta nueva área de las Matemáticas, que sigue en progreso constante, y que conlleva múltiples implicaciones filosóficas.

[1105] O categorías.
[1106] Los "hedges", o también llamados los "modificadores difusos", los "fuzzy modifiers".

La lógica difusa está hoy acreditada, y cada vez más, como una metodología adecuada para la construcción de sistemas que ofrezcan un rendimiento satisfactorio en presencia de la incertidumbre y la imprecisión. Porque las aplicaciones del mundo real “fuzzy” sufren de numerosas fuentes de incertidumbre, debidas, por ejemplo, a los sensores y al significado de los conjuntos difusos. El sentido de decir “rápido” va a cambiar bajo diferentes condiciones o contextos, y para distintos expertos que participen en el modelado del sistema difuso, ya que pueden tener diferentes ideas sobre lo que constituye “rápido”.

Hasta la fecha la mayoría de los sistemas difusos se basaban en los llamados del Tipo 1, en tanto en cuanto que los conjuntos borrosos tienen funciones precisas de pertenencia. Las del Tipo-2, en Lógica Difusa, corresponderían a un paradigma emergente que trata de superar las limitaciones de los sistemas del Tipo-1.

Los sistemas del Tipo-2 se apoyan en conjuntos difusos caracterizados por tener una función de pertenencia borrosa. Las funciones de pertenencia del Tipo-2 vendrán dadas mediante conjuntos difusos que son ya tridimensionales, en lugar de tener como los anteriores dimensión dos. Esa tercera dimensión “extra” nos va a proporcionar adicionales grados de libertad, que hacen posible aplicar directamente el modelo y manejar mejor las incertidumbres.

Se sigue realizando una gran cantidad de profundas investigaciones con el propósito de explorar los puntos fuertes de esta lógica difusa de Tipo-2.

En 1973, con la teoría básica de L. A. Zadeh sobre controladores difusos, otros investigadores comenzaron a aplicar la lógica difusa en diversos procesos mecánicos e industriales, para mejorar lo existente hasta ahora. Estableciendo varios grupos de investigación en universidades japonesas sobre principios y métodos difusos. Así, los profesores mencionados, Terano y Shibata en Tokio, o los profesores Tanaka y Asai, en Osaka, hicieron importantes contribuciones, tanto al desarrollo de la teoría de la lógica difusa en sí como a sus aplicaciones.

En 1980, el ya por desgracia desaparecido profesor Ebrahim Mamdani, en el Reino Unido, diseñó el primer controlador difuso para una máquina de vapor, que se aplicó para controlar una planta de cemento.

El año 1987, en Hitachi utilizó un controlador difuso para el control del tren de Sendai, que empleaba un innovador sistema creado por el hombre. Desde entonces, el controlador ha estado haciendo su trabajo muy eficientemente. Fue también durante este año de 1987, cuando la empresa Omron desarrolló los primeros controladores borrosos de tipo comercial. Así que el año 1987 es considerado el "boom borroso", desde el punto de vista tecnológico.

En 1993, la casa Fuji logró aplicar la Fuzzy Logic para controlar plantas de inyección de productos químicos para el tratamiento de agua por primera vez en Japón. Fue allí, en el país nipón y en Corea del Sur, donde la lógica difusa alcanzó entonces más empuje, creándose una estrecha colaboración entre el gobierno, las universidades y la industria, con abundante aportación de fondos para la investigación.

Paralelamente al estudio de las aplicaciones de la lógica difusa, los profesores Takagi y Sugeno desarrollaron el primer enfoque que permitiera construir reglas difusas (fuzzy), a partir de “training data”.

Las aplicaciones de la lógica difusa en la vida cotidiana desde entonces han ido creciendo rápidamente. De hecho, sin que muchos aún lo sepan, ya es parte de ella. Por ejemplo, algunas marcas de lavadora con lógica difusa son fabricadas por las casas Electrolux, AEG y Miele, y utilizan estos métodos computacionales para moderar el programa; por ejemplo, graduando si para el lavado de la ropa esta “no está demasiado sucia”, que es un concepto claramente difuso. La técnica también se ha generalizado en los ABS, esto es, los frenos automáticos de los coches, para las cámaras de enfoque automático o para el control de los ascensores, etc.

Para construir un sistema difuso, un ingeniero informático debe comenzar con un conjunto de reglas difusas que provienen de un experto. Dicho técnico puede definir los grados de pertenencia de entrada para los diferentes conjuntos borrosos y también los de salida, por medio de conjuntos de curvas. Las reglas difusas, o las reglas de un sistema difuso, permitirán definir un conjunto mediante la superposición de “patches”, o intersecciones, que se relacionan entre sí mediante una amplia gama de entradas para una amplia gama de productos. En este sentido, el sistema difuso se aproxima a una función matemática, expresable mediante una ecuación de causa y efecto.

Un resultado muy importante dice que los sistemas difusos pueden aproximar cualquier función matemática continua. Bart Kosko demostró este teorema de la convergencia uniforme, mostrando que tomando los “patches” difusos suficientemente pequeños, que puedan cubrir suficientemente la gráfica de cualquier función o relación de entrada / salida. El teorema también demuestra que podemos detectar con anticipación el error máximo de la aproximación y estar seguros que existe un número finito de reglas difusas mediante las cuales conseguirlo.

También debemos reseñar los últimos avances en Redes Neuronales, o Neural Networks[1107], y los Algoritmos Genéticos[1108]. Estos son, sin duda, un complemento adecuado para la lógica difusa. Porque otra de las razones clave para el aumento de la investigación en estos campos radica en el interés por las redes neuronales y en sistemas difusos parecidos.

Buscando las relaciones entre las dos técnicas, se obtienen de esta manera los *Sistemas Neuro-Fuzzy,* que utilizan métodos de aprendizaje basados en redes neuronales para identificar y optimizar los parámetros. Entonces, como se dice, aparecieron los algoritmos genéticos, que en conjunción con las redes neuronales y los sistemas difusos, son herramientas poderosas; por lo tanto, resultan de gran interés para la investigación futura, tanto en las matemáticas actuales como en las matemáticas del futuro, que ya está aquí, tomando forma rápidamente.

Las *redes neuronales* simulan colecciones de “neuronas” y de “sinapsis”, que cambian sus valores como respuesta a las entradas de las neuronas y a las sinapsis que las conectan. La red neuronal actúa como una especie de computadora, ya que asigna a las entradas las correspondientes salidas. Las

[1107] En términos de programas que aprenden a partir de la experiencia.
[1108] Genetic Algorithms, o de cómo los programas evolucionan con el tiempo.

neuronas y las sinapsis pueden ser componentes de silicio, o ecuaciones en el software, que simulen su comportamiento.

También las redes neurales, o redes neuronales, son programas inspirados en la biología. Se componen de “neuronas” que reciben varios “inputs” y los combinan para emitir un sólo “output”, como las neuronas de verdad. Y que también, como éstas, modifican la fuerza de sus conexiones en función de la experiencia. Su aprendizaje suele ser “guiado”, es decir, se basa en la comparación del resultado propuesto por la máquina con la solución correcta de la vida real.

La combinación de estas herramientas[1109] permite a las máquinas aprender a manejar conceptos difusos, muy al estilo humano. Un ejemplo en que el soft computing ha logrado notables avances es el del reconocimiento de la escritura manual. Se trata de un problema correoso (hard) para la computación convencional, porque es difícil imaginar una descripción matemática precisa de la letra `*a*´ que abarque a todas las `aes´ que escribimos (y reconocemos) las personas. El soft computing sí que puede, en cambio, manejar categorías como “más o menos una *a*”.

Recordemos que en la lógica difusa, un símbolo puede ser una *a* con un cierto grado de verdad del 0.7, por ejemplo. El sistema de reconocimiento de escritura falla mucho con cada nuevo usuario, pero luego se va adaptando a las peculiaridades de sus trazos. Para esto, entre otras cosas parecidas, sirven las redes neurales, o neuronales.

[1109] El “soft computing”.

Estos programas no pretenden ser un modelo del funcionamiento real del cerebro[1110], pero son capaces de aprender de la experiencia, que no es poco, de momento.

El aprendizaje supervisado[1111] llegó a través de las redes supervisadas, ajustando las reglas de un sistema difuso, como si fueran ellas mismas las propias sinapsis. El usuario proporcionaban el primer conjunto de reglas, que eran refinadas por la red neuronal, mediante la ejecución de cientos de miles de entradas, variando ligeramente el conjunto "fuzzy" cada vez, para ver el ajuste, esto es, cómo de bien funcionaba el sistema. La red tiende entonces a mantener los cambios que mejoran su rendimiento, haciendo caso omiso de los demás.

El científico de la computación puede definir los grados de aprendizaje no supervisado[1112], llegando a él a través de las redes neuronales no supervisadas, por el método llamado "blind" (a ciegas), tomando los datos del clúster en grupos[1113], cuyos miembros guardan cierto parecido entre sí.

Puede que no hayan dado aún con la respuesta correcta o incorrecta, o con la forma de organizar los datos. Su estudio está en rápido avance.

El modelado difuso es muchas veces utilizado para transformar el conocimiento de un experto en un modelo matemático. El énfasis se pone entonces sobre la construcción de un sistema experto difuso que reemplace al experto humano. También como una herramienta que pueda ayudar a los

[1110] Tanto las neuronas individuales como sus conexiones pueden considerarse de momento una ingenua caricatura de su versión biológica.
[1111] "Supervised learning".
[1112] "Unsupervised".
[1113] Por ese procedimiento llamado por ello del "clustering".

observadores humanos en la difícil tarea de transformar sus observaciones en un modelo matemático adecuado o suficiente.

En muchos campos de la ciencia, los observadores humanos se han ido proporcionando descripciones lingüísticas y sus explicaciones, dentro de los diferentes sistemas. Sin embargo, para estudiar esos fenómenos, hay una necesidad de construir un modelo matemático adecuado, un proceso que normalmente requiere una comprensión matemática de características muy sutiles. El modelado borroso es un enfoque mucho más directo y natural para la transformación de la descripción lingüística en dicho modelo.

Un modelo difuso representa el sistema real en una forma que se corresponde estrechamente con el modo en que los seres humanos perciben. Por lo tanto, el modelo es fácilmente comprensible, y cada parámetro tiene un significado fácilmente perceptible. El modelo puede ser fácilmente modificado para incorporar nuevos fenómenos, y si su comportamiento es muy diferente de lo esperado, por lo general es fácil encontrar la regla que se debe modificar, cuándo y cómo. Además, los procedimientos matemáticos utilizados en el modelado borroso se han probado muchas veces, y sus técnicas están relativamente bien documentadas.

La posible “mala reputación”, o la agria polémica sobre la lógica difusa, aparte de los prejuicios, posiblemente en buena medida parta de lo mal que su nombre fue elegido, como se señalábamos al principio, hecho reconocido por el propio Zadeh. Porque aunque parezca un juego de palabras, la lógica difusa no lo es en sí misma, ya que tiene una definición matemática precisa, sino que lo es (difuso) todo el mundo que nos rodea, sobre el cual esa herramienta se aplica, y mediante ella lo tratamos de interpretar, incluyendo siempre nuestra percepción de sus límites y de sus categorías[1114].

La palabra “modelo” viene de la palabra latina “Modellus”. Se describe con ella la forma típica de los humanos de hacer frente a la realidad. Por lo tanto, un modelo será una versión simplificada de algo que es real. Antes del estudio de los métodos propios de la lógica borrosa o Fuzzy Logic, conviene seguir estudiando cuáles han sido los orígenes históricos de una herramienta tan poderosa para la ciencia y la tecnología actuales. Debido a que esta búsqueda de sus orígenes y esa evolución no sólo poseen un interés intrínseco de carácter cultural directo, sino que nos puede permitir abrir nuevas perspectivas para saber hacia dónde podemos avanzar en el futuro. Es importante tener en cuenta la estrecha relación entre `fuzziness´ y complejidad.

El Modelado Fuzzy se define como la construcción realizada a través del proceso de inferencia difusa. Analizamos por ello aquí con brevedad dicho proceso y sus antecedentes históricos, ya que ambos pueden resultar muy útiles para muchas aplicaciones interesantes, así como para trabajar acerca de muchos temas diferentes, como son los modelos y los problemas de

[1114] Dice Velarde, en la p. 140 de su *Gnoseología…,* que:
“La lógica clásica bivalente no agota la logicidad. Caben otros sistemas en que la verdad es tratada, no como una entidad absoluta y universal, sino de una manera más natural (más acorde con el uso que de ella se hace normalmente)…” “No se propone una lógica de lo preciso que sea difusa, sino una lógica precisa de lo difuso”. Y en la p. 56 de la misma obra, que como: “… los conjuntos difusos, los elementos, las proposiciones, las conectivas, los valores de verdad, etc., quedan determinados por referencia a dominios específicos (particulares, locales), la lógica difusa constituye una lógica *particular (local).* Y también, como consecuencia de lo anterior, en la lógica difusa los procesos de inferencia son de naturaleza *semántica,* más bien que *sintáctica,* en el sentido de que la consecuencia extraida de un conjunto de premisas depende, fundamentalmente, del significado asignado a los conjuntos difusos que aparecen en esas premisas.”

optimización. Por lo general, *FRB* será el acrónimo de Fuzzy Rule Based, o base de reglas difusas.

Las Reglas muestran muchas grandes ventajas sobre Lógica Clásica. En la Lógica Clásica, el Razonamiento era monótono, con inferencias que no contradicción durante el proceso con lo ya existente. Mientras que en el RBS[1115] se puede suprimir hechos o afirmaciones de la Base de Datos[1116], ya que las nuevas inferencias pueden mostrarnos que estábamos equivocados, como ocurre con frecuencia en las aplicaciones médicas. Esto hace que este tipo de razonamiento sea no monótono, ya que podemos modificar[1117] la conclusión. Esta sería, por tanto, temporal y provisional.

¿Qué es lo que sucede en caso de disponer de más de una regla adecuada al mismo tiempo? ¿Cuál debería ser aplicada en primer lugar? En cada paso, las diversas opciones forman un conjunto al que llamamos *Conjunto Conflicto.* Establece el conjunto de normas aplicables, y es, obviamente, un conjunto dinámico. El problema de decisión subyacente se denomina el de *Resolución de Conflictos,* también llamado de *Control del Razonamiento.*

Así que la Lógica Fuzzy tiene dos significados diferentes, la Fuzzy Logic in Broad Sense y la FL in Narrow Sense[1118]. En este último sentido, el de la Lógica Fuzzy "narrow"[1119], se trataría de un sistema lógico que procede de los intentos de formalizar el razonamiento aproximado. Por lo tanto, se trata de una extensión de la Many-Valued Logic.

[1115] Rule-Based System, en su acrónimo inglés.
[1116] O Base of Facts (BF, en siglas).
[1117] Siempre que esto sea necesario.
[1118] Según sea en el sentido amplio o en el estricto, o estrecho.
[1119] Denotada por FLn, en acrónimo.

Así que esta FLn tiene una gama mucho más amplia de aplicaciones que los tradicionales sistemas lógicos, debido a la aparición de nuevos conceptos.

En lugar de esto, si tenemos en cuenta la lógica difusa en su más amplio sentido, la FLb[1120], dicha FLb será un sinónimo de teoría de conjuntos difusos[1121]. De hecho, es la teoría de las clases con límites poco definidos[1122]. Por lo tanto, la FST[1123] es mucho más amplia que la FLn, incluyendo a esta última como una de sus ramas. Por lo tanto, en un sentido amplio, todo aquello que trate de "vagueness" puede ser llamado una Lógica Borrosa, o Fuzzy Logic.

Tengamos en cuenta que Vilém Novák había propuesto la FLb como

"…a program to extend FLn to develop a formal theory of natural human reasoning, which is characterized by the use of natural language. Thus, the theory should encompass mathematical models of special expressions of natural language, take into account their vagueness and develop specific reasoning schemes. This paradigm overlaps with two other paradigms proposed in the literature, namely common sense reasoning and precisiated natural language (PNL)".[1124]

Pero en el sentido más estricto, la base de la Lógica Fuzzy sería el cálculo formal de la lógica multivaluada. Los Sistemas Difusos han demostrado una

[1120] Existe también las FLw como siglas, aunque ese ya vaya a ser un paradigma diferente, que fuera propuesto por Vilém Novák.
[1121] O Fuzzy Set Theory; FST, en acrónimo.
[1122] Las "fuzzy boundaries".
[1123] La teoría de conjuntos borrosos (FST) se encuentra muy conectada con las lógicas multivaluadas (MVLs), que aparecieron en la década de los 1930´s, muy desarrolladas con posterioridad, a través de las lógicas difusas y otras lógicas alternativas. En esta nueva perspectiva, los grados de pertenencia pasan a ser entendidos como grados de verdad de las proposiciones. La intersección conjuntista, como conjunción. La intersección, como disyunción. La complementación, como negación. Y la inclusión conjuntista, como implicación.
[1124] NOVÁK, V.

notable capacidad para la formalización[1125] de la capacidad de razonamiento aproximado típico de los humanos.

Uno de los retos importantes de la investigación hoy en día es el diseño de sistemas inteligentes con un mayor nivel de flexibilidad, de modo que los sistemas dinámicos complejos se pueden modelar y controlar de la manera más eficiente.

Una característica muy interesante de los sistemas difusos es su capacidad de manejar la información numérica y lingüística. Esta característica hace que dichos sistemas sean muy útiles para el modelado y el control de sistemas dinámicos complejos. La propiedad de aproximación universal de los modelos difusos no es la única propiedad notable. Los modelos difusos pueden añadir una nueva dimensión a la información que puede ser extraída del sistema. La nueva dimensión sería la información lingüística, que nos proporciona descripciones intuitivas acerca del comportamiento del sistema modelado.

Los diferentes tipos de modelos difusos se han propuesto en la literatura y pueden ser caracterizados por tener proposiciones borrosas como antecedentes y también como consecuentes de las reglas, o bien haciendo que los consecuentes de las reglas surjan como expresiones funcionales de los antecedentes.

Para abordar los problemas de modelado, control, predicción, clasificación y procesamiento de datos, el sistema de aproximación debe ser capaz de

[1125] De una forma computacionalmente eficaz y eficiente; esto es, que el problema en cuestión se pueda resolver, y en el menor de pasos posible.

adaptarse por completo en su estructura, de ajustar sus parámetros, o bien de utilizar una estructura robusta fija, que supere las no linealidades y / o las incertidumbres.

En el diseñado del "Sistema Fuzzy", disponemos de los siguientes pasos:

- identificar el problema;
- definir las variables de E/S (Entrada / Salida);
- definir el conjunto de reglas difusas;
- seleccionar el método de inferencia Fuzzy;
- experimentar y validar el sistema.

Un *Sistema de Inferencia Difuso*[1126] se compone de cuatro módulos.

- El Módulo de Fuzzificación:[1127] transforma las entradas del sistema, que son "crisp" (nítidas) y los números en conjuntos difusos. Esto se hace mediante la aplicación de una función de fuzzificación.

- La Base de Conocimiento:[1128] sistemas de reglas del tipo IF-THEN, o si-entonces, proporcionados volcando el conocimiento de expertos.

- El Motor de Inferencia:[1129] simula el proceso de razonamiento humano al hacer inferencia difusa en las entradas y las reglas IF-THEN.

- El Módulo de Defuzificación:[1130] transforma el conjunto difuso obtenido mediante el motor de inferencia en un valor crisp, o "nítido".

[1126] El FIS, por Fuzzy Inference System, como acrónimo.
[1127] O Fuzzification Module; FM, en siglas.
[1128] La Knowledge Base (KB, en acrónimo).
[1129] El Inference Engine, IE, o Motor de Inferencia.
[1130] El Defuzzificación Module (DM).

Los Métodos de Inferencia Fuzzy se pueden clasificar en dos tipos:

- *los métodos directos,*

  y

- *los métodos indirectos.*

Los métodos directos, como el debido a Mamdani y el de Takagi-Sugeno, son los más comúnmente utilizados.[1131] Los métodos indirectos pueden ser mucho más complejos.

En Medicina suele suceder que sus conceptos técnicos fundamentales sean difusos. Así que es por esa naturaleza por lo que requieren el uso impreciso de la Lógica Fuzzy. Proporciona unas adecuadas entidades médicas difusas, o fuzzy, y también proporciona un enfoque lingüístico mediante el uso de modificadores difusos.[1132]

También nos proporciona métodos de razonamiento para inferir razonamientos aproximados. Reglas típicas de la Medicina incluyen palabras como “fiebre alta”, “dolor intenso o severo”, “leves lesiones en la cabeza”, etc., que pueden ser muy difíciles de formalizar matemáticamente si no recurrimos a la Fuzzy Logic.

En Biomedicina, cuando intentamos diseñar sistemas expertos, encontramos sistemas basados en reglas de este tipo:

Si x es A, y es B, Z es C, ..., entonces w es S.

[1131] Estos dos métodos sólo difieren en la manera de obtener los resultados.
[1132] Los “linguistic hedges”, o “fuzzy modifiers”.

Así, por ejemplo, si el dolor de espalda es severo, y el paciente es de edad avanzada, después de aplicar este producto por un largo tiempo, etc. Aquí, x será "paciente", A es "grave", … Podemos describir dicha norma mediante el cálculo de sus nombres. Las reglas aparecen generalmente como sistemas de reglas, en la forma:

IF … (si la variable cumple determinada propiedad),

THEN … (entonces, llevar a cabo la acción, to do).

Los operadores más típicos de la lógica booleana seguirán siendo válidos en la lógica difusa, y ha de ser llevado a cabo a través de los cálculos del máximo (MAX), del mínimo (MIN), y del complementario (C).[1133]

La diferencia, muy esencial, entre ambos modelos reside en que para el de Sugeno cualquier función de pertenencia de salida puede ser constante o lineal. Así, el caso típico del Modelo de Sugeno (Fuzzy) puede ser de esta forma: Si la Entrada (o Input)$_1$ = x, junto con la Entrada (o Input)$_2$ = y, entonces la salida (u Output) es

$$z = ax + by + c$$

El nivel de salida, z_i, de cada estado se pondera mediante la fuerza con que se "dispara"[1134] la Regla, o lo que es lo mismo: el peso que tenga[1135] el w_i, para cada una de las Reglas que componen el sistema.

[1133] Utilizando para ello las t-normas, las t-conormas, y así sucesivamente.
[1134] O "ejecuta"; a cuál más bélico término.
[1135] El "firing strength".

Un buen ejemplo puede ser que cuando contamos con la $Entrada_1 = x$, junto con $Entrada_2 = y$, la fuerza del "disparo" sería:

$$\text{AndMethod } W_i = (F_1\ (x),\ F_2\ (y))$$

con las funciones de pertenencia F_i para la entrada *i.* Por lo tanto, la salida final[1136] del sistema será la media ponderada de todas las salidas obtenidas por las Reglas. Por lo tanto, y en general, una regla TSK tiene la siguiente forma:

si x es A e y es B, entonces z = f (x, y),

donde A y B son conjuntos borrosos en su antecedente, y $z = f(x, y)$ es un "crisp set", o conjunto clásico, siempre en función de su consecuente.

Lo más habitual es que la función f(x, y) consista en un polinomio en función de las variables de entrada, x e y, pero en general puede ser cualquier otra función que nos describa la salida del modelo, estando dentro de la región borrosa descrita por el antecedente de la regla difusa.

Una combinación lineal funcionando como un modelo difuso puede ser claramente comprensible. El modelo difuso propuesto por Takagi, Sugeno y Kang[1137] se describe por medio de esas fuzzy IF-THEN reglas locales que representan las relaciones de entrada-salida (I/O) de la no linealidad.

La característica principal de un modelo difuso TSK radica en expresar la dinámica local de cada implicación difusa, o regla, por un modelo de sistema lineal. El modelo difuso general se consigue a través de una "mezcla" de los modelos proporcionados por los distintos sistemas lineales ensayados.

[1136] El Final Output, FO, mediante las siglas estándar.
[1137] TSK, como es sabido, en siglas.

El Modelado Difuso es muchas veces utilizado para transformar el conocimiento de un experto en un modelo matemático. El énfasis está en la construcción de un sistema experto difuso que pueda llegar a reemplazar al experto humano en diversos cometidos, muchas veces estresantes o peligrosos.

Un modelo difuso intenta representar el sistema real. Por lo tanto, el modelo ha de ser fácilmente comprensible, y que cada parámetro tenga un significado fácilmente perceptible, para que lo puedan entender y aprovechar los humanos.

Como se sabe, un programa de ordenador se dice que *aprende de la experiencia* (E), con respecto de alguna clase de tareas[1138], y mide su "performance", es decir, cuantifica su ejecución (P, en acrónimo), si su rendimiento en esas tareas en T, medido por P, mejora con la experiencia, denotada por E.

El núcleo de aprendizaje de máquina, o automático[1139] será un "modelo de inducción", es decir, realiza un aprendizaje predictivo a partir de modelos de datos procedentes del "learning", o entrenamiento observado.

El objetivo principal del Machine Learning (ML) es crear sistemas informáticos que sean capaces de mejorar su rendimiento de forma automática sobre la base de la experiencia, y de adaptar su comportamiento a las cambiantes condiciones ambientales, de modo que intenta *"la creación de máquinas que puedan aprender".*

[1138] Las "tasks", denotadas por T.
[1139] El Machine Learning; ML, en siglas.

El “learning”, o entrenamiento del modelo[1140], resulta equivalente a la acción de resolver un problema de optimización. En el caso paramétrico, tenemos que solucionar un problema de identificación paramétrica. En el caso no paramétrico, tenemos que clasificar los datos de entrenamiento, y almacenarlos de forma óptima en la base de datos. El entrenamiento tal modelo puede ser un problema muy sutil, y por lo tanto, muchas veces se tratará de una tarea muy lenta.

El método de Ebrahim Mamdani resulta sin duda el más utilizado en las aplicaciones, debido a su estructura simple, de operaciones del tipo “min-max”. Se procede en este método a través de cuatro pasos:

- *evaluar el antecedente de cada regla;*
- *obtener la conclusión de cada regla;*
- *extraer las conclusiones globales; y*
- *proceder a un proceso final, el llamado de “defuzificación” (o de recuperar la naturaleza “no - fuzzy”).*

Si sólo tenemos en cuenta los factores que realmente importan en el problema, basta con escribir un conjunto de reglas que lo modelen.

Otra ventaja de utilizar el enfoque difuso es que si queremos añadir más variables al problema, lo único que tenemos que hacer es proceder a escribir nuevas reglas, o bien modificar las ya existentes, o un proceso mixto de ambos métodos. Esto significa conseguir una menor cantidad de esfuerzo que cuando

[1140] Ya sea éste paramétrico, o bien no paramétrico.

se procede a la reescritura de un algoritmo. Por lo tanto, la lógica difusa es adaptable, simple y de fácil aplicación.

El Método de Mamdani resulta útil cuando sólo existe un número muy pequeño de variables. De lo contrario, nos encontraremos con algunas dificultades, como pueden ser:

- el número de reglas aumenta exponencialmente con el número de variables en el antecedente;
- cuantas más son las normas que construimos, más difícil es saber si resultan adecuadas para nuestro problema, y
- si es demasiado grande el número de variables en el antecedente, resulta difícil entender la relación causal entre ambos[1141], por lo que la construcción de nuevas reglas puede volverse mucho más difícil.

El segundo método de inferencia difusa[1142] fue presentado por Takagi, Sugeno y Kang[1143] el año 1985. Resulta muy similar al método de Mamdani en muchos aspectos. De hecho, los dos primeros pasos son los mismos. La diferencia esencial entre ellos radica en que en el método de Sugeno las funciones de pertenencia de los "outputs" (salidas) son o bien constantes o bien funciones lineales.

Entre las *ventajas del modelo TSK,* podemos mencionar:

- *que funciona bien con técnicas lineales, ya que funciona bien con los métodos adaptativos y con las técnicas de optimización;*

[1141] Los antecedentes y los consecuentes.
[1142] La "Fuzzy Inference".
[1143] El método TSK, sería en acrónimo, tal como hemos dicho.

- *que es computacionalmente eficiente, puesto que se adapta bien a las principales ramas aplicables del Análisis Matemático;*
- *que es muy intuitivo;*
- *se adapta muy bien a los Inputs humanos, lo que ha garantizado la continuidad de la superficie de los Outputs, y*
- *que tiene hoy día una aceptación muy generalizada.*

También podríamos considerar el Modelo Difuso de Tsukamoto, donde el consecuente de cada regla fuzzy del tipo IF-THEN está representada por un conjunto difuso cuya función de pertenencia es de tipo monotóna.

A continuación se muestra una breve lista de algunas de las posibles tareas futuras en el estudio de la Lógica Matemática Difusa, y de sus aplicaciones[1144]:

(a) Desarrollar y mejorar los modelos matemáticos del fenómeno de la vaguedad con el objetivo de captar las formas en que ésta se manifiesta en diversas situaciones.

(b) Ampliar el repertorio de expresiones lingüísticas de evaluación para las que pueda ser elaborado un modelo matemático razonable de trabajo.

(c) Ampliar la teoría de los cuantificadores generalizados, utilizando el formalismo de la Lógica Borrosa en sentido estricto[1145]. Presentar modelos de una clase más amplia de cuantificadores lingüísticos específicos naturales.

(d) Hallar una clase razonable de "modelos previstos"[1146], para la teoría de los cuantificadores intermedios, así como también para los generalizados.

[1144] Según el resumen de la clasificación que realizara Vilém Nóvak, con el cual estamos de acuerdo, y que es bien conocido.
[1145] Fuzzy Logic in narrow sense, FLn.

(e) Estudiar las diversas formas de razonamiento de sentido común propias de los seres humanos, así como proseguir en la búsqueda de una formalización razonable de los mismos. Como objetivo secundario, ampliar la lista de los cuantificadores intermedios y la lista de los silogismos generalizados.

(f) Elaborar una formalización razonable de la Lógica Borrosa en sentido amplio[1147] sobre la base de que los citados componentes de la metodología los "precisiated natural languages"[1148]. Además, ampliar los resultados obtenidos en la teoría que dentro de la Inteligencia Artificial trata de los "razonamientos de sentido común".

(g) Extender la técnica mediante la unión de ciertos fundamentos de la lógica difusa con la teoría de probabilidades, para poder incluir también dentro de la FLb distintos aspectos de la incertidumbre, y así, llegar a desarrollar una teoría concisa del fenómeno de la indeterminación.

(h) Estudiar la forma en que otros sistemas formales de FLn se podrían utilizar para la solución de los problemas planteados en FLb, y desarrollarlos lo más posible, como consecuencia de ello.

(i) Desarrollar otros aspectos de la matemática borrosa. Trataríamos de encontrar problemas específicos de las Fuzzy Mathematics[1149], que son ya o bien insolubles o sin sentido en las "matemáticas clásicas".

[1146] O "intended models".
[1147] Fuzzy Logic in broad sense, FLb.
[1148] PNL, en acrónimo.
[1149] O "matemáticas difusas".

En general, *Vilém Novák* propone orientar el interés hacia la Matemática de la Lógica Difusa, a partir de su estructura externa[1150], hacia la estructura interna de algunos sistemas razonablemente elegidos.

Uno de los problemas que aparecen es el de la gran complejidad de los medios formales necesarios, cuando esto se trata de aplicar. Se plantea la cuestión de si es o no es posible simplificar la formalización, sin reducir con ello o perder la potencia expresiva.

Por lo tanto, se enfrentan a una amplia variedad de problemas interesantes, tanto dentro de la lógica matemática borrosa como de sus aplicaciones, y que son interesantes para irlos resolviendo de cara al futuro. Por lo que debemos fijarnos en nuestras futuras investigaciones no sólo en las características de cada una de estas lógicas no clásicas, en sus interrelaciones o en las posibles aplicaciones a los distintos campos de conocimiento, sino también y sobre todo vencer las líneas de resistencia observadas para su aplicación y uso, en el

[1150] Esto es, de la “Metamatemática de la Lógica Fuzzy”.
Recordemos lo que el propio V. Novák decía en las pp. 27 y 28 de su libro de 1989 sobre *Lógica Difusa y sus Aplicaciones:*
“Applying mathematics in practice, one meets the following discrepancy: on the one hand, a mathematical description is very precise, but, on the other hand, the excesive complexity of reality forces us to simplify the model as much as posible, and hence, the mathematical description does not quite work. For a long time, philosophers have been conscious of the fact that any introduction of exactness is artificial and forced. The main idea of this theory [FST] is very simple and singular: as we are not able to determine the exact boundaries of the class defined by a vague notion, let us replace the decision if an element belongs to it, or not, by a measure from some scale. Every element will be evaluated by a measure expressing its place and role in the class. If the scale is ordered, then a smaller measure will express that the given element is somewhat closer to the edge of the class. This measure will be called the grade of membership in the given class, and the class in which each element is characterized by its membership grade will be called the *fuzzy set.* The grade of membership can also be viewed as a degree of our certainty, or belief, that the element belongs to the given fuzzy set.”

mundo académico, más que en el industrial[1151], para comprender mejor cómo seguir con su desarrollo y contribuir con ello al progreso.

Nos referimos de nuevo a las controversias y polémicas que han surgido desde su aparición, como un ejemplo notable de las acerbas diatribas que a menudo acompañan a la aparición y difícil aceptación de las teorías difíciles o novedosas, que no encajan bien con las ya aceptadas. Porque aun así, en este caso particular, han mostrado una furia feroz, especialmente en los países occidentales, en vez de ser bien aceptado, de modo natural, como en los países asiáticos, especialmente en el Japón.

¿Proviene esto de la típica ceguera mental, en algunos casos de inercia mental ante lo que significa un cambio, o bien ha sido un problema de choque con la tradición cultural, que nos ha sido imbuida ya desde pequeños, puesto que aún se mantiene una sólida tradición aristotélica en nuestros sistemas escolares, o es una combinación de todo ello, entremezclado con la eterna lucha contra los intereses creados?

El *Modelado Fuzzy* (o Fuzzy Modeling) puede ser utilizado para transformar el conocimiento de un experto en un modelo matemático.

En muchos campos de la ciencia existe una necesidad vital de construir un modelo matemático adecuado, y ése es un proceso que normalmente requiere de una comprensión matemática muy flexible y versátil. El modelo nuevo debe resultar un enfoque mucho más directo y natural para conseguir introducir la transformación de la descripción lingüística en una modelización.

[1151] Ya que ellos han visto desde hace tiempo su enorme proyección.

Los procedimientos matemáticos utilizados se han ensayado y probado muchas veces. Por lo tanto, hay muchas maneras diferentes de implementar reglas difusas, y mediante éstas, mejorar las herramientas de razonamiento difuso.

Hemos intentado exponer aquí una breve visión general de los problemas de modelización y optimización, mediante la búsqueda en las raíces históricas de estos temas, ya que nuestro análisis de la evolución de las ideas anteriores a la lógica difusa tiene como objetivo convertirla en una herramienta útil para saber cómo va a ser su desarrollo y sus aplicaciones en el futuro. También hemos estudiado la situación actual de la modelización y optimización desde el punto de vista de las herramientas que se ocupan del tratamiento de la vaguedad y de la incertidumbre.

Pero las aplicaciones de las Lógicas Multi-Valuadas, o más concretamente, de la Lógica Borrosa, no se restringen tan sólo a su uso en tecnologías, el control automático o la industria en general. Porque también tiene gran utilidad en campos vistos tan abstractos como el de las Matemáticas o el de la Lógica. En dichos contextos "teóricos", las aplicaciones que van surgiendo pueden mostrar ciertas características fundamentales, como son:

1.ª) El uso, que pudiéramos denominar "puramente abstracto", de la MVL como una herramienta básica para demostraciones sobre la `non-provability´ (imposibilidad de probar un determinado resultado), o sobre la independencia entre diversos axiomas, o de la consistencia en la Metalógica de las axiomatizaciones de la Lógica Proposicional, entre otras.

2.ª) La aplicación, llevada a cabo por Stephen C. Kleene en su día, de su lógica trivaluada, la K_3, para el estudio acerca de la decibilidad (decidability) de predicados numéricos, dentro de la teoría matemática de las funciones recursivas parciales (a las cuales, por cierto, hemos dedicado algunas de nuestras investigaciones).

3.ª) Lo que ya presagiaba Lukasiewicz en algunos de sus primeros artículos: la aplicabilidad provechosa de las MVLs al estudio de las Lógicas Modales.

Y yendo aún más allá, encontraremos nuevas posibilidades. Una de las más fructíferas ha sido, y promete seguirlo serlo para el futuro, la aplicación de las MVLs para todo lo que atañe a las llamadas *Paradojas Semánticas.*

Veamos unos ejemplos, pero con la notación de Nicholas Rescher[1152], que designa los valores de verdad con dos barras verticales; así, |L| sería el valor veritativo de L.

Sea la clásica Paradoja del Mentiroso (o "Liar Paradox"), que es generada en lógica bivalente por la afirmación:

(L_2) Esta proposición es falsa

Porque si clasificamos a (L_2) como verdadera, entonces (L_2) es falsa, y si la clasificamos como falsa, es verdadera. Así que en una lógica bivaluada, donde toda proposición se debe clasificar como verdadera o falsa, no hay más remedio que rechazar (L_2) como un sinsentido (meaningless), insistiendo para

[1152] Por cierto, ya que le mencionamos, Nicholas Rescher, en su obra *Many-valued logic,* pp. 1-16, distingue hasta cuatro etapas en el desarrollo de la MVL. Serían éstas las de: "(I) prehistory (Aristotle, Duns Scotus, William of Ockham); (II) early history, 1875-1916 (Charles S. Peirce, Hugh Mac Coll, Nicolai Vasiliev, Jan Lukasiewicz); (III) the pioneering era, 1916-1932 (Jan Lukasiewicz, Emil L. Post); and (IV) the recent period (after 1932)".

ello en el hecho de que esta fórmula no representa en absoluto ninguna proposición, puesto que carece de valor veritativo.

Sin embargo, basta con pasar a una lógica trivaluada, basada en los valores de verdad V, F e I, para que la proposición aanterior aparezca como llena de sentido (“meaningful”). Tan sólo que le corresondería el tercer valor de verdad, ese I (por indeterminado o indefinido, neutro).

No obstante, ese tipo de paradojas puede reaparecer en MVL. Por ejemplo, en la lógica trivaluada tenemos este caso:

(L_3) Esta proposición es F y no es I

Ahora bien;

1) Si $|(L_3)| = V$, entonces (L_3) debe ser falsa y por tanto, $|(L_3)| \neq V$.
2) Si $|L_3)| = F$, entonces (L_3) debe ser verdadera y por tanto, $|(L_3)| = F$.
3) Si $|(L_3)| = I$, entonces (L_3) debe ser falsa y por tanto, $|(L_3)| \neq I$.

Por lo que ahora habríamos de resolver esta nueva versión de la “Liar Paradox” en la lógica tetravaluada (4-valued), con base en los valores veritativos: V, F, I_1, I_2. Solo que aquí, en vez de estar en dificultades con (L_3) en la formulación:

$$(L_3) \qquad |(L_3)| = F \text{ y } |(L_3)| \neq I$$

Por lo que hemos venido a desembocar en este planteamiento análogo:

$$(L_4) \qquad |(L_4)| = F, \text{ con } |(L_4)| \neq I_1 \text{ y } |(L_4)| \neq I_2$$

Y claramente, el modo de no volver a caer en la prcedentes dificultades que han venido saliéndonos al paso, sería el utilizar la potente maquinaria de la lógica infinito-valuada; por ejemplo, la de Lukasiewicz:

$$\mathfrak{L}_{\infty}$$

Son muchos los autores que han intentado utilizar las herramientas de las MVLs para evitar o resolver las paradojas de la teoría matemática de conjuntos. Entre ellos, cabe mencionar al lógico ruso D. A. Bochvar como al chino Moh Shaw-Kwei, al polaco-nortemericano Alfred Tarski[1153], o al escandinavo Thoralf Skolem, al americano Nicholas Rescher, a R. M. Sainsbury, a C. C. Chang, etc.

El ejemplo más paradigmático, en este caso de planteamientos, sería la *Paradoja de Russell,* por tantos mencionada ya, la del conjunto de los

---

[1153] La solución a las Paradojas Semánticas, del tipo "ésta sentencia es falsa", serían abordadas y resueltas por Alfred Tarski, con su famosa "Teoría de la Verdad". Vino a establecer la famosa "Jerarquía de Tarski", según la cual, como el concepto usual de verdad resulta incoherente, éste debería ser rechazado, y en su lugar debemos establecer toda una serie de "conceptos de verdad", que vengan ordenados de un modo jerárquico. Cada uno de ellos estaría expresado en un lenguaje distino, y éste iría evolucionando de modo natural. Dicha "teoría semántica de la verdad" estaría basada en su artículo, atn largo como famoso, que había pasado casi inadvertido cuando apareciera en polaco, el año 1934, pues cuando realmente alcanzó amplia difusión fue al aparecer en lengua alemana, dos años más tarde. También se incluyó una traducción del mismo en una colección de papers de Tarski preparada por Woodger, en 1955.
Tarski empieza en dicho trabajo mostrando que cualquier intento de establecer una definición general de "verdad", que sea válida para todo lenguaje natural, se estrella con la `Liar Paradox´, o `paradoja del mentiroso´. Porque esas definiciones siempre admiten un punto vulnerable: la posibilidad de construír sentencias que dicen de sí mismas que no son verdaderas, con la consecuencia automática de que no son verdaderas, si lo son, o que son verdaderas, si no lo son. De aquí que Tarski proponga, para disolver esa paradoja u otras similares, que distingamos claramente entre un lenguaje, digamos el L, al que llamaremos `lenguaje-objeto´, y un `metalenguaje´, en el cual se realizan las afirmaciones sobre L. La clave está en considerar los términos "verdadero" y "falso" tan sólo como meros predicados del metalenguaje.
Alfred Tarski entiende por `lenguaje formalizado´ aquel que está plenamente caracterizado por sus reglas de formación y de transformación. Para proceder a continuación a definir la "verdad" en un lenguaje de este tipo. Sería, pues, el lenguaje del cálculo de clases.

conjuntos que no se contienen a sí mismos. ¿Es un miembro de sí mismo, o por el contrario, no lo es?

Veamos un sencillo bosquejo; el conjunto en cuestión sería el:

$$\tau = \{x: x \notin x\}$$

Supongamos ahora que "$\tau \in \tau$" es verdad; entonces, $\tau \in \tau$. Luego:

$$\tau \in \{x: x \notin x\}$$

Y por ser un miembro de este conjunto, $\tau \notin \tau$.

Por otra parte, si suponemos que "$\tau \in \tau$" es falso, entonces $\tau \notin \tau$. Luego:

$$\tau = \{x: x \notin x\}$$

Y así, puesto que esa es la definición de τ, tenemos que $\tau \in \tau$. De aquí la contradicción, real en lógica bivaluada, pero que es sólo aparente, si pasamos a la lógica trivaluada. Tal paradoja se puede evitar clasificando "$\tau \in \tau$" como ni verdadera ni falsa, sino indeterminada o neutra (esto es, como I). De modo que si asumimos la postura de la existencia de una lógica subyacente que no sea bivaluada, resulta posible saltar por encima de paradojas de éste tipo, con lo cual de paso evitaríamos imponer tediosas restricciones en la construcción de las teorías de conjuntos. Pues cuando etas se desarrollan con base en una lógica trivaluada, podemos contemplar tres posibles situaciones, mutuamente excluyentes, con respecto de la relación entre un elemento, *x,* y un conjunto cualesquiera, *C:*

$$x \in C, \text{ ó } |x \in C| = V$$

$$x \notin C, \text{ ó } |x \in C| = F, \text{ esto es, } x \notin C = \neg (x \in C)$$

$$x \propto C, \text{ ó } |x \in C| = I$$

esto es,

$$x \propto C = I$$

con I definida como antes.

Es incluso posible admitir la posibilidad de que un conjunto presente una zona de *penumbra difusa* (o “Fuzzy Penumbra”), de modo que todos los elementos que estén en dicha zona se pueda considerar que ni están dentro ni están fuera del mencionado conjunto.

El \`estado de verdad´ (o \`truth status´) de las proposiciones quedaría del siguiente modo:

Situación	$\|x \in C\|$	$\|x \notin C\|$	$\|x \propto C\|$
$x \in C$	V	F	F
$x \notin C$	F	F	V
$x \propto C$	I	V	I

Podemos postular las siguientes tablas de verdad, para nuestra lógica trivaluada:

p	$\neg$ p
V	F

I	I
F	V

Junto con ésta para la Indeterminación:

p	I p
V	F
I	V
F	F

Y para la conectiva $\wedge$, la conjunción:

p | q	p $\wedge$ q
V	V I F
I	I I F
F	F F F

Se puede a continuación formular la siguiente *Regla Fundamental,* que da el mecanismo que debe seguir la formación de los conjuntos:

$$|y \in \{x: \ldots x \ldots\}| = g \text{ si y sólo si } |\ldots y \ldots| = g$$

Con ello podemos esquivar la paradojicidad proveniente del conjunto:

$$\tau = \{x: x \notin x\}$$

Bastaría para ello con clasificar la afirmación: $\tau \notin \tau$, como ni verdadera ni falsa, sino indeterminada en cuanto a valor veritativo, esto es, lo que en inglés se diría “I-assuming”.

Aunque la `paradojicidad´ reaparecería cuando considerásemos el conjunto:

$$\Gamma = \{x: x \notin x \wedge \neg (x \propto x)\}$$

Con lo que hemos llegado a la conclusión de que también aparece en lógica trivaluada un análogo de la paradoja russelliana. De hecho, tales análogos pueden ser recreados en cualquier lógica finitamente multivaluada del grupo lukasiewicziano. Así que como en la Paradoja del Mentiroso, podemos recurrir a una lógica infinito-valuadad para evitar esa dificultad.

Otra interesante aplicación filosófica de las MVLs, dentro de la esfera puramente lógica, es la que atañe a los “nondesignating singular terms” (o términos singulares que no designan), como puede ser el nombre `Pegaso´, o el de `unicornio´, o descripciones definidas, como `el actual rey de Francia´ (que no lo hay), o afirmaciones acerca de individuos que no existen, como puede ser `el actual rey de Francia es sabio´, o `el caballo Pegaso es veloz´. Todos ellos se podrían contemplar como saltos (`gaps´) en los valores veritativos, desde el punto de vista clásico, bivaluado. Pero la lógica de tales afirmaciones puede encajar dentro de un sistema lógico trivaluado, que resuelva la cuestión de su `estatus de verdad´, clasificándolos como indeterminados (indefinidos o neutros, esto es, con v. v. = I).

Las Máquinas de Turing, las Funciones Recursivas y la "vagueness", es decir, pasamos ahora al tratamiento de las llamadas Fuzzy Turing Machines (FTMs, en acrónimo).

Lo primero ha de ser, lógicamente, explicar un poco lo que es una Máquina de Turing[1154], en el sentido que esta fuera definida por Alan Mathison Turing, y luego, trataremos de llegar a conseguir su versión "fuzzy".

Una *MT* es, ante todo, un ingenio matemático que simula manipular símbolos sobre la banda de una cinta de ordenador, apcando para ello una tabla que indique las Reglas a seguir. Por lo cual es factible adaptarla para llegar a simular la lógica de cualquier algoritmo de computación. Gracias a ella, es posible explicar muchos de los procesos analizados por la Teoría de la

[1154] MT, bajo acrónimo. Es el modelo de computabilidad presentado por Alan Mathison Turing (1912-1954) cuando estudiaba en Princeton, el año 1936. Desde entonces, se ha hecho muy popular la idea, estudiándose dentro de la disciplina llamada Teoría de la Computabilidad o Teoría de Autómatas, sucesora de la Cibernética creada por Norbert Wiener. La MT es una especie de patrón para las operaciones llevadas a cabo por los computadores digitales o de estado discreto. En realidad, no se trata de una "máquina", sino más bien de un modelo para la construcción de computadoras. Su idea fue plasmada en el artículo:
TURING, A. M., "On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem" *Proc. de la London Mathematical Society,* 1937(42); pp. 230-265, en 1937. D
esde entonces, se ha convertido en un `clásico´.
La MT consistiría en un cierto número de instrucciones, proporcionadas para funcionar secuencialmente. Los pasos a dar seguirían, pues, la secuencia marcada por las instrucciones, y el programa sería el conjunto formado por dichos pasos. Así, pues, la MT estaría programada para realizar una tarea específica, y esta sería culminada una vez realizados todos los pasos en la secuencia indicada. Para visualizarlo, se suele hablar de una cinta infinitamente larga (pensemos en una de papel continuo), con recuadros que o bien llevan marcas –siempre la misma- o bien están en blanco; todos ellos del mismo tamaño. Se puede equiparar a una sucesión de unos y de ceros. Dada esta sucesión, lo que contiene el programa es una serie de instrucciones secuenciadas de las operaciones a realizar, como hacer una marca, o borrarla, desplazarse hacia la izquierda, o hacia la derecha, etc.
Es interesante la interpretación, en el sentido de llagar a encontrar un cierto isomorfismo, que observa Hilary Putnam entre los diversos estados de la mente y los estados (y pasos a dar entre ellos) de una Máquina de Turing Universal, ó TMU, en acrónimo.
Véase:
PUTNAM, H., *Minds and Machines.*

Computación; por ejemplo, la funciones que tiene la Unidad Central de Proceso[1155], dentro de los ordenadores modernos.

El primero en describirla fue el matemático inglés Alan Mathison Turing. Lo hizo en 1936. Él la llamaba *"a-machine"*[1156].

Escribía Turing, en el famoso artículo que lleva por nombre "On computable numbers, with an application to the *Entscheidungsproblem"*[1157], que este ingenio consistía en:

> ...an unlimited memory capacity obtained in the form of an infinite tape marked out into squares, on each of which a symbol could be printed. At any moment there is one symbol in the machine; it is called the scanned symbol. The machine can alter the scanned symbol and its behavior is in part determined by that symbol, but the symbols on the tape elsewhere do not affect the behaviour of the machine. However, the tape can be moved back and forth through the machine, this being one of the elementary operations of the machine. Any symbol on the tape may therefore eventually have an innings.

No lo planteaba inicialmente como un mecanismo, sino como una persona que efectuaba las operaciones. De ahí que le llamara "computer"[1158], de donde por cierto le viene el nombre a los ordenadores. Ese problema de endemoniado nombre[1159] fue el tercero de los propuestos por David Hilbert como pendientes para la investigación matemática del futuro. Algunos dicen que fue el décimo de los planteados en esa especie de desafío que lanzó el matemático de Götingen

[1155] La CPU, en siglas.
[1156] Por "automatic machine".
[1157] O "problema de decisión".
[1158] Por "computator", o calculador, calculista, etc.
[1159] El "Entscheidungsproblem", o Problema de la Decisión.

en el Congreso Internacional de Matemáticos de París de 1900, pero el que llevaba ese número era en realidad el de si puede asegurarse la existencia de un algoritmo que nos permita decidir si una ecuación diofántica tiene solución. Hemos de apuntar que probado por Matiyasevich que la respuesta a esa pregunta es negativa.

Sabemos[1160] que una afirmación es universalmente válida si y sólo si (syss) se puede deducir a partir de los axiomas. Así que el *“Entscheidungsproblem”* equivale a preguntarnos por la existencia de un algoritmo que nos permita decidir si una determinada afirmación es demostrable a partir de los axiomas establecidos, siguiendo para ello las Reglas de la Lógica.

En los años 1936 y 1937, tanto Alonzo Church como Alan M. Turing se dedicaron a intentar demostrar la imposibilidad de hallar una solución general para ese problema. Finalmente, lo probaron ambos, pero de modo independiente. Ese resultado se llama actualmente la *Tesis de Church-Turing.*

De una MT capaz de simular cualquier otra MT se dice que es una *UTM*[1161]. Pero volviendo al *“Entscheidungsproblem”,* hemos de remontar sus orígenes al propio G. W. Leibniz, quien, por cierto, era también un apasionado e imaginativo creador de ingenios calculadores mecánicos. Pensaba mediante ellos conseguir la correcta y rápida manipulación de los símbolos lógicos, de modo que se pudiera determinar de modo automático los valores de verdad de las proposiciones matemáticas, o de cualquier tipo, siempre que estuvieran bien planteadas. Ya había dicho Leibniz que lo primero sería la construcción de

---

[1160] Por el teorema de Completitud de la Lógica de Primer Orden, o FOL, por First Order Logic.
[1161] O Universal Turing Machine.

un lenguaje formal claro, y tanto trabajó y soñó con ello[1162] que seguramente, después de Aristóteles, en el pasado pocos pudieran disputarle el título de "padre de la Lógica y de los ordenadores". Aunque Kant dijera en su día aquello tan injusto de que después del Estagirita no había habido nada nuevo en Lógica. Concretamente, lo que escribió en su Crítica de la Razón Pura fue:

> Que la Lógica ha tomado este camino seguro desde los tiempos más antiguos es algo que puede inferirse del hecho de que no ha necesitado de un paso atrás desde Aristóteles… Lo curioso de la Lógica es que tampoco haya sido capaz, hasta hoy, de avanzar un solo paso. Según todas las apariencias, se halla, por lo tanto, definitivamente concluída.[1163]

Dentro de las teorías que tratan de abordar y resolver, cuantificándolo, el problema de la "vagueness", tenemos distintas candidatas con posibilidades: *las MVLs*[1164]*; la FST*[1165]*; la RFT*[1166]*;* la de los *Conjuntos Neutrosóficos*[1167]*,* etc. Pero junto con estos, sabemos que hay otros modos de abordar la cuestión constructiva y de fundamentación conjuntista, entre los cuales podemos mencionar:

- El "*Supervaluationism", o Supervaluacionismo.*
- El *Contextualismo.*
- Los *Fuzzy (Sub) Sets.*

[1162] Puede ser interesante observar que Leibniz se manifestaba ya en la línea que luego habrían de seguir un Brentano, un Twardowski, o todos sus herederos de la ELV (la de claridad, precisión, etc.), cuando decía que hay que esforzarse más en exponer que en refutar. BRENTANO, F., *El origen…;* p. 4.

[1163] KANT, I., *Crítica de la Razón Pura,* B VIII. Esta afirmación es una muestra, en primer lugar, de lo que puede hacer el prejuicio cuando está firmemente establecido, y en segundo lugar, que hasta las grandes mentes pueden llegar a \`pifiarla´ (o \`errar´, que parece más fino).

[1164] Nuestras Lógicas Multivaluadas.

[1165] La Teoría Borrosa de Conjuntos.

[1166] O Teoría de los Conjuntos Rugosos, o "Rough Fuzzy Theory", o de los "Fuzzy Sets".

[1167] O "neutrosophic sets".

- Los *P-sistemas,* etc.

El *“Supervaluationism”* sería un tipo especial dentro de la teoría clásica de la indeterminación. De acuerdo con él, a cada predicado, P, le podemos asociar dos conjuntos que no se solapen entre sí, disjuntos, esto es, cuya intersección sea vacía.

Estos serían:

- La *“determinate extension”*[1168]. Se le denota como E^+ (P).
- La *“indeterminate extensión”*[1169]. Se le denota por E^- (P).

Los *“candidatos a extensión”* de P serían los conjuntos que extienden o amplían el E^+ (P), pero manteniéndose su disjunción con el E^- (P).

La *Verdad*[1170] se definiría entonces con respecto de cada elección de tales “candidatos a extensión”.

Se dirá que una sentencia es una *super-verdad*[1171], si es cierta con respecto de cualquier elección de tales “candidatos a extensión”, para cada uno de sus posibles predicados.

En cuanto al llamado *Contextualismo,* se basa en que la aplicación correcta de un predicado difuso o vago depende[1172] del contexto. Un ejemplo podría ser que un hombre de 1´78 metros puede que sea, y de hecho lo es a la vez, alto en su pueblo y bajo en un equipo de baloncesto. Así se genera el

[1168] O “extensión determinada”.
[1169] O “extensión indeterminada”.
[1170] O Truth.
[1171] O “super-truth”.
[1172] O “varía con”.

llamado *Contextualismo Epistemológico,* según el cual lo que uno conoce es de algún modo relativo al contexto.

Comentemos ahora algo más sobre los *Fuzzy Algorithms* y también sobre la *TM,* o Turing Machine.

Lofti A. Zadeh introdujo, en 1978, de modo informal[1173] dos nociones importantes: los *Algoritmos Difusos*[1174], y la Máquina de Turing en su versión "fuzzy", o *Fuzzy Turing Machine.* FTM, en acrónimo.

Un algoritmo "fuzzy" utiliza comandos difusos, que utilizan para su expresión o enunciación los conjuntos borrosos. Así, podemos señalar este *Ejemplo:*

"Make *y* approximately equal to 10, if *x* is approximately equal to 5".

Lofti A. Zadeh argumenta que en las actividades de cada día utilizamos, aun sin saberlo muchas veces, algoritmos difusos.

Una *FTM* es, por tanto, una Máquina de Turing que lleva asociado un cierto grado de factibilidad (o "feasibility").

S.-K. Chang utlizó una máquina de estados finitos y una máquina difusa para definir la ejecución de algoritmos borrosos. K. Tanaka y M. Mizumoto definieron una extensión de la máquina fuzzy, basada en la de S.-K. Chang, pero generalizándola.

[1173] Que luego se iría "afinando" con el tiempo, en sucesivos artículos.
[1174] Los Fuzzy Algorithms; FA, en acrónimo.

E. S. Santos reformuló los programas difusos de D. Scott, y definió W-máquinas que son capaces de resolverlos. En este sentido, los planteamientos de Chang y de Tanaka-Mizumoto son casos especiales de la formulación de Santos.

Los *P-sistemas* son modelos de computación que imitan el funcionamiento de las células. Fueron propuestos por el investigador rumano Gheorghe Paun, basándose en la idea de *"membrana".* Se llama *compartimento* (o "compartment") a un espacio que está rodeado por una de esas membranas porosas. Un conjunto de membranas porosas anidadas (o "nested") forman un *P-sistema.* Los datos fluyen desde un compartimiento a otro de acuerdo con ciertas reglas de procesamiento de "multisets". El proceso de computación se detiene cuando se acaban las Reglas que se pueden activar y ejecutar. El resultado de dicha computación sería igual a la cardinalidad de un compartimento especial, llamado el "output compartment", o compartimento de salida. El procesamiento tiene lugar por medio de pasos discretos, pero la Reglas son siempre aplicadas en paralelo.

Se dice que un *P-sistema* es *"fuzzy"* cuando utiliza "multisets" difusos, o bien reescribe Reglas Fuzzy, o bien hace ambas cosas. Al reescribir las Reglas fuzzy, esto le asocia un cierto grado de factibilidad[1175].

Los P-sistemas que procesan "fuzzy multisets" pueden calcular números reales, y por tanto, resultan más expresivos que las Máquinas de Turing.

Alan Turing propuso las siguientes caracterizaciones:

[1175] Los "feasibility degrees".

Una *función* es *computable* si y sólo si existe una MT capaz de computarla, o sea, que nos permite llegar a efectuar su cálculo.

Se dice que un conjunto, o una relación, es *decidible* si y sólo si existe una MT que lo decide, es decir, que es capaz de calcular su función característica.

Se dirá también de un conjunto que es *recusivamente enumerable* si y sólo si existe una MT que lo genera sucesivamente, es decir, si es el rango[1176] de una función computable en el sentido de Turing.

Así que resumiendo, una MT es una especie de programa, o de "computadora ideal", sin problemas de memoria ni tampoco le afectan los que pudieran ser debidos a limitaciones temporales. Téngase en cuenta que al tratarse de una abstracción matemática, el tiempo que maneja no es el real, sino el ideal del mundo matemático, que aunque sea finito, puede que exceda la edad del propio Universo. Lo de que "genera sucesivamente" significa que trabaja de modo secuencial, esto es, paso a paso.

La MT pasa por distintos estados, y en cada momento leerá un trozo de la cinta, donde figuran los datos de partida, los cálculos intermedios y el resultado final. Así que cada paso que da va a depender exclusivamente del estado actual y de la información que reciba de la cinta. Esto hace que sea el autómata determinista por excelencia.

[1176] O recorrido, la "imagen de la función", en términos matemáticos.

Conclusiones

Tras todo este largo periplo, que nos ha llevado desde la antigua Atenas, o aún más lejos, desde la antigua India o la China, hasta el Imperio Austro-Húngaro, a la Escuela de Lvóv-Varsovia y a sus epígonos, para terminar de nuevo en Oriente, pasando por Europa y los Estados Unidos, esperamos poder seguir contribuyendo a que se conozcan mejor y se aprecien en lo mucho que valen las Lógicas Multivaluadas, y muy en particular, a la Lógica Borrosa.

Nuestras contribuciones originales[1177], se centran en diversos campos de avance de la investigación actual; entre ellos:

- La *Teoría de la Medida Borrosa,* con teoremas y corolarios propios, como los que proponen nuevas medidas de Simetría, de Antisimetría o de Entropía. De todos ellos fueron publicadas sus correspondientes demostraciones. Esta nueva rama del Análisis Matemático generaliza y mejora la ya hoy conocida como clásica, que fue planteada por Emil Borel y Henri Lebesgue, entre otros.
- Los nuevos resultados sobre los *Grafos Esenciales,* que quedarían dentro de lo que se conoce como Teoría de Grafos, y dentro a su vez de la Matemática Discreta, que es de considerable interés no sólo desde un

[1177] Como ya queda dicho en el capítulo correspondiente, dedicado al análisis de los resultados obtenidos en las diversas publicaciones del doctorando.

punto de vista teórico, sino por sus innumerables aplicaciones en todas las Ciencias, y en particular, en la Inteligencia Artificial. En ella hemos contribuido también con algunos resultados sobre los llamados “Fuzzy Graphs”, o Grafos Borrosos, que resuelven mejor determinados problemas, cuando se nos manifiesta la presencia de incertidumbre y vaguedad en los datos.

- Aclarar y completar la *Clasificación de las Complejidades Computacionales,* que sirven para conocer en Teoría de la Computabilidad si un problema es o no es resoluble, y en caso afirmativo, con qué grado de complejidad podría ser computado, para ver si disponemos de recursos temporales o de espacio para resolverlo.
- La *aplicación de la Recursividad Primitiva y del concepto de la μ-Recursividad,* para conseguir[1178] establecer una cadena de inclusiones que permitan conocer más en profundidad en qué subclase se encuentra cada una de las funciones recursivas consideradas.
- El *estudio comparativo de* dos de las principales teorías de conjuntos actuales, como son la de los *Fuzzy Sets y* la de los *Rough Sets*, que incluso se muestra que pueden ser combinadas, dando lugar a las teorías Rough-Fuzzy o Fuzzy-Rough. Todo ello, como las cuestiones anteriores, tiene un profundo trasfondo filosófico, como ya lo tuvo la teoría Clásica de Conjuntos, también llamada “teoría cantoriana”. Asimismo, se analizan las restantes teorías alternativas, tanto las conjuntistas como las centradas en la Lógica.

[1178] Por medio de la llamada Función de Ackermann-Peter, llamada así en honor de Wilhelm Ackermann (el ayudante de David Hilbert, el famoso matemático de Gotinga), y de la investigadora húngara Rósza Péter, quienes en principio la estudiaron.

- La *aplicación* de todos estos avances en la Lógica Borrosa *a la Educación y a las Ciencias Humanísticas,* que está en progreso y es del máximo interés, por la naturaleza de la información que se maneja en estos campos.
- El *estudio de la línea filosófica* que iniciada en la Antigua Grecia, con Aristóteles y Diodorus Cronus, y a través de la Escolástica medieval y de autores posteriores, como sería el caso de los jesuitas Luis de Molina y Francisco Suárez, hasta llegar a Bernard Bolzano y a su discípulo, Franz Brentano, con Kazimierz Twardowski, de los cuales procede la fundamental Escuela de Lógicos de Lvóv-Varsovia, con las figuras señeras de Jan Lukasiewicz y de Alfred Tarski. Analizando problemas como el de los futuros contingentes o el conectado con él, el de la presciencia divina y el libre albedrío humano, llevaron adelante la mencionada escuela de filósofos polacos. Y en tiempos más próximos, alcanzar la recuperación[1179] de estas ideas tan filosóficas como matemáticas, con los artículos de Lofti A. Zadeh, que tanta polémica desataron. Sin olvidar, desde luego, el inmenso mérito de quienes después han ido completando esta teoría con una fundamentación rigurosa.
- No debemos olvidar tampoco otro tema, muy presente en todas nuestras investigaciones, y tan filosófico, por cierto, tratado ya desde el mismo Aristóteles con sus cuatro tipos de causas, y que por cierto, también fue muy bien tratado por el personaje principal de nuestro trabajo, Jan Lukasiewicz. Es precisamente el *problema de la Causalidad.* En este

[1179] Con su puesta en circulación de nuevo.

hemos trabajado, conjuntamente con el[1180] de los Contrafactuales, a partir de los trabajos de David K. Lewis, y sobre ello, como queda dicho, impartimos dos conferencias en los Cursos de Doctorado en Inteligencia Artificial Avanzada. También hemos publicado alguno de los artículos con nuestros propios resultados y propuestas sobre este tipo de problemas, en revistas como las *AUA (Acta Universitatis Apulensis),* de la Universidad de Alba Iulia, en Transilvania.

- La paralela consideración de la *Incertidumbre,* así como de las Teorías de la Relatividad y de la Mecánica Cuántica. Para tratar de conseguir unos sólidos fundamentos lógicos de esta última, se ha introducido la llamada Quantum Logic[1181].

Un *comentario final* debiera hacerse: que igual que la Lógica Proposicional (bivaluada) es isomorfa[1182] a la Teoría de Conjuntos Clásica (la de los “crisp sets”), y ésta, a su vez, lo es con las Álgebras Booleanas[1183], siempre bajo una correspondencia adecuada (que existe) entre los componentes de dichas teorías matemáticas, asimismo la Lógica estándar de

[1180] Por otra parte, bastante conexo con él.
[1181] También hemos estudiado -recordemos- la Lógica Cuántica.
[1182] Recordemos que la isomorfía tiene el sentido de que se trata de estructuras `de igual forma´, como su nombre en griego indica. A veces, se habla de que ambas teorías o estructuras matemáticas son `similares´. Se trataría de un homomorfismo biyectivo (esto es, inyectivo y suprayectivo), cuyo inverso también es un homomorfismo. Cuando el espacio de partida y el de llegada coinciden, se habla de un automorfismo. Para conjuntos bien ordenados, el único automorfismo sería la función identidad.
[1183] Las álgebras booleanas esquematizan las operaciones lógicas de AND, OR, NOT, IF, junto con la unión, la intersección y el paso al complementario. Se trata de retículos (`lattices´) distributivos, acotados, dotados de complementariedad. Pueden ampliarse estos conceptos en: KLIR. G. J.; FOLGER, T., *Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information,* Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall Publ. Co., 1988; seccs. 1-3 a 1-5; pp. 10 ss.

Lukasiewicz[1184] será isomorfa a la teoría original de los conjuntos borrosos, basada en este caso sobre los operadores mín, máx y 1-a, para la intersección, unión y paso al complementario, respectivamente. Este isomorfismo[1185] hace que todo teorema válido en una de las teorías mencionadas sea automáticamente válido en las otras, con la mera traducción de los correspondientes operadores, ya que las operaciones lógicas en L_1 tienen la misma forma matemática que las correspondientes operaciones estándar sobre conjuntos borrosos. Así que una vez construída, por ejemplo, la teoría de los "fuzzy sets", esta es perfecta y automáticamente trasladable a la de la "fuzzy logic", evitando enumerar dos veces los mismos resultados. Los grados de pertenencia de un elemento a un conjunto difuso se traducirían en los valores de verdad de las proposiciones del tipo `x es P´, en $L_1$, donde P sería un predicado vago (`fuzzy predicate´).

Con todo lo cual llegamos al final de la tesis. Que es un punto y seguido, pues pensamos en los problemas abiertos en Filosofía y en Matemáticas,

[1184] La que denotamos L_1, con un subíndice que alude al $\aleph_1$, la cardinalidad del continuo.
[1185] La mencionada isomorfía entre álgebras booleanas, teoría de conjuntos clásica y lógica proposicional viene dada por la siguiente tabla de equivalencias (donde $\mathfrak{V}$ denotaría el conjunto de todas las combinaciones de las variables lógicas dadas, y el $\mathfrak{F}(\mathfrak{V})$ sería el de todas las funciones lógicas definidas en términos de dichas combinaciones):

Teoría de Conjuntos Clásica	*Álgebras Booleanas*	*Lógica Proposicional*
$\mathfrak{P}(\Omega)$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{F}(\mathfrak{V})$
$\cup$	+	$\vee$
$\cap$	$\bullet$	$\wedge$
-	-	$\neg$
Ω	1	1
$\varnothing$	0	0
$\subseteq$	$\leq$	$\Rightarrow$

acerca del tratamiento e implicaciones de la vaguedad y de la incertidumbre, que no sólo tendrán un valor en sí, sino que derivan de ellos unas consecuencias que han de potenciar las sucesivas aplicaciones tecnológicas. Para lo cual hemos de seguir investigando en las líneas en que veníamos haciéndolo, en las que mucho queda por avanzar y desbrozar, pero también en la búsqueda de una teoría más homogénea, compacta y coherente, que aune todos los esfuerzos y desarrollos obtenidos hasta la fecha, y esta será sin duda una pieza clave para la Teoría del Conocimiento del futuro, sin perder de vista las correspondientes parcelas de la Inteligencia Artificial o de la Teoría de la Computación (antes, llamada por su fundador –Norbert Wiener- la Cibernética) a las que justificará y hará avanzar.

NB. La Bibliografía, dado que abarca 276 páginas, se puede consultar en un archivo aparte, pero que adjuntamos al del texto de la Tesis.