

TESIS DOCTORAL

2022

**ESTUDIO DE LA DEPOSICIÓN DE PARTÍCULAS POR
DIFUSIÓN BROWNIANA DE UN AEROSOL SOBRE
UNA SUPERFICIE DE GEOMETRÍA VARIABLE QUE
CUENTA CON UN SISTEMA DE SOPLADO**

JOAQUIN AGUIRRE ARRIBAS

**PROGRAMA DE DOCTORADO INTERUNIVERSITARIO EN
MECÁNICA DE FLUIDOS**

Director de la Tesis: **DR. JOSE LUIS CASTILLO GIMENO**
Codirector: **DR. ALVARO G. PEREA COVARRUBIAS**

Departamento de Física Matemática y de Fluidos, Facultad
de Ciencias, Universidad Nacional de Educación a Distancia

Palabras Clave: Mecánica de Fluidos, aerosoles, deposición de partículas, sistema de partículas, capa límite laminar, difusión browniana, métodos asintóticos.

Dedicatoria

A María, por su apoyo e infinita paciencia y a mis padres por la educación recibida.

Agradecimientos

Agradecer el apoyo al Dr. José Luis Castillo Gimeno y al Dr. Álvaro Perea Covarrubias por su dedicación, sus consejos y su interés en todo el proceso de este trabajo que, sin lugar a dudas, han contribuido, de manera muy significativa, a la finalización de este con éxito.

Objetivo de la tesis

El objetivo del presente trabajo de investigación conducente a esta tesis doctoral es el estudio teórico del comportamiento de un aerosol diluido en un gas y arrastrado por la corriente gaseosa cuando se aproxima dicha corriente, a altos números de Reynolds y en régimen laminar e incompresible, a una superficie rígida (usando un modelo geométrico variable en forma de cuña), en el caso en que existe una corriente de soplado a través de la superficie rígida (supuesta porosa al gas) que tiene por objeto reducir la deposición de las partículas del aerosol sobre la superficie, con el fin de mitigar el ensuciamiento, posible deterioro o cambio morfológico de la superficie por la acumulación de partículas en ella.

Se considera que la velocidad promedio local de las partículas difiere de la velocidad local del gas en un término debido al flujo difusivo browniano (proporcional y de sentido opuesto al gradiente de la concentración de las partículas, siendo la constante de proporcionalidad el coeficiente de difusión de las partículas). Con estas hipótesis, se establecen las ecuaciones que determinan la distribución del aerosol en la capa límite laminar generada en la cercanía de la superficie y la deposición de partículas, adimensionando las variables con respecto a valores característicos.

Haciendo uso de soluciones autosimilares, quedan únicamente como parámetros del problema, el ángulo de la cuña enfrentada a la corriente ($\pi\beta$), la intensidad adimensionada del flujo de soplado del gas (f_w), el número de Schmidt ($Sc = \nu/D$), como el coeficiente entre la viscosidad dinámica del gas y el coeficiente de difusión de las partículas en el gas, donde Sc es responsable de la diferencia de espesor de la capa límite viscosa y la capa límite másica, y el coeficiente de adsorción de las partículas en la superficie, γ .

Los cálculos numéricos del trabajo resuelven las ecuaciones diferenciales ordinarias y determinan el flujo de partículas en función de los parámetros indicados. Estas soluciones numéricas pueden simplificarse en unas determinadas condiciones de un soplado débil y de un valor del número de Schimdt (Sc) elevado.

Dichas aproximaciones pueden ser útiles y reducir el cálculo para posteriores trabajos de investigación relacionados con la deposición de partículas en dichas condiciones, y donde la difusión browniana es el fenómeno predominante.

El análisis, estudio, resultados y propuestas que se desprenden de esta tesis doctoral se encuadran en el ámbito del Programa Interuniversitario en Mecánica de Fluidos del Departamento de Física Matemática y Fluidos de la Facultad de Ciencias. El cual se ha desarrollado entre los años 2017 y 2022, donde la redacción de los primeros borradores y elaboración de las gráficas, que están contenidas en esta tesis, comenzaron en el año 2021.

Resumen

Un aerosol es un sistema multifásico formado por pequeñas partículas sólidas o gotas líquidas dispersas en un gas (Hinds, 2012). Estas partículas o gotas de la fase dispersa no siguen exactamente las líneas de corriente del gas, su distribución se ve afectada por los cambios en la velocidad del gas al bordear obstáculos y pueden depositarse sobre superficies sólidas expuestas a la corriente gaseosa.

En algunas aplicaciones, estas acumulaciones de partículas en superficies pueden tener efectos negativos. Con el objetivo de evitar estos efectos, la aplicación de campos de repulsión de partículas en las proximidades de las superficies pueden reducir la deposición de partículas. Un posible método, consistiría en la aplicación de una corriente de soplado en la superficie, donde la corriente tendría como objetivo mantener las partículas lejos de la superficie.

El presente estudio desarrolla un modelo para analizar y estimar los efectos del soplado en la reducción de la deposición de partículas. De esta manera, mediante un análisis de similaridad se resuelven las ecuaciones de conservación de la masa y de conservación de la cantidad de movimiento del fluido dentro de la capa límite.

Una vez las velocidades son conocidas, la solución al problema del transporte de partículas determina el perfil de concentración de masa (Ψ) y la velocidad de deposición de partículas sobre la superficie (J), basados en cuatro parámetros: el parámetro del ángulo de ataque (β), el número de Schmidt (Sc), el parámetro adimensional de soplado (f_w) y el parámetro adimensional de adsorción (γ).

En esta fase del problema, se resuelve el perfil de concentración de masa (Ψ), considerando una acomodación parcial de la concentración en la superficie y por tanto, con condiciones de frontera de la concentración $\Psi(\infty) = 1$ lejos de la superficie y $\Psi(0) \neq 0$ en las proximidades de la superficie.

La concentración en la superficie es función del parámetro adimensional de soplado (f_w), del número de Schmidt (Sc) debido a la difusión y de otro parámetro adimensional (γ), definido como el coeficiente de adsorción de la superficie que caracteriza el fenómeno de la adsorción sobre ella.

Además, el parámetro β define la geometría de la superficie, siendo $\pi\beta$ el ángulo de ataque de la superficie. El número de Schmidt (Sc) mide la relevancia de la difusión browniana en el transporte de partículas dentro de la capa límite y el parámetro intensidad adimensional de soplado f_w determina la intensidad de la corriente de soplado a través de la superficie en relación con la corriente externa. Sin olvidar, la influencia del coeficiente de adsorción γ en la deposición de partículas.

Finalmente, debido a que el cálculo computacional del transporte de partículas puede ser numéricamente complicado, se desarrollan dos aproximaciones matemáticas válidas que permitan un cálculo sencillo del problema, en un primer caso para un

elevado valor del número de Schmidt (Sc) (solución asintótica) y un segundo caso donde la intensidad de soplado es débil ($f_w \rightarrow 0$).

Además, ambas aproximaciones pueden combinarse cuando el estudio aborde valores elevados del número de Schmidt junto con intensidades de soplado débiles.

Los resultados preliminares del trabajo conducente a esta Tesis Doctoral fueron publicados en el artículo "*Aerosol deposition rates by mass diffusion in laminar boundary layers with an implemented blowing system. Approximate methods for flat plates*" en el número 141 de la revista científica 'Journal of Aerosol Science' donde se realizaba el estudio únicamente para el caso de superficies planas y sin tener en cuenta el fenómeno de la adsorción.

Abstract

An aerosol is a multiphase system formed by small solid particles or liquid droplets dispersed in a gas (Hinds, 2012). These particles or droplets in the dispersed phase do not follow the gas mainstream, their distribution is affected by the changes in the gas velocity when surrounding an obstacle and they can deposit on solid surfaces exposed to the gas stream.

In some practical applications, the accumulation of particles on surfaces has pernicious effects. In order to avoid these effects, some particle repulsive fields are applied near the surface to reduce the particle arrival rate. One possible method would consist of the application of a blowing current on the surface, where such an induced stream would keep the aerosol particles away from the surface.

The present study develops a model to analyse and estimate the effect of blowing in reducing particle deposition. In this way, a similarity analysis is used to solve the gas boundary layer equations for mass and momentum conservation.

And it also provides the solution of the particle transport problem through the self-similarity mass fraction profile and the mass deposition rate in terms of four parameters: the wedge angle parameter β , the Schmidt number Sc , the dimensionless blowing rate f_w and the adsorption parameter (γ).

Solving the particle transport equation with the following boundary conditions; $\Psi(\infty) = 1$ and $\Psi(0) \neq 0$ in terms of f_w and γ (the dimensionless adsorption parameter). The particle distribution and deposition are thus determined by the dimensionless blowing rate f_w , the Schmidt number (Sc) due to diffusion and the adsorption parameter (γ).

Therefore, β defines the surface's shape, the Schmidt number measures how important is the brownian diffusion in the particle transport within the boundary layer and the dimensionless blowing rate f_w indicates the blowing relevance.

Finally, the particle transport computation could be numerically hard to handle and two approximated methods have been developed to allow an accurate numerical evaluation of the solutions, in case of Sc large value (asymptotic approach) and when the blowing current is weak ($f_w \rightarrow 0$). Both methods can be used in cases where Sc large values are combined with weak blowing intensity problems.

A first achievement of the work carried out in this Thesis was the publication of the scientific paper "*Aerosol deposition rates by mass diffusion in laminar boundary layers with an implemented blowing system. Approximate methods for flat plates*" included in the volume 141 (March 2020) of the 'Journal of Aerosol Science'. There, the analysis was restricted to the particle deposition over flat surfaces and particle adsorption on the surface was not taken into account.

Índice

1	Introducción	9
1.1	Definición de Aerosol	9
1.2	Tipos de partículas. Generación y tamaño	11
1.3	Formación y dinámica de las partículas	13
1.3.1	Procesos de formación internos	13
1.3.2	Procesos de formación externos	13
1.4	Aerosoles y la deposición de partículas	16
1.5	Mecanismos de deposición	17
1.6	Estudios relacionados	18
1.6.1	Control de la Capa Límite	18
1.6.2	Transporte de partículas	19
1.6.3	Mecanismo de soplado	19
2	El problema objeto de la investigación	21
2.1	Objetivos de la investigación	21
2.2	Motivación del estudio	21
2.3	Planteamiento del problema	22
2.4	Formulación del problema	23
2.4.1	Marco de investigación	24
3	Metodología	27
3.1	Antecedentes	27
3.2	Hipótesis	27
3.2.1	Declaración de la Hipótesis	28
3.3	La Capa Límite	28
3.4	Campo de velocidades. La función $f(\eta)$	34
3.5	Geometría y soplado	40
3.5.1	El parámetro de geometría (β)	40
3.5.2	El parámetro adimensional de soplado (f_w)	41
3.6	Métodos numéricos y comparativas	41
3.6.1	Método adaptativo de Runge-Kutta-Fehlberg	41
3.6.2	El Método de disparo	43
3.6.3	Comparativa de la función de corriente $f(\eta)$ para distintos ángulos	44

4	Análisis del transporte	47
4.1	Tasa de deposición (J). Caso general	47
4.2	El parámetro adimensional de adsorción (γ)	48
4.3	Acomodación total, $\Psi_a(0) = 0$, J_a	49
4.4	Acomodación parcial, $\Psi_\gamma(0) \neq 0$, J_γ	62
5	Métodos aproximados	81
5.1	Elevados valores de Sc . Límite asintótico	81
5.2	Soplados débiles	85
5.3	Límites de aplicación	89
5.3.1	El caso de Sc elevados	89
5.3.2	El caso de soplados débiles	89
6	Discusión y Comparación	91
6.1	Combinación de ambas aproximaciones	93
7	Conclusiones	95
7.1	Conclusiones del estudio	95
7.2	Líneas futuras de investigación	97
7.2.1	Propagación del virus (SARS-CoV-2)	98
A	Lista de símbolos	101
B	Lista de figuras y tablas	103
C	Programas de cálculo	111
C.1	Funciones de la velocidad de corriente	111
C.2	Transporte de partículas. Concentración	121
C.3	Transporte de partículas. Velocidad de deposición	128
D	Artículo. Joaquín Aguirre y Álvaro Perea:" <i>Aerosol deposition rates by mass diffusion in laminar boundary layers with an implemented blowing system. Approximate methods for flat plates</i>" Journal of Aerosol Science 141 (2020) 105500	132

Capítulo 1

Introducción

1.1 Definición de Aerosol

La primera definición de aerosol fue establecida por Nikolai Albertovich Fuchs como una dispersión compuesta por un medio fluido (aire) y una fase dispersa (partículas sólidas o líquidas). Este autor, también dividió los aerosoles en aquellos fuente de una dispersión de partículas y otros como consecuencia de la condensación (Fuchs, 1955). Algunos autores, aplican el término aerosol a una mezcla heterogénea de partículas sólidas o líquidas en un medio gaseoso, las cuales pueden permanecer en suspensión por un tiempo de al menos una hora. Otros introducen la condición de que estas partículas puedan observarse y medirse (Hinds, 2012)¹.

Los aerosoles pueden formarse por procesos de dispersión al atomizar partículas, sólidas o líquidas, o por un proceso de condensación de sus componentes. Los primeros suelen ser más irregulares, en cuanto morfología y tamaño, que los segundos ya que la condensación se produce en regiones del fluido donde todas las condiciones tienen valores similares. Los aerosoles representan un papel fundamental en la naturaleza (evaporación y condensación en el ciclo del agua, erosión del suelo, erupciones volcánicas, etc.) y en los procesos industriales (combustión estacionaria y móvil, producción de energía nuclear, pulverización, filtración, etc.). En relación con la composición química de las partículas del aerosol en la atmósfera, los principales componentes que se pueden encontrar incluyen sulfatos, nitratos, amoníaco, cloratos, carbón, agua o material cristalino como sal marina (Seinfeld and Pandis, 2006). Sus fuentes pueden ser de origen primario o secundario. Los aerosoles primarios son formados por la emisión directa de las partículas desde su fuente y los secundarios se forman a partir de reacciones atmosféricas de precursores gaseosos (Pandis et al, 1992 y Jacobson et al, 2000).

Así, las partículas se pueden dividir, por su tamaño, en las fracciones gruesa, fina y ultrafina. La fracción gruesa está compuesta por partículas cuyo diámetro aerodinámico se encuentra entre 2.5 y 10 μm ; la fina incluye partículas con diámetro aerodinámico menor a 2.5 μm , y, finalmente, la fracción ultrafina se refiere a las

¹Mezcla heterogénea de partículas sólidas o líquidas en un medio gaseoso, con un tamaño de partículas entre 0,002 μm y 100 μm que pueden permanecer en suspensión al menos una hora.

partículas menores de $1\ \mu\text{m}$. Así, el tamaño es el parámetro más importante de las partículas en términos de su comportamiento dinámico y de su distribución en la atmósfera. Esto se explica por el hecho que las partículas más pequeñas tienen un tamaño comparable al de las moléculas pesadas, por lo que presentan muchas de sus propiedades. En cambio, las partículas de mayor tamaño presentan las propiedades dinámicas relativas a la física newtoniana y son afectadas por la fuerza de la gravedad (Hinds, 2012).

Por ejemplo, las partículas finas tienen periodos de vida media en la atmósfera de semanas, pueden viajar distancias de hasta 100 km, y tienden a ser homogéneas. En cambio, las partículas gruesas, generalmente, se depositan más rápidamente, con una vida media en la atmósfera de sólo minutos u horas y, por ende, presentan mayor variabilidad espacial dentro de una misma región. Las fracciones ultrafina y fina están formadas por una estructura básica de carbono, metales diversos, hidrocarburos y partículas secundarias. Estas últimas se forman por condensación de vapores a altas temperaturas de partículas existentes o a partir de reacciones químicas en la atmósfera entre óxidos de nitrógeno, dióxido de azufre, vapores y otras moléculas reactivas y se componen fundamentalmente de sulfato, nitrato de amonio y otros compuestos orgánicos.

En contraste, la fracción gruesa la constituyen minerales insolubles y elementos como el calcio, potasio, sodio, sílice, manganeso y azufre, y también puede contener material biológico, como polen y esporas vegetales.

Aunque es difícil de definir, se puede establecer que el tamaño de las partículas que forman parte de los aerosoles puede variar, en un amplio espectro, desde los $0.001\ \mu\text{m}$ a los $100\ \mu\text{m}$, y como se ha expuesto con anterioridad. La principal línea divisoria lo marca el tamaño de $1\ \mu\text{m}$, que establece el límite superior del rango submicrométrico y el límite inferior del rango micrométrico. En general, los polvos entran en el rango micrométrico y poseen propiedades de la física de Newton y los humos en el submicrométrico y pueden experimentar difusión browniana.²

Finalmente, y como la dinámica de las partículas del aerosol dependen de su tamaño, es necesario establecer un parámetro relacionado con el tamaño. De este modo, se toma como referencia el diámetro de éstas, que puede referirse al diámetro

²Albert Einstein, en su tesis de doctorado en 1905, y posteriormente Marian von Smoluchowski en 1906, estudiaron el movimiento browniano y mostraron que la materia está formada por esas pequeñas partículas que presentan un movimiento azaroso. Einstein lo explicó basándose en la mecánica estadística, mientras que la explicación de Smoluchowski lo argumentó sobre la teoría cinética de los gases. Con ambos estudios se obtuvieron descripciones igualmente importantes, que resultaron estar en perfecto acuerdo con las propiedades físicas del movimiento. Jean Perrin obtuvo el premio Nobel en 1926 por esta verificación experimental.

aerodinámico equivalente³ o al diámetro de Stokes⁴.

Por ejemplo, d_v es el diámetro aerodinámico equivalente al diámetro de una esfera que posee el mismo volumen (V) que la partícula que se quiere caracterizar.

$$d_v = \left(\frac{6V}{\pi}\right)^{1/3} \quad (1.1)$$

En cambio, el diámetro de Stokes d_{St} representa el diámetro promedio de una partícula que cuenta con una velocidad terminal (V_T)⁵.

$$d_{St} = \left(\frac{18V_T \mu}{(\rho_p - \rho_f)g}\right)^{1/2} \quad (1.2)$$

donde, μ y ρ_f son la viscosidad y la densidad del fluido, respectivamente, y ρ_p es la densidad de la partícula.

1.2 Tipos de partículas. Generación y tamaño

Existen varios tipos de aerosoles dependiendo de como se generan y de su forma física, básicamente, según su proceso de generación, podemos distinguir dos tipos (Kulkarni, Baron & Willeke (2011)):

Polvo: Partículas sólidas formadas por la destrucción, erosión o desintegración de los materiales, estas partículas tienen formas irregulares y tienen un tamaño de hasta los $0.5\mu\text{m}$ de diámetro. Por tanto, se producen por una desintegración mecánica de un material seguido de una dispersión.

Humo: Partículas sólidas o líquidas formadas como resultado de una combustión incompleta o de una condensación de vapor saturado, su tamaño es menor que en el caso del polvo.

Según el tamaño de las partículas, y basándonos en el diámetro de estas (d_p), se pueden distinguir entre distintos tipos de aerosoles:

³El diámetro aerodinámico equivalente se puede definir como el diámetro de una partícula esférica de densidad 1g/cm^3 y con iguales características aerodinámicas a la partícula en cuestión (Hinds, 2012).

⁴El diámetro de Stokes se define como el diámetro de una partícula esférica con las mismas características aerodinámicas y misma densidad que la partícula.

⁵Cuando una partícula esférica se introduce dentro de un fluido, ésta rápidamente alcanza una velocidad constante que se denomina velocidad terminal. Esta velocidad está relacionada con el volumen de la partícula y con las propiedades del fluido.

Partículas ultrafinas, Modo de nucleación ($d_p < 0.02 \mu\text{m}$): Un ejemplo son las partículas de los precursores del amoníaco, ácido sulfúrico y vapor de agua contenidas en la atmósfera. La vida media de estas partículas en la atmósfera es del orden de horas ya que coagulan rápidamente con otras partículas o incrementan su tamaño por condensación. La nucleación se ve favorecida por descensos de la temperatura o incrementos de la humedad (Eastern & Peter, 1994, Kulmala et al, 2001).

Modo Aitken ($d_p = 0.02 - 0.1 \mu\text{m}$): Estas partículas pueden ser primarias, o sea, emitidas a la atmósfera por procesos naturales o antrópicos, o bien secundarias, es decir, originadas como consecuencia del crecimiento de partículas nucleadas por coagulación, condensación o reacciones en fase líquida de compuestos inorgánicos.

Modo de acumulación ($d_p = 0.1 - 1 \mu\text{m}$): Son originadas como consecuencia del crecimiento de partículas del modo Aitken, principalmente por reacciones en fase líquida que ocurren en las gotas de agua en las nubes. La mayor parte se registran entre 150-250 nm. Su tiempo de permanencia en la atmósfera es relativamente alto.

Modo grueso ($d_p > 1 \mu\text{m}$): Se forman por procesos mecánicos como la erosión. En términos de calidad del aire y epidemiología, se habla de partículas $> 2.5 \mu\text{m}$. La mayor parte de las partículas de este modo se forman por procesos mecánicos tales como la erosión de la superficie terrestre (materia mineral u otros materiales), o la rotura de burbujas en la superficie de mares y océanos (aerosoles marinos). El modo grueso se caracteriza por presentar un reducido número de partículas, pero tienen una importante contribución a la masa total del aerosol.

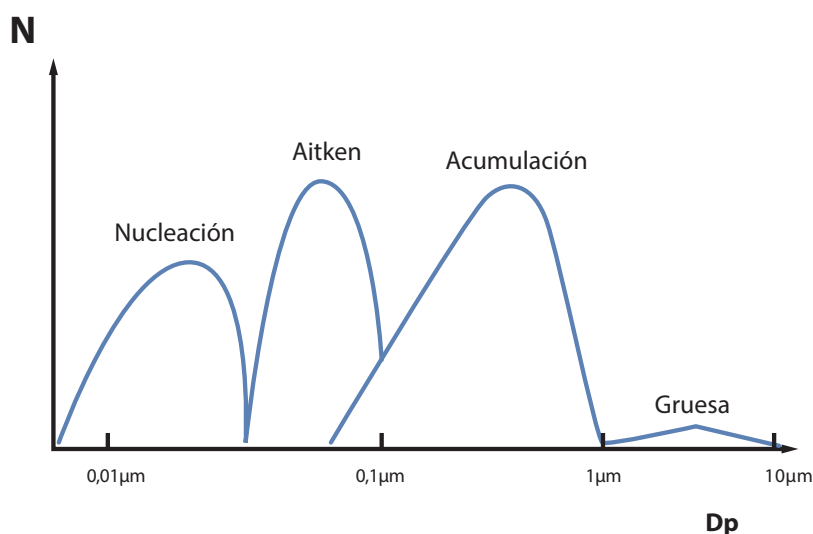


Figure 1.1: *Distribución de partículas en función del tamaño (Seinfeld y Pandis, 1998)*

1.3 Formación y dinámica de las partículas

1.3.1 Procesos de formación internos

En relación con el comportamiento dinámico de las partículas que se encuentran dentro de un aerosol podemos encontrar varios procesos, unos definidos por su carácter interno, como son la coagulación, la aglomeración o la nucleación:

Coagulación:⁶ Formación de nuevas partículas como consecuencia de la fijación de otras de menor tamaño y donde, claramente, las partículas resultantes pierden su identidad anterior.

Este proceso ocurre debido a que las partículas sólidas, en estado coloidal, son tan finas que están electrostáticamente descompensadas. Por ello, se forma a su alrededor una capa fija de disolución con iones.

Las partículas cuando se mueven arrastran consigo únicamente la capa fija. Esta unión de la partícula sólida y su capa fija, en la cual pueden unirse otras partículas con sus correspondientes capas fijas, constituye un agregado.

Estos agregados pueden ser de un tamaño muy superior al de la partícula sólida contenida en su interior, y de cara al movimiento, el agregado constituye una nueva identidad.

Aglomeración: Formación de nuevas partículas debido a la colisión de otras de menor tamaño, donde las partículas mantienen su identidad después de la colisión.

El proceso de aglomeración produce un cambio en la distribución de tamaños de las partículas. La colisión entre partículas se puede atribuir, entre otras causas, a un movimiento relativo entre las partículas en suspensión de diferente tamaño.

Nucleación:⁷ Creación de una nueva partícula en ausencia de partículas como consecuencia de un cambio de estado. En fase sólida, es el proceso por el cual la partícula "semilla" crece gracias a la cristalización.

1.3.2 Procesos de formación externos

Otros procesos, de carácter externo, producidos normalmente por la aparición de fuerzas externas (gradiente de temperatura o de presión, ionización de partículas,

⁶Tiene lugar cuando dos partículas del aerosol colisionan y se quedan unidas formando una única partícula de mayor tamaño. En la atmósfera se produce por el movimiento browniano y en partículas de tamaño <10nm.

⁷Puede ser homogénea o heterogénea, se produce cuando se forma una nueva fase (en la atmósfera, cambio de vapor a líquido o de líquido a sólido).

fuerzas gravitacionales etc. . .) se exponen a continuación:

Difusión: Es el movimiento de las partículas disueltas en un fluido desde una zona de mayor concentración a otra de menor concentración.

Y dicho movimiento está regido por la ley de Fick que afirma que la densidad de corriente de partículas es proporcional al gradiente de concentración.

Cuando la concentración de partículas depende únicamente de una coordenada espacial (x), el flujo difusivo está dado por la relación

$$J = -D \frac{d\Psi}{dx} \quad (1.3)$$

Donde D es el coeficiente de difusión (unidad de área por unidad de tiempo), J la densidad de flujo de partículas (partículas por unidad de área y de tiempo) y Ψ es la concentración de partículas (partículas por unidad de volumen).

La acumulación de partículas en la unidad de tiempo que se produce en el elemento de volumen Sdx es igual a la diferencia entre el flujo entrante JS , menos el flujo saliente $J'S$, es decir:

$$JS - J'S = \frac{-dJ}{dx} S dx \quad (1.4)$$

La acumulación de partículas en la unidad de tiempo es:

$$S dx \frac{d\Psi}{dt} \quad (1.5)$$

Igualando ambas expresiones y utilizando la Ley de Fick, se obtiene:

$$\frac{d}{dx} \left(D \frac{d\Psi}{dx} \right) = \frac{d\Psi}{dt} \quad (1.6)$$

Ecuación diferencial en derivadas parciales que describe el fenómeno de la difusión:

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} - \frac{1}{D} \frac{d\Psi}{dt} = 0 \quad (1.7)$$

Advección: Es el movimiento de las partículas disueltas arrastradas por la corriente fluida.

Cuando hablamos del fenómeno de la advección, nos referimos a la situación en la que una partícula se mueve con el fluido, a veces también se habla de advección pasiva para enfatizar que dicha partícula es tan sumamente ligera e inerte que lo único que es capaz de hacer es precisamente seguir el movimiento del fluido. Así, las partículas ajustarán su velocidad de forma instantánea a la velocidad del fluido que las rodea.

Convección: Es el movimiento de las partículas como consecuencia de la suma de todos los fenómenos de transporte que las afectan (difusión, advección, campos externos, etc).

Sedimentación: Deposición sobre superficies de las partículas disueltas en el fluido debido a la fuerza de la gravedad.

La sedimentación gravitatoria terminal o velocidad terminal de sedimentación es un parámetro fundamental en el control de la contaminación atmosférica y es definido como la velocidad con la que una partícula se sedimenta a través del fluido.

Condensación: Las partículas del aerosol crecen al captar vapor condensable de la fase gaseosa, este proceso es más efectivo con partículas de tamaño $< 0.1\mu\text{m}$.

Durante el proceso de condensación se desprende energía equivalente al calor latente de vaporización. Además, es necesario que existan núcleos de condensación sobre los que puedan formarse las gotas, son las denominadas partículas higroscópicas por su capacidad para absorber humedad.

En caso de que no existan partículas de este tipo, el agua puede permanecer en forma de vapor incluso cuando la Presión de vapor $>$ Presión de vapor de saturación y la condensación puede iniciarse sobre núcleos higroscópicos antes de llegar a la saturación.

Por otro lado, los núcleos de condensación de los aerosoles son de muy diversos tipos. Las partículas de sal procedentes de los océanos y los productos debido a la combustión (volcanes o actividad industrial) son ejemplos de núcleos de condensación.

Evaporación: Este fenómeno depende de la diferencia entre la presión de vapor en el ambiente y en la superficie de la partícula. Se produce cuando la energía que adquiere la sustancia es lo suficientemente elevada como para vencer la tensión superficial del fluido en estado líquido.

Adsorción: Es la adhesión o retención de las partículas disueltas en un fluido

(gas o líquido) a una superficie de un material que se encuentra dentro del flujo del fluido. Este proceso crea una película en la superficie del adsorbente.

En este trabajo este mecanismo de adsorción viene caracterizado por el parámetro adimensional de adsorción γ , siendo este:

$$\gamma = \gamma^* \frac{1}{\sqrt{\frac{\nu U}{(2 - \beta)x}}} \quad (1.8)$$

donde ν es la viscosidad dinámica del fluido, U es la velocidad exterior, β es el parámetro de geometría de la superficie y γ^* es el valor dimensional de la adsorción.

1.4 Aerosoles y la deposición de partículas

Una vez expuesto el concepto de aerosol y los distintos comportamientos dinámicos, nos encontramos con los potenciales problemas que el fenómeno de deposición de partículas de un aerosol puede producir en diferentes campos o sectores, como son:

Electrónica: Mal funcionamiento de sistemas electrónicos como consecuencia del calentamiento de sus componentes por un déficit en la refrigeración por la acumulación de partículas en la superficie.

Aerodinámica: Pérdida de características de vuelo en determinadas superficies aerodinámicas que provocan un aumento de la resistencia y una pérdida de la sustentación.

Energía nuclear: Contaminación del aire, transporte y deposición de partículas radioactivas.

Por ejemplo, el accidente de la central nuclear de Fukushima en 2011 generó aerosoles de material radiactivo que provocaron lo que se denomina "suelo radiactivo", que son áreas donde se han depositado partículas radiactivas.

Medioambiente: Polución, consecuencias relacionadas con el efecto invernadero.

Los aerosoles atmosféricos y los gases de efecto invernadero ejercen un efecto directo sobre el clima, modificando sus propiedades y el albedo planetario, que determinan el balance de radiación del planeta y, por tanto, el cambio climático global (Gimeno J.F. et al., 2002).

Ciencias de la Salud: Efectos en el sistema respiratorio o la piel. Además de pandemias y propagación de virus.

Además, en relación con el SARS-CoV-2, en un estudio experimental en dos hospitales de Wuhan, se obtuvo que la mayoría del tamaño de las partículas se situaban entre 0.25 y 1 μm o eran mayores de 2.5 nm, lo que sugiere diferentes mecanismos de generación de aerosoles⁸.

1.5 Mecanismos de deposición

A continuación, se van a exponer los diferentes mecanismos que explican la deposición de partículas de un aerosol sobre una superficie⁹ que es debida normalmente a una diferencia entre la velocidad media (normal a la superficie) de las partículas y la velocidad del gas (pues en ausencia de soplado o succión, la velocidad normal del gas en la superficie es nula).

Estos son, principalmente y dependiendo del tamaño de éstas, la deposición por gravedad, el impacto por inercia y la difusión browniana.

La deposición como consecuencia de la gravedad o sedimentación se produce en partículas de un diámetro superior a 0.5 μm y con velocidades del fluido relativamente bajas. Aquí, la fuerza de la gravedad debe tener la capacidad de desviar a la partícula de la línea de corriente y depositarla en la superficie.

El impacto por inercia se produce cuando la geometría cambia bruscamente y las partículas no pueden modificar su trayectoria y evitar el impacto sobre una superficie, principalmente como consecuencia de altas velocidades.

Por tanto, los dos grandes condicionantes que influyen en la deposición son el tamaño y la alta velocidad.¹⁰

Por último, la difusión browniana se produce en partículas de un tamaño muy reducido ($d_p < 0.01\mu\text{m}$), similar o inferior a la distancia promedio libre entre moléculas. Con este tamaño de partículas ni la gravedad ni la inercia tienen un efecto significativo en la dinámica de estas, ya que las partículas no tienen la masa

⁸Aerodynamic Characteristics and RNA concentration of SARS-CoV-2 Aerosol in Wuhan hospitals during COVID-19 outbreak.(Liu et al.)

⁹Los principales mecanismos para evitar la deposición de partículas sobre superficies se basan en la generación de una zona libre de partículas y pueden ser: la termoforesis que evita la deposición de partículas al existir un gradiente térmico entre el fluido y la superficie, la fotoresis que aleja las partículas de la superficie por la influencia de una energía radiante como la luz, los campos eléctricos o la implantación de un sistema de soplado.

¹⁰En conductos o tuberías si el número de Stokes ($St = D_p\rho_p U/18\mu D$) es muy superior a 1 la inercia jugará un papel importante facilitando la deposición, mientras que si es muy inferior a 1, las partículas se comportarán siguiendo las líneas de corriente del fluido y no impactarán.

suficiente para poder ser afectadas.

Este estudio solo considera la difusión browniana como mecanismo de deposición a la hora de exponer el problema, las aproximaciones, los resultados y las conclusiones.

1.6 Estudios relacionados

Focalizando el estudio en los aspectos negativos, la deposición de partículas en superficies es un problema común que reduce la eficiencia y deteriora las propiedades de dichas superficies en algunas aplicaciones, esta acumulación de partículas sobre las superficies puede producir efectos no deseados en multitud de campos (p.e. aerodinámica (Anderson, 1999)).

Una solución que pueden mitigar dichos efectos es la implementación de campos de repulsión de partículas aplicados cerca de la superficie, con el objetivo de reducir el ritmo de deposición de partículas (p.e. el campo repulsivo generado por termoforesis (García-Ybarra & Castillo, 1997)).

Existen varios estudios relacionados con el control de la capa límite, el transporte de partículas y su deposición en superficies o como mitigar dicha deposición mediante una corriente de soplado aplicada en superficies, como es el caso de este trabajo.

1.6.1 Control de la Capa Límite

Numerosas investigaciones, en relación con la teoría de la capa límite, han investigado el comportamiento del flujo sobre una superficie que cuenta con un sistema de soplado o succión en dicha superficie en presencia de una diferencia de presiones (Rosenhead, 1963).

El análisis de transferencia de masa dentro de la capa límite de un flujo tiene una gran importancia en los procesos de separación y en la cinemática de procesos químicos. La difusión de los elementos de una reacción química dentro de la capa límite de un fluido sobre una superficie plana ha sido también estudiada con antelación (Chambre & Young, 1958).

En ciertos casos, como en el campo de la aeronáutica, la importancia de la succión reside en la posibilidad de retrasar la separación de la capa límite y obtener una mayor estabilización del flujo laminar.

Y los trabajos sobre la difusión dentro de la capa límite de un fluido sobre una superficie plana, cuando esta cuenta con un sistema de succión o de soplado, también han sido considerados en esta tesis doctoral (Bhattacharyya K, 2011).

Todos estos aspectos forman parte de lo que se denomina, comúnmente, como control de la capa límite, cuyo objetivo es el estudio de los mecanismos que gobiernan la transferencia de calor y masa entre el fluido y la superficie dentro de la capa límite.

1.6.2 Transporte de partículas

En relación con el transporte de partículas dentro del flujo, la mayor contribución de partículas muy pequeñas ($0.01\mu\text{m}$) es causada por difusión browniana, mientras que en el caso de partículas más pesadas (a partir de $10\mu\text{m}$), el efecto denominante es la inercia (Gupta & Peters, 1985; Grane & Evans, 1977).

Para partículas de tamaño intermedio, los mecanismos a tener en cuenta son los relativos a la fóresis, (Rosner, Mackowski, Tassopoulos, Castillo & Garcia-Ybarra, 1992) principalmente aquellos que introducen una distribución no homogénea de la temperatura dentro del fluido, como la termofóresis (Rosner, Mackowski, Tassopoulos, Castillo & Garcia-Ybarra, 1992; Williams & Loyalka, 1991).

En otro estudio realizado, se expone la solución de similaridad de la difusión de reactivos químicos de un flujo horizontal de un aerosol sobre una superficie plana (Fan et al., 1998).

Por otra parte, el efecto del soplado puede ser importante en la posibilidad de modificar la transferencia de calor entre el fluido y una superficie, donde dicha modificación puede afectar a otros fenómenos físicos o químicos en la superficie (p.e. deposición de partículas, oxidación o la condensación).

En multitud de situaciones, los efectos de fuerzas externas como la gravitacional y la termofóresis deben ser consideradas junto con la difusión y la advección. Sin embargo, debido al tamaño de las partículas, en este estudio solo se va a considerar la difusión browniana como mecanismo de transporte de partículas.

1.6.3 Mecanismo de soplado

Un método usado con frecuencia, es la aplicación de una corriente de soplado a través de una superficie con el objetivo de reducir la deposición de partículas sobre dicha superficie y reducir los efectos negativos que esta deposición puede producir. (Spalding & Evans, 1961; Acrivos, 1962).

Para estimar el efecto de la implantación de una corriente de soplado en la reducción de la deposición de partículas, también es importante evaluar el transporte de masa resultante de la combinación de la difusión y la advección (Asgari, Lucci & Kuczaj, 2019).

El problema se resuelve, en primer lugar, mediante la utilización del análisis de similaridad para resolver las ecuaciones de conservación de la masa y de conservación de la cantidad de movimiento del fluido dentro de la capa límite. Una vez el campo de velocidades es conocido, la solución al problema del transporte de partículas es proporcionado por el perfil de concentración de partículas y la tasa de deposición de estas sobre la superficie, basándose en cuatro parámetros: el parámetro del ángulo de ataque β , el número de Schmidt Sc , la intensidad adimensional de soplado f_w y el parámetro adimensional de adsorción γ .

El parámetro β define la geometría de la superficie, siendo $\pi\beta$ el ángulo de ataque, el número de Schmidt Sc mide la relevancia de la difusión browniana en el transporte de partículas dentro de la capa límite, la intensidad adimensional de soplado f_w determina la fuerza de la corriente de soplado a través de la superficie y el parámetro adimensional de adsorción γ la intensidad de adsorción en la superficie.

Capítulo 2

El problema objeto de la investigación

2.1 Objetivos de la investigación

El presente estudio, tiene por objeto el análisis del transporte de las partículas de un aerosol y la cuantificación de la deposición de las partículas de este sobre una superficie de geometría variable, la cual cuenta con un sistema de soplado, analizando la influencia tanto de la difusión debido al movimiento browniano como los efectos del soplado sobre dicho sistema.

Y donde no se consideran, como consecuencia del tamaño de las partículas, los efectos producidos por fuerzas externas o por diferencia de temperatura, y no se asume la simplificación de que la concentración de partículas en la superficie sea cero, por lo que se realizan los cálculos con una concentración no nula en las proximidades de la superficie debido a los fenómenos de la adsorción y del soplado.

Además, se pretende estudiar las relaciones e interacciones entre las distintas variables que intervienen en el problema y como afectan a este, para el posterior desarrollo de dos aproximaciones matemáticas válidas, que permitan un cálculo sencillo del problema, en un primer caso, para un elevado valor del número de Schmidt Sc (solución asintótica) y un segundo caso, para un soplado débil ($f_w \rightarrow 0$). Demostrando que, dichas aproximaciones matemáticas son válidas y pueden ser utilizadas en los casos antes mencionados.

2.2 Motivación del estudio

La deposición de partículas sobre superficies que se encuentran expuestas a un aerosol en diferentes campos industriales y tecnológicos, como pueden ser la aerodinámica, los sistemas de impulsión (motores), los sistemas de generación de energía eléctrica (turbinas, compresores), las centrales solares, la fabricación de componentes eléctricos y electrónicos, la minería, las refinerías o las factorías químicas, es un factor no

deseado que hace disminuir la eficiencia de los distintos procesos.

Por otra parte, la pandemia provocada por el virus SARS-CoV-2 y el estudio de su propagación como un aerosol es otro motivo para el desarrollo de este trabajo de investigación.

En este sentido, la posibilidad de contar con aproximaciones matemáticas, para unas determinadas condiciones, que permitan simplificar el estudio de la deposición de partículas de un aerosol sobre superficies que cuentan con sistemas de soplado es la base de esta tesis doctoral.

2.3 Planteamiento del problema

Los aerosoles, definidos como un sistema compuesto por una fase continua y una dispersa, tienen distintos mecanismos de interacción, los cuales pueden tener un carácter positivo o negativo. Estos sistemas multifásicos, tienen gran protagonismo tanto en fenómenos naturales como en procesos industriales. Además, son relevantes en procesos, como el comportamiento de los combustibles líquidos dentro de los motores a reacción o el comportamiento del hidrógeno en algunos motores de cohetes. Por otra parte, los aerosoles son perjudiciales y requieren de un control, tanto en su formación como en su transporte y deposición sobre superficies expuestas a la corriente gaseosa. En un aerosol, las partículas no siguen las líneas de corriente principalmente debido a fenómenos como la inercia, la termofóresis¹, la fotofóresis, el efecto de fuerzas exteriores (como campos eléctricos o magnéticos) o la difusión y, debido a todo esto, pueden depositarse sobre las superficies que se encuentran dentro del fluido.

El presente estudio se reduce a un tamaño de partículas en el que, el fenómeno predominante es la deposición por **difusión browniana**², despreciando el resto de fenómenos anteriores. En este caso, se estudiará el mecanismo de deposición sobre una superficie expuesta a una corriente gaseosa (aerosol muy diluido) cuando esta cuenta con un sistema de soplado, con el objetivo de disminuir dicha deposición de partículas.

¹Termofóresis, thermodifusión, termomigración, efecto Soret o efecto Ludwig-Soret es un fenómeno que se observa en las preparaciones de partículas que se mueven que las diferentes categorías de las partículas tienen diferentes respuestas cuando se somete a un gradiente de temperatura. El término "termofóresis" se aplica sobre todo a los aerosoles mezclas, pero puede también referirse a este fenómeno en las distintas fases de la materia. El término "efecto Soret" se utiliza normalmente para las preparaciones líquidas que actúan por mecanismos diferentes y menos conocidas que las mezclas de gases.

²La difusión (también difusión molecular) es un proceso físico irreversible, en el que partículas materiales se introducen en un medio que inicialmente estaba ausente, aumentando la entropía (desorden molecular) del sistema conjunto formado por partículas difundidas o soluto y el medio donde se difunden o disuelven. Normalmente los procesos de difusión están sujetos a la ley de Fick.

Esta tesis doctoral se estructura en siete capítulos, siendo los dos primeros, respectivamente, la introducción y el objeto de la investigación y el resto de los capítulos se detallan a continuación:

En el capítulo 3, se establece la metodología, las bases teóricas, la definición de los parámetros que intervienen en el estudio, los métodos numéricos y la declaración de la hipótesis.

En el capítulo 4, se realiza el análisis del transporte, la concentración y la deposición de las partículas con diferentes números de Schimdt dentro de la capa límite, con diferentes valores de soplado (f_w) y varias configuraciones geométricas (β). Además, de su estudio tanto para una acomodación parcial (Ψ no es igual a 0 en la superficie) como para una acomodación total, donde la concentración en la superficie es nula ($\Psi(0)=0$).

En el capítulo 5, se desarrollan dos aproximaciones para obtener la deposición de partículas en los casos de soplos débiles y de elevados números de Schimdt. Finalmente, se comparan los resultados de la solución real con las aproximaciones.

En el capítulo 6, se realiza la comparación de todos los resultados y, finalmente, en el capítulo 7 se exponen las conclusiones y las futuras líneas de investigación.

2.4 Formulación del problema

Dentro de la Teoría de la capa límite, el efecto del soplado tiene una gran influencia sobre distintos fenómenos físicos y químicos (condensación, deposición, oxidación). En relación con el transporte y tamaño de las partículas, considerando la inercia despreciable, este efecto estará condicionado por el movimiento browniano y este producirá o no la diseminación de partículas en la superficie dependiendo de unos valores de Sc (número de Schmidt), β (parámetro geométrico), f_w (soplado) y γ (parámetro adimensional de adsorción)³.

La evaluación del movimiento advectivo y difusivo en el interior de la capa límite como mecanismo inductor de la deposición de partículas en las superficies deberá tenerse en consideración. Por tanto, la evolución de la dinámica de la partícula está determinada por la combinación entre el transporte advectivo y el transporte difusivo.

El análisis a realizar está basado en la determinación del perfil de velocidades del aerosol, la concentración de partículas en la capa límite y la tasa de deposición de partículas sobre la superficie mediante el estudio de cuatro parámetros fundamentales, ya mencionados con anterioridad: Sc , β , f_w y γ .

³Este parámetro adimensional de adsorción solo influye en el calculo de la condición de frontera de la concentración en la superficie $\Psi(0)$.

En relación con las posibles aproximaciones, fijando el parámetro geométrico y el soplado, el parámetro que determina la efectividad de la deposición de partículas es el número de Sc . Por ejemplo, cuando Sc es del orden de unidad, la difusión browniana es lo suficientemente intensa de forma que la corriente de soplado no es capaz de competir con dicha difusión.

Los tamaños usuales de las partículas de un aerosol hacen que el valor de Sc sea elevado provocando que la difusión no sea tan efectiva y que aparezca en la vecindad de la superficie una zona libre de partículas.

En estos casos, la difusión browniana se hace efectiva lejos de la superficie y el perfil de concentraciones cambia bruscamente del valor cero en la superficie al valor uniforme en la corriente principal, adquiriendo un perfil típico en forma de "S" mayúscula.

2.4.1 Marco de investigación

El marco temporal del trabajo está comprendido desde finales del año 2017, inicio del estudio, hasta el año 2022, fecha en la que finaliza la presente tesis doctoral.

El marco de aplicación se centra en la Mecánica de Fluidos, con fluidos continuos y newtonianos, realizando un estudio bidimensional, dentro de la capa límite laminar, donde se considera un aerosol muy diluido de mezcla binaria, de densidad constante (incompresible), donde el movimiento es estacionario a elevados números de Reynolds ($10^3 < Re < 10^6$) y donde el principal fenómeno a considerar es la difusión browniana.

Además, no se tienen en cuenta otros fenómenos como la difusión por calor, la termoforesis, la fotoforesis o las fuerzas exteriores al volumen de control establecido.

Se puede considerar un trabajo, eminentemente, teórico donde se simplifican los cálculos matemáticos, tanto para la resolución de las ecuaciones que rigen el campo de velocidades como para las ecuaciones relativas al transporte por difusión y aquellas que determinan la deposición de partículas en la superficie.

Todo ello, a través de los entornos informáticos MatLab⁴ y Mathematica⁵, como herramientas de resolución de las diferentes ecuaciones y el desarrollo de gráficas.

⁴La plataforma MatLab está optimizada para resolver problemas de ingeniería y científicos. El lenguaje MatLab, basado en matrices, es una herramienta para expresar ecuaciones matemáticas computacionales. Los gráficos integrados facilitan la obtención de información y visualización de datos.

⁵Mathematica es una herramienta integral para la computación técnica y tiene la capacidad de construir algoritmos para la representación de gráficos dinámicos, código ejecutable o interfaces de usuario.

Matlab fue utilizado, básicamente, para la resolución de las ecuaciones de las velocidades adimensionales (ecuación de Falkner-Skan) obteniendo los perfiles de $f(\eta)$, $f'(\eta)$, $f''(\eta)$ y el valor de $f''(0)$, necesario para el cálculo de las aproximaciones. Aunque, también se utilizó Mathematica para la comprobación de los resultados.

Mientras que con Mathematica se resolvieron las ecuaciones de la concentración de partículas dentro de la capa límite y aquellas que proporcionan los valores de la deposición de partículas sobre la superficie, con y sin acomodación total.

Por todo lo anterior, el marco de investigación, aunque algo restrictivo, produce soluciones matemáticas que se pueden aplicar a un gran número de situaciones de interés práctico.

Capítulo 3

Metodología

3.1 Antecedentes

Estudios sobre transferencia de masa por difusión térmica en flujos laminares (Pedro Luis Garcia-Ybarra y Jose Luis Castillo, 1997), trabajos sobre flujos con difusión sobre superficies planas porosas con succión y soplado (Kurmar Battacharyya, 2011) y el artículo publicado en el número 141 (Marzo 2020) de la revista científica *Journal of Aerosol Science: Aerosol deposition rates by mass diffusion in laminar boundary layers with an implemented blowing system. Approximate methods for flat plates* (Joaquín Aguirre & Álvaro Perea, 2020).

3.2 Hipótesis

El presente trabajo tratará de demostrar la validez de la hipótesis que se expone a continuación en el apartado 3.2.1, con el objetivo de que las aproximaciones matemáticas desarrolladas durante el presente estudio sean una herramienta útil para futuros trabajos sobre aerosoles y la deposición de partículas sobre superficies.

Trabajos que, fundamentalmente y debido al tamaño de las partículas, tienen en cuenta la difusión browniana como única influencia en el estudio de los aerosoles y la deposición de pequeñas partículas sobre superficies que se encuentran en contacto con el flujo del aerosol.

Además, se ha tenido en cuenta tanto una acomodación total como parcial de la función de la concentración en la superficie ($\Psi(0) = 0$ y $\Psi(0) \neq 0$) dentro de la capa límite a la hora de desarrollar dichas aproximaciones.

Por último, la relación entre el análisis de aerosoles y la propagación del virus SARS-CoV-2 podría ser un claro ejemplo de utilidad de las aproximaciones que se desarrollan en esta tesis doctoral. Y así, queda reflejado en el último punto del trabajo (7.2 Líneas futuras de investigación).

3.2.1 Declaración de la Hipótesis

La implantación de un sistema de soplado en una superficie reduce considerablemente la deposición de partículas debido a la difusión browniana (partículas del orden de $0.01\mu\text{m}$ o de tamaño inferior) cuando estas se encuentra en el interior de la corriente de un aerosol. Se pueden establecer unas aproximaciones matemáticas para obtener el valor de dicha deposición, las cuales son válidas en unas determinadas condiciones (elevados valores del Sc e intensidades de soplado débiles).

3.3 La Capa Límite

Como se expondrá a continuación, el presente estudio parte de aproximaciones como, por ejemplo, que el fluido tiene un flujo laminar, es incompresible, estacionario y las fuerzas exteriores son despreciables.

Y sobre todo, que el desarrollo del trabajo se enmarca dentro de la Teoría de la Capa Límite (válida para altos número de Reynolds), esta teoría fue introducida por Prandtl y establece que, para un fluido en movimiento, todas las pérdidas por fricción tienen lugar en una delgada capa adyacente al contorno del sólido (denominada capa límite), y que el flujo exterior puede considerarse como carente de viscosidad. Además, la distribución de velocidades en la zona próxima al contorno es influenciada por las tensiones cortantes superficiales y en general, la capa límite es muy delgada en la parte de aguas arriba del contorno y va aumentando su espesor aguas abajo por la acción continuada de las tensiones cortantes.

Para números de Reynolds moderadamente altos, toda capa límite es gobernada por la acción de las fuerzas viscosas y en su interior el flujo es laminar. Para valores intermedios del número de Reynolds la capa límite es laminar cerca de la superficie del contorno y turbulenta en las zonas algo más alejadas. Para valores del número Reynolds muy elevados la capa límite se convierte en turbulenta. Este trabajo se limita al estudio de capas límite laminares bidimensionales.

Además, el hecho de que la capa límite sea muy fina permite que las ecuaciones de Navier-Stokes se simplifiquen, reduciéndose a las ecuaciones de la capa límite.¹

Y donde éstas tienen la siguiente forma, ya ampliamente conocida (Schlichting, 1979):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

¹Blasius, alumno de Prandtl, propuso un modelo que fue presentado en su tesis doctoral en 1908 de la capa límite laminar sobre una placa plana, basado en la resolución de la ecuación de Navier-Stokes sin gradiente de presión.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.2)$$

siendo u y v , respectivamente, las componentes de la velocidad en la dirección longitudinal (coordenada x) y transversal (coordenada y), a la superficie rígida. U es la velocidad en la corriente principal (fuera de la capa límite) y ν es la viscosidad cinemática del fluido.

El proceso de obtención de estas ecuaciones se detallará a continuación en el siguiente epígrafe "Campo de velocidades. La función $f(\eta)$ ".

También, es interesante deducir el espesor de la capa límite, ya que de la ecuación de Balsius (ecuación de Falkner-Skan para $\beta = 0$) se puede obtener dicho valor como la distancia a la superficie donde el valor de la velocidad difiere un 1% del valor de la velocidad de la corriente del fluido ($f'(\eta) = 0.99$).

Por tanto, a partir de la definición de la variable de similaridad (que se detallará más adelante) η .

$$\eta = y \left(\frac{U}{2 \nu x} \right)^{1/2} \quad (3.3)$$

para el caso de una capa límite generada sobre un plano rígido longitudinal a una corriente fluida exterior uniforme, sin gradiente de presión externo, se obtiene numéricamente el valor $\eta = 3.53$ para $f'(\eta) = 0.99$ y el espesor de la capa límite ($\delta(x)$) en cada punto de la distancia característica al borde de ataque de la superficie vienen definido por:

$$\delta(x) = 3.53 \left(\frac{2 \nu x}{U} \right)^{1/2} \quad (3.4)$$

Con el objetivo de simplificar el presente estudio, se considera un problema bidimensional (x, y), donde se analiza el flujo de un aerosol sobre una superficie de geometría variable definida por el ángulo $\pi\beta$. Además, es aplicada una corriente de soplado perpendicular a dicha superficie (dirección y), cuya velocidad en la superficie es v_w .

La configuración del sistema es mostrado en la figura 3.1. La coordenada x se toma desde el borde de ataque y a lo largo de toda la superficie, mientras que el eje y se considera normal a dicha superficie. Los diferentes ángulos desde el valor 0 hasta π están definidos por $\pi\beta$, y las componentes de la velocidad paralela y transversal a la superficie son u, v respectivamente.

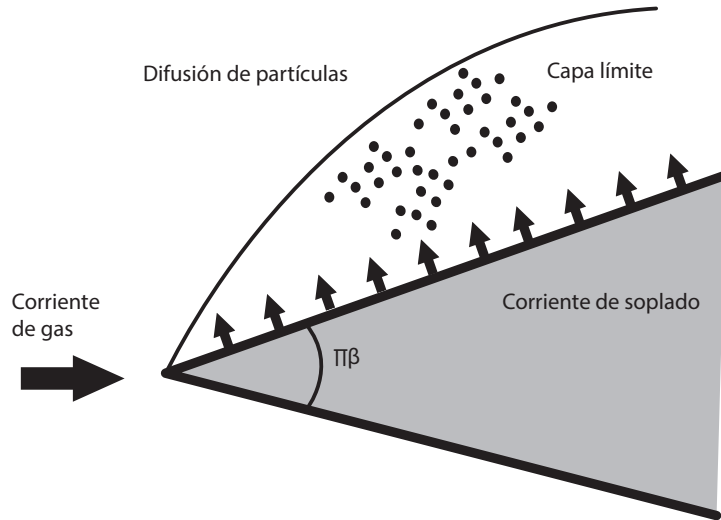


Figure 3.1: *Figura de la corriente de un aerosol sobre una superficie que tiene implantado un sistema de soplado de dirección normal a dicha superficie.*

Para un fluido considerado laminar y estacionario, las ecuaciones conocidas como ecuaciones de la capa límite laminar de Prandtl (Schlichting, 1979)² se pueden desarrollar partiendo de la ecuación de continuidad de los fluidos (Conservación de la masa):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \rho + \rho \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (3.5)$$

Donde los dos primeros términos corresponden a diferencias de densidad en el fluido y el último está ligado al campo de las velocidades.

La densidad de flujo de masa es $j = \rho v$ cuando la densidad del fluido (ρ) puede considerarse constante e independiente de la presión (hipótesis válida para bajos números de Mach), la ecuación de continuidad (3.5) se reduce a :

$$\nabla \mathbf{v} = 0 \quad (3.6)$$

Y de la ecuación de Conservación el Momento Lineal:

$$\frac{D}{Dt} \int_V (\rho \mathbf{v}) dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V (\rho \mathbf{v}) dV + \int_S (\rho \mathbf{v}) \mathbf{v} n dS = \int_V \Sigma F dV \quad (3.7)$$

²Las ecuaciones de la Capa Límite son una simplificación de las ecuaciones de Navier-Stokes. Estas fueron introducidas, por primera vez, por L. Prandtl en 1904.

Se obtiene la siguiente igualdad

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = F_{\text{presión}} + F_{\text{viscosas}} + F_{\text{exteriores}} \quad (3.8)$$

Para fluidos incompresibles y en presencia de fuerzas exteriores (F) se debe verificar la ecuación de Navier-Stokes:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + F \quad (3.9)$$

para altos números de Reynolds (Re), fuera de la capa límite los términos viscosos son mucho menores que los de inercia, pasando de una ecuación diferencial de segundo orden a una de primer orden:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + F \quad (3.10)$$

donde la única condición de contorno es que el fluido no puede atravesar la superficie, pero puesto que puede deslizar sobre ella, su velocidad no cambia en las proximidades de ella.

Pero en presencia de superficies y en las proximidades de estas, los efectos viscosos si deben tenerse en cuenta, por tanto de la ecuación de continuidad:

$$\nabla v = 0 \quad (3.11)$$

obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.12)$$

Y de la ecuación 3.10

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho(v\nabla)v = -\nabla p + \mu \nabla^2 v + F \quad (3.13)$$

y siendo un regimen estacionario $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ obtenemos

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.14)$$

Podemos aproximar que la distribución de presiones en el interior de la capa límite es una continuación de la distribución en la región exterior no viscosa $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = U \frac{dU}{dx}$ y el término $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ se puede despreciar, ya que los gradientes de velocidad son más intensos en la dirección transversal que en la longitudinal, de manera que la ecuación se reduce a:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.15)$$

Quedando definidas como las ecuaciones de la capa límite las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.16)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.17)$$

El flujo en el exterior de la capa límite alrededor de la superficie es potencial, estando dado por $U = Cx^m$ y donde m está relacionado con el ángulo de ataque $\pi\beta$ de la siguiente manera: $\beta = 2m/(m+1)$.

Asumiendo que con un flujo incompresible, la solución al problema para una geometría determinada es función de la variable de similaridad η , dada por la transformación de Illingworth (Rosenhead, 1963).

La autosimilaridad consiste en que la distribución de velocidades tiene la misma estructura a diferentes valores de x y depende de ambas coordenadas x e y , siendo la variable de similaridad:

$$\eta = \left(\frac{U}{(2-\beta)\nu x} \right)^{1/2} y \quad (3.18)$$

Introduciendo la función corriente $\Phi(x, y)$ tal que:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (3.19)$$

$$v = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (3.20)$$

Para que el flujo en el interior de la capa límite sea autosimilar, la función corriente (Φ) debe tomarse como:

$$\Phi = ((2 - \beta) \nu U x)^{1/2} f(\eta) \quad (3.21)$$

donde $f(\eta)$ es la función de Blasius que tiene en cuenta la parte autosimilar de la función de corriente en la capa límite.

Y donde las componentes longitudinal y transversal de velocidad, vienen dadas por:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = U f'(\eta) \quad (3.22)$$

$$v = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \left(\frac{\nu U}{(2 - \beta) x}\right)^{1/2} [(1 - \beta) \eta f'(\eta) - f(\eta)] \quad (3.23)$$

La sustitución de las componentes de la velocidad u, v en las ecuaciones de la capa límite, nos proporciona la siguiente ecuación diferencial, conocida como de Falkner-Skan para la función $f(\eta)$ (Rosenhead, 1963).

$$f'''(\eta) + f(\eta)f''(\eta) + \beta [1 - f'^2(\eta)] = 0 \quad (3.24)$$

La ecuación de Falkner-Skan no tiene solución analítica exacta conocida, esta ecuación diferencial es probablemente una de las más conocidas de la dinámica de fluidos y representa el problema de un fluido incompresible sobre una superficie infinita.

Existen diversos métodos para su resolución, mediante aproximaciones analíticas (Meksyn,1961) o mediante un análisis de homotopía (Liao, 1998).

3.4 Campo de velocidades. La función $f(\eta)$

En este estudio se utilizará el método adaptativo de Runge-Kutta-Fehlberg para su resolución. En este sentido, esta ecuación diferencial, de tercer orden, requiere de tres condiciones de contorno.

Cuando se impone externamente una velocidad de soplado en la superficie rígida, estas condiciones de contorno son las dos condiciones de no deslizamiento de la velocidad en la superficie $u = 0$ y $v = v_w$ para $y = 0$ y la de frontera $u = U$ cuando $y \rightarrow \infty$.

Estas tres condiciones se convierten en las siguientes condiciones de contorno adimensionales³:

$$f(0) = f_w, f'(0) = 0, f'(\infty) = 1 \quad (3.25)$$

siendo f_w negativo en el caso de soplado (veáse 3.23) que impone una dependencia en x de la velocidad de soplado en la superficie para que la capa límite siga siendo autosimilar.

Para resolver la ecuación de Falkner-Skan por el método de Runge-Kutta-Fehlberg, se utiliza un método de disparo, con inicio en el origen y suponiendo un valor para $f''(0)$, debiendo variarse este valor supuesto hasta alcanzar la condición de contorno lejos de la superficie: $f'(\infty) \rightarrow 1$

Lo que transforma un problema de condiciones de contorno en uno de condiciones iniciales con:

$$f(0) = f_w, f'(0) = 0, f''(0) = f_w'' \quad (3.26)$$

Obteniendo el valor de la tensión viscosa adimensional f_w'' . Valor fundamental para poder obtener la aproximación en el caso de soplados débiles.

En las figuras 3.2 a 3.10 a continuación se representan gráficamente las funciones $f(\eta)$, $f'(\eta)$ y $f''(\eta)$ para distintas condiciones de soplado y de valor de β .

³ $f(0) = 0$ siempre que no exista soplado, con soplado $f(0) = f_w$.

En la tabla 3.1 se obtienen los valores η cuando $f'(\eta)$ alcanza el valor unidad ($f'(\eta) = 1$) en función de los valores de soplado (f_w) y ángulo de ataque (β).

Como se puede observar, cuanto mayor es el soplado, la capa límite es más ancha y cuanto mayor es el ángulo, la capa límite es más estrecha.

Por ejemplo, para una superficie plana ($\beta = 0$) la anchura de la capa límite pasa de un $\eta = 3.43$ sin soplado a un $\eta = 4.22$ con un soplado de valor $f_w = -0.3$.

Y, sin soplado, la anchura de la capa límite varía de un $\eta = 3.43$ para $\beta = 0$ a un $\eta = 2.73$ para $\beta = 1/3$.

β	$f_w = 0.0$	$f_w = -0.1$	$f_w = -0.3$
0	$\eta = 3.43$	$\eta = 3.81$	$\eta = 4.22$
1/3	$\eta = 2.73$	$\eta = 2.88$	$\eta = 3.43$
1	$\eta = 2.05$	$\eta = 2.38$	$\eta = 2.74$

Tabla 3.1 Valores de η (anchura de la capa límite) dependiendo del soplado y el ángulo de la superficie.

También, es interesante estudiar el valor de η_c , que es el punto donde el soplado confluye con la corriente principal, y donde el perfil de concentración de partículas Ψ pasa instantáneamente de un valor próximo a cero a un valor uno, o lo que es lo mismo, en ausencia de difusión, limitaría la zona libre de partículas próxima a la superficie.

β	$f_w = 0.0$	$f_w = -0.1$	$f_w = -0.3$
0	$\eta_c = 0$	$\eta_c = 0.69878$	$\eta_c = 1.39214$
1/3	$\eta_c = 0$	$\eta_c = 0.545769$	$\eta_c = 1.04081$
1	$\eta_c = 0$	$\eta_c = 0.441497$	$\eta_c = 0.835035$

Tabla 3.2 Valores de η_c (lugar de confluencia del flujo con el soplado) dependiendo del soplado y el ángulo de la superficie.

En el caso de la solución de la ecuación 3.24 para una superficie plana ($\beta = 0$) y sin soplado ($f_w = 0$), obtenemos las funciones $f(\eta)$, $f'(\eta)$ y $f''(\eta)$ (Figura 3.2) en la que se puede observar que la función $f(\eta)$ tiene un valor 0 en la superficie, al igual que la función $f'(\eta)$, mientras que $f''(\eta)$ tiene un valor:

$$f''(0) = 0.471154 \quad (3.27)$$

A continuación, se muestran las gráficas 3.2, 3.3 y 3.4 de $f(\eta)$, $f'(\eta)$ y $f''(\eta)$ para los casos de $\beta = 0$ y $f_w = 0.0$, $f_w = -0.1$, $f_w = -0.3$ respectivamente:

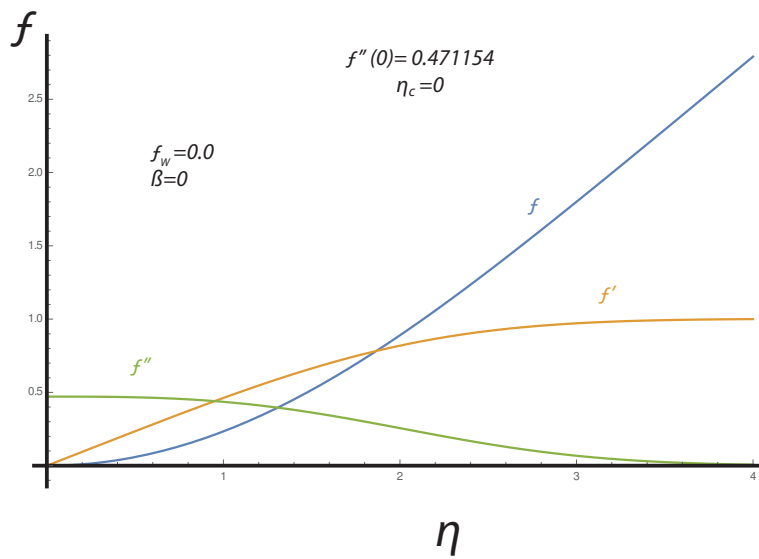


Figure 3.2: Funciones f , f' y f'' como soluciones de la ecuación de Falkner-Skan para $\beta = 0$ y con ausencia de soplado $f_w = 0$

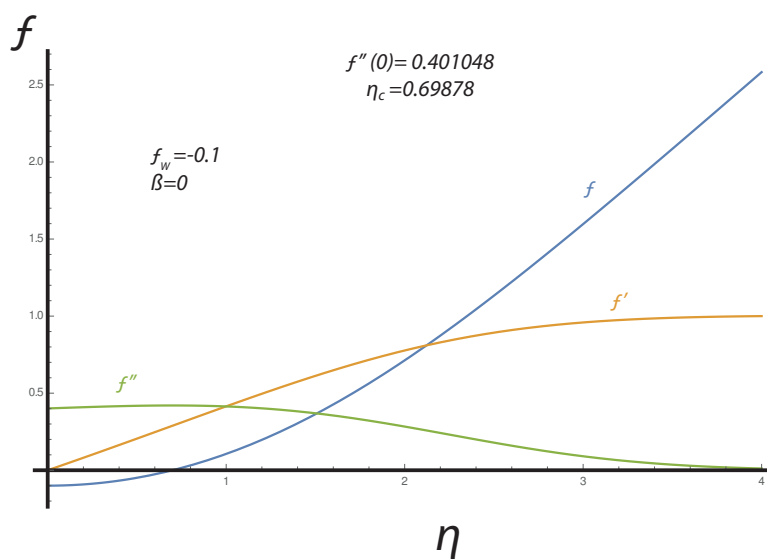


Figure 3.3: Funciones f , f' y f'' como soluciones de la ecuación de Falkner-Skan para $\beta = 0$ y un $f_w = -0.1$

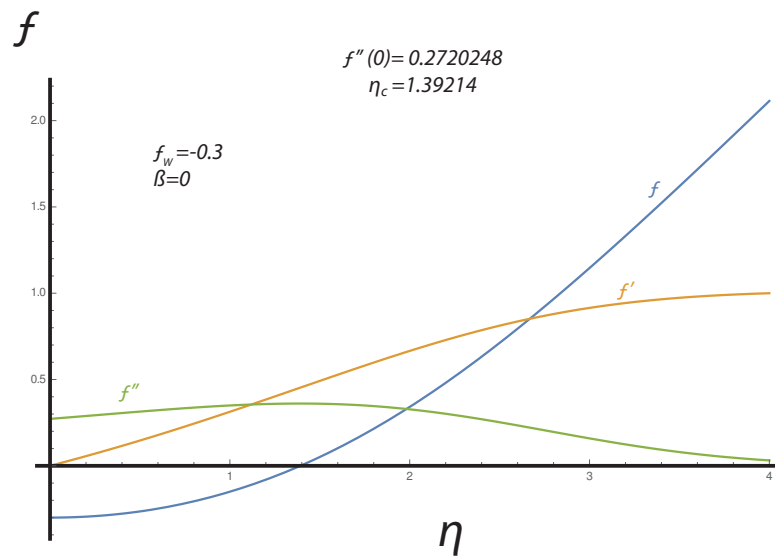


Figure 3.4: Funciones f , f' y f'' como soluciones de la ecuación de Falkner-Skan para $\beta = 0$ y un soplado de $f_w = -0.3$

Mientras que las figuras 3.5, 3.6 y 3.7 muestran las soluciones para $\beta = 1/3$ y $f_w = 0, -0.1$ y -0.3 respectivamente.

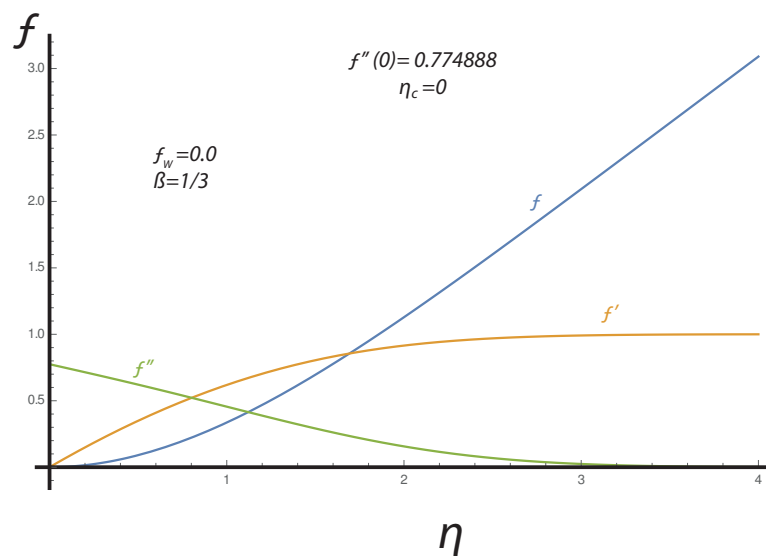


Figure 3.5: Funciones f , f' y f'' como soluciones de la ecuación de Falkner-Skan para $\beta = 1/3$ y con ausencia de soplado $f_w = 0$

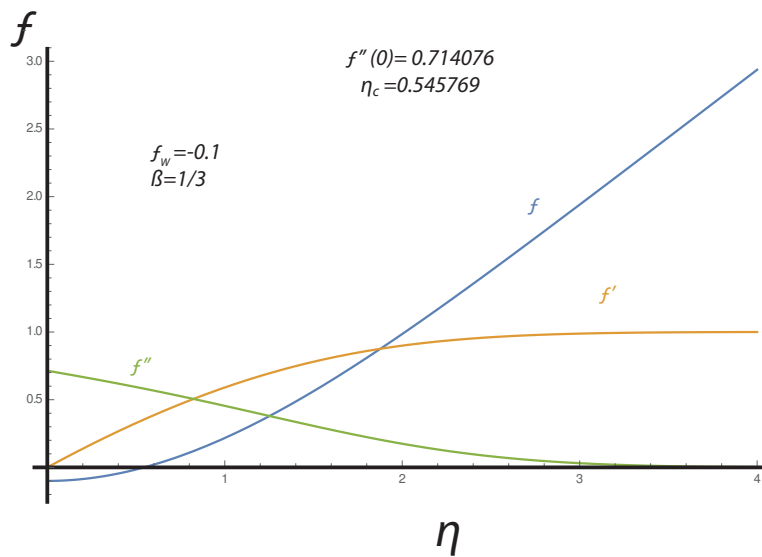


Figure 3.6: Funciones f , f' y f'' como soluciones de la ecuación de Falkner-Skan para $\beta = 1/3$ y un soplado de $f_w = -0.1$

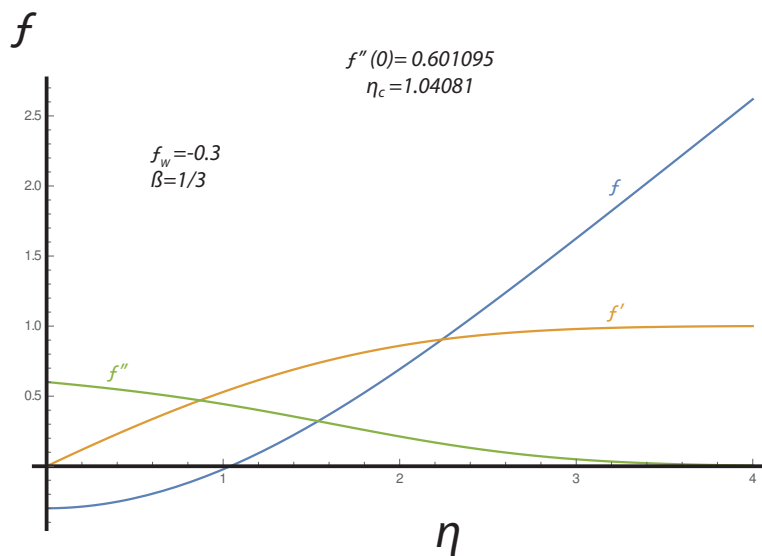


Figure 3.7: Funciones f , f' y f'' como soluciones de la ecuación de Falkner-Skan para $\beta = 1/3$ y un soplado de $f_w = -0.3$

Por ultimo, las figuras 3.8, 3.9 y 3.10 muestran las soluciones para $\beta = 1$ y $f_w = 0, -0.1$ y -0.3 respectivamente.

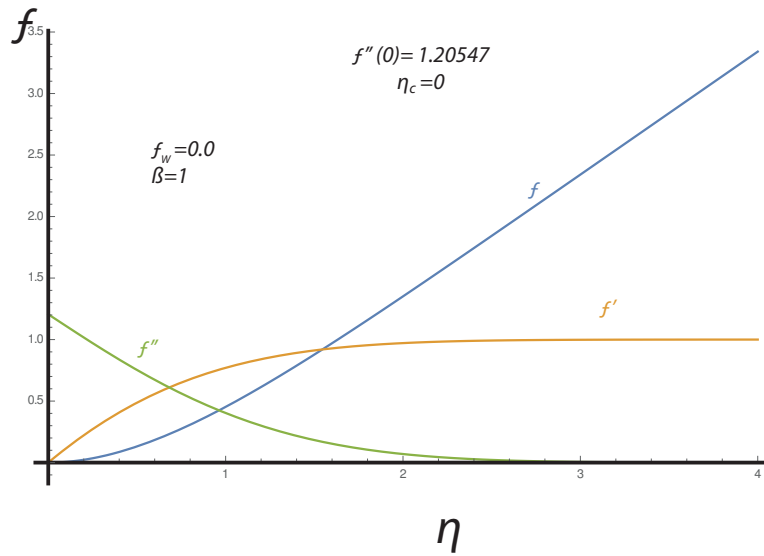


Figure 3.8: Funciones f , f' y f'' como soluciones de la ecuación de Falkner-Skan para $\beta = 1$ y un soplado de $f_w = 0.0$

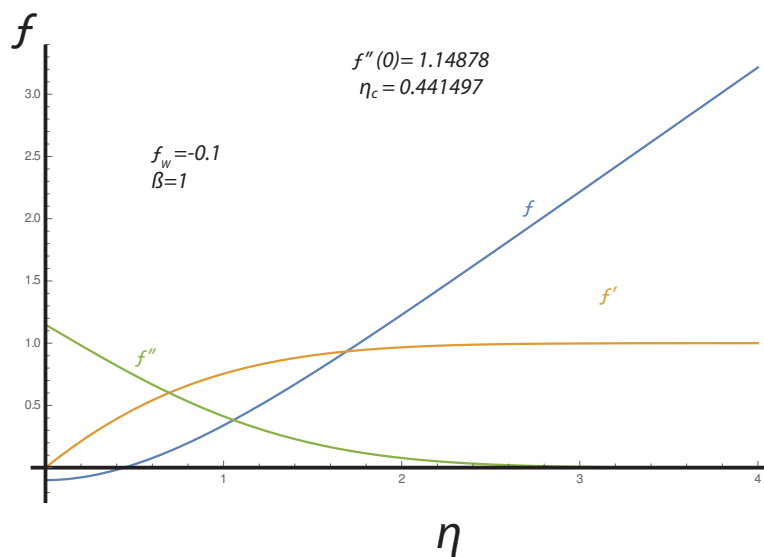


Figure 3.9: Funciones f , f' y f'' como soluciones de la ecuación de Falkner-Skan para $\beta = 1$ y un soplado de $f_w = -0.1$

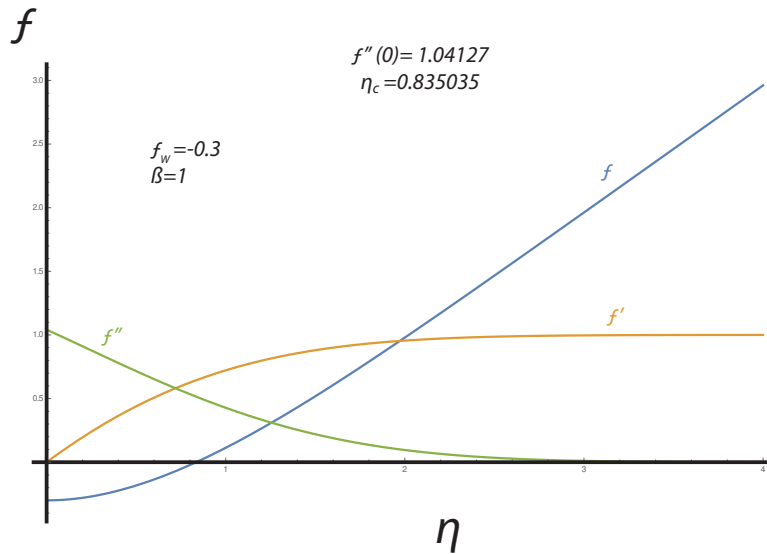


Figure 3.10: Funciones f , f' y f'' como soluciones de la ecuación de Falkner-Skan para $\beta = 1$ y un soplado de $f_w = -0.3$

El cálculo utilizado para su resolución se basa en la integración adaptativa de Runge-Kutta-Fehlberg⁴, y un método de disparo para encontrar la tensión viscosa adimensional f_w'' en cada interacción⁵.

3.5 Geometría y soplado

3.5.1 El parámetro de geometría (β)

El parámetro geométrico β establece el ángulo de ataque de la superficie ($\pi\beta$), en el presente estudio varía desde los 0 grados (superficie plana) hasta los 180 grados (superficie perpendicular a la corriente del gas).

En el presente trabajo, se ha estudiado su influencia con tres valores $\beta = 0$, $\beta = 1/3$ y $\beta = 1$.

Además, este parámetro está relacionado matemáticamente de la siguiente manera con la estructura del flujo exterior a la capa límite (lejos de la superficie) dado por:

$$U = Cx^m \quad (3.28)$$

⁴K. Topfer resolvió numéricamente la ecuación de Blasius mediante la aplicación del método adaptativo de Runge-Kutta (Topfer, 1912)

⁵El método de disparo para la resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) consiste en sustituir un problema lineal con valores de frontera por otro problema de valores iniciales.

donde m está relacionado con el ángulo de ataque $\pi\beta$ de la siguiente manera:

$$\beta = 2m/(m + 1) \quad (3.29)$$

Por tanto, según la ecuación 3.29 para el flujo sobre una placa plana (longitudinal a la corriente) los valores son: $\beta = 0$ y $m=0$ y para el flujo en torno a un punto de remanso bidimensional (placa transversal a la corriente) los valores son: $\beta = 1$ y $m=1$.

3.5.2 El parámetro adimensional de soplado (f_w)

El parámetro adimensional de soplado (f_w) es negativo por definición, y teniendo en cuenta cual es la componente de la componente de la velocidad transversal v :

$$v = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \left(\frac{\nu U}{(2-\beta)x}\right)^{1/2}[(1-\beta)\eta f'(\eta) - f(\eta)] \quad (3.30)$$

Se puede definir el parámetro adimensional de soplado f_w de la manera siguiente:

$$f_w = -v_w \frac{1}{\left(\frac{\nu U}{(2-\beta)x}\right)^{1/2}} \quad (3.31)$$

donde se observa que éste es proporcional al valor del soplado real v_w y de signo contrario⁶. Para que el flujo en la capa límite siga siendo autosimilar, el soplado impuesto externamente debe tener una dependencia con la coordenada longitudinal que mantenga constante el término de la derecha en (3.31).

3.6 Métodos numéricos y comparativas

3.6.1 Método adaptativo de Runge-Kutta-Fehlberg

La integración adaptativa se basa en la división del intervalo de integración en pequeños intervalos sucesivos más refinados, utilizando el refinado donde la función varía rápidamente y el espaciado mayor donde la función varía más lentamente, con el objetivo de realizar un menor esfuerzo de cálculo.

⁶En el caso de sistemas de succión, este parámetro de soplado adimensional tomaría un valor positivo.

Los métodos de Runge-Kutta logran la resolución de las ecuaciones diferenciales mediante la obtención de un valor de la función a través de un valor anterior, la pendiente estimada de la función y el tamaño del paso, o en términos matemáticos:

$$y_{i+1} = y_i + \phi h \quad (3.32)$$

Donde ϕ es la pendiente estimada y h es el tamaño del paso. Aquí, la pendiente estimada se usa para extrapolar desde un valor y_i a un nuevo valor y_{i+1} en una distancia h . Este procedimiento se aplica paso a paso para obtener un valor posterior y así dibujar la trayectoria de la función solución.

Estos métodos tienen la forma generalizada de la ecuación:

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h \quad (3.33)$$

Donde $\phi(x_i, y_i, h)$ se conoce como función incremento, que puede interpretarse como la pendiente representativa del intervalo. Dicha función tiene la forma de:

$$\phi = a_1k_1 + a_2k_2 + \dots + a_nk_n \quad (3.34)$$

Siendo las a constantes y las k :

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad (3.35)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h) \quad (3.36)$$

$$k_3 = f(x_i + p_2h, y_i + q_{21}k_1h + q_{22}k_2h) \dots \quad (3.37)$$

$$k_n = f(x_i + p_{n-1}h, y_i + q_{n-1,1}k_1h + q_{n-1,2}k_2h + \dots + q_{n-1,n-1}k_{n-1}h) \quad (3.38)$$

donde las p y las q son constantes.

El método adaptativo de Runge-Kutta-Fehlberg ajusta el tamaño de paso y calcula el error mediante dos predicciones de diferente orden.

3.6.2 El Método de disparo

El método de disparo se basa en convertir un problema de valor de frontera en un problema de valor inicial equivalente, ya que en el caso de la ecuación de Falkner-Skan tenemos las condiciones iniciales para $f(0) = f_w$ y $f'(0) = 0$, y un valor frontera para $f'(\infty) = 1$.

Mediante este método de disparo se obtiene el valor inicial $f''(0)$ que recibe el nombre de tensión viscosa adimensional (f_w''), y que permite resolver la ecuación de Falkner-Skan al transformarse en un problema de valores iniciales.

En este método se consideran unos valores de frontera de una ecuación diferencial de la forma $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

$$y(0) = v \quad (3.39)$$

$$y(b) = w \quad (3.40)$$

Básicamente, se toma un valor arbitrario (valor de disparo) $y'(0) = d_1$ y se resuelve como un problema de valor inicial y se obtiene un valor frontera $y'(b) = d_2$. Si este valor difiere del deseado, se toma un nuevo valor $y'(0) = d_2$ hasta que se obtenga un valor que cumpla:

$$d_2 > d_1 \Rightarrow si \Rightarrow y(b) < w \quad (3.41)$$

$$d_2 < d_1 \Rightarrow si \Rightarrow y(b) > w \quad (3.42)$$

Posteriormente, se resuelve el problema con los nuevos valores iniciales. Si la solución difiere de la deseada $y(b)_2 \neq w$, se calcula la nueva condición inicial:

$$d_3 = \frac{w - y(b)_2}{y(b) - y(b)_2} d_1 + \frac{w - y(b)}{y(b)_2 - y(b)} d_2 \quad (3.43)$$

Finalmente, con el nuevo valor $y'(0) = d_3$, se resuelve la ecuación con las dos condiciones iniciales.

En nuestro caso, se ha utilizado este método para poder hallar el valor $f''(0)$ a partir del valor frontera $f'(\infty)$, y así contar con tres condiciones iniciales para resolver la ecuación diferencial ($f(0)$, $f'(0)$ y $f''(0)$).

3.6.3 Comparativa de la función de corriente $f(\eta)$ para distintos ángulos

Tras la realización del cálculo numérico, en la figura 3.11 se muestran las gráficas que definen el comportamiento del gas cerca de la superficie para el valor de $\beta = 0$, en la figura 3.12 para un valor de $\beta = 1/3$ y por último, la figura 3.13 para un $\beta = 1$ para distintos valores de soplado f_w .

En las figuras a continuación, también se especifica el valor b_w'' que denota el valor de $f''(0)$ en ausencia de soplado ($f_w = 0$).

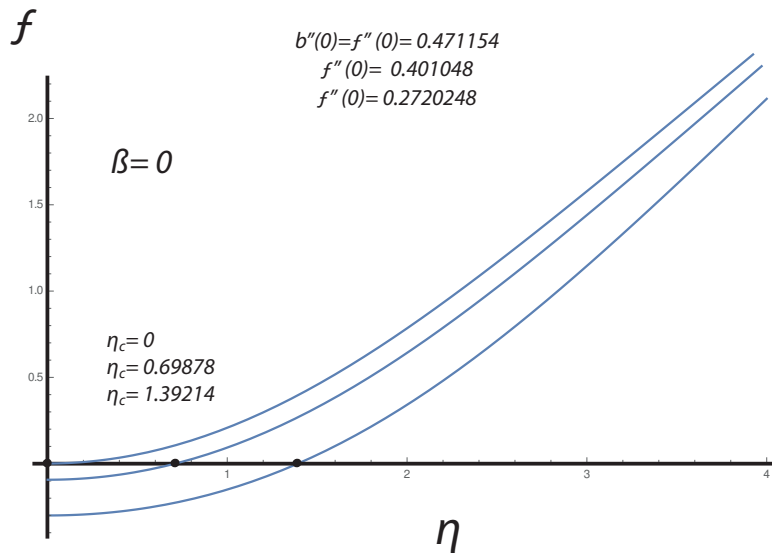


Figure 3.11: Función corriente $f(\eta)$ frente a la variable de similitud para una geometría $\beta = 0$.

Aquí se obtienen los valores de η_c críticos para distintos soplados en una superficie plana ($\beta = 0$) y el valor de b_w'' , que es fundamental en las aproximaciones para soplados débiles.

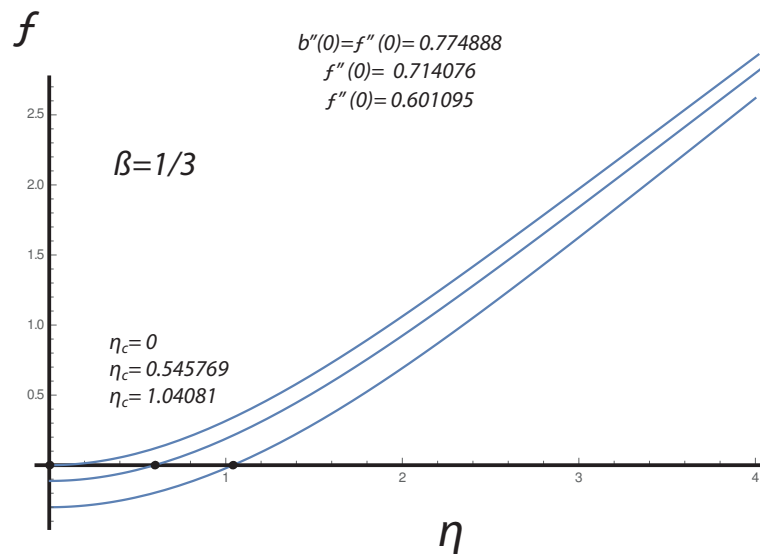


Figure 3.12: *Función corriente $f(\eta)$ frente a la variable de similaridad para una geometría $\beta = 1/3$.*

Aquí se obtienen los valores de η_c críticos para distintos sopladors en una superficie con un ángulo de ataque de 60° ($\beta = 1/3$) y el valor de b''_w , que es fundamental en las aproximaciones para sopladors débiles.

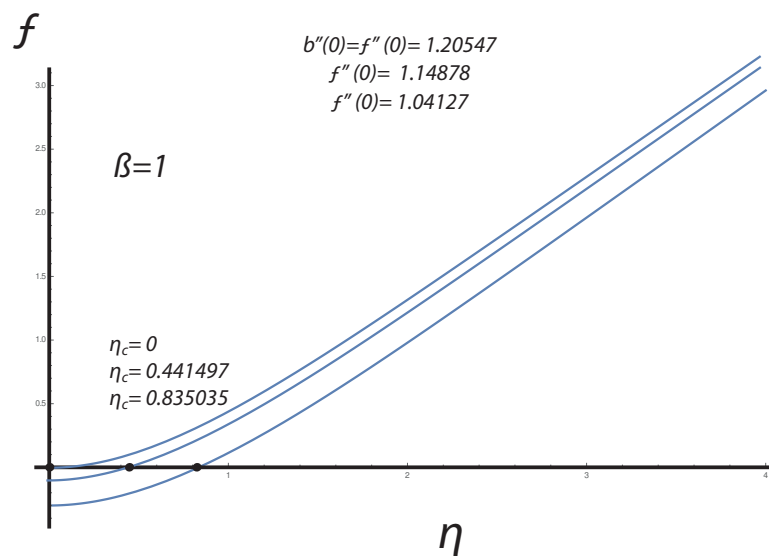


Figure 3.13: *Función corriente $f(\eta)$ frente a la variable de similaridad para una geometría $\beta = 1$.*

Aquí se obtienen los valores de η_c críticos para distintos sopladors en una superficie transversal a la corriente ($\beta = 1$) y el valor de b''_w , que es fundamental en las aproximaciones para sopladors débiles.

Las figuras muestran la función de corriente frente a la variable de similaridad para diferentes valores del parámetro adimensional de soplado f_w y los puntos de confluencia de la corriente principal y de soplado (η_c).

Se observa que cuanto mayor es el ángulo de ataque $\pi\beta$, más cerca de la superficie está el punto de confluencia entre la corriente de soplado y la principal (η_c) y por tanto, más estrecha es la región libre de partículas próxima a la superficie.

Para una superficie plana ($\beta = 0$):

$$\begin{aligned}\eta_c &= 0 \text{ para } f_w = 0.0 \\ \eta_c &= 0.69878 \text{ para } f_w = -0.1 \\ \eta_c &= 1.39214 \text{ para } f_w = -0.3\end{aligned}$$

Para una superficie con un ángulo de 60 grados ($\beta = 1/3$):

$$\begin{aligned}\eta_c &= 0 \text{ para } f_w = 0.0 \\ \eta_c &= 0.545769 \text{ para } f_w = -0.1 \\ \eta_c &= 1.04081 \text{ para } f_w = -0.3\end{aligned}$$

Para una superficie con un ángulo de 180 grados ($\beta = 1$):

$$\begin{aligned}\eta_c &= 0 \text{ para } f_w = 0.0 \\ \eta_c &= 0.441497 \text{ para } f_w = -0.1 \\ \eta_c &= 0.835035 \text{ para } f_w = -0.3\end{aligned}$$

Además, cuanto mayor es el ángulo, mayor es el valor de $b_w'' = f''(0)$, que es el valor de la función $f''(0)$ cuando el soplado es nulo. Valor que condicionará las regiones donde son válidas las aproximaciones que se desarrollan en el capítulo 5.

También se desprende de las gráficas anteriores que la capa límite es más estrecha cuanto mayor es el ángulo y como no puede ser de otra manera, más ancha cuanto mayor es el soplado.

Capítulo 4

Análisis del transporte

4.1 Tasa de deposición (J). Caso general

En esta sección se va a exponer cuales son las ecuaciones que rigen el transporte y la deposición de las partículas en la superficie teniendo en cuenta, únicamente, los transportes por advección y difusión.

En condiciones estacionarias, la ecuación que gobierna la conservación de la fracción de masa normalizada $\Psi = \omega/\omega_\infty$, dentro la corriente de un gas es:

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\Psi = -\nabla \mathbf{j}_{diff} \quad (4.1)$$

donde j_{diff} es el flujo de masa inducido por difusión browniana y tiene la forma (Garcia-Ybarra & Castillo, 1997):

$$\mathbf{j}_{diff} = -\rho D \nabla \Psi \quad (4.2)$$

Siendo D el coeficiente de difusión y donde no se tienen en cuenta la influencia de otros mecanismos de transporte, dentro de la capa límite, como la termofóresis (Rosner, Mackowski, Tassopoulos, Castillo, & Garcia-Ybarra, 1992; Williams & Loyalka, 1991). Analizando el transporte a través de la ecuación para la fracción de masa de las partículas:

$$u \frac{\partial \Psi}{\partial x} + v \frac{\partial \Psi}{\partial y} = -D \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \quad (4.3)$$

Y escribiendo la ecuación en variables adimensionales mediante la transformación de similaridad (3.18), obtenemos:

$$\frac{1}{Sc} \Psi'' + f \Psi' = 0 \quad (4.4)$$

donde el número de Schmidt se define como:

$$Sc = \frac{\nu}{D}$$

siendo ν la viscosidad cinemática y D el coeficiente de difusión browniano de las partículas en el gas. El término f de la ecuación es la velocidad vertical adimensional del fluido.

El primer término de la ecuación (4.4) corresponde a la difusión browniana del aerosol y el segundo término, se refiere al transporte por advección.

El número de Schmidt proporciona una estimación de la importancia relativa del transporte advectivo por arrastre del gas, frente al transporte de masa por difusión browniana. Pequeños valores de Sc se corresponderían con una difusión dominante, mientras que en la situación de interés aquí, el número de Schmidt toma valores superiores a la unidad y aumenta con el tamaño y masa de las partículas del aerosol.

La tasa de deposición de partículas sobre la superficie (J) está definida por el flujo de masa adimensional autosimilar evaluado en la superficie sólida (Garcia-Ybarra & Castillo, 1997).

$$J = -\frac{(\mathbf{j}_{diff} \cdot \mathbf{n})_w}{\rho U} \sqrt{\frac{2 \rho x U}{(m+1) \mu}} = \frac{1}{Sc} \Psi'(0) \quad (4.5)$$

4.2 El parámetro adimensional de adsorción (γ)

El parámetro adimensional de adsorción (γ) varía desde el valor nulo (no existe adsorción) hasta valores positivos, y aunque para la resolución de la ecuación de concentración (ecuación 4.4) normalmente se consideran como valor de frontera la condición "perfect sink" (Song et al., 1993), o dicho de otra manera $\Psi(0) = 0$, en este trabajo se ha resuelto tomando como condición de frontera $\Psi_\gamma(0) = J_a/(\gamma + J_a - f_w)$, donde se tiene en cuenta una acomodación parcial de la concentración en la superficie.

Tomando el modelo de una superficie porosa, en el que se estudia el fenómeno de transporte de masa por difusión y adsorción, donde la concentración de partículas es gobernada por la condición de frontera de Robin. Tenemos que, la condición de contorno en la superficie porosa ($y=0$) se escribe:

$$\gamma^* \Psi = \mathbf{n}(D \nabla \Psi - v \Psi) \quad (4.6)$$

Siendo γ^* el coeficiente de adsorción, n la normal a la superficie, v la velocidad normal a la superficie y Ψ la concentración normalizada de partículas en la superficie.

Aquí, el parámetro de adsorción γ^* tiene las dimensiones de una velocidad y se le puede asemejar al fenómeno de una succión, aunque la adsorción es un fenómeno superficial donde las fases permanecen separadas y la succión es un fenómeno de masa y volumen¹.

Por tanto, el parámetro dimensional de adsorción γ tomaría la siguiente forma a lo largo de la superficie ²:

$$\gamma = \gamma^* \frac{1}{\left(\frac{\nu U}{(2 - \beta) x}\right)^{1/2}} \quad (4.7)$$

En términos de relevancia en el transporte de partículas y su deposición, se puede establecer que la adsorción, en valor absoluto, tiene un valor aproximado al de un soplado débil.

Por tanto, el valor del coeficiente adimensional (γ) es del orden del coeficiente adimensional de soplado (f_w), pero de signo contrario.

$$|\gamma| \simeq |f_w| \quad (4.8)$$

Y ambos coeficientes son importantes a la hora de establecer la condición de frontera de la función de la concentración en la superficie ($\Psi(0)$).

4.3 Acomodación total, $\Psi_a(0) = 0$, J_a

El siguiente paso es comprobar el comportamiento para el caso de acomodación total de la concentración en la superficie Ψ_a , donde la concentración en la superficie es nula ($\Psi_a(0) = 0$).

¹La adsorción es el proceso por el cual pequeñas partículas son retenidas en la superficie de un material en contraposición de la succión que es un fenómeno de transporte de masa y volumen.

²Este valor de la adsorción solo se ha considerado para hallar el valor de frontera de la concentración en la superficie $\Psi(0)$.

Las partículas que alcanzan la superficie son instantaneamente eliminadas de la corriente del gas, por lo que la concentración de partículas en la superficie puede considerarse como nula (Garcia-Ybarra & Castillo, 1997), esta simplificación es comúnmente denominada como "*perfect sink*" (Song, 1993).

Por tanto, como la condición de frontera la fracción de masa debe ajustarse al valor uniforme en el exterior de la capa límite, las dos condiciones de frontera de la función Ψ son:

$$\begin{aligned}\Psi_a(0) &= 0 \\ \Psi_a(\infty) &= 1\end{aligned}$$

Integrando la ecuación para la distribución de partículas, la solución completa está dada por el perfil de Polhausen (White, 1991)

$$\Psi_a = \frac{1}{\int_0^\infty \exp[-Sc \int_0^\xi f(\xi) d\xi] d\eta} \int_0^\eta \exp[-Sc \int_0^\xi f(\xi) d\xi] d\eta \quad (4.9)$$

en términos de la función auxiliar $E(\eta)$ para acomodación completa

$$E(\eta) = \int_0^\eta \exp[-Sc \int_0^\xi f(\xi) d\xi] d\eta \quad (4.10)$$

$$E(\infty) = E(\eta \rightarrow \infty) \quad (4.11)$$

$$\Psi_a = \frac{E(\eta)}{E(\infty)} \quad (4.12)$$

Por lo que la tasa de deposición queda establecida como

$$J_a = \frac{1}{Sc} \Psi'_a(0) = \frac{1}{Sc E(\infty)} \quad (4.13)$$

En las siguientes gráficas se muestra la distribución de la fracción de masa normalizada en el interior de la capa límite para diferentes valores de soplado ($f_w = 0, -0.1$ y -0.3) y diferentes ángulos ($\beta = 0, \frac{1}{3}$ y 1) con distintos valores del número de Schmidt.

También, se muestra de manera gráfica la concentración de partículas y la tasa de deposición de partículas J con diferentes valores de soplado y ángulos en relación con el Sc .

Para un valor de $\beta = 0$ (superficie plana, paralela a la corriente)

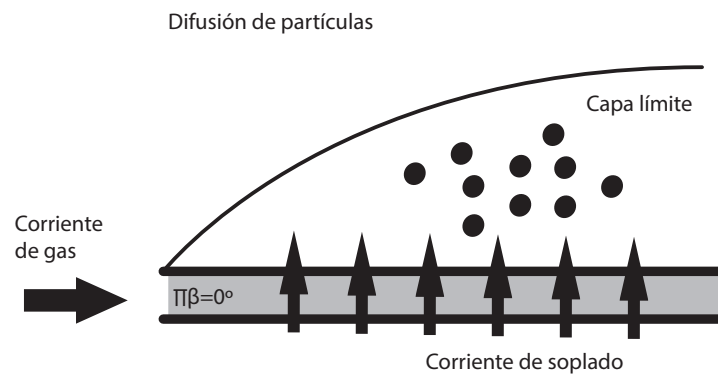


Figure 4.1: *Figura de la corriente de un aerosol sobre una placa plana longitudinal a la corriente fluida ($\beta = 0$) que tiene implantado un sistema de soplado de dirección normal a dicha superficie.*

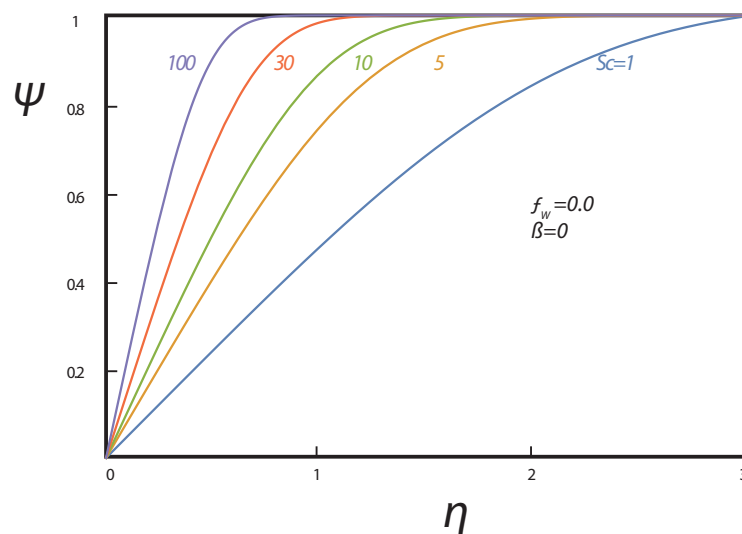


Figure 4.2: *Perfil de concentración de partículas dentro de la capa límite de un aerosol sobre una placa plana, para distintos valores del número Schmidt, sin soplado ($f_w = 0$) y una acomodación perfecta ($\gamma = 0$).*

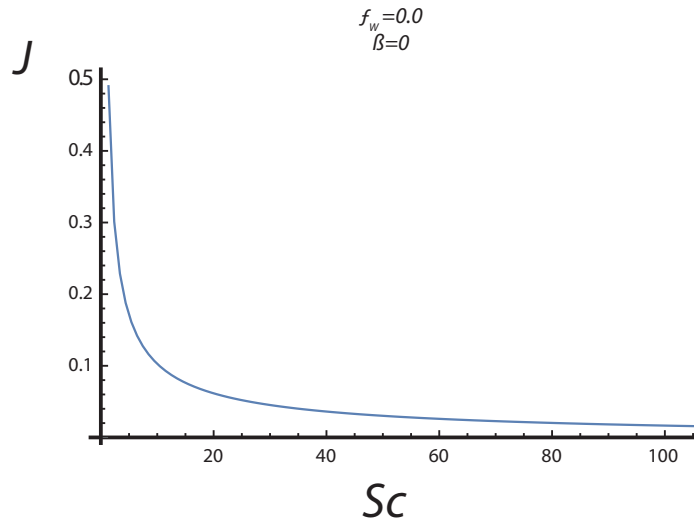


Figure 4.3: Tasa de deposición de partículas de un aerosol normalizada sobre una placa plana para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado nulo $f_w = 0.0$ y con una acomodación perfecta ($\gamma = 0$).

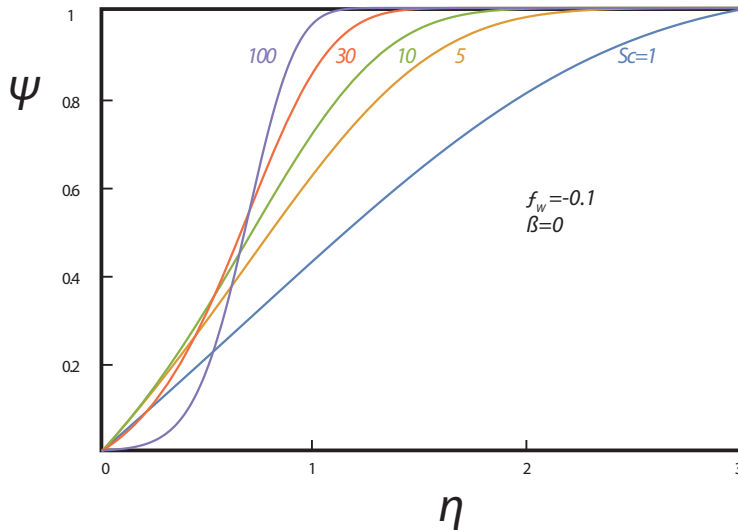


Figure 4.4: Perfil de concentración de partículas dentro de la capa límite de un aerosol sobre una placa plana para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = -0.1$ y una acomodación perfecta ($\gamma = 0$).

Como se puede observar en la gráfica el valor de $\eta_c = 0.69878$, tal y como se obtuvo en el capítulo anterior al hallar el punto de confluencia entre la corriente fluida y la corriente de soplado.

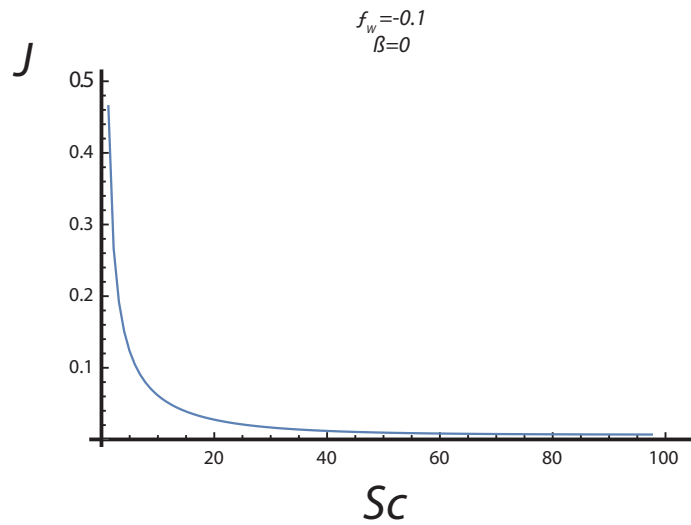


Figure 4.5: Tasa de deposición de partículas normalizada dentro de un aerosol sobre una superficie plana para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = -0.1$ y una acomodación perfecta ($\gamma = 0$).

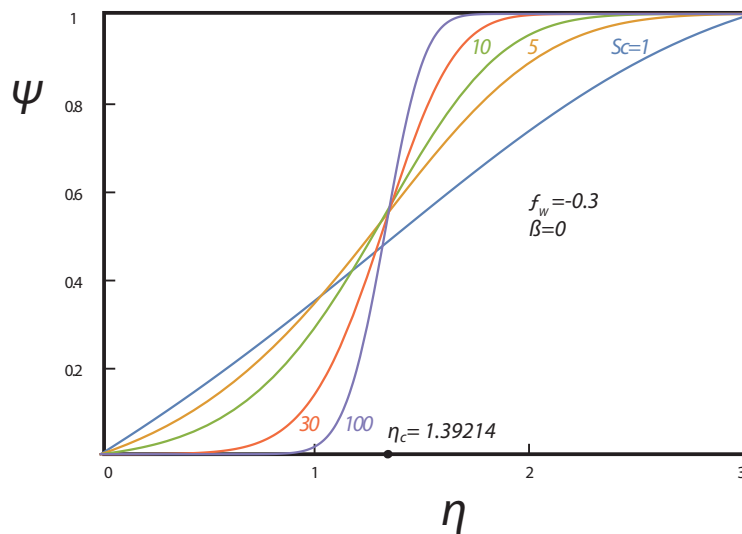


Figure 4.6: Perfil de concentración de partículas dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie plana para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = -0.3$ y una acomodación perfecta ($\gamma = 0$).

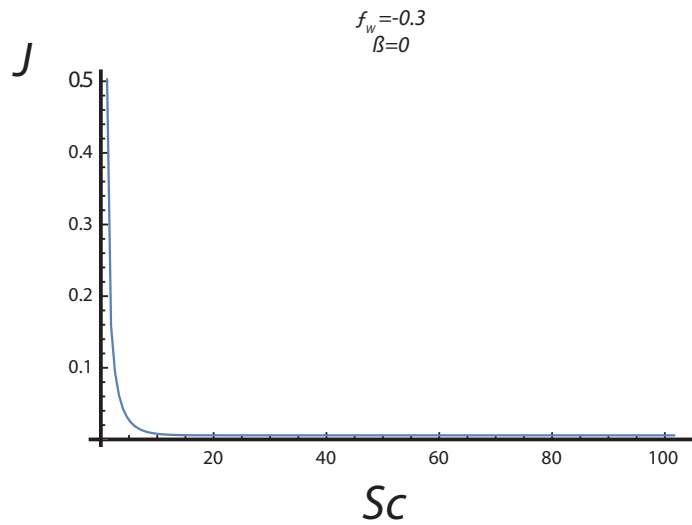


Figure 4.7: Tasa de deposición de partículas normalizada de un aerosol sobre una superficie plana para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = -0.3$ y una acomodación perfecta ($\gamma = 0$).

Para $\beta = 1/3$ (ángulo de 60°)

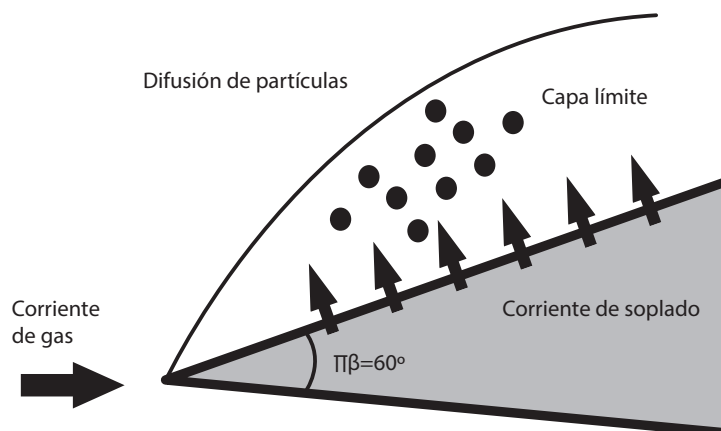


Figure 4.8: Figura de la corriente de un aerosol sobre una superficie ($\beta\pi = 60$) que tiene implantado un sistema de soplado de dirección normal a dicha superficie.

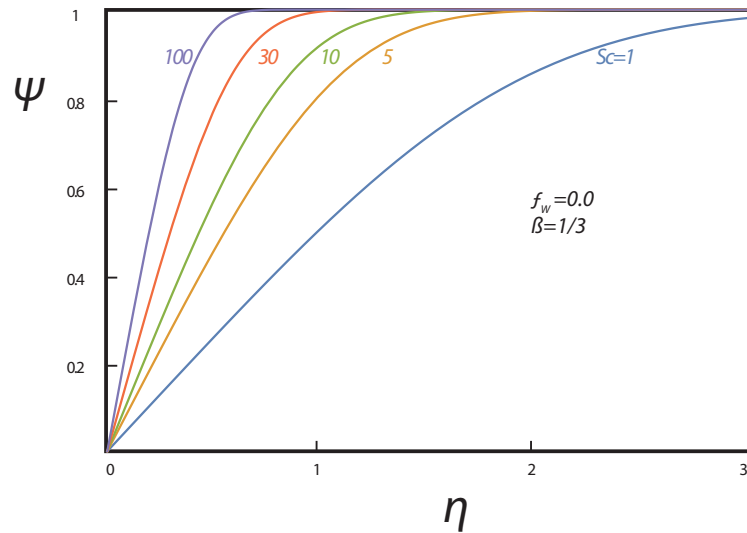


Figure 4.9: Perfil de concentración de partículas dentro de la capa límite de un aerosol sobre un objeto en forma de cuña de 60° ($\beta = 1/3$) para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado nulo $f_w = 0.0$ y una acomodación perfecta ($\gamma = 0$).

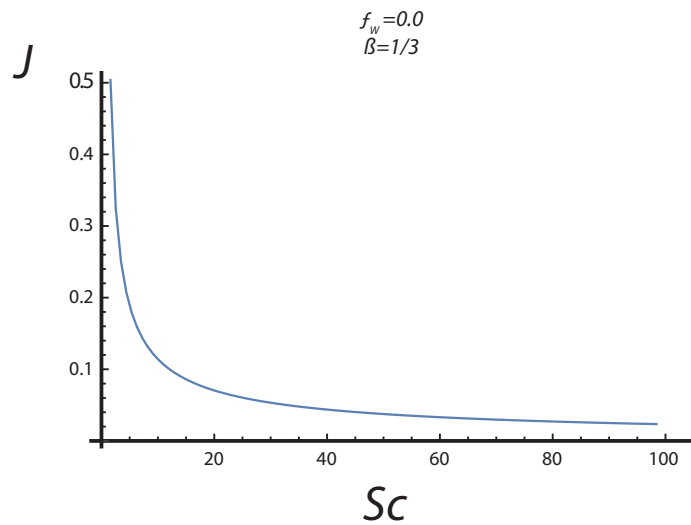


Figure 4.10: Tasa de deposición de partículas dentro de la capa límite de un aerosol sobre un objeto en forma de cuña de 60° ($\beta = 1/3$) para distintos valores del número Schmidt, para soplado nulo $f_w = 0.0$ y acomodación perfecta ($\gamma = 0$).

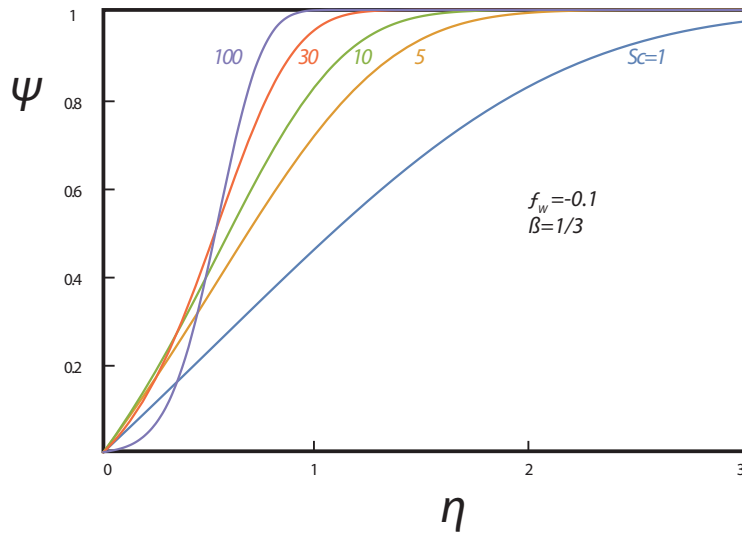


Figure 4.11: Perfil de concentración de partículas dentro de la capa límite de un aerosol sobre un objeto en forma de cuña de 60° ($\beta = 1/3$) para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = -0.1$ y una acomodación perfecta ($\gamma = 0$).

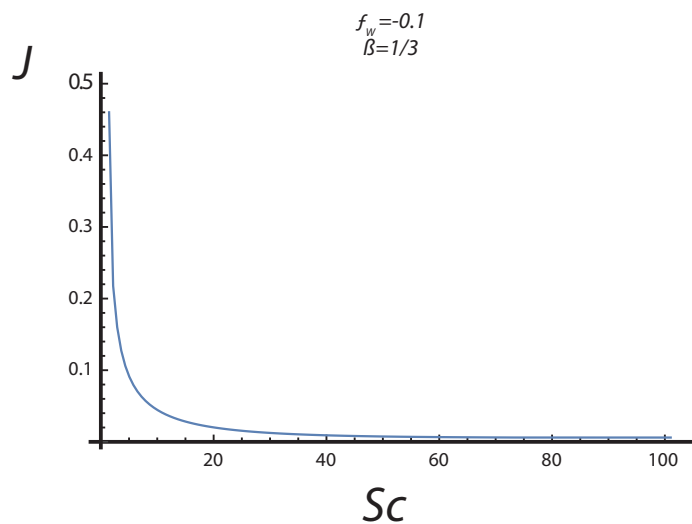


Figure 4.12: Tasa de deposición de partículas dentro de la capa límite de un aerosol sobre un objeto en forma de cuña de 60° ($\beta = 1/3$) para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = -0.1$ y una acomodación perfecta ($\gamma = 0$).

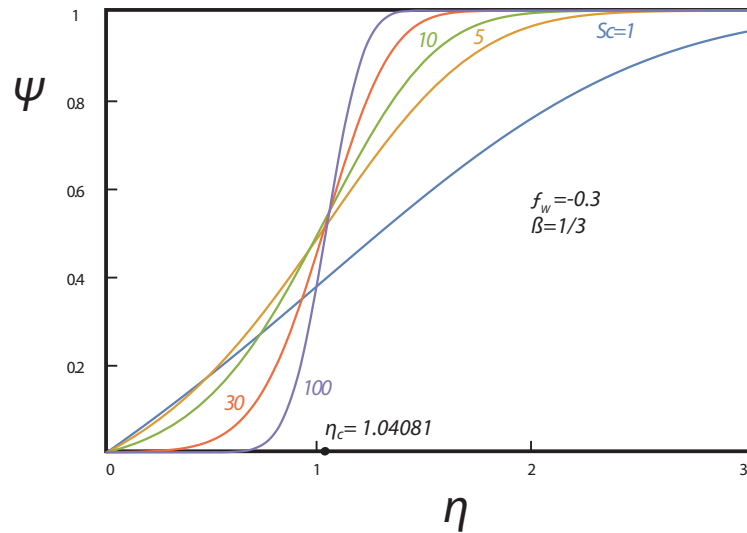


Figure 4.13: Perfil de concentración de partículas dentro de la capa límite de un aerosol sobre un objeto en forma de cuña de 60° ($\beta = 1/3$) para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = -0.3$ y una acomodación perfecta ($\gamma = 0$).

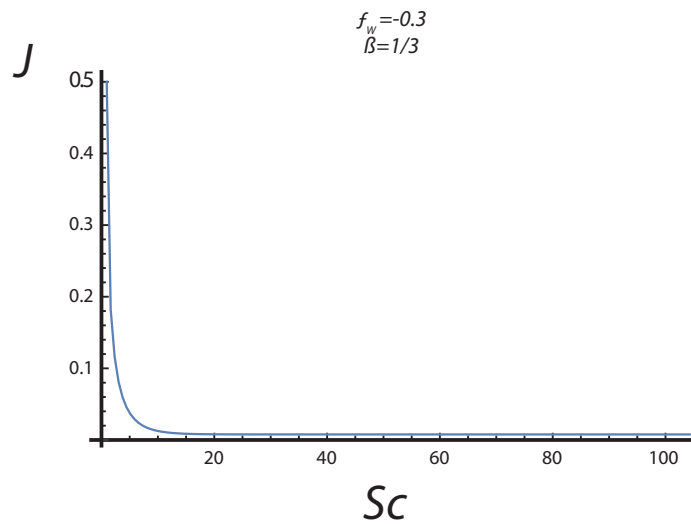


Figure 4.14: Tasa de deposición de partículas sobre un objeto en forma de cuña de 60° ($\beta = 1/3$) para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = -0.3$ y una acomodación perfecta.

Para un valor de $\beta = 1$ (ángulo de 180°)

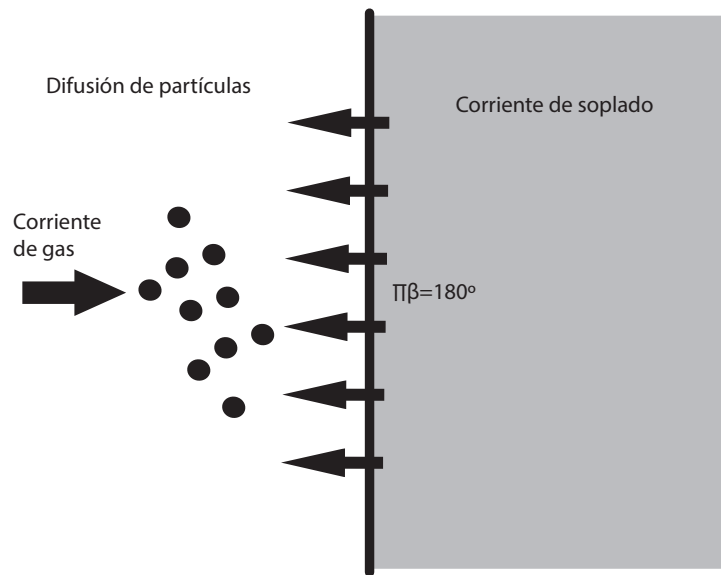


Figure 4.15: *Figura de la corriente de un aerosol sobre una superficie plana perpendicular a la corriente del gas ($\beta = 1$) que tiene implantado un sistema de soplado de dirección normal a dicha superficie.*

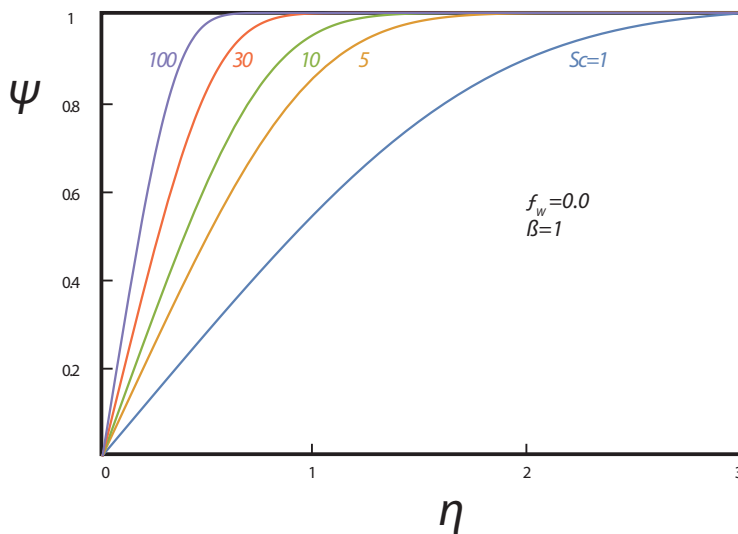


Figure 4.16: *Perfil de concentración de partículas dentro de la capa límite de un aerosol sobre una placa plana perpendicular a la corriente $\beta = 1$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado nulo $f_w = 0.0$ y una acomodación perfecta ($\gamma = 0$).*

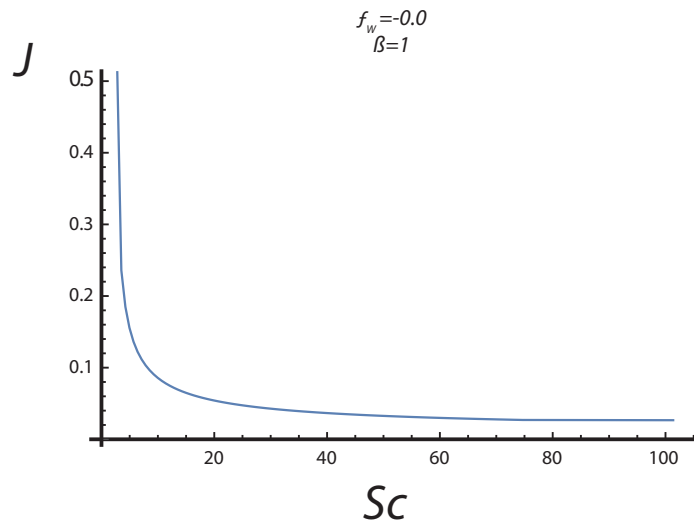


Figure 4.17: Tasa de deposición de partículas J dentro de la capa límite de un aerosol sobre una placa plana perpendicular a la corriente $\beta = 1$ para distintos valores del número Schmidt, para soplado nulo $f_w = 0.0$ y acomodación perfecta ($\gamma = 0$).

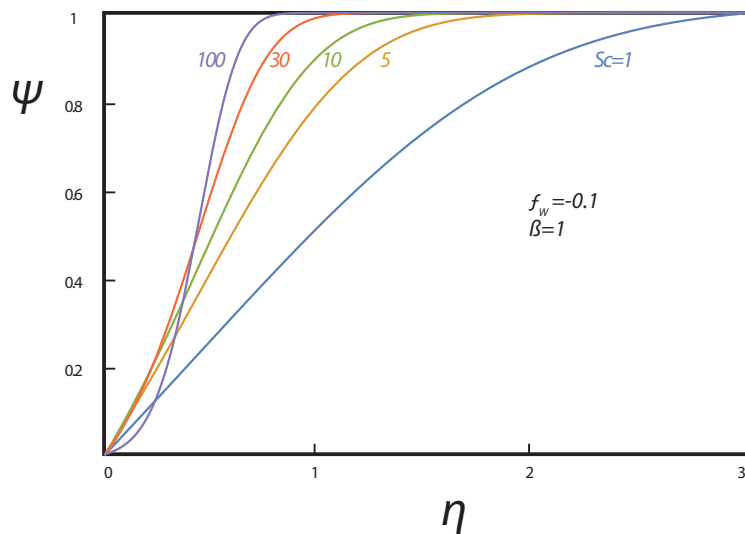


Figure 4.18: Perfil de concentración de partículas dentro de la capa límite de un aerosol sobre una placa plana perpendicular a la corriente $\beta = 1$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor de soplado $f_w = -0.1$ y una acomodación perfecta ($\gamma = 0$).

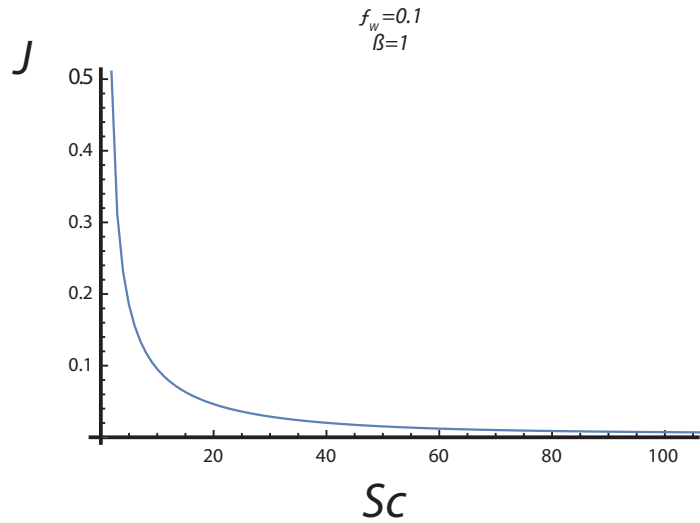


Figure 4.19: Tasa de deposición de partículas de un aerosol sobre una placa plana $\beta = 1$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor de soplado $f_w = -0.1$ y una acomodación perfecta ($\gamma = 0$).

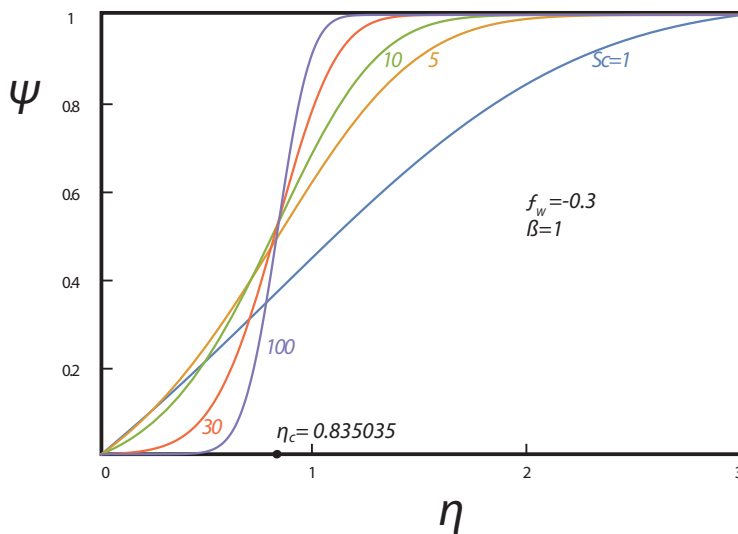


Figure 4.20: Perfil de concentración de partículas dentro de la capa límite de un aerosol sobre una placa plana perpendicular a la corriente $\beta = 1$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor de soplado $f_w = -0.3$ y una acomodación perfecta ($\gamma = 0$).

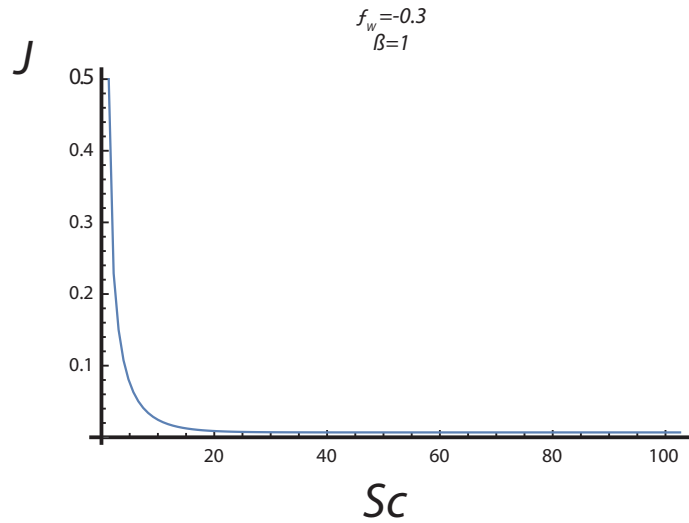


Figure 4.21: Tasa de deposición de partículas J dentro de la capa límite de un aerosol sobre una placa plana perpendicular a la corriente $\pi\beta = 180$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = -0.3$ y una acomodación perfecta ($\gamma = 0$).

En las gráficas expuestas anteriormente, se puede comprobar la diferencia en el comportamiento dinámico de las partículas, dependiendo del valor del número de Schmidt (Sc).

Así, para valores de Sc superiores a la unidad, la difusión browniana es moderada (disminuyendo su importancia según aumenta Sc) mientras que el arrastre advectivo de las partículas por la corriente gaseosa es dominante. En este caso, la tasa de deposición (J) disminuye notablemente en todos los casos al aumentar el soplado en la superficie, siendo indicativa esta disminución al establecer externamente un soplado a través de la superficie para reducir la acumulación de partículas sobre superficies expuestas a una corriente de gas arrastrando partículas. El perfil de concentración tiende a ser plano lejos de la pared, con un decrecimiento abrupto en su cercanía (en la región entre $\eta = 0$ y $\eta = \eta_c$), donde la velocidad del gas inducida por el soplado está dirigida en sentido contrario a la pared. Para valores muy elevados de Sc , esta distribución de partículas tiende a una función escalón con valor nulo (esto es, se genera una región que tiende a estar libre de partículas) en la zona afectada por el soplado y un valor unidad (es decir, al valor de concentración en la corriente externa) en la región más alejada ($\eta = \eta_c$). El flujo advectivo es dominante y la difusión es débil.

En el caso contrario de Sc igual o inferior a la unidad, la difusión browniana juega un papel relevante (aumenta su importancia frente a la advección según disminuye Sc). Para valores muy bajos de Sc , la difusión es dominante y el soplado no evita que las partículas se depositen y se acumulen sobre las superficies expuestas a la corriente, puesto que la difusión browniana es capaz de mantener un flujo de partículas en

contracorriente.

Como Sc es una función creciente del tamaño de las partículas del aerosol. Estos resultados indican que las partículas de mayor tamaño son repelidas por la existencia de una velocidad de soplado en la superficie, mientras que las partículas de menor tamaño se pueden depositar sobre la superficie, incluso en presencia de un soplado intenso.

4.4 Acomodación parcial, $\Psi_\gamma(0) \neq 0$, J_γ

El siguiente paso consiste en calcular la velocidad de deposición teniendo en cuenta una acomodación parcial de la concentración en las proximidades de la superficie, o lo que es lo mismo, el valor de la concentración en la superficie es distinta de cero ($\Psi(0) \neq 0$).

Para ello, denominaremos a la distribución normalizada de partículas en la capa límite en el límite de acomodación total Ψ_a y a la distribución normalizada de partículas en la capa límite en el caso de acomodación parcial Ψ_γ .

Siendo J_a el valor de la tasa de deposición para una acomodación total y J_γ el valor de la tasa de deposición para una acomodación parcial.

En el caso de acomodación parcial, debemos introducir un nuevo parámetro adimensional (γ) como el coeficiente de absorción de la superficie, lo que provoca que la concentración en la superficie sea distinta de cero ($\Psi_\gamma(0) \neq 0$).

Se define el factor γ^* (parámetro dimensional de adsorción) estableciendo la proporcionalidad entre el flujo de masa que llega a cada punto de la superficie y la concentración en ese punto en la superficie:

$$\gamma^*\Psi = \mathbf{n}(D\nabla\Psi - \mathbf{v}\Psi) \quad (4.14)$$

La ecuación (4.14) se conoce como condición de frontera de Robin, siendo n el vector unitario normal a la superficie y apuntando hacia el fluido, v la velocidad normal a la superficie y Ψ la concentración.

Por tanto:

$$\gamma^* = \frac{\mathbf{n}(D\nabla\Psi - \mathbf{v}\Psi)}{\Psi} \quad (4.15)$$

Para que la distribución de partículas siga siendo autosimilar, este factor de adsorción debe descomponerse de manera que el coeficiente adimensional de adsorción definido por

$$\gamma = \gamma^* \frac{1}{\sqrt{\frac{\nu U}{(2-\beta)x}}} \quad (4.16)$$

sea constante igual en todos los puntos de la superficie sólida.

Al contrario que en otros estudios, como en el modelo de Banks (1987) que asume que las condiciones de frontera de la concentración alrededor de un cilindro de radio $r=1$ (siendo r la componente radial en coordenadas cilíndricas), que se encuentra dentro de un fluido, son:

$$\begin{aligned} \Psi &= 0 \text{ cuando } r=1 \\ \Psi &= 1 \text{ cuando } r= R \end{aligned}$$

Siendo R el final de la capa límite (Dallas O. Banks et al, 1991).

Estudios que convencionalmente toman la condición de contorno $\Psi_a(0) = 0$ de acomodación total de la concentración (Friedlander. 2000).

En el apartado 4.4, se considera una acomodación parcial ($\Psi_\gamma(0) \neq 0$) como resultado de los fenómenos de difusión browniana y adsorción en la superficie que hace no considerar la anterior simplificación. (Gallis et al. 2008).

Así, entonces queda:

$$\begin{aligned} \Psi_\gamma(0) &\neq 0 \\ \Psi_\gamma(\infty) &= 1 \end{aligned}$$

Para hallar el valor de $\Psi_\gamma(0)$, partimos de la ecuación

$$\frac{1}{Sc} \Psi_\gamma'' + f \Psi_\gamma' = 0 \quad (4.17)$$

Ésta se puede exponer de la siguiente manera:

$$\frac{\Psi_\gamma''}{\Psi_\gamma'} = -Sc f \quad (4.18)$$

Una primera integral de esta ecuación conduce a

$$\Psi'_\gamma = A \exp[-Sc \int_0^\xi f(\xi) d\xi] \quad (4.19)$$

Siendo $A = \Psi'_\gamma(0)$ e integrando de nuevo, resulta

$$\Psi_\gamma = \Psi_\gamma(0) + \Psi'_\gamma(0)E(\eta) \quad (4.20)$$

Con $E(\eta)$ dado por (4.10).

Imponiendo después la condición de contorno lejos de la superficie, $\Psi_\gamma(\eta \rightarrow \infty) \rightarrow 1$, implica que:

$$\Psi'_\gamma(0) = \frac{1 - \Psi_\gamma(0)}{E(\infty)} \quad (4.21)$$

Por tanto, la ecuación 4.20 queda de la siguiente manera:

$$\Psi_\gamma(\eta) = \Psi_\gamma(0) + [1 - \Psi_\gamma(0)] \frac{E(\eta)}{E(0)} = \Psi_\gamma(0) + [1 - \Psi_\gamma(0)] \Psi_a(\eta) \quad (4.22)$$

Por tanto, en el caso de acomodación parcial, la distribución normalizada de partículas se obtiene de (4.22) a partir de la distribución para acomodación completa, una vez se determina (como veremos más adelante) la concentración de partículas en la pared.

E imponiendo la condición de contorno de acomodación parcial en la superficie, obtenemos:

$$\gamma \Psi_\gamma(0) = \frac{1}{Sc} \Psi'_\gamma(0) + f_w \Psi_\gamma(0) = J_\gamma \quad (4.23)$$

Haciendo uso de (4.23) esta relación puede escribirse en la forma

$$\gamma \Psi_\gamma(0) = \frac{1 - \Psi_\gamma(0)}{Sc E(\infty)} + f_w \Psi_\gamma(0) = J_a(1 - \Psi_\gamma(0)) + f_w \Psi_\gamma(0) = J_\gamma \quad (4.24)$$

Es decir,

$$\Psi_\gamma(0)[\gamma + J_a - f_w] = J_a \quad (4.25)$$

Y por tanto, el valor de la condición de frontera de la concentración en la superficie está dado por

$$\Psi_\gamma(0) = \frac{J_a}{\gamma + J_a - f_w} \neq 0 \quad (4.26)$$

Que sustituida en (4.22) proporciona la distribución de partículas con acomodación parcial con su valor para acomodación total. La dependencia del parámetro de adsorción queda explícitamente determinada por (4.26).

Para elevados números de Sc el valor de la tasa de deposición para una acomodación total (J_a) es mucho menor que el valor del soplado (f_w) y que el parámetro de adsorción (γ), por lo que la concentración en la superficie es distinta de cero pero de pequeña entidad.

Por ejemplo, para el caso de una superficie plana ($\beta = 0$), con un valor del parámetro adimensional de soplado de $f_w = -0.1$ y con valores del número de Schidmt ($Sc > 30$), la velocidad de deposición para una acomodación total J_a es del orden de 10^{-2} , y aplicando la ecuación 4.32 obtenemos que el valor de la concentración en la superficie ($\Psi_\gamma(0)$) se encuentra entre 0.06 y 0.13 como se puede observar en la figura 4.22.

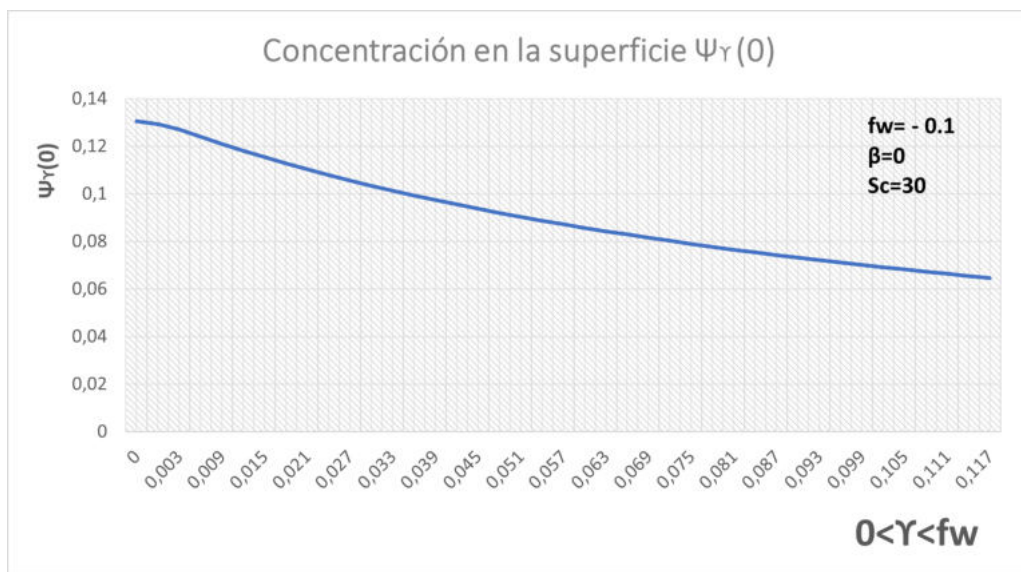


Figure 4.22: Evolución de la $\Psi_\gamma(0)$ respecto a γ para una superficie plana y un soplado $f_w = -0.1$.

Si aumentamos el soplado a $f_w = -0.3$, se obtiene que el valor de la concentración en la superficie ($\Psi_\gamma(0)$) se encuentra entre 0.005 y 0.0035 como se puede observar en la figura 4.23.



Figure 4.23: Evolución de la $\Psi_\gamma(0)$ respecto a γ para una superficie plana y un soplado $f_w = -0.3$.

En el análisis del transporte de partículas en el interior de la capa límite, con un sistema de soplado implantado en la superficie, se concluye que los parámetros característicos del problema son el parámetro geométrico β , que define el ángulo de la superficie, el parámetro adimensional de soplado f_w , que define la intensidad del soplado y el número de Schimdt (Sc), que determina la efectividad de la difusión browniana en la dinámica de las partículas transportadas por el gas.

Pero además, el parámetro γ , como el coeficiente de absorción de la superficie, influye a la hora de determinar la condición de frontera de la concentración del aerosol en la superficie.

Ya que, la tasa de deposición queda:

$$J_\gamma = \gamma \Psi_\gamma(0) = \frac{\gamma J_a}{\gamma + J_a - f_w} \quad (4.27)$$

Igualmente, el flujo de partículas para acomodación parcial se obtiene fácilmente, haciendo uso de (4.27), a partir del flujo para acomodación completa. Explícitamente, queda

$$J_\gamma = \frac{\frac{\gamma}{Sc E(\infty)}}{\gamma + \frac{1}{Sc E(\infty)} - f_w} \quad (4.28)$$

Siendo función directa de γ , Sc y f_w e indirectamente de β , Sc y f_w debido a la función auxiliar $E(\infty)$.

Los parámetros γ y f_w están relacionados con el campo de velocidades del gas en la capa límite y por tanto con la función de corriente asociada f . El parámetro β es debido a la geometría de la superficie. Mientras que Sc establece la eficiencia del transporte de partículas por difusión browniana.

En el estudio del transporte, el valor del Sc diferencia dos comportamientos, uno donde la difusión browniana es muy relevante y el efecto del soplado no es capaz de impedir la deposición masiva de partículas ($Sc < Sc_{crit}$) y otro, donde el soplado es suficientemente predominante para repeler las partículas de las proximidades de la superficie ($Sc > Sc_{crit}$).

Por último, y considerando que para un determinado soplado el Sc muy relevante, también hay que tener en cuenta que cuanto mayor es el valor del ángulo $\pi\beta$, menor es la anchura de la región libre de partículas η_c .

A continuación, se van a mostrar las gráficas de los perfiles de concentración para distintos valores de geometría y soplado, pero para una acomodación parcial en la superficie ($\Psi_\gamma(0) \neq 0$).

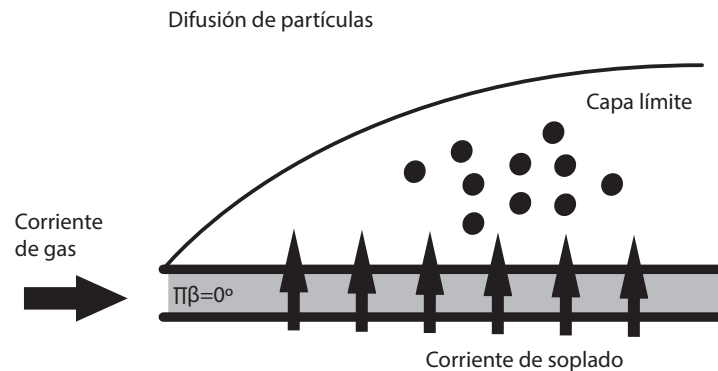


Figure 4.24: *Figura de la corriente de un aerosol sobre una superficie plana ($\beta\pi = 0$) que tiene implantado un sistema de soplado de dirección normal a dicha superficie.*

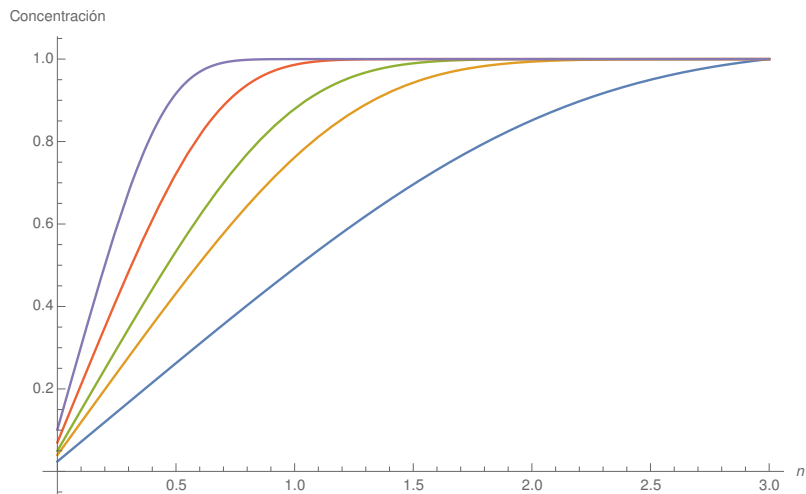


Figure 4.25: *Perfil de concentración de partículas dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie de $\pi\beta = 0$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado nulo $f_w = 0.0$.*

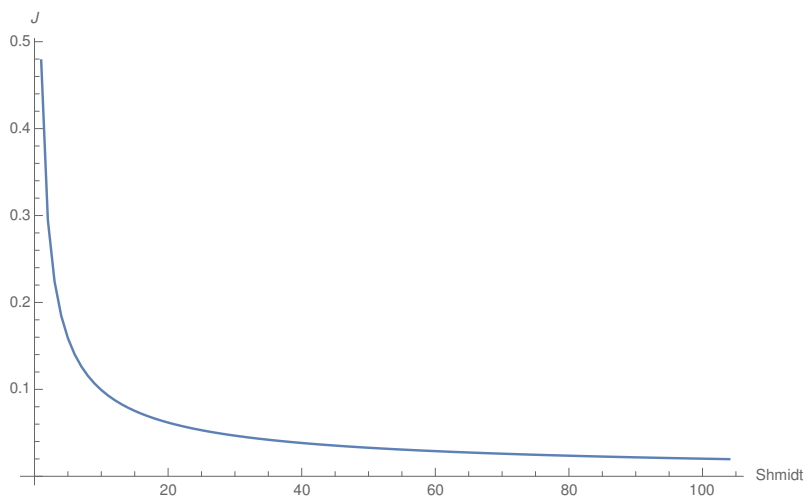


Figure 4.26: *Perfil de la velocidad de deposición de partículas J_γ dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie de $\pi\beta = 0$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado nulo $f_w = 0.0$.*

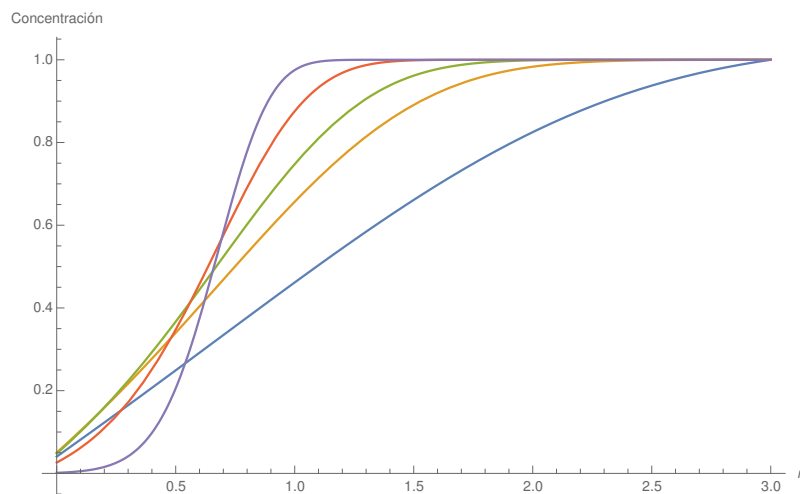


Figure 4.27: *Perfil de concentración de partículas dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie de $\pi\beta = 0$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = -0.1$.*

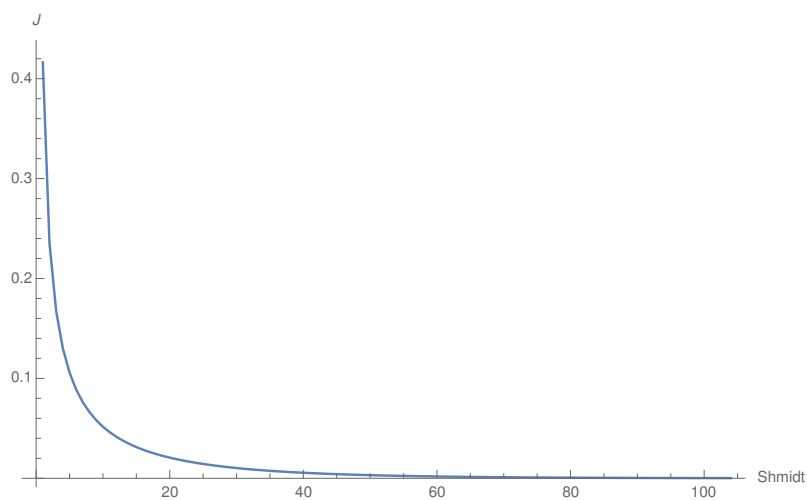


Figure 4.28: *Perfil de la velocidad de deposición de partículas J_γ dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie de $\pi\beta = 0$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = -0.1$.*

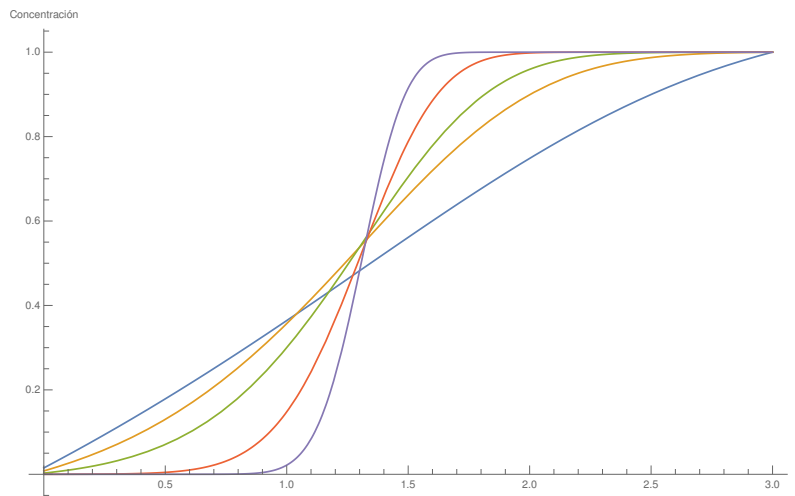


Figure 4.29: Perfil de concentración de partículas dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie de $\pi\beta = 0$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = -0.3$.

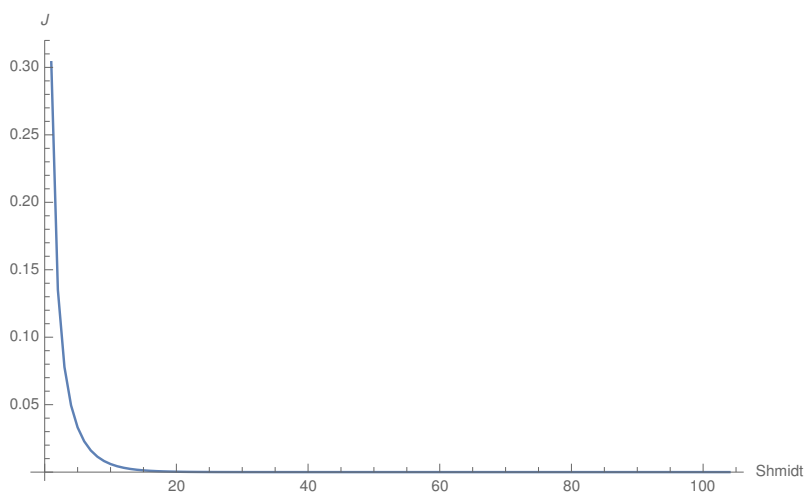


Figure 4.30: Perfil de la velocidad de deposición de partículas J_γ dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie de $\pi\beta = 0$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado nulo $f_w = -0.3$.

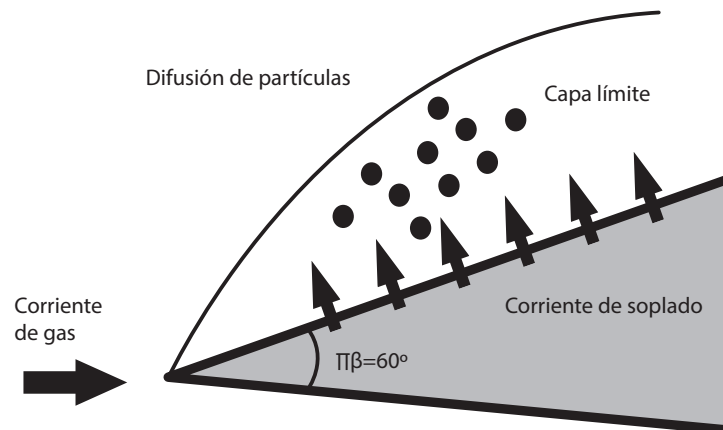


Figure 4.31: *Figura de la corriente de un aerosol sobre una superficie ($\beta\pi = 60$) que tiene implantado un sistema de soplado de dirección normal a dicha superficie.*

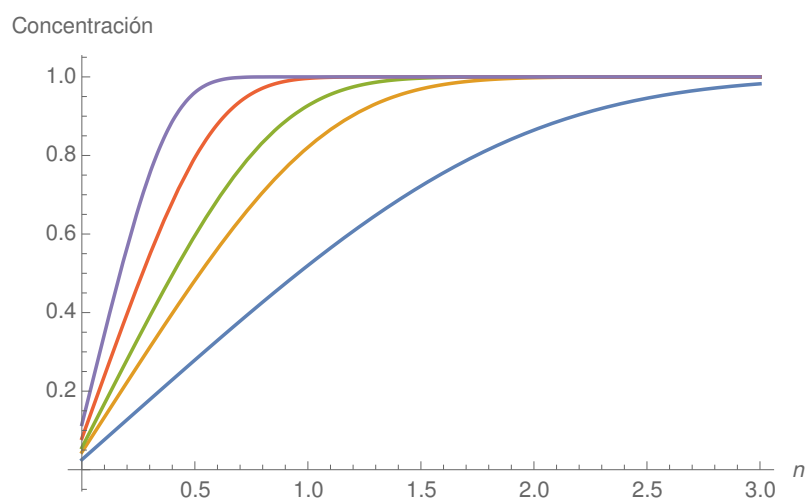


Figure 4.32: *Perfil de concentración de partículas dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie de $\pi\beta = 60$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = 0$.*

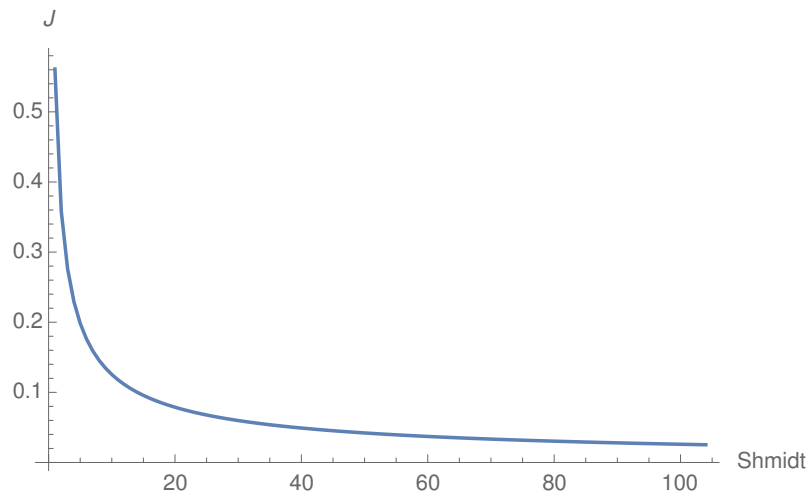


Figure 4.33: Perfil de la velocidad de deposición de partículas J_γ dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie de $\pi\beta = 60$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado nulo $f_w = 0.0$.

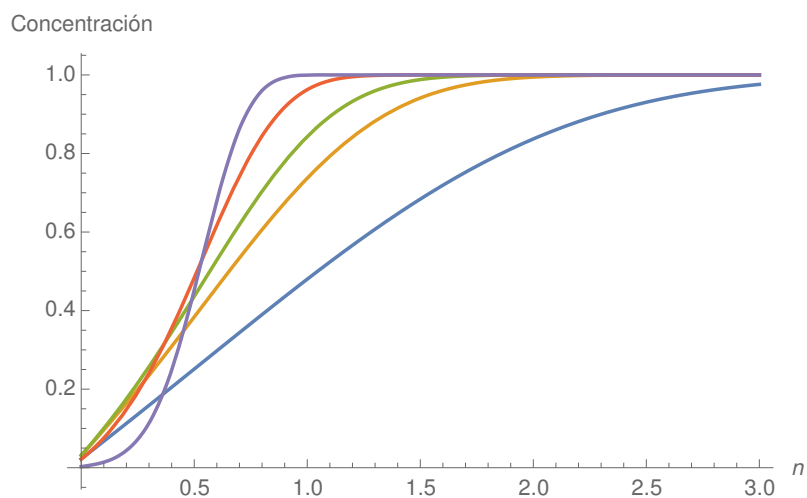


Figure 4.34: Perfil de concentración de partículas dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie de $\pi\beta = 60$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = -0.1$.

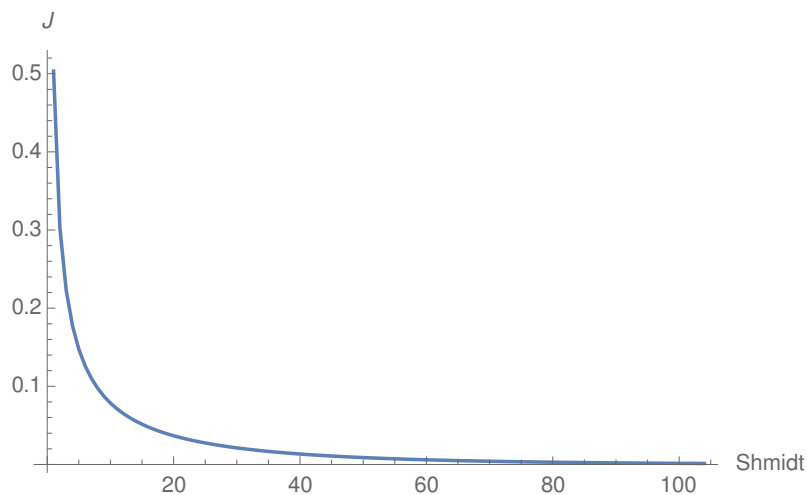


Figure 4.35: Perfil de la velocidad de deposición de partículas J_γ dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie de $\pi\beta = 60$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = -0.1$.

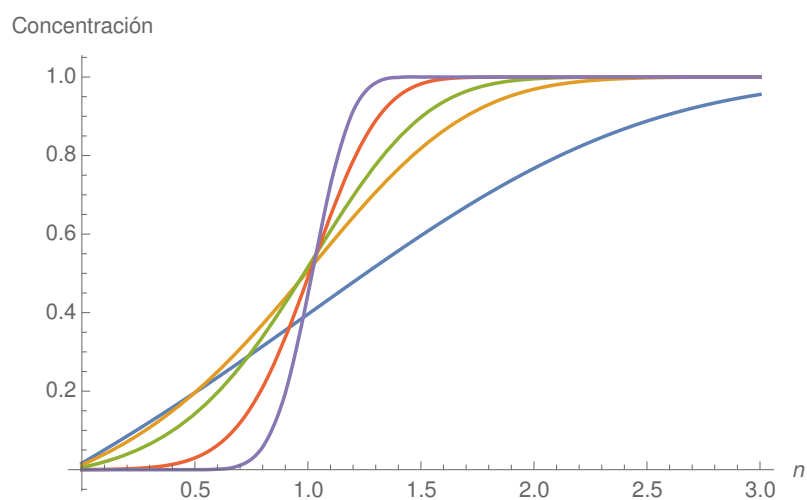


Figure 4.36: Perfil de concentración de partículas dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie de $\pi\beta = 60$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = -0.3$.

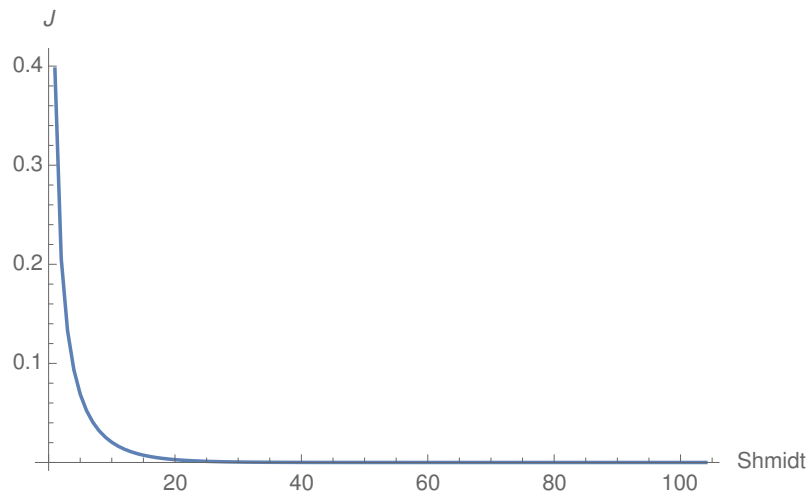


Figure 4.37: Perfil de la velocidad de deposición de partículas J_γ dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie de $\pi\beta = 60$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = -0.3$.

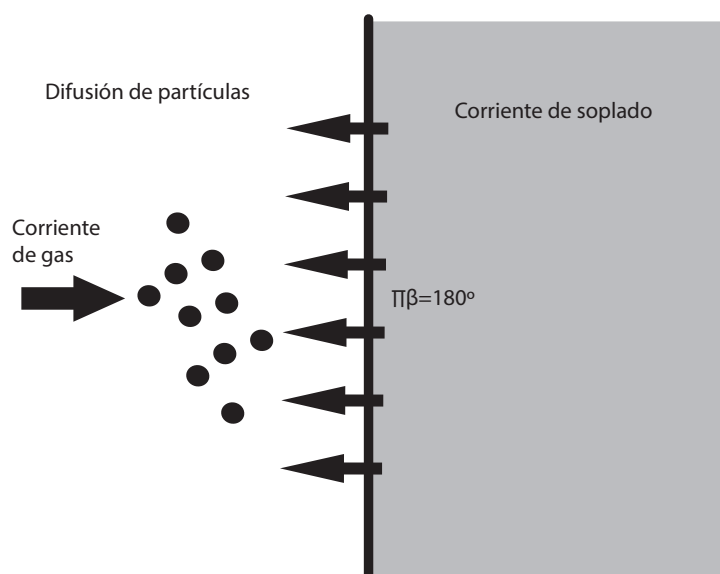


Figure 4.38: Figura de la corriente de un aerosol sobre una superficie ($\beta\pi = 180$) que tiene implantado un sistema de soplado de dirección normal a dicha superficie.

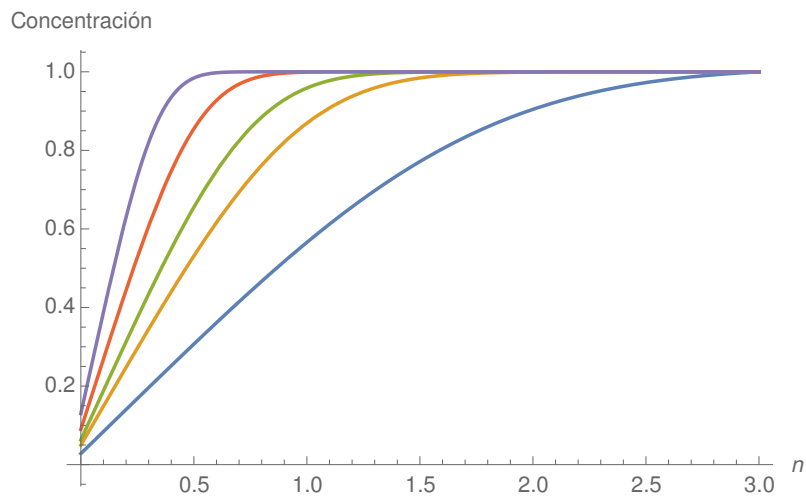


Figure 4.39: *Perfil de concentración de partículas dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie de $\pi\beta = 180$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = 0.0$.*

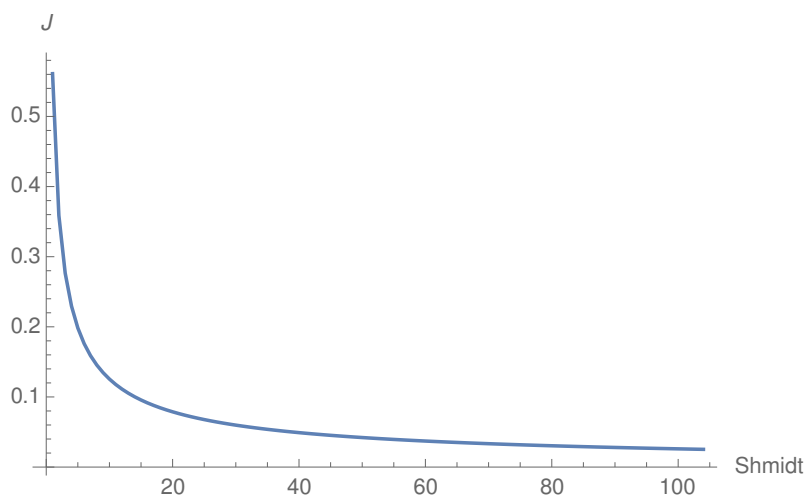


Figure 4.40: *Perfil de la velocidad de deposición de partículas J_γ dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie de $\pi\beta = 180$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado nulo $f_w = 0.0$.*

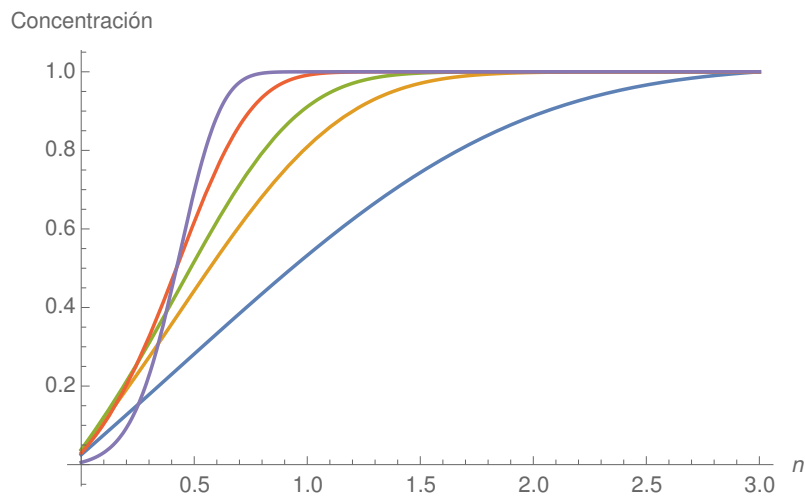


Figure 4.41: *Perfil de concentración de partículas dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie de $\pi\beta = 180$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = -0.1$.*

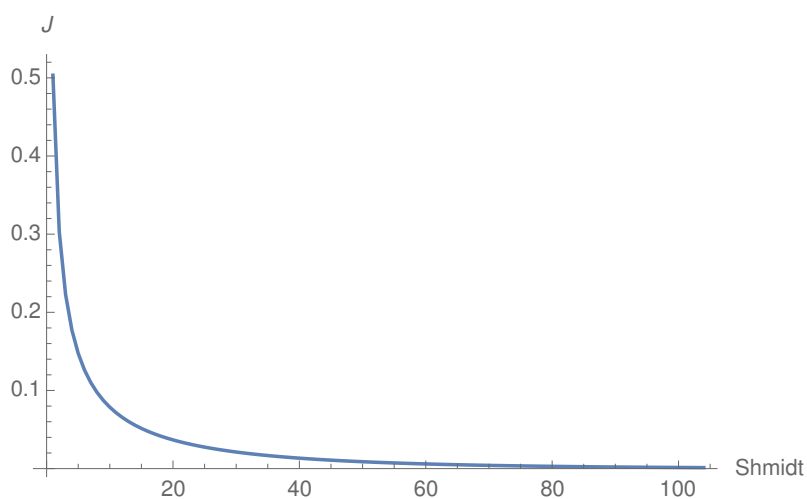


Figure 4.42: *Perfil de la velocidad de deposición de partículas J_γ dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie de $\pi\beta = 180$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = -0.1$.*

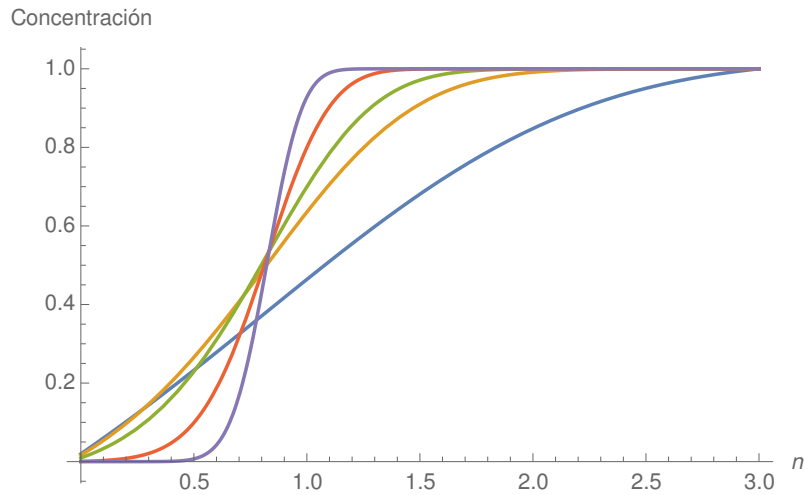


Figure 4.43: *Perfil de concentración de partículas dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie de $\pi\beta = 180$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = -0.3$.*

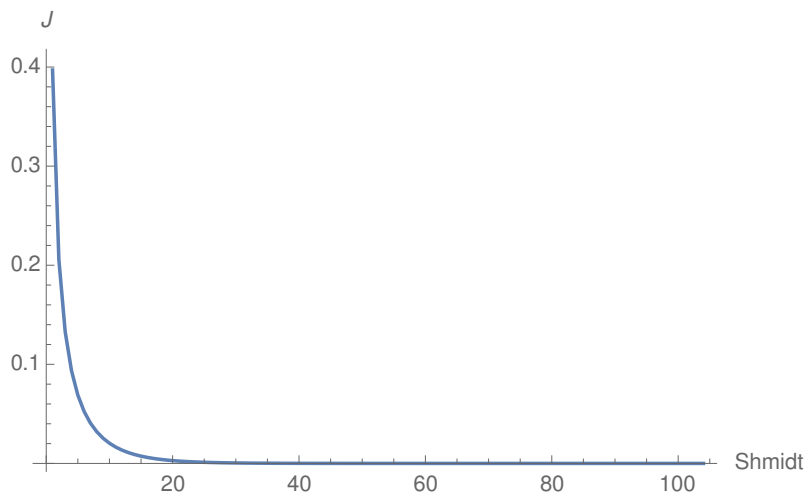


Figure 4.44: *Perfil de la velocidad de deposición de partículas J_γ dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie de $\pi\beta = 180$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado nulo $f_w = -0.3$.*

Como se puede observar en las figuras, sin soplado la concentración no es nula en la superficie para cualquier valor del número de Schmidt ($Sc=1, 5, 10, 30, 100$), pero con soplado ($f_w = -0.1$) y con un valor del número de Schmidt ($Sc=100$) o soplado ($f_w = -0.3$) y números de Schmidt ($Sc=10, 30, 100$), se consigue que la concentración de partículas en la superficie sea prácticamente cero.³

³En el caso de una superficie perpendicular a la corriente ($\beta = 1$) y un soplado $f_w = -0.3$ se obtienen los mismos resultados que el trabajo de M.A Gallis "Nonzero-Concentration Boundary Condition for Advection-Diffusion Aerosol-Transport Modeling" Aerosol Science and Technology, 2008).

Por tanto, a pesar de que al calcular los perfiles de la concentración teniendo en cuenta una acomodación parcial ($\Psi_\gamma \neq 0$), los resultados que se obtienen, con soplado y elevados números de Schmidt, determinan que en estas condiciones la concentración en la superficie es prácticamente nula.

Estos resultados provocan que para el cálculo de los métodos aproximados (con soplados débiles y altos valores del número de Schmidt) no sea relevante el hecho de tomar una acomodación total o parcial de la concentración en la superficie.

A continuación, se presentan las gráficas de la tasa de deposición normalizada $JSc^{2/3}$ frente al número de Schmidt Sc para distintos soplados y acomodación parcial.

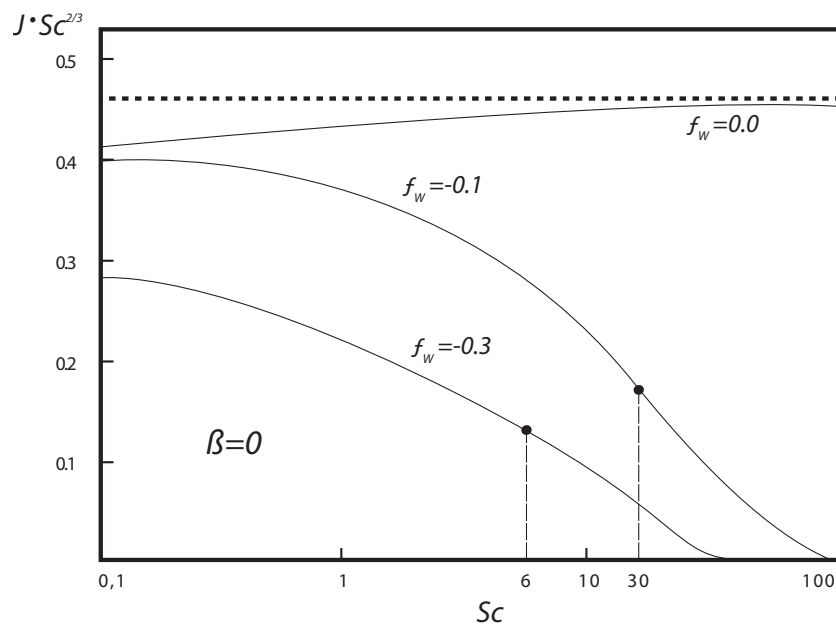


Figure 4.45: Velocidad de deposición normalizada en función al número de Schmidt ($JSc^{2/3}$) para $\beta = 0$ y diferentes valores del parámetro adimensional de soplado.

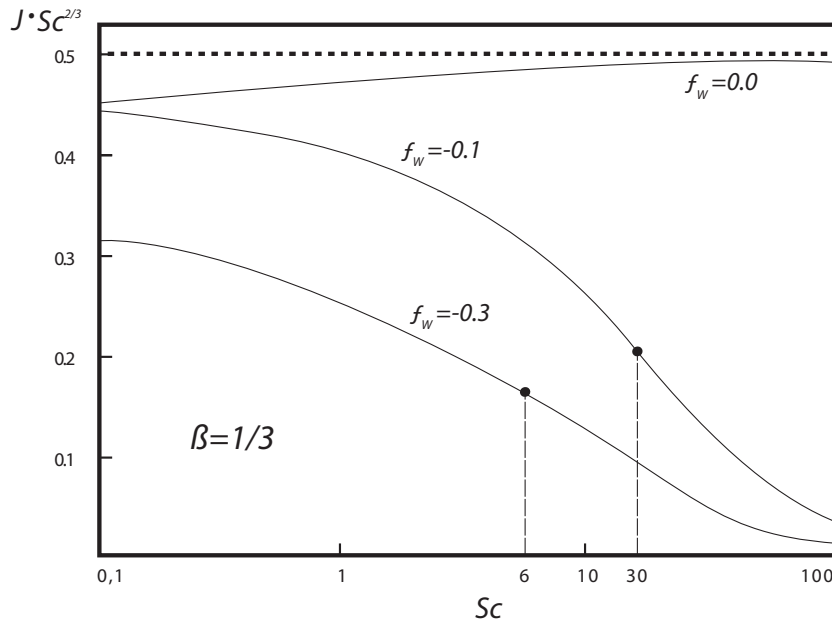


Figure 4.46: Velocidad de deposición normalizada en función al número de Schmidt ($JSc^{2/3}$) para $\beta = 1/3$ y diferentes valores del parámetro adimensional de soplado.

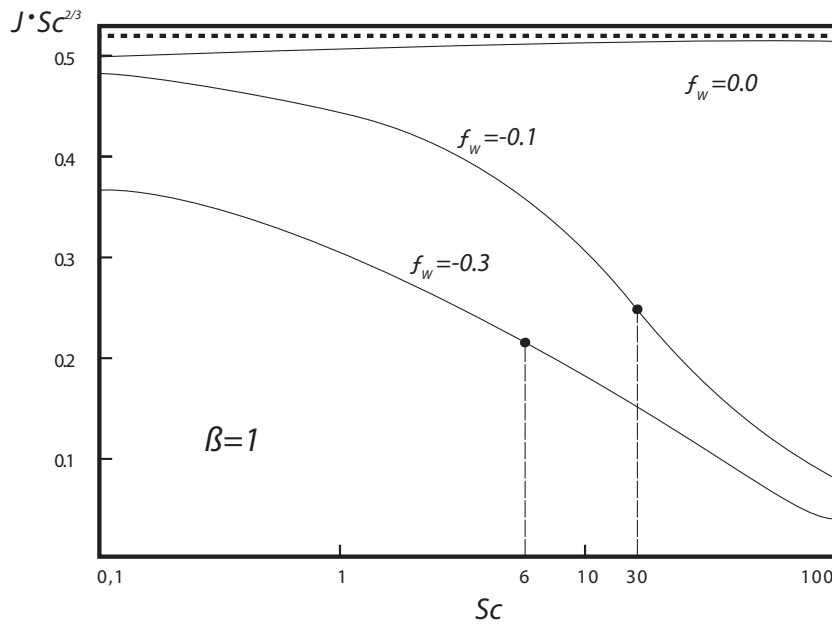


Figure 4.47: Velocidad de deposición normalizada en función al número de Schmidt ($JSc^{2/3}$) para $\beta = 1$ y diferentes valores del parámetro adimensional de soplado.

Globalmente, se observa que la deposición de masa decrece con la intensidad de soplado y que esta es mayor cuanto mayor es el ángulo $\pi\beta$.

Para $Sc > Sc_{crit}$, el efecto del soplado es predominante y la velocidad de deposición normalizada decrece de forma exponencial con el número de Schimdt.

Para $Sc < Sc_{crit}$, el efecto del soplado es ineficiente y la velocidad de deposición normalizada toma valores elevados debido a la difusión browniana.

Capítulo 5

Métodos aproximados

En este capítulo, se van a desarrollar dos métodos aproximados para la simplificación del cálculo numérico de la solución del transporte y deposición de partículas en una superficie dentro de la capa límite de un aerosol.

La laboriosidad de dicho cálculo, debido principalmente a tres factores; el aumento de la intensidad del soplado f_w que incrementa la sensibilidad a la integración a las condiciones de contorno que produce un ensanchamiento de la capa límite, el valor del parámetro de geometría β , que al aumentar produce una mayor no linealidad de la ecuación (3.24) y el aumento del valor del número de Schimdt Sc , que dificulta el análisis numérico ya que reduce la anchura de la región donde varía la función fracción de masa, hace necesario contar con herramientas matemáticas que, en determinadas condiciones, faciliten su resolución.

Como se ha visto en el capítulo anterior, los resultados en el caso de acomodación parcial pueden obtenerse fácilmente a partir de los valores para una acomodación completa. Por ello, en este apartado, se limita al caso de acomodación perfecta ($\Psi(0) = 0$).

5.1 Elevados valores de Sc . Límite asintótico

El valor que toma el número de Schimdt (Sc) es elevado como consecuencia del pequeño tamaño de las partículas del aerosol (bajo valor del coeficiente de difusión (D)). Además, existe un valor crítico de Sc por debajo de él donde el transporte está dominado por la difusión browniana, y por encima de él la difusión no es tan efectiva y la corriente de soplado actúa alejando a las partículas de la superficie, creándose un perfil en forma de "S" y una velocidad de deposición exponencialmente decreciente con Sc .

Para valores de $Sc \rightarrow \infty$, el problema matemático se hace asintótico, ya que el coeficiente de la derivada segunda en la ecuación para la fracción de masa Ψ (ecuación 4.4) se anula y los métodos numéricos dejan de ser efectivos. La velocidad de deposición puede calcularse, de forma aproximada, utilizando el siguiente desarrollo

asintótico:

Primero, se define la función auxiliar como $g(\eta)$ como:

$$g(\eta) = \int_0^\eta f(\xi) d\xi \quad (5.1)$$

pudiendo escribirse la velocidad de deposición por

$$J = \frac{1}{Sc \int_0^\infty \exp[-Sc g(\eta)] d\eta} \quad (5.2)$$

En virtud del soplado que se realiza desde la superficie, la función $g(\eta)$ es negativa y decreciente desde $\eta = 0$ hasta el punto de confluencia de la corriente principal y la de soplado ($\eta = \eta_c$ donde f se anula).

Por tanto, la función $g(\eta)$ tiene un mínimo absoluto en $\eta = \eta_c$. Y en el límite $Sc \rightarrow \infty$ la función exponencial $\exp[-Sc g(\eta)]$ es despreciable cuando la función $g(\eta)$ es positiva, y solo toma valores finitos apreciables en las inmediaciones del valor mínimo de $g(\eta)$ (cuando $\eta = \eta_c$).

Debido a este comportamiento asintótico de la función exponencial, la evaluación aproximada de la integral se puede realizar aplicando el método estandar de Laplace (Bleistein & Handelsman, 1986).

Se elige un valor delta ($\delta > 0$) que es válido para la aproximación

$$\int_0^\infty \exp[-Sc g(\eta)] d\eta \simeq \int_{\eta_c - \delta}^{\eta_c + \delta} \exp[-Sc g(\eta)] d\eta \quad (5.3)$$

Cuando $Sc \rightarrow \infty$, el valor de δ es lo suficientemente pequeño para que la función g puede aproximarse por el desarrollo de Taylor alrededor del punto donde se produce el mínimo

$$g(\eta) \simeq g(\eta_c) + \frac{1}{2} g''(\eta_c) (\eta - \eta_c)^2 \quad (5.4)$$

En este caso, la expresión queda con el cambio de variable $z = \eta - \eta_c$ como:

$$\int_0^\infty \exp[-Sc g(\eta)] d\eta \simeq \exp[-Sc g(\eta_c)] \int_{-\delta}^{\delta} \exp[-\frac{1}{2} Sc g''(\eta_c) z^2] dz \quad (5.5)$$

Y como el integrando es despreciable fuera del entorno del rango de integración, se puede extender dicho rango hasta el infinito, lo que nos lleva al siguiente resultado:

$$\int_0^{\infty} \exp[-Sc g(\eta)] d\eta \simeq \exp[-Sc g(\eta_c)] \sqrt{\frac{2\pi}{Sc g''(\eta_c)}} \quad (5.6)$$

Una vez evaluada la integral para $Sc \rightarrow \infty$, la tasa de deposición tiene el valor aproximado de:

$$J_{asym} = \sqrt{\frac{g''(\eta_c)}{2\pi Sc}} \exp[Sc g(\eta_c)] \quad (5.7)$$

Cumpléndose siempre que:

$$(-f_w) Sc^{2/3} \approx O(1) \quad (5.8)$$

Por tanto, el valor crítico del número de Schmidt $(Sc)_{crit}$ determina el valor para la transición de una dinámica de partícula gobernada por la difusión a otra en la que el efecto del soplado es determinante.

Cuando $Sc > (Sc)_{crit}$, el soplado es determinante cerca de la superficie y la tasa de deposición normalizada decrece exponencialmente para elevados valores de Sc . En la forma más sencilla de dicha condición, se obtiene la estimación:

$$(Sc)_{crit} \approx (-f_w)^{-3/2} \quad (5.9)$$

Las figuras 5.1, 5.2 y 5.3 muestran la validez del análisis asintótico para la tasa de deposición, donde las razones de deposición normalizadas por el factor $Sc^{2/3}$ aparecen en función del número de Schmidt Sc . En particular, $(Sc)_{crit}$ toma, aproximadamente el valor 30 for $f_w = -0.1$ y 6 para $f_w = -0.3$.

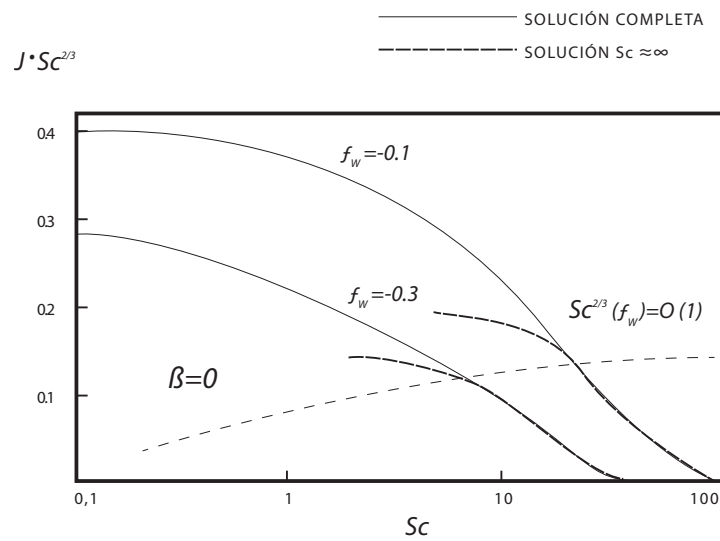


Figure 5.1: Comparativa de soluciones (completa y asintótica) del perfil de la velocidad de deposición de partículas normalizado ($JSc^{2/3}$) sobre una superficie plana.

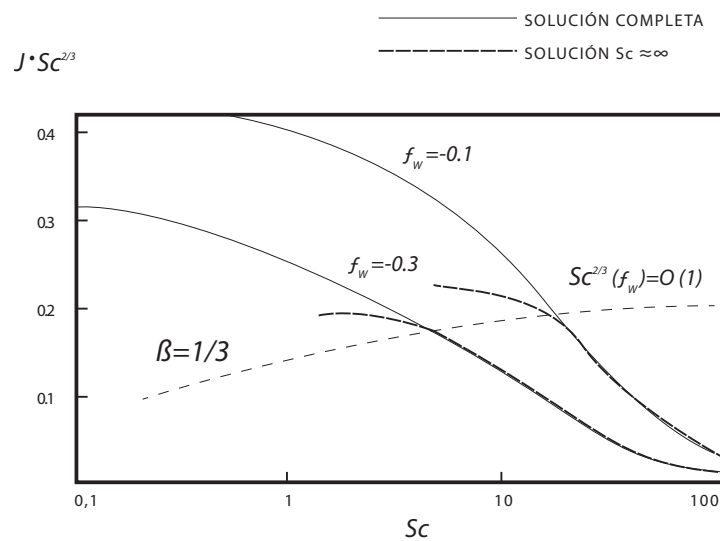


Figure 5.2: Comparativa de soluciones (completa y asintótica) del perfil de la velocidad de deposición de partículas normalizado ($JSc^{2/3}$) sobre una superficie de $\pi\beta = 60$.

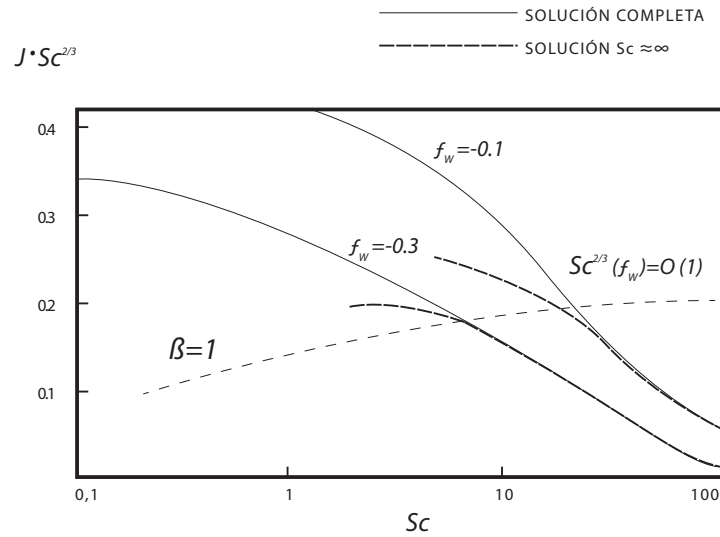


Figure 5.3: Comparativa de soluciones (completa y asintótica) del perfil de la velocidad de deposición de partículas normalizado ($JSc^{2/3}$) sobre una superficie de $\pi\beta = 180$.

Para $Sc > (Sc)_{crit}$ la aproximación asintótica proporciona una solución aceptable para la concentración de masa, además ésta mejora en las proximidades de la superficie. Ese hecho, indica que la expresión para la velocidad de deposición es también adecuada.

5.2 Sopladros débiles

Existen muchos casos en el campo industrial donde los mecanismos de soplado son importantes en la reducción de la deposición de partículas sobre superficies. La intensidad de soplado no tiene porque ser elevada para poder cumplir con ese objetivo.

Para sopladros débiles, la función f puede aproximarse por su desarrollo de Taylor, en torno a la posición de $\eta = 0$, hasta orden dos y satisface lo siguiente:

$$f = f_w + \frac{1}{2}b_w''\eta^2 \quad (5.10)$$

Donde b_w'' es la derivada segunda de la función f en la superficie ($\eta = 0$) en ausencia de soplado ($f_w = 0$), dando un perfil parabólico dentro de la capa límite. Y determinando el punto de confluencia entre la corriente principal y la de soplado por:

$$\eta_c = \sqrt{\frac{2(-f_w)}{b_w''}} \quad (5.11)$$

Además, la región del interior de la capa límite donde es válida esta aproximación viene definida por:

$$\eta < \frac{1}{|f_w + \frac{\beta}{b_w''}|} \quad (5.12)$$

En las figuras 5.4, 5.5 y 5.6 se muestran los perfiles para la función de corriente f junto con el desarrollo aproximado para soplado débil. Se observa que a medida que aumenta el soplado, se reduce la región donde es válida la aproximación.

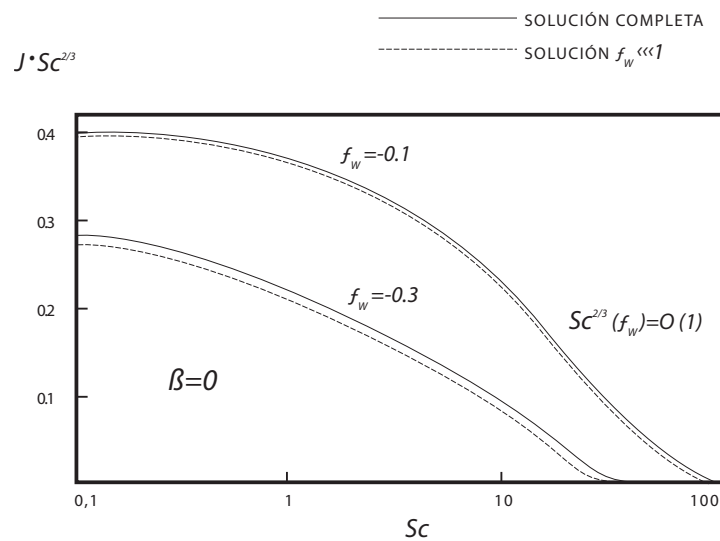


Figure 5.4: Comparativa de soluciones (completa y soplado débil) del perfil de la velocidad de deposición de partículas normalizado ($JSc^{2/3}$) sobre una superficie plana.

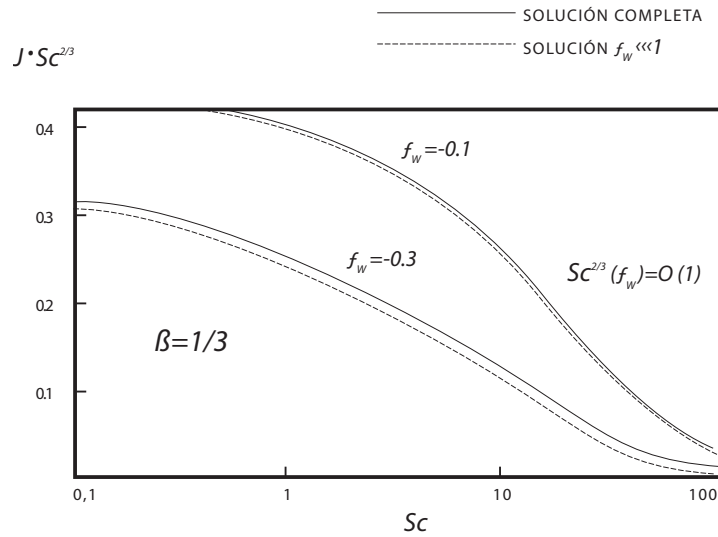


Figure 5.5: Comparativa de soluciones (completa y soplado débil) del perfil de la velocidad de deposición de partículas normalizado ($JSc^{2/3}$) sobre una superficie de $\pi\beta = 60$.

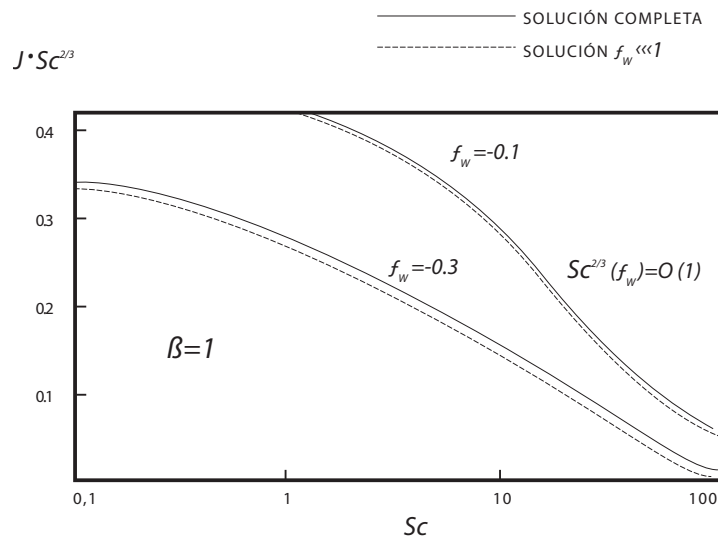


Figure 5.6: Comparativa de soluciones (completa y soplado débil) del perfil de la velocidad de deposición de partículas normalizado ($JSc^{2/3}$) sobre una superficie de $\pi\beta = 180$.

Para simplificar el cálculo, se puede realizar la siguiente aproximación $b_w'' = f_w''$ ya que al tratarse de intensidades de soplado débiles $-f_w \ll 1$, los valores de la tensión viscosa adimensional son similares al valor con ausencia de soplado.

Tras la integración directa de la función de corriente, se obtiene el desarrollo en serie para la función auxiliar en el límite de soplado débil

$$g(\eta) = \int_0^\eta f(\xi) d\xi \simeq f_w \eta + \frac{1}{6} f_w'' \eta^3 \quad (5.13)$$

De aquí, el cálculo de la velocidad de deposición da la expresión¹:

$$J_B = Sc^{-2/3} \left(\frac{f_w''}{6}\right)^{1/3} \frac{1}{\int_0^\infty \exp(bw - w^3) dw} \quad (5.14)$$

en función del parámetro b:

$$b = \left(\frac{6}{f_w''}\right)^{1/3} (-f_w) Sc^{2/3} \quad (5.15)$$

la expresión integral en el denominador de J_B puede desarrollarse de la siguiente manera:

$$\int_0^\infty \exp(bw - w^3) dw = \frac{1}{3} \sum_0^\infty \frac{1}{k!} \Gamma\left(\frac{k+1}{3}\right) b^k \quad (5.16)$$

Resultando

$$J_B = Sc^{-2/3} \left(\frac{f_w''}{6}\right)^{1/3} \frac{1}{\frac{1}{3} \sum_0^\infty \frac{1}{k!} \Gamma\left(\frac{k+1}{3}\right) b^k} \quad (5.17)$$

donde Γ es la función Gamma (Whittaker & Watson, 1990).

Las figuras 5.4, 5.5 y 5.6 muestran la velocidad de deposición para la solución completa y la del límite de soplado débil. Se observa que el ajuste para soplado débil mejora al decrecer el valor absoluto del parámetro de soplado. Además, para números de Schimdt elevados, el ajuste es muy bueno, puesto que en ese rango de valores, el límite de soplado débil coincide prácticamente con el valor asintótico.

En general, el límite para soplado debil se ajusta bastante bien para la solución completa, salvo en las proximidades de la superficie y para valores elevados de soplado f_w .

¹Cuando $f_w = 0$ y por tanto $b = 0$, la velocidad de deposición de partículas tendrá un valor mucho más simple: $J_B = Sc^{-2/3} \left(\frac{f_w''}{6}\right)^{1/3} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}$

Como conclusión, se puede establecer que el ajuste para la velocidad de deposición de soplado débil es bueno para cualquier valor de Sc , aumentando la precisión con Sc crecientes y valores decrecientes de f_w .

5.3 Límites de aplicación

Una vez expuestos los dos métodos aproximados, es necesario establecer cuales son los límites de aplicación y validez de cada uno de ellos:

5.3.1 El caso de Sc elevados

En el caso singular de elevados valores del $Sc \rightarrow \infty$, la citada aproximación (ecuación 5.7) será válida siempre que se cumpla que la velocidad de deposición y el número de Schimdt se ajusten a:

$$Sc \geq -f_w^{-3/2} \quad (5.18)$$

Por tanto, que el valor del número de Schimdt debe ser similar $-f_w^{-3/2}$ o más elevado, siendo f_w negativa. Y por tanto, independiente del ángulo de ataque de la superficie.²

5.3.2 El caso de soplos débiles

En el caso de soplos débiles ($f_w \ll 1$), la aproximación es válida en la región interior de la capa límite donde se cumpla que:

$$\eta < \frac{1}{|f_w + \frac{\beta}{f_w}|} \quad (5.19)$$

En este caso, la validez de la aproximación (ecuación 5.14) es amplia para valores de Sc y, como no puede ser de otra manera, más adecuada cuanto menor es el soplado f_w .

Por tanto, la primera aproximación es adecuada para valores de Sc que cumplan ser mayores de $| -f_w^{-3/2} |$, independientemente del valor de la geometría β . Y la segunda aproximación para soplos débiles que cumplan estar dentro de la región

²Por ejemplo, en el caso de un soplado $f_w = -0.1$ el valor del número de Schimdt debe tener aproximadamente un valor de $Sc \geq 33$ y para $f_w = -0.3$ el valor debe ser $Sc \geq 6$.

de la capa límite $\eta < \frac{1}{|f_w + \frac{\beta}{f_w}|}$, donde si influye β .

Capítulo 6

Discusión y Comparación

Una vez establecidos los resultados de los dos métodos aproximados, las figuras 6.1, 6.2 y 6.3 muestran la comparación de la tasa de deposición para la solución completa, su valor para el análisis asintótico, y el límite de soplado débil.

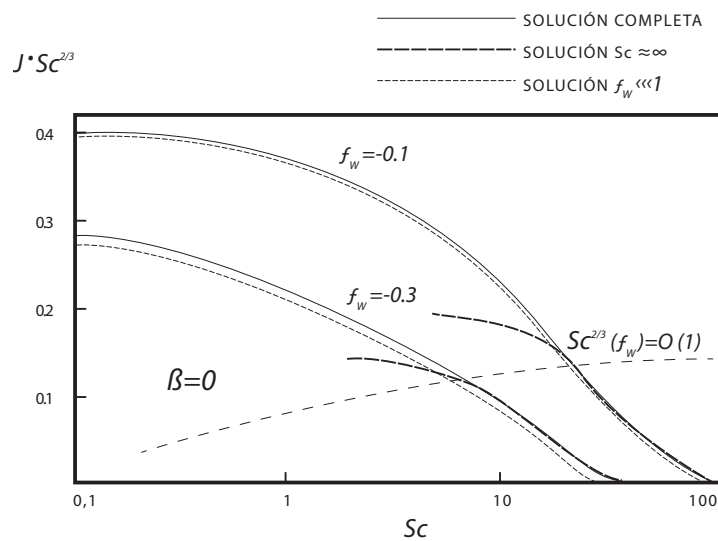


Figure 6.1: Comparación del régimen de deposición de partículas normalizada para la solución completa en una superficie plana con la aproximación de soplado débil $|f_w| \ll 1$ y la del análisis asintótico $Sc \rightarrow \infty$

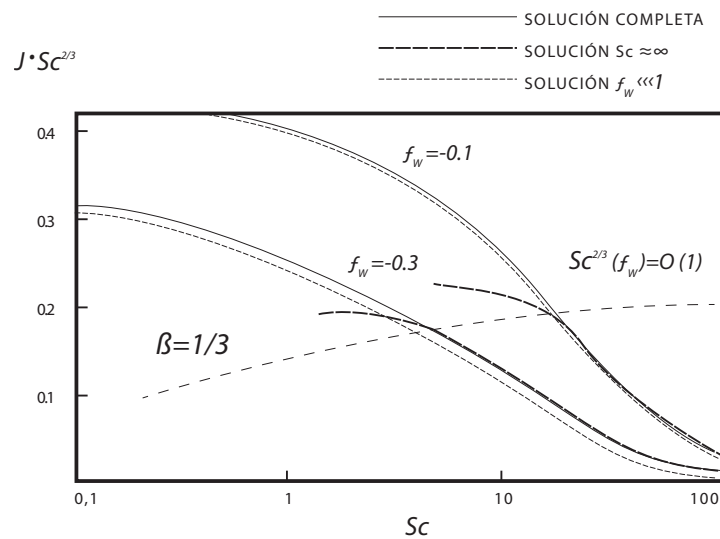


Figure 6.2: Comparación del regimen de deposición de partículas normalizada para la solución completa en una superficie con $\pi\beta = 60$ con la aproximación de soplado débil $|f_w| \ll 1$ y la del análisis asintótico $Sc \rightarrow \infty$

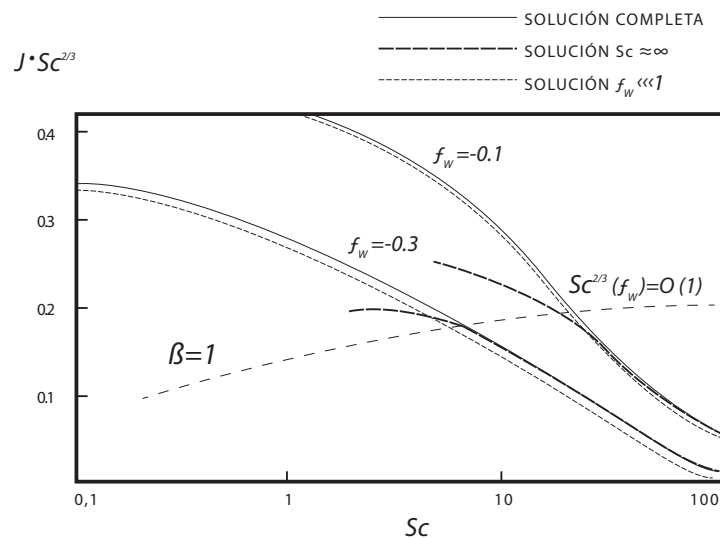


Figure 6.3: Comparación del regimen de deposición de partículas normalizada para la solución completa en una superficie con $\pi\beta = 180$ con la aproximación de soplado débil $|f_w| \ll 1$ y la del análisis asintótico $Sc \rightarrow \infty$

Como resumen, puede establecerse que el límite asintótico ofrece resultados correctos siempre que se satisfaga la condición de convergencia, esto es, un valor del Sc mayor su valor crítico $(Sc)_{crit}$.

La aproximación de soplado débil da resultados correctos de forma global, para todo el rango de valores de Sc , pero con menor precisión. A medida que aumenta el

soplado, esta aproximación deja de ser válida.

6.1 Combinación de ambas aproximaciones

Como se puede observar en las figuras 6.1, 6.2 y 6.3, estas muestran la validez de las dos aproximaciones para elevados números de Schimdt, donde los valores críticos de estos dependen del soplado $-f_w$, y serán más efectivas cuanto menor es el valor de $-f_w$.

Por ejemplo, y de acuerdo con las gráficas, la mejor aproximación se obtiene para un $Sc > 33$ y un soplado $f_w = -0.1$.

Por tanto, la aproximación para Sc elevados (J_{asym}) proporciona valores adecuados cuando el valor de Sc es suficientemente alto, de tal manera que se cumpla $Sc \geq -f_w^{-3/2}$.

Por otro lado, para sopladados débiles J_B es globalmente una buena aproximación para todo el rango de Sc , siendo mejor cuanto menor es dicho soplado.

Capítulo 7

Conclusiones

7.1 Conclusiones del estudio

El transporte de partículas dentro de la capa límite generada por la corriente de un aerosol sobre una superficie de geometría variable, que cuenta con un sistema de soplado, ha sido analizado asumiendo que la difusión browniana es el mecanismo predominante en el estudio. Además, el análisis se ha focalizado en la determinación del efecto del soplado sobre la tasa de deposición de partículas y la distribución de estas dentro de la capa límite.

En primer lugar, se ha definido el campo de velocidades, la solución del transporte de partículas a través de la ecuación de similaridad de Falken-Skan y la tasa de deposición de partículas en función de cuatro parámetros: el parámetro de geometría β , el número de Schmidt Sc , el parámetro adimensional de adsorción γ y el parámetro adimensional de soplado $-f_w$.

Para estimar la reducción en la deposición de partículas debido a la corriente de soplado inducida, se ha evaluado la preponderancia de la difusión a través de los distintos valores de Sc . Para valores bajos de Sc , la difusión browniana es suficientemente fuerte como para anular el efecto del soplado, permitiendo que las partículas alcancen la superficie. En cambio, para valores elevados de Sc , el transporte difusivo decrece y el soplado puede reducir de manera efectiva la deposición generando una capa libre de partículas en las proximidades de la superficie.

Además, se ha observado que al aumentar el ángulo (β) y para un mismo soplado (f_w), la zona libre de partículas se va estrechando en las proximidades de la superficie.

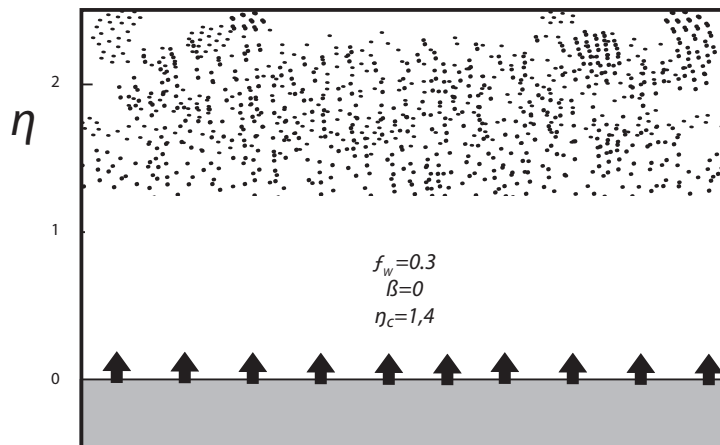


Figure 7.1: Zona libre de partículas en las proximidades de la superficie como consecuencia del soplado (en este caso para $\beta = 0$ y $f_w = -0.3$).

Tras analizar estos comportamientos, se ha establecido un valor crítico del número de Schmidt que determina la transición entre ambos, este valor queda definido en función del parámetro adimensional de soplado f_w .

$$Sc_{crit} \approx (-f_w)^{-3/2}$$

Algunos aspectos, como la singularidad en el límite del número de Schmidt $Sc \rightarrow \infty$ y la no linealidad acarrearán considerables dificultades en el cálculo y análisis de las soluciones. Con el objetivo de facilitar dicho cálculo se han desarrollado dos métodos matemáticos aproximados (ecuaciones 7.1 y 7.2).

Para valores elevados de Sc , se ha establecido un análisis asintótico. Para valores de $Sc > (Sc)_{crit}$ las soluciones dan buenas aproximaciones tanto para la distribución de partículas como para la velocidad de deposición.

$$J_{asym} = \sqrt{\frac{g''(\eta_c)}{2\pi Sc}} \exp [Sc g(\eta_c)] \quad (7.1)$$

Aproximación válida siempre que se cumpla que:

$$(-f_w)Sc^{2/3} \approx O(1)$$

Por otra parte, para valores de soplado débiles, la función f puede aproximarse a un desarrollo de Taylor alrededor de $\eta = 0$, definida por un comportamiento parabólico de la velocidad en el interior de la capa límite.

En este caso, la aproximación es globalmente buena para la tasa de deposición y mejora cuanto más débil es la intensidad del soplado. Además, para valores elevados del Sc , dicha aproximación coincide con la solución general en el rango de valores asintóticos.

$$J_B = Sc^{-2/3} \left(\frac{f_w''}{6}\right)^{1/3} \frac{1}{\int_0^\infty \exp(bw - w^3) dw} \quad (7.2)$$

en función del parámetro b :

$$b = \left(\frac{6}{f_w''}\right)^{1/3} (-f_w) Sc^{2/3}$$

y donde la expresión integral de J_B puede desarrollarse de la siguiente manera:

$$\int_0^\infty \exp(bw - w^3) dw = \frac{1}{3} \sum_0^\infty \frac{1}{k!} \Gamma\left(\frac{k+1}{3}\right) b^k \quad (7.3)$$

Al evaluar de manera conjunta ambos métodos, se puede concluir que es posible encontrar una aproximación para la tasa de deposición en todo el rango de parámetros del problema.

Por tanto, se corrobora la hipótesis, pudiendo establecerse unas aproximaciones matemáticas para obtener el cálculo de la deposición de partículas debido a difusión browniana sobre una superficie de geometría variable, que cuenta con un sistema de soplado, cuando esta se encuentra en el interior de la corriente de un aerosol. Dichas aproximaciones son válidas en unas determinadas condiciones (elevados valores del Sc y un soplado débil).

7.2 Líneas futuras de investigación

En relación con las posibles futuras líneas de investigación, hoy en día existen muchos campos de aplicación relacionados con los aerosoles y la deposición de partículas.

Un primera línea de investigación puede ser la aplicación de la metodología del presente trabajo a otros casos de campos repulsivos, como por ejemplo los producidos por gradientes de temperatura o por campos electromagnéticos.

Otra línea de investigación puede profundizar en el campo de la aeronáutica y el efecto negativo que la deposición de partículas puede producir en los distintos sistemas con que cuenta una aeronave.

Por otra parte, con esta tesis doctoral, como ya se expuso en la introducción del trabajo, se puede ampliar este estudio a aspectos relacionados con las enfermedades respiratorias, teniendo en cuenta que el rango de aplicación nos sitúa en la difusión browniana y con partículas de un tamaño del orden de $0.01\mu m$.

Un caso de posible aplicabilidad son los estudios relacionados con la pandemia provocada por el COVID-19 y su relación con los aerosoles y el transporte del virus por el aire.

7.2.1 Propagación del virus (SARS-CoV-2)

Aunque, hoy en día, la transmisión del SARS-CoV-2 a través de aerosoles es poco conocida y existen grandes desacuerdos sobre el tamaño de la partícula promedio de estos aerosoles. Por ejemplo, la Organización Mundial de la Salud (OMS) define a las partículas de más de $5\mu m$ como gotitas y las de menos de $5\mu m$ como aerosoles (Siegel et al., 2007), estudios recientes demuestran que en áreas propensas a la aglomeración de partículas, la distribución del tamaño de los coronavirus muestran picos micrométricos.¹

Y otros postulados indican que partículas con un diámetro aerodinámico entre $10-20\mu m$ deben considerarse como aerosoles, por tener la capacidad de permanecer en el aire durante un periodo prolongado y su fácil accesibilidad a la ración respirable del pulmón (Gralton et al. 2011).

Además, en varios hospitales de Wuhan se detectó la presencia de SARS-CoV-2 en diferentes rangos de tamaños de partículas desde los $0.01\mu m$ hasta los $10\mu m$ (diámetro aerodinámico)².

Se puede concluir que, como al hablar y respirar emitimos aerosoles a partir de nuestras vías respiratorias, que oscilan desde nanómetros hasta decenas de micras, los aerosoles con partículas de tamaño menor de $10\mu m$ deben ser considerados.

Y como el depósito de las partículas inhaladas en los pulmones ocurre por los siguientes mecanismos: impacto por inercia, sedimentación y movimiento browniano, y este último es el mecanismo dominante para el depósito en los pulmones de partículas menores de $0,5\mu m$ de diámetro.

Se considera que es posible aplicar el presente trabajo para facilitar el estudio de la deposición de partículas ($< 0,5\mu m$) generadas al hablar, respirar, toser

¹Revista Nature, 23 de julio de 2020 "Mounting evidence suggests coronavirus is airborne-but health advice has not caught up" y Revista Nature, 23 de abril de 2020 "Aerodynamic analysis of SARS-CoV-2 in two Wuhan hospitals".

²El virus SARS-CoV-2 tiene distintos tamaños, con diámetros entre 40 y 140 nanómetros (Casella y col, 2020); para otros coronavirus hay datos similares: 125 nanómetros (Fehr 2015).

o estornudar en superficies, siempre que la difusión browniana sea el fenómeno predominante.

Appendix A

Lista de símbolos

- b_w'' = Tensión viscosa adimensional en ausencia de soplado ($f_w=0$)
 C_s = Coeficiente de Cunningham
 D = Difusividad
 d_p = Diámetro de la partícula
 d_{St} = Diámetro de Stokes
 $E(\eta)$ = Función exponencial auxiliar
 f = Función de Blasius
 f_w = Velocidad de soplado adimensional o parámetro adimensional de soplado
 f_w'' = Tensión viscosa adimensional
 J = Tasa de deposición adimensional
 J_{asym} = Tasa de deposición adimensional (Elevado Sc)
 J_B = Tasa de deposición adimensional (soplado débil)
 J_a = Tasa de deposición adimensional con acomodación total
 J_γ = Tasa de deposición adimensional con acomodación parcial
 j_{diff} = Flujo de masa difusivo
 Re = Número de Reynolds
 Sc = Número de Schimdt
 St = Número de Stokes
 T = Temperatura
 U = Velocidad longitudinal en el límite
 u = Velocidad longitudinal (dirección x)
 v = Velocidad transversal (dirección y)
 v_w = Velocidad de soplado
 V_T = Velocidad terminal
 β = Parámetro geométrico
 ρ = Densidad
 μ = Viscosidad
 Φ = Función de corriente
 Ψ = Distribución de fracción de masa
 Ψ_a = Distribución de fracción de masa en la superficie con acomodación total
 Ψ_γ = Distribución de fracción de masa en la superficie con acomodación parcial
 η = Variable de similaridad
 τ_w = Tensión viscosa en la superficie

ω = Concentration de partículas
 ν = Viscosidad cinemática
 $\pi\beta$ = Ángulo de ataque
 γ = Parámetro adimensional de absorción
 γ^* = Parámetro de absorción

Appendix B

Lista de figuras y tablas

Tabla 3.1 Valores de η dependiendo del soplado y del ángulo de la superficie.

Tabla 3.2 Valores de η_c dependiendo del soplado y del ángulo de la superficie.

Figura 1.1 Distribución de partículas en función del tamaño.

Figura 3.1 Figura de la corriente de un aerosol sobre un superficie que tiene implantado un sistema de soplado de dirección normal a dicha superficie.

Figura 3.2 Funciones $f, f' y f''$ como soluciones de la ecuación de Falkner-Skan para $\beta = 0$ y con ausencia de soplado $f_w = 0.0$.

Figura 3.3 Funciones $f, f' y f''$ como soluciones de la ecuación de Falkner-Skan para $\beta = 0$ y con $f_w = -0.1$.

Figura 3.4 Funciones $f, f' y f''$ como soluciones de la ecuación de Falkner-Skan para $\beta = 0$ y con $f_w = -0.3$.

Figura 3.5 Funciones $f, f' y f''$ como soluciones de la ecuación de Falkner-Skan para $\beta = 1/3$ y con ausencia de soplado $f_w = 0.0$.

Figura 3.6 Funciones $f, f' y f''$ como soluciones de la ecuación de Falkner-Skan para $\beta = 1/3$ y con $f_w = -0.1$.

Figura 3.7 Funciones $f, f' y f''$ como soluciones de la ecuación de Falkner-Skan para $\beta = 1/3$ y con $f_w = -0.3$.

Figura 3.8 Funciones $f, f' y f''$ como soluciones de la ecuación de Falkner-Skan para $\beta = 1$ y con ausencia de soplado $f_w = 0.0$.

Figura 3.9 Funciones $f, f' y f''$ como soluciones de la ecuación de Falkner-Skan para $\beta = 1$ y con $f_w = -0.1$.

Figura 3.10 Funciones f, f' y f'' como soluciones de la ecuación de Falkner-Skan para $\beta = 1$ y con ausencia de soplado $f_w = -0.3$.

Figura 3.11 Función corriente frente a la variable de similaridad para una geometría $\beta = 0$

Figura 3.12 Función corriente frente a la variable de similaridad para una geometría $\beta = 1/3$

Figura 3.13 Función corriente frente a la variable de similaridad para una geometría $\beta = 1$

Figura 4.1 Figura de la corriente de un aerosol sobre una superficie plana que tiene implantado un sistema de soplado de dirección normal a dicha superficie.

Figura 4.2 Perfil de concentración de partículas dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie de $\pi\beta = 0$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = 0.0$.

Figura 4.3 Tasa de deposición de partículas J dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie de $\pi\beta = 0$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = 0.0$.

Figura 4.4 Perfil de concentración de partículas dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie de $\pi\beta = 0$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = -0.1$.

Figura 4.5 Tasa de deposición de partículas J dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie de $\pi\beta = 0$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = -0.1$.

Figura 4.6 Perfil de concentración de partículas dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie de $\pi\beta = 0$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = -0.3$.

Figura 4.7 Tasa de deposición de partículas J dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie de $\pi\beta = 0$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = -0.3$.

Figura 4.8 Figura de la corriente de un aerosol sobre una superficie $\beta = 1/3$ que tiene implantado un sistema de soplado de dirección normal a dicha superficie.

Figura 4.9 Perfil de concentración de partículas dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie de $\pi\beta = 60$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = 0.0$.

Figura 4.10 Tasa de deposición de partículas J dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie de $\pi\beta = 60$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = 0.0$.

Figura 4.11 Perfil de concentración de partículas dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie de $\pi\beta = 60$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = -0.1$.

Figura 4.12 Tasa de deposición de partículas J dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie de $\pi\beta = 60$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = -0.1$.

Figura 4.13 Perfil de concentración de partículas dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie de $\pi\beta = 60$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = -0.3$.

Figura 4.14 Tasa de deposición de partículas J dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie de $\pi\beta = 60$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = -0.3$.

Figura 4.15 Figura de la corriente de un aerosol sobre una superficie $\beta = 1$ que tiene implantado un sistema de soplado de dirección normal a dicha superficie.

Figura 4.16 Perfil de concentración de partículas dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie de $\pi\beta = 180$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = 0.0$.

Figura 4.17 Tasa de deposición de partículas J dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie de $\pi\beta = 180$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = 0.0$.

Figura 4.18 Perfil de concentración de partículas dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie de $\pi\beta = 180$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = -0.1$.

Figura 4.19 Tasa de deposición de partículas J dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie de $\pi\beta = 180$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = -0.1$.

Figura 4.20 Perfil de concentración de partículas dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie de $\pi\beta = 180$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = -0.3$.

Figura 4.21 Tasa de deposición de partículas J dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie de $\pi\beta = 180$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = -0.3$.

Figura 4.22 Evolución de $\Psi_\gamma(0)$ respecto a γ para una superficie plana con $f_w = -0.1$.

Figura 4.23 Evolución de $\Psi_\gamma(0)$ respecto a γ para una superficie plana con $f_w = -0.3$.

Figura 4.24 Figura de la corriente de un aerosol sobre una superficie plana ($\beta\pi = 0$) que tiene implantado un sistema de soplado de dirección normal a dicha superficie.

Figura 4.25 Perfil de concentración de partículas dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie plana para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = 0.0$.

Figura 4.26 Tasa de deposición de partículas J dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie plana para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = 0.0$.

Figura 4.27 Perfil de concentración de partículas dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie plana para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = -0.1$.

Figura 4.28 Tasa de deposición de partículas J dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie plana para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = -0.1$.

Figura 4.29 Perfil de concentración de partículas dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie plana para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = -0.3$.

Figura 4.30 Tasa de deposición de partículas J dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie plana para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = -0.3$.

Figura 4.31 Figura de la corriente de un aerosol sobre una superficie plana ($\beta\pi = 60$) que tiene implantado un sistema de soplado de dirección normal a dicha superficie.

Figura 4.32 Perfil de concentración de partículas dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie $\pi\beta = 60$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = 0.0$.

Figura 4.33 Tasa de deposición de partículas J dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie $\pi\beta = 60$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = 0.0$.

Figura 4.34 Perfil de concentración de partículas dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie $\pi\beta = 60$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = -0.1$.

Figura 4.35 Tasa de deposición de partículas J dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie $\pi\beta = 60$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = -0.1$.

Figura 4.36 Perfil de concentración de partículas dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie $\pi\beta = 60$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = -0.3$.

Figura 4.37 Tasa de deposición de partículas J dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie $\pi\beta = 60$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = -0.3$.

Figura 4.38 Figura de la corriente de un aerosol sobre una superficie plana ($\beta\pi = 180$) que tiene implantado un sistema de soplado de dirección normal a dicha superficie.

Figura 4.39 Perfil de concentración de partículas dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie $\pi\beta = 180$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = 0.0$.

Figura 4.40 Tasa de deposición de partículas J dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie $\pi\beta = 180$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = 0.0$.

Figura 4.41 Perfil de concentración de partículas dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie $\pi\beta = 180$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = -0.1$.

Figura 4.42 Tasa de deposición de partículas J dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie $\pi\beta = 180$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = -0.1$.

Figura 4.43 Perfil de concentración de partículas dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie $\pi\beta = 180$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = -0.3$.

Figura 4.44 Tasa de deposición de partículas J dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie $\pi\beta = 180$ para distintos valores del número Schmidt, para un valor dado del parámetro adimensional de soplado $f_w = -0.3$.

Figura 4.45 Velocidad de deposición normalizada en relación al número de Schmidt

para $\beta = 0$ y diferentes valores del parámetro adimensional de soplado.

Figura 5.46 Velocidad de deposición normalizada en relación al número de Schmidt para $\beta = 1/3$ y diferentes valores del parámetro adimensional de soplado.

Figura 4.47 Velocidad de deposición normalizada en relación al número de Schmidt para $\beta = 1$ y diferentes valores del parámetro adimensional de soplado.

Figura 5.1 Perfil de concentración de partículas normalizado ($Sc \gg 1$) dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie plana para distintos valores del número Schmidt y para distintos valores del parámetro adimensional de soplado f_w .

Figura 5.2 Perfil de concentración de partículas normalizado ($Sc \gg 1$) dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie con $\beta = 1/3$ para distintos valores del número Schmidt y para distintos valores del parámetro adimensional de soplado f_w .

Figura 5.3 Perfil de concentración de partículas normalizado ($Sc \gg 1$) dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie con $\beta = 1$ para distintos valores del número Schmidt y para distintos valores del parámetro adimensional de soplado f_w .

Figura 5.4 Perfil de concentración de partículas normalizado ($f_w \ll 1$) dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie plana para distintos valores del número Schmidt y para distintos valores del parámetro adimensional de soplado f_w .

Figura 5.5 Perfil de concentración de partículas normalizado ($f_w \ll 1$) dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie con $\beta = 1/3$ para distintos valores del número Schmidt y para distintos valores del parámetro adimensional de soplado f_w .

Figura 5.6 Perfil de concentración de partículas normalizado ($f_w \ll 1$) dentro de la capa límite de un aerosol sobre una superficie con $\beta = 1$ para distintos valores del número Schmidt y para distintos valores del parámetro adimensional de soplado f_w .

Figura 6.1 Comparación del regimen de deposición de partículas normalizada para la solución completa en una superficie con $\pi\beta = 0$ con la aproximación de soplado débil $f_w \ll 1$ y la del análisis asintótico $Sc \rightarrow \infty$.

Figura 6.2 Comparación del regimen de deposición de partículas normalizada para la solución completa en una superficie con $\pi\beta = 60$ con la aproximación de soplado débil $f_w \ll 1$ y la del análisis asintótico $Sc \rightarrow \infty$.

Figura 6.3 Comparación del regimen de deposición de partículas normalizada para la solución completa en una superficie con $\pi\beta = 180$ con la aproximación de soplado débil $f_w \ll 1$ y la del análisis asintótico $Sc \rightarrow \infty$.

Figura 7.1 Zona libre de partículas en las proximidades de la superficie como consecuencia del soplado (en este caso para $\beta = 0$ y $f_w = -0.3$).

Apéndice C

Programas de cálculo

C.1 Funciones de la velocidad de corriente

En este apéndice C.1 se muestran las diferentes líneas de programación que se han utilizado para la obtención de las gráficas que representan las funciones de la velocidad para diferentes valores de soplado y diferentes geometrías de la superficie.

Ejemplo de líneas de programación en Mathematica para el cálculo de las funciones de corriente ($f(n)$, $f'(n)$, $f''(n)$) de un aerosol para el caso de una superficie plana ($\beta=0$) utilizando diferentes valores de soplado (desde $fw=0$ hasta $fw=1$) a partir de la resolución de la ecuación de Falken-Skan utilizando el método de integración adaptativa de Runge-Kutta-Fehlberg y que se desarrolla en el capítulo 4 de la tesis.

```

Xinf = 4;
fw = 0.0;
epsilonA = 0.001;
epsilonB = 0.14;
Iter = 100;
numero = 100.0;
deltaX = Xinf/numero;
b = 0.0; (*angulo 0°*)
(*-----*)
Do[{fw = \
-jj*0.05,
  F01 = Sqrt[2/Pi] + b/Sqrt[3],
  F02 = F01 + epsilonA,
  p1 = y[x1] /.
    NDSolve[{{y''[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] fw - b y[x1] (2 + y[x1]) ==
      0, y[0] == -1, y'[0] == F01}}, y[x1], {x1, 0, Xinf}] /.
    x1 -> Xinf, p1 = p1[[1]], Method -> {"ExplicitRungeKutta"},
  p2 = (y[x1] /.
    NDSolve[{{y''[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] fw -
      b y[x1] (2 + y[x1]) == 0, y[0] == -1, y'[0] == F02}},
    y[x1], {x1, 0, Xinf}]) /. x1 -> Xinf, p2 = p2[[1]],
  Method -> {"ExplicitRungeKutta"},
  F0 = (F01*p2 - F02*p1)/(p2 - p1),
  Do[{p0 = (y[x1] /.
    NDSolve[{{y''[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] fw -
      b y[x1] (2 + y[x1]) == 0, y[0] == -1, y'[0] == F0},
    y[x1], {x1, 0, Xinf}]) /. x1 -> Xinf, p0 = p0[[1]],
  If[Abs[p2] > Abs[p1],
    If[Abs[p1] > Abs[p0], {p2 = p1, p1 = p0, F02 = F01,
      F01 = F0}, {p2 = p0, F02 = F0}],
    If[Abs[p2] > Abs[p0], {p1 = p0, F01 = F0}, {p1 = p2, F01 = F02,
      p2 = p0, F02 = F0}],
    F0 = (F01*p2 - F02*p1)/(p2 - p1),
    If[Abs[F0 - F01]/Abs[F01] < 10^(-15), Break[]]}, {i, 1, Iter}],
  p[x1_] =
  y[x1] /.
  NDSolve[{{y''[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] fw - b y[x1] (2 + y[x1]) ==
    0, y[0] == -1, y'[0] == F0}, y[x1], {x1, 0, Xinf}],
  F[x_] := NIntegrate[p[x1], {x1, 0, x}][[1]],
  tabla = Table[{deltaX*j, F[deltaX*j]}, {j, 0, numero}],
  FF = Interpolation[tabla],
  (*-----*)
  F001 = F0 - epsilonB,
  F002 = F001 + epsilonA,
  Do[{F01 = F001, F02 = F002, F0i = F0,
    p1 = (y[x1] /.
      NDSolve[{{y''[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] (fw + FF[x1]) -
        b y[x1] (2 + y[x1]) == 0, y[0] == -1, y'[0] == F01},
        y[x1], {x1, 0, Xinf}]) /. x1 -> Xinf, p1 = p1[[1]],
    p2 = (y[x1] /.
      NDSolve[{{y''[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] (fw + FF[x1]) -
        b y[x1] (2 + y[x1]) == 0, y[0] == -1, y'[0] == F02},
        y[x1], {x1, 0, Xinf}]) /. x1 -> Xinf, p2 = p2[[1]],
    F0 = (F01*p2 - F02*p1)/(p2 - p1),
    Do[{p0 = (y[x1] /.
      NDSolve[{{y''[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] (fw + FF[x1]) -
        b y[x1] (2 + y[x1]) == 0, y[0] == -1, y'[0] == F0},
        y[x1], {x1, 0, Xinf}]) /. x1 -> Xinf, p0 = p0[[1]],
    If[Abs[p2] > Abs[p1],
      If[Abs[p1] > Abs[p0], {p2 = p1, p1 = p0, F02 = F01,

```



```

F01 = F0}, {p2 = p0, F02 = F0}},
If[Abs[p2] > Abs[p0], {p1 = p0, F01 = F0}, {p1 = p2, F01 = F02,
p2 = p0, F02 = F0}]],
F0 = (F01*p2 - F02*p1)/(p2 - p1),
If[Abs[F0 - F01]/Abs[F01] < 10^(-10), Break[]], {iter, 1,
Iter}}, F0j = F0,
If[Abs[F0j - F0i]/Abs[F0i] < 10^(-15), Break[]],
p[x1_] =
y[x1] /.
NDSolve[{y'[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] (fw + FF[x1]) -
b y[x1] (2 + y[x1]) == 0, y[0] == -1, y'[0] == F0},
y[x1], {x1, 0, Xinf}},
F[x_] := NIntegrate[p[x1], {x1, 0, x}][[1]],
tabla = Table[{deltaX*j, F[deltaX*j]}, {j, 0, numero}],
FF = Interpolation[tabla],
f[x_] := fw + x + F[x],
tablaf = Table[{deltaX*j, f[deltaX*j]}, {j, 0, numero}],
ff = Interpolation[tablaf], fp[x_] := 1 + p[x],
f2p[x_] := p'[x][[1]], {ii, 1, 200}},
Plot[{f[x], fp[x], f2p[x]}, {x, 0, Xinf},
PlotRange -> All], (*-----plot original-----*)

figura[jj] =
Plot[{f[x], fp[x], f2p[x]}, {x, 0, Xinf}, PlotRange -> All,
AxesLabel -> {n, "fw"},
PlotLabel -> "f\b4\b4(0)" F0}, {jj, 0, 20},
grafica [jj] =
Plot[{f[x]}, {x, 0, Xinf}, PlotRange -> All,
AxesLabel -> {n, "f"}], {jj, 0, 20},

(*If fp[x]=0.999,punto[jj]=Plot[{x}],Show[{punto[10]}]*)

(*----CALCULO DE Nc----*)
alpha1 = 1,
p[x1_] =
z[x1] /.
NDSolve[{z'[x1] + alpha1*z[x1]*z'[x1] +
b*alpha1*((alpha1*alpha1) - (z'[x1]*z'[x1])) == 0,
z[0] == fw, z'[0] == 0, z''[0] == F0*alpha1*alpha1},
z[x1], {x1, 0, 1}],
p1 = p[1][[1]],
alpha2 = .2,
p[x1_] =
z[x1] /.
NDSolve[{z'[x1] + alpha2*z[x1]*z'[x1] +
b*alpha2*((alpha2*alpha2) - (z'[x1]*z'[x1])) == 0,
z[0] == fw, z'[0] == 0, z''[0] == F0*alpha2*alpha2},
z[x1], {x1, 0, 1}],
p2 = p[1][[1]],
alpha0 = (alpha1*p2 - alpha2*p1)/(p2 - p1),
Do [{p[x1_] =
z[x1] /.
NDSolve[{z'[x1] + alpha0*z[x1]*z'[x1] +
b*alpha0*((alpha0*alpha0) - (z'[x1]*z'[x1])) == 0,
z[0] == fw, z'[0] == 0, z''[0] == F0*alpha0*alpha0},
z[x1], {x1, 0, 1}],
p0 = p[1][[1]],
If [Abs[p2] > Abs[p1],
If [Abs[p1] > Abs[p0], {p2 = p1, p1 = p0, alpha2 = alpha1,
alpha1 = alpha0}, {p2 = p0, alpha2 = alpha0}],
If [Abs[p2] > Abs[p0], {p1 = p0, alpha1 = alpha0}, {p1 = p2,
alpha1 = alpha2, p2 = p0, alpha2 = alpha0}]],
alpha0 = (alpha1*p2 - alpha2*p1)/(p2 - p1),
If[Abs[alpha0 - alpha1]/Abs[alpha1] < 0.000000001,
Break[]], {Iter, 1, Iter}},
n0[jj] = alpha0, a[jj] = fw, s[jj] = F0}, {jj, 0, 20}]

```

Ejemplo de líneas de programación en Mathematica para el cálculo de las funciones de corriente ($f(n)$, $f'(n)$, $f''(n)$) de un aerosol para el caso de una superficie con un ángulo de 54° ($\beta=0.33$) utilizando diferentes valores de soplado (desde $fw=0$ hasta $fw=0.7$) a partir de la resolución de la ecuación de Falken-Skan utilizando el método de integración adaptativa de Runge-Kutta-Fehlberg y que se desarrolla en el capítulo 4 de la tesis.

```

Xinf = 4;
fw = 0.0;
epsilonA = 0.001;
epsilonB = 0.14;
Iter = 100;
numero = 100.0;
deltaX = Xinf/numero;
b = 0.33; (*ángulo 54°*)
(*-----*)
Do[{fw = \
-jj*0.05,
  F01 = Sqrt[2/Pi] + b/Sqrt[3],
  F02 = F01 + epsilonA,
  p1 = y[x1] /.
  NDSolve[{{y''[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] fw - b y[x1] (2 + y[x1]) ==
    0, y[0] == -1, y'[0] == F01}}, y[x1], {x1, 0, Xinf}] /.
  x1 -> Xinf, p1 = p1[[1]], Method -> {"ExplicitRungeKutta"},
  p2 = (y[x1] /.
  NDSolve[{{y''[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] fw -
    b y[x1] (2 + y[x1]) == 0, y[0] == -1, y'[0] == F02}},
  y[x1], {x1, 0, Xinf}]) /. x1 -> Xinf, p2 = p2[[1]],
Method -> {"ExplicitRungeKutta"},
F0 = (F01*p2 - F02*p1)/(p2 - p1),
Do[{p0 = (y[x1] /.
  NDSolve[{{y''[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] fw -
    b y[x1] (2 + y[x1]) == 0, y[0] == -1, y'[0] == F0}},
  y[x1], {x1, 0, Xinf}]) /. x1 -> Xinf, p0 = p0[[1]],
If[Abs[p2] > Abs[p1],
  If[Abs[p1] > Abs[p0], {p2 = p1, p1 = p0, F02 = F01,
  F01 = F0}, {p2 = p0, F02 = F0}],
  If[Abs[p2] > Abs[p0], {p1 = p0, F01 = F0}, {p1 = p2, F01 = F02,
  p2 = p0, F02 = F0}],
F0 = (F01*p2 - F02*p1)/(p2 - p1),
If[Abs[F0 - F01]/Abs[F01] < 10^(-15), Break[]]}, {i, 1, Iter}],
p[x1_] =
y[x1] /.
  NDSolve[{{y''[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] fw - b y[x1] (2 + y[x1]) ==
    0, y[0] == -1, y'[0] == F0}}, y[x1], {x1, 0, Xinf}],
F[x_] := NIntegrate[p[x1], {x1, 0, x}][[1]],
tabla = Table[{deltaX*j, F[deltaX*j]}, {j, 0, numero}],
FF = Interpolation[tabla],
(*-----*)
F001 = F0 - epsilonB,
F002 = F001 + epsilonA,
Do[{F01 = F001, F02 = F002, F0i = F0,
  p1 = (y[x1] /.
  NDSolve[{{y''[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] (fw + FF[x1]) -
    b y[x1] (2 + y[x1]) == 0, y[0] == -1, y'[0] == F01}},
  y[x1], {x1, 0, Xinf}]) /. x1 -> Xinf, p1 = p1[[1]],
  p2 = (y[x1] /.
  NDSolve[{{y''[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] (fw + FF[x1]) -
    b y[x1] (2 + y[x1]) == 0, y[0] == -1, y'[0] == F02}},
  y[x1], {x1, 0, Xinf}]) /. x1 -> Xinf, p2 = p2[[1]],
F0 = (F01*p2 - F02*p1)/(p2 - p1),
Do[{p0 = (y[x1] /.
  NDSolve[{{y''[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] (fw + FF[x1]) -
    b y[x1] (2 + y[x1]) == 0, y[0] == -1, y'[0] == F0}},
  y[x1], {x1, 0, Xinf}]) /. x1 -> Xinf, p0 = p0[[1]],
If[Abs[p2] > Abs[p1],
  If[Abs[p1] > Abs[p0], {p2 = p1, p1 = p0, F02 = F01,
  F01 = F0}, {p2 = p0, F02 = F0}],

```

```

    If[Abs[p2] > Abs[p0], {p1 = p0, F01 = F0}, {p1 = p2, F01 = F02,
      p2 = p0, F02 = F0}]],
    F0 = (F01*p2 - F02*p1)/(p2 - p1),
    If[Abs[F0 - F01]/Abs[F01] < 10^(-10), Break[]], {iter, 1,
      Iter}}, F0j = F0,
    If[Abs[F0j - F0i]/Abs[F0i] < 10^(-15), Break[]],
    p[x1_] =
      y[x1] /.
      NDSolve[{y'[x1] + x1 y[x1] + y[x1] (fw + FF[x1]) -
        b y[x1] (2 + y[x1]) == 0, y[0] == -1, y'[0] == F0},
        y[x1], {x1, 0, Xinf}],
    F[x_] := NIntegrate[p[x1], {x1, 0, x}][[1]],
    tabla = Table[{deltaX*j, F[deltaX*j]}, {j, 0, numero}],
    FF = Interpolation[tabla],
    f[x_] := fw + x + F[x],
    tablaf = Table[{deltaX*j, f[deltaX*j]}, {j, 0, numero}],
    ff = Interpolation[tablaf], fp[x_] := 1 + p[x],
    f2p[x_] := p'[x][[1]], {ii, 1, 200}],
    Plot[{f[x], fp[x], f2p[x]}, {x, 0, Xinf},
      PlotRange -> All], (*-----plot original-----*)

figura[jj] =
  Plot[{f[x], fp[x], f2p[x]}, {x, 0, Xinf}, PlotRange -> All,
    AxesLabel -> {n, "fw" fw },
    PlotLabel -> "=f\b4\b4(0)" F0], {jj, 0, 14},
grafica [jj] =
  Plot[{f[x]}, {x, 0, Xinf}, PlotRange -> All,
    AxesLabel -> {n, "f"}], {jj, 0, 14},

(*If fp[x]=0.999,punto[jj]=Plot[{x}],Show[{punto[10]}]*)

(*----CALCULO DE Nc----*)
alpha1 = 1,
p[x1_] =
  z[x1] /.
  NDSolve [{z'[x1] + alpha1*z[x1]*z'[x1] +
    b*alpha1*((alpha1*alpha1) - (z'[x1]*z'[x1])) == 0,
    z[0] == fw, z'[0] == 0, z'[0] == F0*alpha1*alpha1},
    z[x1], {x1, 0, 1}],
p1 = p[1][[1]],
alpha2 = .2,
p[x1_] =
  z[x1] /.
  NDSolve[{z'[x1] + alpha2*z[x1]*z'[x1] +
    b*alpha2*((alpha2*alpha2) - (z'[x1]*z'[x1])) == 0,
    z[0] == fw, z'[0] == 0, z'[0] == F0*alpha2*alpha2},
    z[x1], {x1, 0, 1}],
p2 = p[1][[1]],
alpha0 = (alpha1*p2 - alpha2*p1)/(p2 - p1),
Do [{p[x1_] =
  z[x1] /.
  NDSolve[{z'[x1] + alpha0*z[x1]*z'[x1] +
    b*alpha0*((alpha0*alpha0) - (z'[x1]*z'[x1])) == 0,
    z[0] == fw, z'[0] == 0, z'[0] == F0*alpha0*alpha0},
    z[x1], {x1, 0, 1}],
  p0 = p[1][[1]],
  If [Abs[p2] > Abs[p1],
    If[Abs[p1] > Abs[p0], {p2 = p1, p1 = p0, alpha2 = alpha1,
      alpha1 = alpha0}, {p2 = p0, alpha2 = alpha0}],
    If [Abs[p2] > Abs[p0], {p1 = p0, alpha1 = alpha0}, {p1 = p2,
      alpha1 = alpha2, p2 = p0, alpha2 = alpha0}]],
  alpha0 = (alpha1*p2 - alpha2*p1)/(p2 - p1),
  If[Abs[alpha0 - alpha1]/Abs[alpha1] < 0.000000001,
    Break[]], {Iter, 1, Iter}],
n0[jj] = alpha0, a[jj] = fw, s[jj] = F0}, {jj, 0, 14}]

```

Ejemplo de líneas de programación en Mathematica para el cálculo de las funciones de corriente ($f(n)$, $f'(n)$, $f''(n)$) de un aerosol para el caso de una superficie con un ángulo de 180° ($\beta=1$) utilizando diferentes valores de soplado (desde $fw=0$ hasta $fw=0.05$) a partir de la resolución de la ecuación de Falken-Skan utilizando el método de integración adaptativa de Runge-Kutta-Felberg y que se desarrolla en el capítulo 4 de la tesis.

```

Xinf = 10;
fw = 0.0;
epsilonA = 0.001;
epsilonB = 0.14;
Iter = 100;
numero = 100.0;
deltaX = Xinf/numero;
b = 1;(*angulo 180°*)
(*-----*)
Do[{fw = \
-jj*0.010,
  F01 = Sqrt[2/Pi] + b/Sqrt[3],
  F02 = F01 + epsilonA,
  p1 = y[x1] /.
  NDSolve[{{y'[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] fw - b y[x1] (2 + y[x1]) ==
    0, y[0] == -1, y'[0] == F01}}, y[x1], {x1, 0, Xinf}] /.
  x1 -> Xinf, p1 = p1[[1]], Method -> {"ExplicitRungeKutta"},
  p2 = (y[x1] /.
  NDSolve[{{y'[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] fw -
    b y[x1] (2 + y[x1]) == 0, y[0] == -1, y'[0] == F02}},
  y[x1], {x1, 0, Xinf}]) /. x1 -> Xinf, p2 = p2[[1]],
Method -> {"ExplicitRungeKutta"},
F0 = (F01*p2 - F02*p1)/(p2 - p1),
Do[{p0 = (y[x1] /.
  NDSolve[{{y'[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] fw -
    b y[x1] (2 + y[x1]) == 0, y[0] == -1, y'[0] == F0}},
  y[x1], {x1, 0, Xinf}]) /. x1 -> Xinf, p0 = p0[[1]],
If[Abs[p2] > Abs[p1],
  If[Abs[p1] > Abs[p0], {p2 = p1, p1 = p0, F02 = F01,
  F01 = F0}, {p2 = p0, F02 = F0}],
  If[Abs[p2] > Abs[p0], {p1 = p0, F01 = F0}, {p1 = p2, F01 = F02,
  p2 = p0, F02 = F0}],
F0 = (F01*p2 - F02*p1)/(p2 - p1),
If[Abs[F0 - F01]/Abs[F01] < 10^(-15), Break[]]}, {i, 1, Iter}],
p[x1_] =
y[x1] /.
  NDSolve[{{y'[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] fw - b y[x1] (2 + y[x1]) ==
    0, y[0] == -1, y'[0] == F0}}, y[x1], {x1, 0, Xinf}],
F[x_] := NIntegrate[p[x1], {x1, 0, x}][[1]],
tabla = Table[{deltaX*j, F[deltaX*j]}, {j, 0, numero}],
FF = Interpolation[tabla],
(*****)
F001 = F0 - epsilonB,
F002 = F001 + epsilonA,
Do[{F01 = F001, F02 = F002, F0i = F0,
  p1 = (y[x1] /.
  NDSolve[{{y'[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] (fw + FF[x1]) -
    b y[x1] (2 + y[x1]) == 0, y[0] == -1, y'[0] == F01}},
  y[x1], {x1, 0, Xinf}]) /. x1 -> Xinf, p1 = p1[[1]],
  p2 = (y[x1] /.
  NDSolve[{{y'[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] (fw + FF[x1]) -
    b y[x1] (2 + y[x1]) == 0, y[0] == -1, y'[0] == F02}},
  y[x1], {x1, 0, Xinf}]) /. x1 -> Xinf, p2 = p2[[1]],
F0 = (F01*p2 - F02*p1)/(p2 - p1),
Do[{p0 = (y[x1] /.
  NDSolve[{{y'[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] (fw + FF[x1]) -
    b y[x1] (2 + y[x1]) == 0, y[0] == -1, y'[0] == F0}},
  y[x1], {x1, 0, Xinf}]) /. x1 -> Xinf, p0 = p0[[1]],
If[Abs[p2] > Abs[p1],
  If[Abs[p1] > Abs[p0], {p2 = p1, p1 = p0, F02 = F01,
  F01 = F0}, {p2 = p0, F02 = F0}],

```

```

    If[Abs[p2] > Abs[p0], {p1 = p0, F01 = F0}, {p1 = p2, F01 = F02,
      p2 = p0, F02 = F0}]],
    F0 = (F01*p2 - F02*p1)/(p2 - p1),
    If[Abs[F0 - F01]/Abs[F01] < 10^(-10), Break[]], {iter, 1,
      Iter}}, F0j = F0,
    If[Abs[F0j - F0i]/Abs[F0i] < 10^(-15), Break[]],
    p[x1_] =
      y[x1] /.
      NDSolve[{y'[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] (fw + FF[x1]) -
        b y[x1] (2 + y[x1]) == 0, y[0] == -1, y'[0] == F0},
        y[x1], {x1, 0, Xinf}],
    F[x_] := NIntegrate[p[x1], {x1, 0, x}][[1]],
    tabla = Table[{deltaX*j, F[deltaX*j]}, {j, 0, numero}],
    FF = Interpolation[tabla],
    f[x_] := fw + x + F[x],
    tablaf = Table[{deltaX*j, f[deltaX*j]}, {j, 0, numero}],
    ff = Interpolation[tablaf], fp[x_] := 1 + p[x],
    f2p[x_] := p'[x][[1]], {ii, 1, 200}],
    Plot[{f[x], fp[x], f2p[x]}, {x, 0, Xinf},
      PlotRange -> All], (*-----plot original-----*)

figura[jj] =
  Plot[{f[x], fp[x], f2p[x]}, {x, 0, Xinf}, PlotRange -> All,
    AxesLabel -> {n, "fw" fw },
    PlotLabel -> "=f\b4\b4(0)" F0], {jj, 0, 5},
grafica [jj] =
  Plot[{f[x]}, {x, 0, Xinf}, PlotRange -> All,
    AxesLabel -> {n, "f"}], {jj, 0, 5},

(*If fp[x]=0.999,punto[jj]=Plot[{x}],Show[{punto[10]}]*)

(*----CALCULO DE Nc----*)
alpha1 = 1,
p[x1_] =
  z[x1] /.
  NDSolve [{z'[x1] + alpha1*z[x1]*z'[x1] +
    b*alpha1*((alpha1*alpha1) - (z'[x1]*z'[x1])) == 0,
    z[0] == fw, z'[0] == 0, z'[0] == F0*alpha1*alpha1},
    z[x1], {x1, 0, 1}],
p1 = p[1][[1]],
alpha2 = .2,
p[x1_] =
  z[x1] /.
  NDSolve[{z'[x1] + alpha2*z[x1]*z'[x1] +
    b*alpha2*((alpha2*alpha2) - (z'[x1]*z'[x1])) == 0,
    z[0] == fw, z'[0] == 0, z'[0] == F0*alpha2*alpha2},
    z[x1], {x1, 0, 1}],
p2 = p[1][[1]],
alpha0 = (alpha1*p2 - alpha2*p1)/(p2 - p1),
Do [{p[x1_] =
  z[x1] /.
  NDSolve[{z'[x1] + alpha0*z[x1]*z'[x1] +
    b*alpha0*((alpha0*alpha0) - (z'[x1]*z'[x1])) == 0,
    z[0] == fw, z'[0] == 0, z'[0] == F0*alpha0*alpha0},
    z[x1], {x1, 0, 1}],
  p0 = p[1][[1]],
  If [Abs[p2] > Abs[p1],
    If[Abs[p1] > Abs[p0], {p2 = p1, p1 = p0, alpha2 = alpha1,
      alpha1 = alpha0}, {p2 = p0, alpha2 = alpha0}],
    If [Abs[p2] > Abs[p0], {p1 = p0, alpha1 = alpha0}, {p1 = p2,
      alpha1 = alpha2, p2 = p0, alpha2 = alpha0}]],
  alpha0 = (alpha1*p2 - alpha2*p1)/(p2 - p1),
  If[Abs[alpha0 - alpha1]/Abs[alpha1] < 0.000000001,
    Break[]], {Iter, 1, Iter}],
n0[jj] = alpha0, a[jj] = fw, s[jj] = F0}, {jj, 0, 5}

(*-----GRAFICAS-----*)
Show[{figura[0]}]

```

C.2 Transporte de partículas. Concentración

En este apéndice C.2 se muestran las diferentes líneas de programación que se han utilizado para la obtención de las gráficas que representan la concentración en las proximidades de la superficie $\Psi(0)$ para diferentes valores del número de Schmidt con varios sopladors y diferentes geometrías de la superficie.

Ejemplo de líneas de programación en Mathematica para el cálculo de la función de concentración de un aerosol en las proximidades de la superficie y de la velocidad de deposición (J) para el caso de que esta superficie sea plana ($\beta=0$) utilizando diferentes valores de soplado (desde $fw=0, -0.1, -0.3$) y del número de Schmidt ($Sc=1-100$) a partir de la resolución de las ecuaciones de la concentración y de la velocidad de deposición que se desarrollan en el capítulo 4 de la tesis.

```

Xinf = 10;
fw = -0.1;
epsilonA = 0.001;
epsilonB = 0.14;
Iter = 100;
numero = 100.0;
deltaX = Xinf/numero;
b = 0;
(*-----*)
Do[{fw = -jj*0.1,
  F01 = Sqrt[2/Pi] + b/Sqrt[3],
  F02 = F01 + epsilonA,
  p[x1_] =
  y[x1] /.
  NDSolve[{y'[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] fw - b y[x1] (2 + y[x1]) ==
    0, y[0] == -1, y'[0] == F01}, y[x1], {x1, 0, Xinf}],
  (*Plot[p[x1],{x1,0,Xinf},PlotRange\{Rule\ All\}*)
  p1 = p[Xinf][[1]],
  p[x1_] =
  y[x1] /.
  NDSolve[{y'[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] fw - b y[x1] (2 + y[x1]) ==
    0, y[0] == -1, y'[0] == F02}, y[x1], {x1, 0, Xinf}],
  (*Plot[p[x1],{x1,0,Xinf},PlotRange\{Rule\ All\}*)
  p2 = p[Xinf][[1]],
  F0 = (F01*p2 - F02*p1)/(p2 - p1),
  Do[{p[x1_] =
  y[x1] /.
  NDSolve[{y'[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] fw -
    b y[x1] (2 + y[x1]) == 0, y[0] == -1, y'[0] == F0},
  y[x1], {x1, 0, Xinf}],
  (*Plot[p[x1],{x1,0,Xinf},PlotRange\{Rule\ All\}*)

  p0 = p[Xinf][[1]],
  If[Abs[p2] > Abs[p1],
    If[Abs[p1] > Abs[p0], {p2 = p1, p1 = p0, F02 = F01,
      F01 = F0}, {p2 = p0, F02 = F0}],
    If[Abs[p2] > Abs[p0], {p1 = p0, F01 = F0}, {p1 = p2, F01 = F02,
      p2 = p0, F02 = F0}]],
  F0 = (F01*p2 - F02*p1)/(p2 - p1),
  If[Abs[F0 - F01]/Abs[F01] < 10^(-15), Break[]], {i, 1, Iter}],
F[x_] := NIntegrate[p[x1], {x1, 0, x}][[1]],
tabla = Table[{deltaX*j, F[deltaX*j]}, {j, 0, numero}],
FF = Interpolation[tabla],
(*****)
F001 = F0 - epsilonB;
F002 = F001 + epsilonA,
Do[{F01 = F001, F02 = F002, F0i = F0,
  p[x1_] =
  y[x1] /.
  NDSolve[{y'[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] (fw + FF[x1]) -
    b y[x1] (2 + y[x1]) == 0, y[0] == -1, y'[0] == F01},
  y[x1], {x1, 0, Xinf}],
  p1 = p[Xinf][[1]],
  p[x1_] =
  y[x1] /.
  NDSolve[{y'[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] (fw + FF[x1]) -
    b y[x1] (2 + y[x1]) == 0, y[0] == -1, y'[0] == F02},
  y[x1], {x1, 0, Xinf}],
  p2 = p[Xinf][[1]], F0 = (F01*p2 - F02*p1)/(p2 - p1),

```

```

Do[{p[x1_] =
  y[x1] /.
  NDSolve[{y'[x1] + x1 y[x1] + y[x1] (fw + FF[x1]) -
    b y[x1] (2 + y[x1]) == 0, y[0] == -1, y'[0] == F0},
  y[x1], {x1, 0, Xinf}], p0 = p[Xinf][[1]],
If[Abs[p2] > Abs[p1],
  If[Abs[p1] > Abs[p0], {p2 = p1, p1 = p0, F02 = F01,
    F01 = F0}, {p2 = p0, F02 = F0}],
  If[Abs[p2] > Abs[p0], {p1 = p0, F01 = F0}, {p1 = p2, F01 = F02,
    p2 = p0, F02 = F0}],
F0 = (F01*p2 - F02*p1)/(p2 - p1),
If[Abs[F0 - F01]/Abs[F01] < 10^(-10), Break[]], {iter, 1,
  Iter}}, F0j = F0,
If[Abs[F0j - F0i]/Abs[F0i] < 10^(-15), Break[]],
F[x_] := NIntegrate[p[x1], {x1, 0, x}][[1]],
tabla = Table[{deltaX*j, F[deltaX*j]}, {j, 0, numero}],
FF = Interpolation[tabla],
f[x_] := fw + x + F[x],
tablaf = Table[{deltaX*j, f[deltaX*j]}, {j, 0, numero}],
ff = Interpolation[tablaf], fp[x_] := 1 + p[x],
f2p[x_] := p'[x][[1]], {ii, 1, 200}],

(*Grafica concentracion con diferentes Sc y J con diferentes \
valores Sc*)

g[x_] := NIntegrate[ff[x1], {x1, -0.1, x}],
Do[{Sc = If[iSc == 1, 1, iSc - 1],
  tabla = Table[{deltaX*j, Exp[-Sc*(g[deltaX*j] - fw)]}, {j, 0,
    numero}],
  gg = Interpolation[tabla], (*Print[Sc]*),
  h[x_] := NIntegrate[gg[x1], {x1, -0.1, x}], Hinf = h[Xinf],
  H0 = h[0.0],
  tabla = Table[{deltaX*j, h[deltaX*j]/Hinf}, {j, 0, numero}],
  psiG[Sc] = Interpolation[tabla],
  JG[Sc] = gg[0.0]/(Sc*Hinf)}, {iSc, 1, 105, 1}],
tablaJGSc =
  Table[{If[iSc == 1, 1, iSc - 1],
    JG[If[iSc == 1, 1, iSc - 1]]}, {iSc, 1, 105, 1}],
tabla1[jj] =
  Plot[{psiG[1][x1], psiG[25][x1], psiG[50][x1],
    psiG[100][x1]}, {x1, 0, 5}, PlotRange -> All,
  AxesLabel -> {n, Concentración}, {jj, 1, 3},
(*GRAFICA DE J con diferentes valores Sc*)

tabla2[jj] =
  ListPlot[tablaJGSc, PlotRange -> All, PlotJoined -> True,
  AxesLabel -> {Shmidt, J}], {jj, 1, 3}]

Show[{tabla1[1]}]
Show[{tabla2[1]}]
Show[{tabla1[2]}]
Show[{tabla2[2]}]
Show[{tabla1[3]}]
Show[{tabla2[3]}]

```


Ejemplo de líneas de programación en Mathematica para el cálculo de la función de concentración de un aerosol en las proximidades de la superficie y de la velocidad de deposición (J) para el caso de que esta superficie tenga un ángulo de 54° (beta=0.33) utilizando diferentes valores de soplado (desde fw=0, -0.1, -0.3) y del número de Schmidt (Sc=1-100) a partir de la resolución de la ecuaciones de la concentración y de la velocidad de deposición que se desarrollan en el capítulo 4 de la tesis.

```

Xinf = 10;
fw = -0.1;
epsilonA = 0.001;
epsilonB = 0.14;
Iter = 100;
numero = 100.0;
deltaX = Xinf/numero;
b = 0.33;
(*-----*)
Do[{fw = -jj*0.1,
  F01 = Sqrt[2/Pi] + b/Sqrt[3],
  F02 = F01 + epsilonA,
  p[x1_] =
  y[x1] /.
  NDSolve[{y'[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] fw - b y[x1] (2 + y[x1]) ==
    0, y[0] == -1, y'[0] == F01}, y[x1], {x1, 0, Xinf}],
  (*Plot[p[x1],{x1,0,Xinf},PlotRange\{Rule\ All]*)
  p1 = p[Xinf][[1]],
  p[x1_] =
  y[x1] /.
  NDSolve[{y'[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] fw - b y[x1] (2 + y[x1]) ==
    0, y[0] == -1, y'[0] == F02}, y[x1], {x1, 0, Xinf}],
  (*Plot[p[x1],{x1,0,Xinf},PlotRange\{Rule\ All]*)
  p2 = p[Xinf][[1]],
  F0 = (F01*p2 - F02*p1)/(p2 - p1),
  Do[{p[x1_] =
  y[x1] /.
  NDSolve[{y'[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] fw -
    b y[x1] (2 + y[x1]) == 0, y[0] == -1, y'[0] == F0},
  y[x1], {x1, 0, Xinf}],
  (*Plot[p[x1],{x1,0,Xinf},PlotRange\{Rule\ All]*)

  p0 = p[Xinf][[1]],
  If[Abs[p2] > Abs[p1],
    If[Abs[p1] > Abs[p0], {p2 = p1, p1 = p0, F02 = F01,
      F01 = F0}, {p2 = p0, F02 = F0}],
    If[Abs[p2] > Abs[p0], {p1 = p0, F01 = F0}, {p1 = p2, F01 = F02,
      p2 = p0, F02 = F0}],
    F0 = (F01*p2 - F02*p1)/(p2 - p1),
    If[Abs[F0 - F01]/Abs[F01] < 10^(-15), Break[]], {i, 1, Iter}],
  F[x_] := NIntegrate[p[x1], {x1, 0, x}][[1]],
  tabla = Table[{deltaX*j, F[deltaX*j]}, {j, 0, numero}],
  FF = Interpolation[tabla],
  (*****)
  F001 = F0 - epsilonB;
  F002 = F001 + epsilonA,
  Do[{F01 = F001, F02 = F002, F0i = F0,
  p[x1_] =
  y[x1] /.
  NDSolve[{y'[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] (fw + FF[x1]) -
    b y[x1] (2 + y[x1]) == 0, y[0] == -1, y'[0] == F01},
  y[x1], {x1, 0, Xinf}],
  p1 = p[Xinf][[1]],
  p[x1_] =
  y[x1] /.
  NDSolve[{y'[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] (fw + FF[x1]) -
    b y[x1] (2 + y[x1]) == 0, y[0] == -1, y'[0] == F02},
  y[x1], {x1, 0, Xinf}],
  p2 = p[Xinf][[1]], F0 = (F01*p2 - F02*p1)/(p2 - p1),

```

```

Do[{p[x1_] =
  y[x1] /.
  NDSolve[{y'[x1] + x1 y[x1] + y[x1] (fw + FF[x1]) -
    b y[x1] (2 + y[x1]) == 0, y[0] == -1, y'[0] == F0},
  y[x1], {x1, 0, Xinf}], p0 = p[Xinf][[1]],
  If[Abs[p2] > Abs[p1],
  If[Abs[p1] > Abs[p0], {p2 = p1, p1 = p0, F02 = F01,
  F01 = F0}, {p2 = p0, F02 = F0}],
  If[Abs[p2] > Abs[p0], {p1 = p0, F01 = F0}, {p1 = p2, F01 = F02,
  p2 = p0, F02 = F0}],
  F0 = (F01*p2 - F02*p1)/(p2 - p1),
  If[Abs[F0 - F01]/Abs[F01] < 10^(-10), Break[]], {iter, 1,
  Iter}}, F0j = F0,
  If[Abs[F0j - F0i]/Abs[F0i] < 10^(-15), Break[]],
  F[x_] := NIntegrate[p[x1], {x1, 0, x}][[1]],
  tabla = Table[{deltaX*j, F[deltaX*j]}, {j, 0, numero}],
  FF = Interpolation[tabla],
  f[x_] := fw + x + F[x],
  tablaf = Table[{deltaX*j, f[deltaX*j]}, {j, 0, numero}],
  ff = Interpolation[tablaf], fp[x_] := 1 + p[x],
  f2p[x_] := p'[x][[1]], {ii, 1, 200}],

(*Grafica concentracion con diferentes Sc y J con diferentes \
valores Sc*)

g[x_] := NIntegrate[ff[x1], {x1, -0.1, x}],
Do[{Sc = If[iSc == 1, 1, iSc - 1],
  tabla = Table[{deltaX*j, Exp[-Sc*(g[deltaX*j] - fw)]}, {j, 0,
  numero}],
  gg = Interpolation[tabla], (*Print[Sc]*),
  h[x_] := NIntegrate[gg[x1], {x1, -0.1, x}], Hinf = h[Xinf],
  H0 = h[0.0],
  tabla = Table[{deltaX*j, h[deltaX*j]/Hinf}, {j, 0, numero}],
  psiG[Sc] = Interpolation[tabla],
  JG[Sc] = gg[0.0]/(Sc*Hinf)}, {iSc, 1, 105, 1}],
tablaJGSc =
  Table[{If[iSc == 1, 1, iSc - 1],
  JG[If[iSc == 1, 1, iSc - 1]]}, {iSc, 1, 105, 1}],
tabla1[jj] =
  Plot[{psiG[1][x1], psiG[25][x1], psiG[50][x1],
  psiG[100][x1]}, {x1, 0, 5}, PlotRange -> All,
  AxesLabel -> {n, Concentración}, {jj, 1, 3},
(*GRAFICA DE J con diferentes valores Sc*)

tabla2[jj] =
  ListPlot[tablaJGSc, PlotRange -> All, PlotJoined -> True,
  AxesLabel -> {Shmidt, J}], {jj, 1, 3}]

Show[{tabla1[1]}]
Show[{tabla2[1]}]
Show[{tabla1[2]}]
Show[{tabla2[2]}]
Show[{tabla1[3]}]
Show[{tabla2[3]}]

```

Ejemplo de líneas de programación en Mathematica para el cálculo de la función de concentración de un aerosol en las proximidades de la superficie y de la velocidad de deposición (J) para el caso de que esta superficie tenga un ángulo de 180° (beta=1) utilizando diferentes valores de soplado (desde fw=0, -0.1, -0.3) y del número de Schmidt (Sc=1-100) a partir de la resolución de las ecuaciones de la concentración y de la velocidad de deposición que se desarrollan en el capítulo 4 de la tesis.

```

Xinf = 10;
fw = -0.1;
epsilonA = 0.001;
epsilonB = 0.14;
Iter = 100;
numero = 100.0;
deltaX = Xinf/numero;
b = 1;
(*-----*)
Do[{fw = -jj*0.1,
  F01 = Sqrt[2/Pi] + b/Sqrt[3],
  F02 = F01 + epsilonA,
  p[x1_] =
  y[x1] /.
  NDSolve[{y'[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] fw - b y[x1] (2 + y[x1]) ==
    0, y[0] == -1, y'[0] == F01}, y[x1], {x1, 0, Xinf}],
  (*Plot[p[x1],{x1,0,Xinf},PlotRange\{Rule\ All]*)
  p1 = p[Xinf][[1]],
  p[x1_] =
  y[x1] /.
  NDSolve[{y'[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] fw - b y[x1] (2 + y[x1]) ==
    0, y[0] == -1, y'[0] == F02}, y[x1], {x1, 0, Xinf}],
  (*Plot[p[x1],{x1,0,Xinf},PlotRange\{Rule\ All]*)
  p2 = p[Xinf][[1]],
  F0 = (F01*p2 - F02*p1)/(p2 - p1),
  Do[{p[x1_] =
  y[x1] /.
  NDSolve[{y'[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] fw -
    b y[x1] (2 + y[x1]) == 0, y[0] == -1, y'[0] == F0},
  y[x1], {x1, 0, Xinf}],
  (*Plot[p[x1],{x1,0,Xinf},PlotRange\{Rule\ All]*)

  p0 = p[Xinf][[1]],
  If[Abs[p2] > Abs[p1],
    If[Abs[p1] > Abs[p0], {p2 = p1, p1 = p0, F02 = F01,
      F01 = F0}, {p2 = p0, F02 = F0}],
    If[Abs[p2] > Abs[p0], {p1 = p0, F01 = F0}, {p1 = p2, F01 = F02,
      p2 = p0, F02 = F0}],
    F0 = (F01*p2 - F02*p1)/(p2 - p1),
    If[Abs[F0 - F01]/Abs[F01] < 10^(-15), Break[]], {i, 1, Iter}],
  F[x_] := NIntegrate[p[x1], {x1, 0, x}][[1]],
  tabla = Table[{deltaX*j, F[deltaX*j]}, {j, 0, numero}],
  FF = Interpolation[tabla],
  (*****
  F001 = F0 - epsilonB;
  F002 = F001 + epsilonA,
  Do[{F01 = F001, F02 = F002, F0i = F0,
  p[x1_] =
  y[x1] /.
  NDSolve[{y'[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] (fw + FF[x1]) -
    b y[x1] (2 + y[x1]) == 0, y[0] == -1, y'[0] == F01},
  y[x1], {x1, 0, Xinf}],
  p1 = p[Xinf][[1]],
  p[x1_] =
  y[x1] /.
  NDSolve[{y'[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] (fw + FF[x1]) -
    b y[x1] (2 + y[x1]) == 0, y[0] == -1, y'[0] == F02},
  y[x1], {x1, 0, Xinf}],
  p2 = p[Xinf][[1]], F0 = (F01*p2 - F02*p1)/(p2 - p1),

```

```

Do[{p[x1_] =
  y[x1] /.
  NDSolve[{y'[x1] + x1 y[x1] + y[x1] (fw + FF[x1]) -
    b y[x1] (2 + y[x1]) == 0, y[0] == -1, y'[0] == F0},
  y[x1], {x1, 0, Xinf}], p0 = p[Xinf][[1]],
  If[Abs[p2] > Abs[p1],
  If[Abs[p1] > Abs[p0], {p2 = p1, p1 = p0, F02 = F01,
  F01 = F0}, {p2 = p0, F02 = F0}],
  If[Abs[p2] > Abs[p0], {p1 = p0, F01 = F0}, {p1 = p2, F01 = F02,
  p2 = p0, F02 = F0}],
  F0 = (F01*p2 - F02*p1)/(p2 - p1),
  If[Abs[F0 - F01]/Abs[F01] < 10^(-10), Break[]], {iter, 1,
  Iter}}, F0j = F0,
  If[Abs[F0j - F0i]/Abs[F0i] < 10^(-15), Break[]],
  F[x_] := NIntegrate[p[x1], {x1, 0, x}][[1]],
  tabla = Table[{deltaX*j, F[deltaX*j]}, {j, 0, numero}],
  FF = Interpolation[tabla],
  f[x_] := fw + x + F[x],
  tablaf = Table[{deltaX*j, f[deltaX*j]}, {j, 0, numero}],
  ff = Interpolation[tablaf], fp[x_] := 1 + p[x],
  f2p[x_] := p'[x][[1]], {ii, 1, 200}],

(*Grafica concentracion con diferentes Sc y J con diferentes \
valores Sc*)

g[x_] := NIntegrate[ff[x1], {x1, -0.1, x}],
Do[{Sc = If[iSc == 1, 1, iSc - 1],
  tabla = Table[{deltaX*j, Exp[-Sc*(g[deltaX*j] - fw)]}, {j, 0,
  numero}],
  gg = Interpolation[tabla], (*Print[Sc]*),
  h[x_] := NIntegrate[gg[x1], {x1, -0.1, x}], Hinf = h[Xinf],
  H0 = h[0.0],
  tabla = Table[{deltaX*j, h[deltaX*j]/Hinf}, {j, 0, numero}],
  psiG[Sc] = Interpolation[tabla],
  JG[Sc] = gg[0.0]/(Sc*Hinf)}, {iSc, 1, 105, 1}],
tablaJGSc =
  Table[{If[iSc == 1, 1, iSc - 1],
  JG[If[iSc == 1, 1, iSc - 1]]}, {iSc, 1, 105, 1}],
tabla1[jj] =
  Plot[{psiG[1][x1], psiG[25][x1], psiG[50][x1],
  psiG[100][x1]}, {x1, 0, 5}, PlotRange -> All,
  AxesLabel -> {n, Concentración}, {jj, 1, 3},
  (*GRAFICA DE J con diferentes valores Sc*)

tabla2[jj] =
  ListPlot[tablaJGSc, PlotRange -> All, PlotJoined -> True,
  AxesLabel -> {Shmidt, J}], {jj, 1, 3}]

Show[{tabla1[1]}]
Show[{tabla2[1]}]
Show[{tabla1[2]}]
Show[{tabla2[2]}]
Show[{tabla1[3]}]
Show[{tabla2[3]}]

```

C.3 Transporte de partículas. Velocidad de deposición

En este apéndice C.3 se muestran las diferentes líneas de programación que se han utilizado para la obtención de las gráficas que representan la velocidad de deposición de las partículas en la superficie J para diferentes valores del número de Schmidt con varios sopladors y diferentes geometrias de la superficie.

Ejemplo de líneas de programación en Mathematica para el cálculo de la función de concentración de un aerosol en las proximidades de la superficie y de la velocidad de deposición (J) para el caso de que esta superficie sea plana ($\beta=0$) utilizando diferentes valores de soplado (desde $fw=0, -0.1, -0.3$) y del número de Schmidt ($Sc=1-100$) a partir de la resolución de las ecuaciones de la concentración y de la velocidad de deposición que se desarrollan en el capítulo 4 de la tesis.

```

Xinf = 10;
fw = -0.1;
epsilonA = 0.001;
epsilonB = 0.14;
Iter = 100;
numero = 100.0;
deltaX = Xinf/numero;
b = 0;
(*-----*)
Do[{fw = -jj*0.1,
  F01 = Sqrt[2/Pi] + b/Sqrt[3],
  F02 = F01 + epsilonA,
  p[x1_] =
  y[x1] /.
  NDSolve[{y'[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] fw - b y[x1] (2 + y[x1]) ==
    0, y[0] == -1, y'[0] == F01}, y[x1], {x1, 0, Xinf}],
  (*Plot[p[x1],{x1,0,Xinf},PlotRange\{Rule\ All\}*)
  p1 = p[Xinf][[1]],
  p[x1_] =
  y[x1] /.
  NDSolve[{y'[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] fw - b y[x1] (2 + y[x1]) ==
    0, y[0] == -1, y'[0] == F02}, y[x1], {x1, 0, Xinf}],
  (*Plot[p[x1],{x1,0,Xinf},PlotRange\{Rule\ All\}*)
  p2 = p[Xinf][[1]],
  F0 = (F01*p2 - F02*p1)/(p2 - p1),
  Do[{p[x1_] =
  y[x1] /.
  NDSolve[{y'[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] fw -
    b y[x1] (2 + y[x1]) == 0, y[0] == -1, y'[0] == F0},
  y[x1], {x1, 0, Xinf}],
  (*Plot[p[x1],{x1,0,Xinf},PlotRange\{Rule\ All\}*)

  p0 = p[Xinf][[1]],
  If[Abs[p2] > Abs[p1],
    If[Abs[p1] > Abs[p0], {p2 = p1, p1 = p0, F02 = F01,
      F01 = F0}, {p2 = p0, F02 = F0}],
    If[Abs[p2] > Abs[p0], {p1 = p0, F01 = F0}, {p1 = p2, F01 = F02,
      p2 = p0, F02 = F0}],
    F0 = (F01*p2 - F02*p1)/(p2 - p1),
    If[Abs[F0 - F01]/Abs[F01] < 10^(-15), Break[]], {i, 1, Iter}],
  F[x_] := NIntegrate[p[x1], {x1, 0, x}][[1]],
  tabla = Table[{deltaX*j, F[deltaX*j]}, {j, 0, numero}],
  FF = Interpolation[tabla],
  (*****
  F001 = F0 - epsilonB;
  F002 = F001 + epsilonA,
  Do[{F01 = F001, F02 = F002, F0i = F0,
  p[x1_] =
  y[x1] /.
  NDSolve[{y'[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] (fw + FF[x1]) -
    b y[x1] (2 + y[x1]) == 0, y[0] == -1, y'[0] == F01},
  y[x1], {x1, 0, Xinf}],
  p1 = p[Xinf][[1]],
  p[x1_] =
  y[x1] /.
  NDSolve[{y'[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] (fw + FF[x1]) -
    b y[x1] (2 + y[x1]) == 0, y[0] == -1, y'[0] == F02},
  y[x1], {x1, 0, Xinf}],
  p2 = p[Xinf][[1]], F0 = (F01*p2 - F02*p1)/(p2 - p1),

```

```

Do[{p[x1_] =
  y[x1] /.
  NDSolve[{y'[x1] + x1 y[x1] + y[x1] (fw + FF[x1]) -
    b y[x1] (2 + y[x1]) == 0, y[0] == -1, y'[0] == F0},
  y[x1], {x1, 0, Xinf}], p0 = p[Xinf][[1]],
If[Abs[p2] > Abs[p1],
  If[Abs[p1] > Abs[p0], {p2 = p1, p1 = p0, F02 = F01,
    F01 = F0}, {p2 = p0, F02 = F0}],
  If[Abs[p2] > Abs[p0], {p1 = p0, F01 = F0}, {p1 = p2, F01 = F02,
    p2 = p0, F02 = F0}],
F0 = (F01*p2 - F02*p1)/(p2 - p1),
If[Abs[F0 - F01]/Abs[F01] < 10^(-10), Break[]], {iter, 1,
  Iter}}, F0j = F0,
If[Abs[F0j - F0i]/Abs[F0i] < 10^(-15), Break[]],
F[x_] := NIntegrate[p[x1], {x1, 0, x}][[1]],
tabla = Table[{deltaX*j, F[deltaX*j]}, {j, 0, numero}],
FF = Interpolation[tabla],
f[x_] := fw + x + F[x],
tablaf = Table[{deltaX*j, f[deltaX*j]}, {j, 0, numero}],
ff = Interpolation[tablaf], fp[x_] := 1 + p[x],
f2p[x_] := p'[x][[1]], {ii, 1, 200}],

(*Grafica concentracion con diferentes Sc y J con diferentes \
valores Sc*)

g[x_] := NIntegrate[ff[x1], {x1, -0.1, x}],
Do[{Sc = If[iSc == 1, 1, iSc - 1],
  tabla = Table[{deltaX*j, Exp[-Sc*(g[deltaX*j] - fw)]}, {j, 0,
    numero}],
  gg = Interpolation[tabla], (*Print[Sc]*),
  h[x_] := NIntegrate[gg[x1], {x1, -0.1, x}], Hinf = h[Xinf],
  H0 = h[0.0],
  tabla = Table[{deltaX*j, h[deltaX*j]/Hinf}, {j, 0, numero}],
  psiG[Sc] = Interpolation[tabla],
  JG[Sc] = gg[0.0]/(Sc*Hinf)}, {iSc, 1, 105, 1}],
tablaJGSc =
  Table[{If[iSc == 1, 1, iSc - 1],
    JG[If[iSc == 1, 1, iSc - 1]]}, {iSc, 1, 105, 1}],
tabla1[jj] =
  Plot[{psiG[1][x1], psiG[25][x1], psiG[50][x1],
    psiG[100][x1]}, {x1, 0, 5}, PlotRange -> All,
  AxesLabel -> {n, Concentración}, {jj, 1, 3},
(*GRAFICA DE J con diferentes valores Sc*)

tabla2[jj] =
  ListPlot[tablaJGSc, PlotRange -> All, PlotJoined -> True,
  AxesLabel -> {Shmidt, J}], {jj, 1, 3}]

Show[{tabla1[1]}]
Show[{tabla2[1]}]
Show[{tabla1[2]}]
Show[{tabla2[2]}]
Show[{tabla1[3]}]
Show[{tabla2[3]}]

```

Ejemplo de líneas de programación en Mathematica para el cálculo de la función de concentración de un aerosol en las proximidades de la superficie y de la velocidad de deposición (J) para el caso de que esta superficie tenga un ángulo de 54° (beta=0.33) utilizando diferentes valores de soplado (desde fw=0, -0.1, -0.3) y del número de Schmidt (Sc=1-100) a partir de la resolución de la ecuaciones de la concentración y de la velocidad de deposición que se desarrollan en el capítulo 4 de la tesis.

```

Xinf = 10;
fw = -0.1;
epsilonA = 0.001;
epsilonB = 0.14;
Iter = 100;
numero = 100.0;
deltaX = Xinf/numero;
b = 0.33;
(*-----*)
Do[{fw = -jj*0.1,
  F01 = Sqrt[2/Pi] + b/Sqrt[3],
  F02 = F01 + epsilonA,
  p[x1_] =
  y[x1] /.
  NDSolve[{y'[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] fw - b y[x1] (2 + y[x1]) ==
    0, y[0] == -1, y'[0] == F01}, y[x1], {x1, 0, Xinf}],
  (*Plot[p[x1],{x1,0,Xinf},PlotRange\{Rule\ All]*)
  p1 = p[Xinf][[1]],
  p[x1_] =
  y[x1] /.
  NDSolve[{y'[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] fw - b y[x1] (2 + y[x1]) ==
    0, y[0] == -1, y'[0] == F02}, y[x1], {x1, 0, Xinf}],
  (*Plot[p[x1],{x1,0,Xinf},PlotRange\{Rule\ All]*)
  p2 = p[Xinf][[1]],
  F0 = (F01*p2 - F02*p1)/(p2 - p1),
  Do[{p[x1_] =
  y[x1] /.
  NDSolve[{y'[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] fw -
    b y[x1] (2 + y[x1]) == 0, y[0] == -1, y'[0] == F0},
  y[x1], {x1, 0, Xinf}],
  (*Plot[p[x1],{x1,0,Xinf},PlotRange\{Rule\ All]*)

  p0 = p[Xinf][[1]],
  If[Abs[p2] > Abs[p1],
    If[Abs[p1] > Abs[p0], {p2 = p1, p1 = p0, F02 = F01,
      F01 = F0}, {p2 = p0, F02 = F0}],
    If[Abs[p2] > Abs[p0], {p1 = p0, F01 = F0}, {p1 = p2, F01 = F02,
      p2 = p0, F02 = F0}],
    F0 = (F01*p2 - F02*p1)/(p2 - p1),
    If[Abs[F0 - F01]/Abs[F01] < 10^(-15), Break[]], {i, 1, Iter}],
  F[x_] := NIntegrate[p[x1], {x1, 0, x}][[1]],
  tabla = Table[{deltaX*j, F[deltaX*j]}, {j, 0, numero}],
  FF = Interpolation[tabla],
  (*****)
  F001 = F0 - epsilonB;
  F002 = F001 + epsilonA,
  Do[{F01 = F001, F02 = F002, F0i = F0,
  p[x1_] =
  y[x1] /.
  NDSolve[{y'[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] (fw + FF[x1]) -
    b y[x1] (2 + y[x1]) == 0, y[0] == -1, y'[0] == F01},
  y[x1], {x1, 0, Xinf}],
  p1 = p[Xinf][[1]],
  p[x1_] =
  y[x1] /.
  NDSolve[{y'[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] (fw + FF[x1]) -
    b y[x1] (2 + y[x1]) == 0, y[0] == -1, y'[0] == F02},
  y[x1], {x1, 0, Xinf}],
  p2 = p[Xinf][[1]], F0 = (F01*p2 - F02*p1)/(p2 - p1),

```



```

Do[{p[x1_] =
  y[x1] /.
  NDSolve[{y'[x1] + x1 y[x1] + y[x1] (fw + FF[x1]) -
    b y[x1] (2 + y[x1]) == 0, y[0] == -1, y'[0] == F0},
  y[x1], {x1, 0, Xinf}], p0 = p[Xinf][[1]],
  If[Abs[p2] > Abs[p1],
  If[Abs[p1] > Abs[p0], {p2 = p1, p1 = p0, F02 = F01,
  F01 = F0}, {p2 = p0, F02 = F0}],
  If[Abs[p2] > Abs[p0], {p1 = p0, F01 = F0}, {p1 = p2, F01 = F02,
  p2 = p0, F02 = F0}],
  F0 = (F01*p2 - F02*p1)/(p2 - p1),
  If[Abs[F0 - F01]/Abs[F01] < 10^(-10), Break[]], {iter, 1,
  Iter}}, F0j = F0,
  If[Abs[F0j - F0i]/Abs[F0i] < 10^(-15), Break[]],
  F[x_] := NIntegrate[p[x1], {x1, 0, x}][[1]],
  tabla = Table[{deltaX*j, F[deltaX*j]}, {j, 0, numero}],
  FF = Interpolation[tabla],
  f[x_] := fw + x + F[x],
  tablaf = Table[{deltaX*j, f[deltaX*j]}, {j, 0, numero}],
  ff = Interpolation[tablaf], fp[x_] := 1 + p[x],
  f2p[x_] := p'[x][[1]], {ii, 1, 200}],

(*Grafica concentracion con diferentes Sc y J con diferentes \
valores Sc*)

g[x_] := NIntegrate[ff[x1], {x1, -0.1, x}],
Do[{Sc = If[iSc == 1, 1, iSc - 1],
  tabla = Table[{deltaX*j, Exp[-Sc*(g[deltaX*j] - fw)]}, {j, 0,
  numero}],
  gg = Interpolation[tabla], (*Print[Sc]*),
  h[x_] := NIntegrate[gg[x1], {x1, -0.1, x}], Hinf = h[Xinf],
  H0 = h[0.0],
  tabla = Table[{deltaX*j, h[deltaX*j]/Hinf}, {j, 0, numero}],
  psiG[Sc] = Interpolation[tabla],
  JG[Sc] = gg[0.0]/(Sc*Hinf)}, {iSc, 1, 105, 1}],
tablaJGSc =
  Table[{If[iSc == 1, 1, iSc - 1],
  JG[If[iSc == 1, 1, iSc - 1]]}, {iSc, 1, 105, 1}],
tabla1[jj] =
  Plot[{psiG[1][x1], psiG[25][x1], psiG[50][x1],
  psiG[100][x1]}, {x1, 0, 5}, PlotRange -> All,
  AxesLabel -> {n, Concentración}, {jj, 1, 3},
  (*GRAFICA DE J con diferentes valores Sc*)

tabla2[jj] =
  ListPlot[tablaJGSc, PlotRange -> All, PlotJoined -> True,
  AxesLabel -> {Shmidt, J}], {jj, 1, 3}]

Show[{tabla1[1]}]
Show[{tabla2[1]}]
Show[{tabla1[2]}]
Show[{tabla2[2]}]
Show[{tabla1[3]}]
Show[{tabla2[3]}]

```

Ejemplo de líneas de programación en Mathematica para el cálculo de la función de concentración de un aerosol en las proximidades de la superficie y de la velocidad de deposición (J) para el caso de que esta superficie tenga un ángulo de 180° (beta=1) utilizando diferentes valores de soplado (desde fw=0, -0.1, -0.3) y del número de Schmidt (Sc=1-100) a partir de la resolución de las ecuaciones de la concentración y de la velocidad de deposición que se desarrollan en el capítulo 4 de la tesis.

```

Xinf = 10;
fw = -0.1;
epsilonA = 0.001;
epsilonB = 0.14;
Iter = 100;
numero = 100.0;
deltaX = Xinf/numero;
b = 1;
(*-----*)
Do[{fw = -jj*0.1,
  F01 = Sqrt[2/Pi] + b/Sqrt[3],
  F02 = F01 + epsilonA,
  p[x1_] =
  y[x1] /.
  NDSolve[{y'[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] fw - b y[x1] (2 + y[x1]) ==
    0, y[0] == -1, y'[0] == F01}, y[x1], {x1, 0, Xinf}],
  (*Plot[p[x1],{x1,0,Xinf},PlotRange\{Rule\ All]*)
  p1 = p[Xinf][[1]],
  p[x1_] =
  y[x1] /.
  NDSolve[{y'[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] fw - b y[x1] (2 + y[x1]) ==
    0, y[0] == -1, y'[0] == F02}, y[x1], {x1, 0, Xinf}],
  (*Plot[p[x1],{x1,0,Xinf},PlotRange\{Rule\ All]*)
  p2 = p[Xinf][[1]],
  F0 = (F01*p2 - F02*p1)/(p2 - p1),
  Do[{p[x1_] =
  y[x1] /.
  NDSolve[{y'[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] fw -
    b y[x1] (2 + y[x1]) == 0, y[0] == -1, y'[0] == F0},
  y[x1], {x1, 0, Xinf}],
  (*Plot[p[x1],{x1,0,Xinf},PlotRange\{Rule\ All]*)

  p0 = p[Xinf][[1]],
  If[Abs[p2] > Abs[p1],
    If[Abs[p1] > Abs[p0], {p2 = p1, p1 = p0, F02 = F01,
      F01 = F0}, {p2 = p0, F02 = F0}],
    If[Abs[p2] > Abs[p0], {p1 = p0, F01 = F0}, {p1 = p2, F01 = F02,
      p2 = p0, F02 = F0}],
    F0 = (F01*p2 - F02*p1)/(p2 - p1),
    If[Abs[F0 - F01]/Abs[F01] < 10^(-15), Break[]], {i, 1, Iter}],
  F[x_] := NIntegrate[p[x1], {x1, 0, x}][[1]],
  tabla = Table[{deltaX*j, F[deltaX*j]}, {j, 0, numero}],
  FF = Interpolation[tabla],
  (*****
  F001 = F0 - epsilonB;
  F002 = F001 + epsilonA,
  Do[{F01 = F001, F02 = F002, F0i = F0,
  p[x1_] =
  y[x1] /.
  NDSolve[{y'[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] (fw + FF[x1]) -
    b y[x1] (2 + y[x1]) == 0, y[0] == -1, y'[0] == F01},
  y[x1], {x1, 0, Xinf}],
  p1 = p[Xinf][[1]],
  p[x1_] =
  y[x1] /.
  NDSolve[{y'[x1] + x1 y'[x1] + y'[x1] (fw + FF[x1]) -
    b y[x1] (2 + y[x1]) == 0, y[0] == -1, y'[0] == F02},
  y[x1], {x1, 0, Xinf}],
  p2 = p[Xinf][[1]], F0 = (F01*p2 - F02*p1)/(p2 - p1),

```

```

Do[{p[x1_] =
  y[x1] /.
  NDSolve[{y'[x1] + x1 y[x1] + y[x1] (fw + FF[x1]) -
    b y[x1] (2 + y[x1]) == 0, y[0] == -1, y'[0] == F0},
  y[x1], {x1, 0, Xinf}], p0 = p[Xinf][[1]],
If[Abs[p2] > Abs[p1],
  If[Abs[p1] > Abs[p0], {p2 = p1, p1 = p0, F02 = F01,
    F01 = F0}, {p2 = p0, F02 = F0}],
  If[Abs[p2] > Abs[p0], {p1 = p0, F01 = F0}, {p1 = p2, F01 = F02,
    p2 = p0, F02 = F0}],
F0 = (F01*p2 - F02*p1)/(p2 - p1),
If[Abs[F0 - F01]/Abs[F01] < 10^(-10), Break[]], {iter, 1,
  Iter}}, F0j = F0,
If[Abs[F0j - F0i]/Abs[F0i] < 10^(-15), Break[]],
F[x_] := NIntegrate[p[x1], {x1, 0, x}][[1]],
tabla = Table[{deltaX*j, F[deltaX*j]}, {j, 0, numero}],
FF = Interpolation[tabla],
f[x_] := fw + x + F[x],
tablaf = Table[{deltaX*j, f[deltaX*j]}, {j, 0, numero}],
ff = Interpolation[tablaf], fp[x_] := 1 + p[x],
f2p[x_] := p'[x][[1]], {ii, 1, 200}],

(*Grafica concentracion con diferentes Sc y J con diferentes \
valores Sc*)

g[x_] := NIntegrate[ff[x1], {x1, -0.1, x}],
Do[{Sc = If[iSc == 1, 1, iSc - 1],
  tabla = Table[{deltaX*j, Exp[-Sc*(g[deltaX*j] - fw)]}, {j, 0,
    numero}],
  gg = Interpolation[tabla], (*Print[Sc]*),
  h[x_] := NIntegrate[gg[x1], {x1, -0.1, x}], Hinf = h[Xinf],
  H0 = h[0.0],
  tabla = Table[{deltaX*j, h[deltaX*j]/Hinf}, {j, 0, numero}],
  psiG[Sc] = Interpolation[tabla],
  JG[Sc] = gg[0.0]/(Sc*Hinf)}, {iSc, 1, 105, 1}],
tablaJGSc =
  Table[{If[iSc == 1, 1, iSc - 1],
    JG[If[iSc == 1, 1, iSc - 1]]}, {iSc, 1, 105, 1}],
tabla1[jj] =
  Plot[{psiG[1][x1], psiG[25][x1], psiG[50][x1],
    psiG[100][x1]}, {x1, 0, 5}, PlotRange -> All,
  AxesLabel -> {n, Concentración}, {jj, 1, 3},
(*GRAFICA DE J con diferentes valores Sc*)

tabla2[jj] =
  ListPlot[tablaJGSc, PlotRange -> All, PlotJoined -> True,
  AxesLabel -> {Shmidt, J}], {jj, 1, 3}]

Show[{tabla1[1]}]
Show[{tabla2[1]}]
Show[{tabla1[2]}]
Show[{tabla2[2]}]
Show[{tabla1[3]}]
Show[{tabla2[3]}]

```

Apéndice D

Artículo. Joaquín Aguirre y
Álvaro Perea: "*Aerosol
deposition rates by mass
diffusion in laminar boundary
layers with an implemented
blowing system. Approximate
methods for flat plates*"
Journal of Aerosol Science 141
(2020) 105500



Contents lists available at ScienceDirect

Journal of Aerosol Science

journal homepage: <http://www.elsevier.com/locate/jaerosci>

Aerosol deposition rates by mass diffusion in laminar boundary layers with an implemented blowing system. Approximate methods for flat plates

Joaquin Aguirre^{a,*}, Alvaro Perea^b

^a Escuela Internacional de Doctorado, Universidad Nacional de Educacion a Distancia-UNED, Madrid, 28040, Spain

^b Departamento de Fisica Matematica y Fluidos, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Educacion a Distancia-UNED, Madrid, 28040, Spain

ARTICLE INFO

Keywords:

Aerosol
Particle deposition
Blowing system
Brownian diffusion
Laminar layer

ABSTRACT

Solid or liquid particles within a carrier gas may be deposited on solid surfaces exposed to the gas stream and, in some practical applications, these aerosol deposits have deleterious effects. In order to mitigate these effects, particle repulsive fields may be applied near the surface to reduce the deposition rate. A current blowing through the exposed surface may play this repulsion role with such a forced stream pushing the aerosol particles away from the surface. The present paper develops a model to analyse and estimate the effect of blowing in reducing particle deposition for laminar flows with high Reynolds numbers over flat surfaces. A classical self-similarity analysis is used to solve the boundary layer equations for mass and momentum conservation. The solution of the particle transport problem provides the self-similarity mass fraction profile and the mass deposition rate in terms of two parameters: the Schmidt number Sc and the dimensionless blowing rate. Moreover, two approximate methods are implemented in two asymptotic limits: for large values of Sc and when the blowing parameter is sufficiently small.

1. Introduction

The deposition of aerosol particles on surfaces exposed to a gas stream is a paramount problem that, in some practical applications, reduces the efficiency of a process and deteriorates the affected surfaces. For example, particles present in the gas mainstream can lead to severe erosion and deposition on surfaces, which negatively affects the performance of equipment as in the case of ash deposition and surface fouling, surface erosion, and blockage of pipelines. Both erosion and deposition are known to increase the surface roughness, which produces a corresponding increase in skin friction and has a strong influence on heat transfer. Even the use of a thermal barrier coating in modern high-temperature gas turbines is susceptible to various life-limiting issues associated with their operating environment, including erosion, corrosion and deposition.

To mitigate these effects, a particle repulsive field may be applied near the surface to reduce the arrival rate of the particles (e.g. a repulsive particle field induced by thermophoresis in the case of a hot surface exposed to a cooler stream, Garcia-Ybarra & Castillo, 1997). Similarly, for isothermal systems the application of a blowing current through the surface will induce a local flow in the proximity of the surface which pushes the aerosol particles away (Acrivos, 1962; Spalding & Evans, 1961). The laminar flow of a gas over a flat plate at high Reynolds number is a classical problem in fluid mechanics, including the mass transfer analysis and chemical

* Corresponding author.

E-mail addresses: jaguarr@ea.mde.es (J. Aguirre), aperea@ccia.uned.es (A. Perea).

kinetics (e.g. Volchkov & Terekhov, 2004). If the plate is permeable and can therefore let the fluid through, the boundary layer can be controlled by suction or blowing systems. The classical results of this problem are discussed in standard reference books (Rosenhead, 1963; Schlichting 1979). A steady blowing/suction from the base of a solid body has been widely used to control wake stabilities and vortices, leading to a considerable drag reduction (Mao, 2015). The importance of this induced suction resides in the possibility of delaying the boundary layer separation, obtaining a certain stabilization of the laminar flow. Blowing effects could be also important in modifying the heat transfer between the fluid and the surface, and could affect physical and chemical surface phenomena, such as deposition, surface oxidation and condensation.

All these subjects form part of what is commonly known as boundary layer control, whose main goal is to understand the mechanisms governing the momentum, heat and mass transfer between the fluid and the surface. For example, the combination of internal convective cooling and external film cooling in boundary layers is the most effective way to prevent exposed surfaces from failure through excessive heat loads. An important area of research is focused on micro-cooling, described in detail in Welch & Wilson, 2000. Recent experimental results of deposition on film-cooled turbine components indicate that deposition capture efficiency decreases with an increased blowing ratio.

The present paper deals with the efficiency of blowing on the deposition of aerosol particles on a surface exposed to a particle laden gas stream for high Reynolds number laminar flows in isothermal conditions. The analysis is restricted to the boundary layer on a flat plate parallel to the stream although the extension to other shapes of the surface is straightforward. Section 2 describes the problem and in Section 3 the boundary layer equations and boundary conditions for the stream function and particle concentration are derived and numerically solved.

The analysis shows that the particle distribution in the boundary layer and the corresponding deposition rate depends on two controlling parameters: the Schmidt number Sc (ratio of momentum diffusivity to particle diffusion) and the dimensionless blowing rate f_w . Asymptotic analyses are applied in Section 4 to simplify the results in two relevant limits in which the relevant physical processes have different spatial scales: namely, the asymptotic limit of high Sc values (when the concentration boundary layer thickness is much smaller than the momentum boundary layer thickness and the particle concentration stays constant except in a narrow layer near the plate) and the limit of low blowing (when the influence of the gas blowing is restricted to a small portion of the boundary layer). Simpler correlation expressions for the mass deposition rate are obtained in these two limits. Section 5 compares the asymptotic results with the complete boundary layer solutions to show the range of validity of the asymptotic correlations. Finally, the main conclusions of this paper are summarized in Section 6.

2. Problem description

Aerosols, as systems containing solid or liquid particles in a gas (Hinds, 2012), can lead to the formation of aerosol deposits on solid surfaces exposed to the stream. This paper analyses the distribution of aerosol particles in the boundary layer created by a laminar flow with a high Reynolds number of a particle-laden gas over a flat plate. The particles are considered to be small enough for inertial effects to be ignored, and their concentration is too low for coagulation to occur at an appreciable rate.¹

Under these restrictions (laminar flow and high particle dilution), the boundary layer over the plate is described by a set of differential equations (for the stream function and particle concentration) which admit a self-similar solution. Methods for obtaining the dimensionless stream function equation and the particle distribution equation are straightforward and well known. By using a similarity variable, a self-similar set of equations is obtained and then numerically solved using the well-known shooting method for boundary value problems (Gokoglu & Rosner, 1984; Mills and Dudukovic, 1984).

Recent results concerning similar mathematical models have analysed the influence of chemical reactions on the heat and mass transfer by natural convection from a vertical surfaces in porous media by taking into account the Soret and Dufour effects (Partha, 2009; Postelnicu, 2004) and the heat and mass transfer analysis for boundary layer stagnation-point flow by a nanofluid with internal heat generation/absorption and suction/blowing. In all these studies, the effect of the parameters (e.g. the blowing ratio) on the flow field, temperature distribution, concentration distribution, surface deposition velocity, heat transfer and mass transfer has been analysed for different values of the relevant dimensionless numbers (Schmidt number and/or Lewis number).

As a model problem, the Brownian leakage of particles is analysed here for a boundary layer on a flat plate with blowing. This paper follows the analysis performed by Garcia-Ybarra & Castillo, 1997, which was concerned with the effect of thermophoretically induced repulsive fields on the particle transport and deposition in the laminar boundary layer generated by a gas stream over a solid surface. Here, the system is considered isothermal and the repulsive field is caused by blowing through the surface. This paper uses a similarity analysis to solve the boundary layer equations for mass and momentum conservation. Once the boundary layer velocity field is known, the solution of the particle transport problem gives the self-similarity mass fraction profile and the mass deposition rate as functions of two parameters: the Schmidt number Sc and the dimensionless blowing rate f_w . The Schmidt number is a measure of the importance of Brownian diffusion in the particle transport in the boundary layer.

Once the complete solution to the transport problem has been obtained, the complexity of the numerical analysis is addressed using two approximate methods: first, in the case of large Sc (an asymptotic approach); the second, when the blowing parameter is

¹ Brownian diffusion is the major contribution to particle transport for very small particles (ca. 0.01 μm) and heavy vapours and inertial effects become dominant for relatively large particles (ca. 10 μm) (Gupta & Peters, 1985; Grane & Evans, 1977). In many real situations, the effects of external forces such as gravitational force and thermophoretic force need to be considered along with those of convection and diffusion. However, due to the particles' size, only diffusion will be considered in this paper.

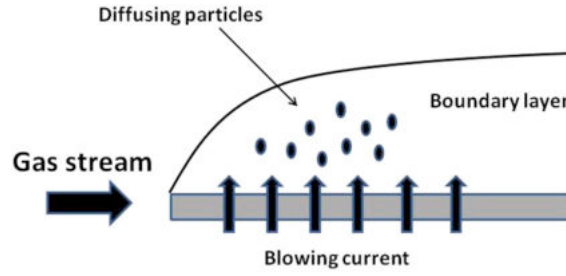


Fig. 1. Sketch of the gas stream over a flat plate with a normal blowing current flowing at the plate.

sufficiently small. This study is restricted to a flat plate parallel to the gas stream but the analysis can be easily extended to other typical flow geometries (such as the flow near a two-dimensional stagnation point, or wedge flows).

3. Methods

The configuration considered is the laminar forced convection boundary layer corresponding to a high Reynolds number flow of a particle-laden gas stream over a permeable flat plate, with blowing through the plate. The system is isothermal and the only difference between the motion of the particles and the velocity of the gas is due to diffusion of the particles along their concentration gradient.

3.1. Velocity field in the boundary layer

The configuration of the physical system is outlined in Fig. 1. The boundary layer generated by the gas stream over a flat surface is a two-dimensional problem. The origin is taken at the leading edge, x corresponds to the streamwise coordinate, y is the normal distance to the plate, while u and v respectively denote the streamwise and normal components of the velocity of the gas in the boundary layer. At the surface a blowing current is forced, characterized by a constant gas velocity v_w normal to the plate.

For steady laminar flow, the governing conservation equations of mass and momentum are the Prandtl boundary-layer equations (Schlichting, 1979, pp. 127–131):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{2}$$

where ν is the kinematic viscosity of the fluid. The flow is caused by a constant far field flow with a uniform velocity parallel to the plate. The solution for the geometry is written in terms of the similarity variable η (Garcia-Ybarra & Castillo, 1997; Rosenhead, 1963; Schlichting, 1979, pp. 127–131).

$$\eta = \sqrt{\frac{U}{2\nu x}} y \tag{3}$$

The stream function Φ is defined by

$$\Phi = \sqrt{2\nu U x} f(\eta) \tag{4}$$

where $f(\eta)$ is the Blasius function. The velocity components are given by

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = U f'(\eta) \tag{5}$$

$$v = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \sqrt{\frac{\nu U}{2x}} [\eta f''(\eta) - f(\eta)] \tag{6}$$

With primes denoting derivatives with respect to the similarity variable, $' = d/d\eta$.

The substitution of u, v into the boundary layer momentum equation leads to the Blasius solution for f (Rosenhead, 1963)

$$f''' + ff'' = 0 \tag{7}$$

As boundary conditions, the no-slip condition is imposed at the plate ($u = 0$ when $y = 0$) whereas far from the plate the mainstream should be recovered ($u = U$ when $y \rightarrow \infty$). These two conditions correspond to

$$f'(0) = 0$$

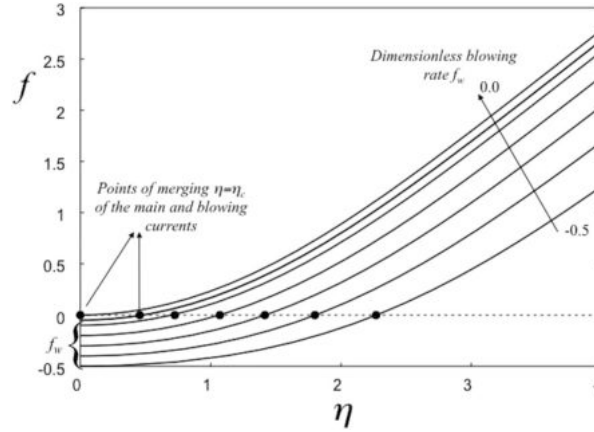


Fig. 2. Blasius function versus the similarity variable evaluated for a flat plate boundary layer in terms of the dimensionless blowing rate for different rates (0, -0.05,-0.1,-0.2,-0.3,-0.4,-0.5).

$$f'(\infty) = 1$$

Moreover, at the surface of the plate, the normal flow velocity has to be accommodated to the blowing current velocity v_w , which by definition is a negative quantity. Therefore, the dimensionless blowing rate f_w is

$$f_w = f(0) < 0$$

The ordinary differential equation (Eq. (7)) with boundary conditions has to be solved to obtain the velocity profile. This equation is non-linear and the boundary conditions refer to two different points, so the numerical evaluation is not particularly simple except for the case of the absence of blowing, $f_w = 0$ (Rosenhead, 1963). The numerical treatment can be based on any of the common standard methods.²

Fig. 2 shows the profile of the Blasius function versus the similarity variable for some values of the dimensionless blowing rate. The main features of the Blasius function are:

- a $f(\eta)$ takes negative values from the surface location to a separation point (η_c) which defines the border between an inner region dominated by blowing and an outer region where the mainstream effects become dominant. This point is the location where the blowing current and the mainstream flow merge, and is referred to as the merging point.
- b The adjustment of the profile to the uniform mainstream velocity occurs at moderate values of the similarity variable.
- c In the weak blowing limit, the profile tends to be parabolic in the vicinity of the surface.

3.2. Particle distribution

Denoting by ω the particle mass fraction with a constant value in the main stream given by ω_∞ , the governing conservation equation for normalized particle fraction $\Psi = \omega/\omega_\infty$ is

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\Psi = -\nabla \cdot \mathbf{j}_{diff} \tag{8}$$

where \mathbf{j}_{diff} is the mass flux induced by the Brownian diffusion, given by

$$\mathbf{j}_{diff} = -\rho D \nabla \Psi \tag{9}$$

where D is the particle diffusion coefficient or the diffusivity.

Under the boundary layer approximation (a negligible particle diffusion flow in the streamwise direction with respect to the diffusion flow in the normal direction) Eq. (8) becomes

$$u \frac{\partial \Psi}{\partial x} + v \frac{\partial \Psi}{\partial y} = D \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \tag{10}$$

Assuming a selfsimilar particle distribution, that $\Psi = \Psi(\eta)$, Eq. (10) becomes

² In this study, the standard Runge–Kutta–Fehlberg integration scheme with adaptive steps is used with a shooting method starting at $\eta = 0$ with conditions $f(0) = 0$ and $f'(0) = f'_w$, a guess value $f''(0) = f''_w$ and iterating on this value until the mainstream condition $f'(\infty) = 1$ is reached far from the plate with the prescribed accuracy.

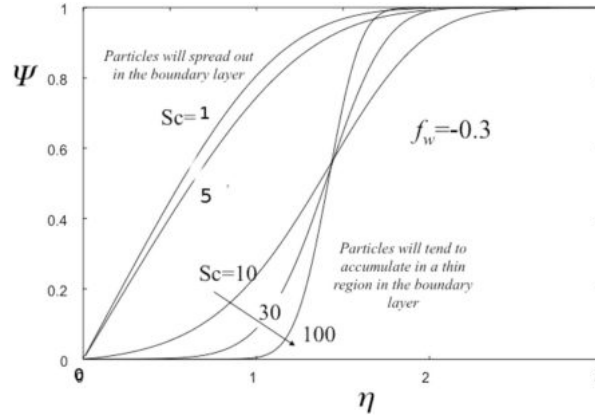


Fig. 3. Mass fraction profile in the flat plate boundary layer in terms of the Schmidt number, for a given value of the dimensionless blowing rate.

$$\frac{1}{Sc} \Psi'' + f \Psi' = 0 \tag{11}$$

with the Schmidt number defined as the ratio of the momentum diffusivity to the Brownian diffusivity

$$Sc = \frac{\nu}{D}$$

The first term in Eq. (11) comes from the aerosol’s Brownian diffusion, whereas the second term accounts for the advective particle transport. The Schmidt number is a measure of the relative effectiveness of the Brownian diffusion in promoting the particle transport in the boundary layer. For aerosols, Sc takes on very large values due to the low diffusion coefficient of small particles in a gas.

Particles touching the plate surface are instantly removed from the gas stream and the particle concentration on the surface can therefore be taken as zero (for a general treatment of this phenomenon, see (Garcia-Ybarra & Castillo, 1997)). Also, the mass fraction profile must be smoothly joined to the main stream’s uniform value. Therefore, the boundary conditions for the normalized particle mass fraction are

$$\Psi(0) = 0$$

$$\Psi(\infty) = 1$$

Under this assumption, of vanishing mass fraction at the plate, the dimensionless self-similar mass deposition rate on the plate becomes (Garcia-Ybarra & Castillo, 1997)

$$J = \frac{(-\mathbf{j}_{diff} \cdot \mathbf{n})_w}{\rho \omega_\infty U} \sqrt{\frac{2Ux}{\nu}} = \frac{1}{Sc} \Psi'_w \tag{12}$$

The solution for the mass fraction distribution (Eq. (11)) with the indicated boundary conditions can be written in terms of a quadrature as the Polhausen profile

$$\Psi = \frac{1}{\int_0^\infty \gamma(\eta) d\eta} \int_0^\eta \gamma(\eta) d\eta \tag{13}$$

in terms of the auxiliary exponential function

$$\gamma(\eta) = \exp \left[-Sc \int_0^\eta f(n) (dn) \right] \tag{14}$$

Then, the dimensionless deposition rate (Eq. (12)) can be expressed as

$$J = \frac{1}{Sc \int_0^\infty \gamma(\eta) d\eta} \tag{15}$$

Fig. 3 shows the normalized mass fraction distribution profile in the boundary layer on a flat plate, for some values of the Schmidt number and a given value of the dimensionless blowing rate ($f_w = -0.3$).

For low values of the Schmidt number, Brownian diffusion is strong enough to overcome the effect of the blowing current and the particles spread throughout the boundary layer. However, for high Schmidt numbers, Fig. 3 shows that the mass fraction has a well defined S-shape with a low particle concentration near the surface and a value close to unity far from the surface, the two regions being connected by a sharp transition in the vicinity of the merging point η_c (see Fig. 2). In the limit of extremely large Sc, the solution of Eq. (11) with the boundary conditions for the particle mass fraction tends to a step function with a vanishing concentration in the inner

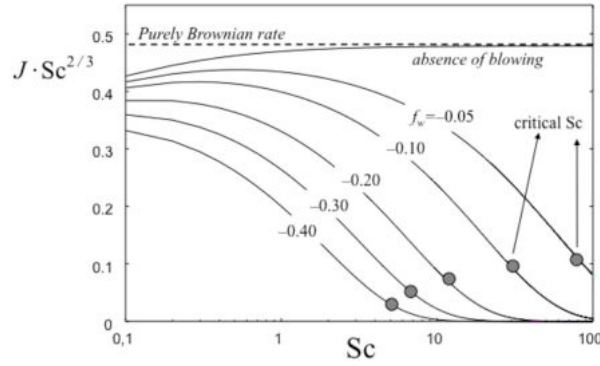


Fig. 4. Normalized mass deposition rate in the flat boundary layer versus the Schmidt number for some characteristic values of the dimensionless blowing parameter, f_w .

boundary layer region affected by the blowing ($>0 < \eta < \eta_c$) and the value $\Psi = 1$ for the outer region ($\eta > \eta_c$). The relative importance of the diffusive transport in bringing particles to the plate against the blowing flow decreases as Sc increases; the blowing current tends to generate a particle-free layer above the surface, which effectively reduces the deposition rate of particles on the surface.

The normalized mass deposition rate (given by Eq. (15)) is depicted in Fig. 4 as a function of the Schmidt number, for representative values of the blowing parameter. A scaling factor $Sc^{-\alpha}$, with $\alpha = 2/3$, is used.

As expected, particle deposition decreases as the blowing intensity increases. Blowing may be used as an effective repulsive field to reduce fouling of solid surfaces exposed to a gas stream, and the efficiency of the blowing is more pronounced for particles with large Sc , that is, small values of the diffusion coefficient that usually correspond to large particles. The bigger the particles are, the more efficient the blowing becomes (note that particle inertia has been neglected and, therefore, this conclusion does not apply to massive or rather large particles).

Put Sc_0 the value of Sc where $Sc_0^{2/3}(-f_w) = O(1)$.

For $Sc > Sc_0$, the effect of blowing is predominant near the surface and the normalized mass deposition rate decreases, showing a decreasing exponential behaviour for high Sc .

For $Sc < Sc_0$, the effect of the blowing is inefficient and the normalized deposition rate takes higher values due to the fact that Brownian diffusion promotes particles to reach the surface in a greater quantity.

4. Approximate methods

Approximate methods (valid in two limits of practical interest) are presented in this section to simplify the numerical evaluation of the solutions for the particle transport in the boundary layer. These methods make use of the exponential dependence on Sc to simplify the analysis.

4.1. High Sc (asymptotic limit)

The Schmidt number for aerosols takes on very large values due to the low diffusion coefficient of small particles in a gas. In this large Schmidt number limit, the solution of the second order differential equation for the mass fraction (Eq. (11)) becomes a singular problem as the highest order term in Eq. (11) is multiplied by a small factor (the inverse of Sc). Thus, an asymptotic analysis can be performed, using the inverse of the Schmidt number as the smallness parameter.

Let introduce the auxiliary function

$$g(\eta) = \int_0^\eta f(\xi) d\xi \tag{16}$$

Then, Eq. (15) can be written as

$$J = \frac{1}{Sc \int_0^\infty \exp[-Sc g(\eta)] d\eta} \tag{17}$$

For large values of Sc , Laplace's method can be used to estimate the asymptotic behaviour of the integral with the exponential function. The largest contribution to the integral in Eq. (17) comes from the region around the value of η where the exponent reaches its maximum value. Due to the minus sign in the exponential, this point correspond to the location where $g(\eta)$ is minimum. From the definition of $g(\eta)$ in Eq. (16) and taking into account the profile for $f(\eta)$ depicted in Fig. 2, it is clear that $g(0) = 0$ and for small values of η , $g(\eta)$ is negative, reaching its minimum value at η_c where $f(\eta_c) = 0$. Then, one obtains (Bleistein & Handelsman, 1986).

$$\int_0^\infty \exp[-Sc g(\eta)] d\eta \simeq \exp[-Sc g(\eta_c)] \sqrt{\frac{2\pi}{Sc g''(\eta_c)}} \tag{18}$$

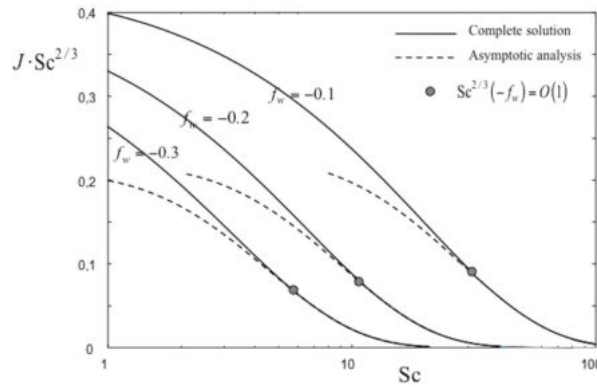


Fig. 5. Normalized mass deposition rate in the flat boundary layer versus the Schmidt number in terms of f_w for the complete solution and the asymptotic analysis to leading order in the limit $Sc \rightarrow \infty$.

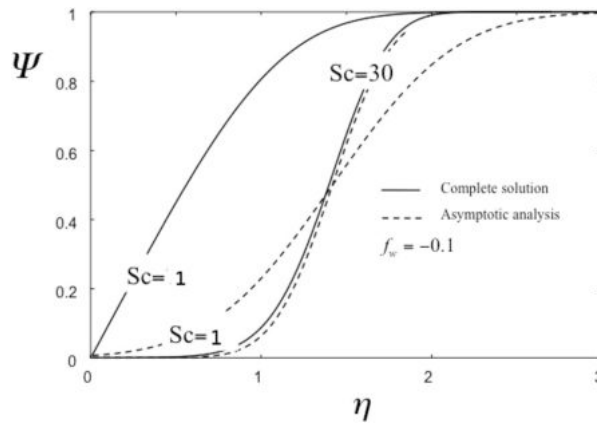


Fig. 6. Mass fraction profile in the flat boundary layer in terms of the Schmidt number for the complete solution (solid line) and the asymptotic analysis to leading order in the limit $Sc \gg 1$ (broken line).

Therefore, to leading order in the smallness parameter (Sc^{-1}), the dimensionless mass deposition rate (Eq. (17)) is asymptotically given by

$$J_{asym} = \sqrt{\frac{g''(\eta_c)}{2\pi Sc}} \exp[Sc g(\eta_c)] \tag{19}$$

Fig. 5 shows the normalized deposition rate for the complete solution (Eq. (15)) and the asymptotic value (Eq. (19)) versus the Schmidt number for different values of the blowing parameter. This asymptotic result provides a good estimation for particles with low diffusion such that $Sc > Sc_0$.

Fig. 6 shows the mass fraction profile in the flat plate boundary layer for the complete solution and the asymptotic analysis in terms of the Schmidt number.

On the other hand, Fig. 6 shows the mass fraction profile in the flat boundary layer for the complete solution (solid line) and for the asymptotic analysis (broken line) in terms of the Schmidt number. For sufficiently layer values of Sc the asymptotic limits fit well the complete solution throughout the boundary layer. For $Sc > Sc_0$ the asymptotic solution provides good approximate values for the mass fraction distribution and the fitting is even better near the surface. This fact indicates again the validity of the asymptotic expression for the deposition rate, which is proportional to the slope of the particle concentration at the wall Ψ'_w .

4.2. Weak blowing limit

Near the wall, the Blasius function f can be approximated by the Taylor expansion of this function at the plate surface, $\eta = 0$. Then, truncated to the second order, the expansion is

$$f = f_w + \frac{1}{2} f''_w \eta^2 \tag{20}$$

leading to a parabolic velocity profile in the boundary layer.

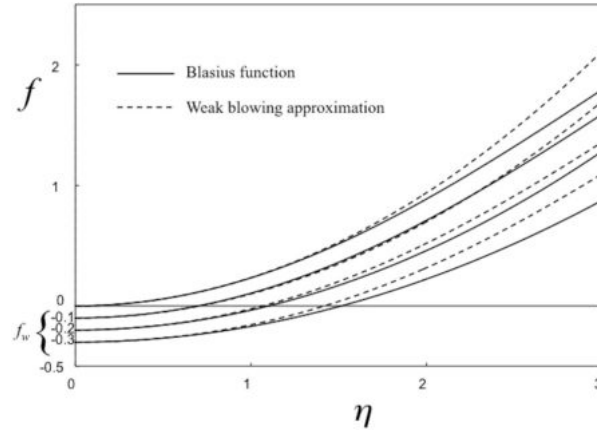


Fig. 7. Profile of the Blasius function for different values of the dimensionless blowing rate: complete solution (solid line) and near wall approximation for the complete solution (Blasius function) valid for weak blowing.

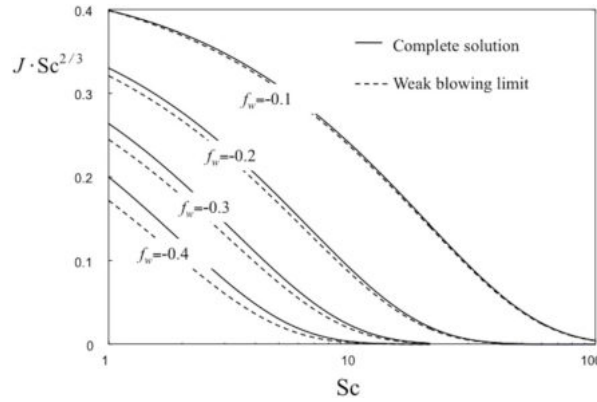


Fig. 8. Normalized mass deposition rate in the flat boundary layer versus the Schmidt number for different values of the blowing rate. Complete solution (solid line) and the weak blowing approximation (Eq. (22), broken line).

$$\eta_c = \sqrt{\frac{2(-f_w)}{f_w''}}$$

Fig. 7 compares the Blasius function already represented in Fig. 2 (solid line) to the near wall approximation (Eq. (20), broken line) for different values of the blowing factor f_w . The simplified expression given by Eq. (20) fits well the complete solution up to a large distance to the wall (up to large values of η) when the blowing factor decreases and it can be used as a good approximation in the weak blowing limit.

Thus, using Eq. (20), in the weak blowing limit the merging point of the main stream and the blowing current is approximately given by

$$g = f_w \eta + \frac{1}{6} f_w'' \eta^3 \tag{21}$$

and the dimensionless mass deposition rate becomes

$$J_B = Sc^{-2/3} \left(\frac{f_w''}{6}\right)^{1/3} \frac{1}{\int_0^\infty \exp[bw - w^3] dw} \tag{22}$$

in terms of a characteristic parameter b , given by

$$b = \left(\frac{6}{f_w''}\right)^{1/3} (-f_w) Sc^{2/3}$$

The integral expression in J_B can be expanded in terms of b in the form

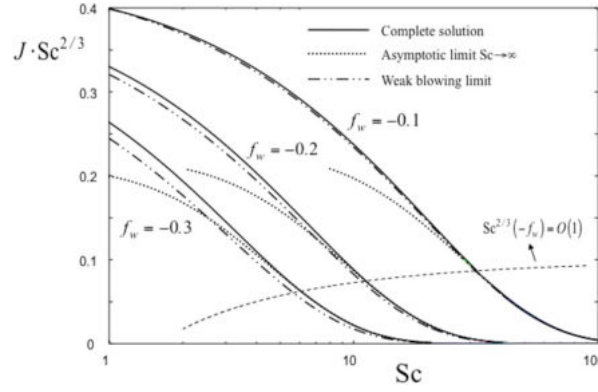


Fig. 9. Comparison of the normalized mass deposition rate versus the Schmidt number for different values of the blowing limit rate. Complete solution (solid line), asymptotic limit (Eq. (19), dotted line) and weak blowing limit (Eq. (22), broken line).

$$\int_0^\infty \exp[(bw - w^3)]dw = \frac{1}{3} \sum_0^\infty \frac{1}{k!} \Gamma\left(\frac{k+1}{3}\right) b^k \tag{23}$$

where Γ is the Gamma function (Whittaker & Watson, 1990).

When $b \geq O(1)$, the deposition rate in the weak blowing limit (Eq. (22)) coincides with the asymptotic value (Eq. (19)) since in this case the Schmidt number would be above the critical value Sc_0 .

Fig. 8 shows the normalized mass deposition rate using the complete solution (solid line) and the weak blowing limit (Eq. (22), broken line) versus the Schmidt number for different values of the blowing rate. Note that the fitting is globally good and becomes better when the blowing rate decreases, as expected.

5. Discussion of results

Fig. 9 compares the normalized mass deposition rate for the complete solution to the asymptotic limit (Eq. (19)) and the blowing solution (Eq. (22)) for some characteristic values of the dimensionless blowing parameter.

The asymptotic limit provides good values whenever the validity condition is satisfied, that is, when the Schmidt number is above the critical value Sc_0 .

The weak blowing limit gives globally correct values for all Schmidt numbers, but when the blowing rates increases, this approximation becomes inadequate, as in this case Sc_0 decreases significantly.

6. Conclusions

The particle transport of an aerosol in the boundary layer generated by a gas flowing at a high Reynolds number over a flat surface parallel to a stream and with a normal blowing current imposed at the surface has been analysed assuming the Brownian diffusion is the main particle transport mechanism. The analysis has focused on the study of the effect of blowing on the particle transport in the boundary layer and in the deposition rate on the surface.

The boundary layer analysis shows that the particle profile and the deposition rate depend on two independent parameters: the Schmidt number (Sc) and the dimensionless blowing rate (f_w).

The blowing of a clean gas through the solid surface generates a repulsive field near the plate that pushes the particles away from it. However, Brownian diffusion promotes a diffusive leakage of particles through this repulsive field and leads to a particle deposition rate on the plate. For low Sc (particles with high diffusion as is the case of small particles in the gas), Brownian diffusion is strong enough to overcome the effect of the blowing current and the particle spreads throughout the boundary layer. However, for high Sc (less diffusive particles) the relative importance of the diffusive transport decreases and the blowing current reduces effectively the particle deposition rate.

Some aspects of the particle transport equations, like the mathematical singularity in the limit $Sc \rightarrow \infty$ and the non-linearity, produce considerable difficulties in the numerical analysis of the solutions in this limit. To analyse this limit, two approximate methods have been implemented.

In the limit of high Schmidt numbers, an asymptotic analysis has taken the inverse of the Schmidt number as the smallness parameter. To leading order in this asymptotic limit, when $Sc > Sc_0$ the asymptotic solution provides a good approximation for the mass fraction distribution and the mass deposition rate (Eq. (19)).

On the other hand, when the blowing rate is small, the influence of blowing is restricted to a very thin region at the plate. There, the Blasius function f can be approximated by a Taylor expansion, leading to a parabolic velocity profile in the boundary layer. In this limit, the resulting fitting for the mass deposition rate (Eq. (22)) is globally good and becomes even better as the dimensionless blowing parameter decreases. Moreover, for high Schmidt numbers the weak blowing approximation fits perfectly to the complete solution

since in this range it coincides with the asymptotic value.

Finally, evaluating together both approximate methods, a simple numerical evaluation of the mass deposition rate has been shown to be valid over a large range of values of Sc and of the blowing rate.

Acknowledgments

This work is supported by Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades [Grant RTC-2017-6730-3] and partially supported by the European Regional Development Funds (FEDER).

Nomenclature

D	Diffusivity
f	Blasius function
f_w	$f(0)$ Dimensionless blowing rate
$f''(0) = f_w''$	Dimensionless viscous stress
J	Dimensionless deposition rate
J_{asym}	Dimensionless deposition rate (high Sc)
J_B	Dimensionless deposition rate (weak blowing)
j_{diff}	Diffusive mass flux
$Sc =$	Schmidt number
U	Longitudinal velocity at boundary
u	Longitudinal streamwise velocity component (along x direction)
v	Transversal streamwise velocity component (along y direction)
v_w	Transversal velocity at the surface
ρ	Density
Φ	Stream function
Ψ	Mass fraction distribution
Ψ_w	Mass fraction distribution at the surface
Ψ_∞	Mass fraction distribution at the boundary
γ	Auxiliary exponential function
η	Similarity variable
τ_w	Viscous stress at the surface
ω	Particle concentration
ν	kinetic viscosity

References

- Acrivos, A. (1962). The asymptotic form of the laminar boundary-layer mass-transfer rate for large interfacial velocities. *Journal of Fluid Mechanics*, 12, 337.
- Bleistein, N., & Handelsman, R. A. (1986). *Asymptotic expansions of integrals* (2nd ed.). New York: Dover Publications.
- García-Ybarra, P. L., & Castillo, J. L. (1997). Mass transfer dominated by thermal diffusion in laminar boundary layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 336, 379–409.
- Gokoglu, S., & Rosner, D. E. (1984). Effects of particular thermophoresis in reducing the fouling rate advantages of effusion-cooling. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 5, 37–41.
- Gupta, D., & Peters, M. H. (1985). A Brownian dynamics simulation of aerosol deposition onto spherical collectors. *Journal of Colloid and Interface Science*, 104(2), 375–389.
- Hinds, W. C. (2012). *Aerosol technology: Properties, behaviour, and a measure of airborne particles*. John Wiley & Sons.
- Mao, X. (2015). Sensitivity of forces to wall transpiration in flow past an aerofoil. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical & Engineering Sciences*, 471, 2184.
- Mills, P. L., & Dudukovic, M. P. (1984). Solution of mixed boundary value problems by integral equations and methods of weighted residuals with application to heat conduction and diffusion-reaction systems. *Journal of Applied Mathematics*, 44, 1076–1091.
- Partha, M. K. (2009). Nonlinear convection in a non-Darcy porous medium. *Applied Mathematics and Mechanics*, 31, 565–574.
- Postelnicu, A. (2004). Influence of a magnetic field on heat and mass transfer by natural convection from vertical surfaces in porous media considering Soret and Dufour effects. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47, 1467–1472.
- Rosenhead, L. (1963). *Laminar boundary layers*. New York: Dover Publications.
- Schlichting, H. (1979). *Boundary layers theory*. New York: McGraw-Hill.
- Spalding, D. B., & Evans, H. L. (1961). Mass transfer through laminar boundary layers. Auxiliary functions for the velocity boundary layer. *Journal of Heat and Mass Transfer*, 2, 314.
- Volchkov, E. P., & Terekhov, V. V. (2004). A numerical study of boundary-layer heat and mass in a forced flow of humid air with surface steam condensation. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47, 1473–1480.
- Welch, S. W. J., & Wilson, J. (2000). A volume of fluid based method for fluid flows with phase change. *Journal of Computational Physics*, 160, 662–682.
- Whittaker, E. T., & Watson, G. N. (1990). *A course in modern analysis* (4th ed.). Cambridge University Press.

Bibliografía

Acrivos, A. (1962). *Journal of Fluid Mechanics* 12, 337.

Aguirre, J. and Perea, A. (2020). Aerosol deposition rates by mass diffusion in laminar boundary layers with an implemented blowing system. Approximate methods for flat plates. *Journal of Aerosol Science* 141.

Anderson, J.D. (1999). *Fundamentals of Aerodynamics*. McGraw-Hill 1038-1044 (Second Ed.).

Asgari, M., Lucci, F. And Kuczaj, A.K. (2019). Multispecies aerosol evolution and deposition in a bent pipe. *Journal of Aerosol Science* 129, 53-70.

Barrero, A, Perez-Saborid, M. (2005). *Fundamentos y aplicaciones de mecánica de fluidos*. McGraw Hill.

Battacharyya, K (2011). Boundary layer flow with diffusion and first-order chemical reaction over a porous flat plate subject to suction/injection and with variable wall concentration. *Chemical Engineering Research Bulletin* 1, 6-11.

Bleistein, N. and Handelsman, R.A. (1986). *Asymptotic expansions of integrals*, Second Ed., Dover Publications, New York.

Castillo, J.L. and Garcia-Ybarra, P.L. (1991). Boundary layer diffusion flame with soot particle stagnation in *Flame Structure*, edited by G.P. Korbeinichiev, Vol. 2, Nauka Pub. House, Novosibirsk.

Chambré P.L and Young JD, (1958) On the diffusion of chemically reactive species in a laminar boundary layer flow. *Physics of Fluids*, 48-54.

Cooper, D. W. (1986). *Aerosol Sci. Technol.*5, 287-299.

Crane, R.I. and Evans, R.L. (1977). Inertial deposition of particles in a bent pipe. *Journal of Aerosol Science*, 8(3): 161-170.

Crespo, A.(2006). *Mecánica de fluidos*. Thomson.

Dallas O. Banks, Gary J. Kurowski and Stephen Whitaker (1991) Diffusion Deposition on a Fiber in Nontransverse Flow, *Aerosol Science and Technology*, 14:2, 224-232.

Fan JR, Shi JM and Xu XZ (1998). Similarity solution of mixed convection with diffusion and chemical reaction over a horizontal moving plate. *Acta Mechanica*1, 59-69.

Friedlander, S.K. (2000). *Smoke, Dust and Haze. Fundamentals of Aerosol Dynamics*. Oxford, NY.

Fuchs, N.A. (1964). *The Mechanics of Aerosols*. Macmillan.

Fuchs, N.A. (1955). *The Mechanics of Aerosols*. Acad. of Sci. of USSR Publishing House, p. 352.

Gallis, M.A., Torczynski, J.R., Rader, D.J (2008). Nonzero-concentration Boundary Condition for Advection-Diffusion-Transport Modeling. *Aerosol Science and Technology*, 42, 829-831.

Garcia-Ybarra, P.L. and Castillo, J.L. (1997). Mass transfer dominated by thermal diffusion in laminar boundary layers. *Journal of Fluid Mechanics*. 336, 379-409.

Gimeno, J.F., Segarra. D. and López, E. (2002). Cambio Climático: Efectos indirectos de los aerosoles atmosféricos. *Revista de Climatología*. Vol 2(2002):5-13.

Gupta, D., and Peters, M. H. (1985) A Brownian dynamics simulation of aerosol deposition onto spherical collectors. *Journals of Colloid and Interface Science* 104(2), 375-389.

Gralton J., Tovey E., McLaws M.L., Rawlinson W.D. (2011). The role of particles size in aerosolised pathogen transmission. *J.Infect.*

Hinds, W.C. (2012). *Aerosol technology: Properties, behaviour, and a measure of airborne particles.* Ed. John Wiley & Sons.

Landau, L.D, and Lifshitz, E.M. (1991). *Mecánica de Fluidos.* Reverté.

Liao, S., (1998) A uniformly valid analytic solutions of two-dimensional solution of the Falkner-Skan equation. *Appl. Math. Comput* 92.

Mao, X (2005). Sensivity of forces to wall transpiration in flow past an aerofoil. *Proceeding of the Royal Society A: Mathematical, Physical & Engineering Sciences*, 471, 2184.

Meksyn, D. (1961). *New methods in laminar boundary-layer theory.* Pergamon Press.

Mill, P.L. & Dudukovic, M.P.(1984). Solution of mixed boundary value problems by integral equations and methods of weighted residuals with application to heat conduction and diffusion-reaction systems.*Journal of Applied Mathematics*, 44,1076-1091.

Partha, M. K. (2009). Nonlinear convection in a non-Darcy porous medium. *Applied Mathematics and Mechanics*, 31, 565-574.

Rosenhead, L. Ed. (1963). *Laminar Boundary Layers*, Dover Publications, New York.

Rosner, D.E., Mackowski, D.W., Tassopoulos, M., Castillo, J.L. and Garcia-Ybarra, P.L. (1992). *I& EC Res.* 31, 760-769.

Seinfeld, J.H. and Pandis, S.N. (1998). Atmospheric, Chemistry and Physics from air pollution to climate change. John Wiley and Sons. New York.

Schlichting H. (1979). Boundary Layers Theory, McGraw-Hill, New York, 127-131.

Shah, A.A, Schultz, B, Zhang, W, Glotzer S.C & Solomon, M.J (2015). Actuation of shape-memory colloidal fibres of Janus ellipsoids. Nature Materials Journal 14, 117-124.

Siegel J.D, Rhinehart E., Jackson M., Chiarello M, Strausbaugh L. (2007). Guidelines for isolation precautions: preventing transmission of infectious agents in healthcare. Centers for Disease Control and Prevention (CDC).

Song, L.M. Elimelech/Coloids Surfaces (1993).Physicochem Eng. Aspects. 73, 49-63.

Spalding, D.B. and Evans, H.L. (1961). Journal of Heat and Mass Transfer. 2, 314.

Strandstrom, K, Mueller, C, Hupa, M. (2007) Development of an ash particle deposition model considering build-up and removal mechanisms. Fuel Processing Technology 88: 11-12

Topfer, K (1912). Bemerknugeu zu dem Aufsatz von H. Blasius: Grenzschichten in Flussigkeiten mit kleiner Reibung, Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physik Vol. 60, 397-398.

Whittaker, E. T. and Watson, G. N. (1990). A Course in Modern Analysis, 4th ed., Cambridge University Press.

Volchkov, E.P. & Terekhov, V. V. (2004). A numerical study of boundary-layer heat and mass in a forced flow of humid air with surface steam condensatio. International Journal of Heat and Mass Transfer, 47, 1473-1480.

Welch, S.W.J. & Wilson, J. (2000). A volume of fluid based method for fluid flows with phase change. *Journal of Computational Physics*, 160, 662-682.

Williams, M.M.R. and Loyalka, S.K. (1991). *Aerosol Science, Theory and Practice*, Pergamon Press.

Whittaker, E. T. & Watson, G. N. (1990). *A course in modern analysis* (4th ed.). Cambridge University Press.

Woo, S. H., Lee, S. C., and Yook, SJ (2015). Local Behavior of Deposition Velocity onto a Flat Plate in Horizontal Airflow under the Influence of Thermophoresis. *Aerosol Science and Technology*, 49: 920-927.

Yook, SJ, Asbach. C, Ahn, KH (2010). Particle deposition velocity onto a face-up flat surface in a laminar parallel flow considering Brownian diffusion and gravitational settling. *Journal of Aerosol Science* 41: 911-920.

Yoshio Otani, Norikazu Namiki & Hitoshi Emi (1995) Removal of Fine Particles from Smooth Flat Surfaces by Consecutive Pulse Air Jets, *Aerosol Science and Technology*, 23:4, 665-673.