Tesis doctoral

Cálculo estocástico y optimalidad de impuestos

Ramón Miralles Rafart
Licenciado en Ciencias Matemáticas

Departamento de Economía Aplicada Cuantitativa II
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
UNED
2011

Departamento de Economía Aplicada Cuantitativa II
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Cálculo estocástico y optimalidad de impuestos

Tesis Doctoral realizada por D. Ramón Miralles Rafart (Licenciado en Ciencias Matemáticas). Dirigida por el Doctor D. Alberto Augusto Álvarez López y codirigida por el Doctor D. Tomás Prieto Rumeau.

Madrid, junio de 2011

A mi esposa, Begoña, y a mi hijo, Ramón;
por su amor y por las horas de ausencia
que han sabido soportar.

Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento al director Dr. Alberto A. Álvarez López y al codirector Dr. Tomás Prieto Rumeau por su dedicación, sus valiosas ideas aportadas, las correcciones efectuadas y el apoyo recibido.

Asimismo, he de agradecer a mi familia los ánimos que me han dado, su paciencia y comprensión, durante los años de realización de esta Tesis.

También, quiero manifestar mi gratitud a todos los compañeros y amigos que me apoyaron y motivaron durante estos años.

Índice general

Abreviaturas, acrónimos, siglas y símbolos

u.m: Unidades monetarias.

u.t.t: Unidades de tiempo de trabajo.

Introducción

Presentación

Desde hace mucho tiempo, en la mayoría de los países desarrollados, existe la preocupación por la necesidad de garantizar niveles de renta mínima y bienestar social a todos los ciudadanos. Sus gobiernos, independientemente del signo político más o menos liberal, diseñan distintas políticas de redistribución de renta y ayudas sociales.

En la ciencia económica, la temática relacionada con la justicia social, la redistribución y los efectos de ésta sobre el crecimiento económico han sido motivo de reflexión y aportaciones por parte de diversos autores. Comenzando por Mill (1867) con su filosofía utilitarista y después Edgeworth (1897) con sus diferentes teorías del sacrificio, se pone en evidencia que si la utilidad de los individuos es cóncava respecto de la renta, la financiación del gasto público debe hacerse de manera progresiva. Pigou (1947) consolida y demuestra analíticamente estas tesis.

En las reflexiones iniciales de Mill no estaban presentes las cuestiones relacionadas con la eficiencia. Sidgwick (1883) fue el primero en evidenciar el problema de los incentivos. Su reflexión es determinante, al incidir en las dificultades relacionadas con las reacciones de comportamiento de los individuos: la redistribución y la progresividad de los impuestos podrían implicar una reducción del esfuerzo por parte de los trabajadores más productivos, ya que son los de renta superior, y por lo tanto, los que pagan más impuestos. El dilema equidad-eficiencia ha sido el elemento más importante analizado e interpretado en los estudios posteriores, principalmente en el impuesto sobre las rentas salariales.

Uno de los temas de controversia, en los primeros tiempos de la imposición sobre la renta, era cómo debía graduarse el tipo impositivo con el nivel de renta. En los diseños impositivos iniciales había muchos intervalos de renta con tipos marginales crecientes, bastante altos en los últimos tramos. Actualmente, en los países más avanzados, el número de escalones de la estructura de los tipos ha disminuido, de modo que muchas personas se enfrentan al mismo tipo impositivo marginal básico, y el tipo marginal superior sobre la renta ganada ha disminuido. El diseño de una estructura impositiva óptima en las rentas salariales debe contemplar un equilibrio entre equidad y desincentivos laborales.

La teoría de la imposición óptima en las rentas provenientes del factor trabajo ha sido estudiada por diversos autores, muy especialmente desde el trabajo de Mirrlees (1971). Este trabajo puede ser considerado como un punto de partida de una investigación rigurosa sobre las características y la progresividad en la imposición directa para combinar, de la mejor manera posible, la eficiencia económica y la equidad en la distribución de la renta.

En su artículo Mirrlees plantea una serie de conclusiones. A efectos de la política impositiva, las más importantes indican que:

-La estructura impositiva óptima es aproximadamente lineal y con un nivel de exacción por debajo del cuál se pagan suplementos impositivos negativos.

-Los tipos marginales son más bien bajos.

-El impuesto sobre la renta es un instrumento mucho menos efectivo para reducir desigualdades de lo que a menudo se piensa.

Posteriormente, también resultan interesantes los trabajos de Atkinson y Stiglitz (1980) sobre los tipos impositivos lineales que gravan la renta salarial con un mínimo exento en el impuesto. El grado de progresividad puede examinarse en términos del tipo impositivo medio.

De las lecturas citadas sobre la imposición óptima, se deduce que ésta depende fundamentalmente de tres elementos: las mayores o menores necesidades de ingresos públicos, los valores sociales vigentes en el momento que se considere (son modelizados mediante una función de bienestar social) y la elasticidad de sustitución entre renta y ocio.

En los trabajos que consideran conjuntamente la imposición óptima sobre la renta y las deciciones de educación, Spadaro (2002), se pueden distinguir tres tipos de modelos: 1) aquellos en los que el problema del gobierno es la determinación a la vez del impuesto sobre la renta y de la educación obligatoria; 2) los modelos en los que las decisiones de educación se toman desde un nivel individual, pero sin el conocimiento de la productividad personal inicial; y 3) los modelos en los cuales las decisiones sobre educación y oferta de trabajo son individuales, y los individuos conocen su productividad actual y futura.

En todos los estudios mencionados sobre la optimalidad impositiva, se supone un régimen de certidumbre en la oferta de trabajo y en el tiempo de formación. Hay factores como la globalización de la economía, la coyuntura económica, la volatilidad de los mercados financieros, la flexibilidad y las inseguridades del mercado laboral, la falta de uniformidad y coherencia en las leyes educativas, la inseguridad a largo plazo en el sistema público de pensiones, el absentismo laboral imprevisto, etc., que introducen aleatoriedad e incertidumbre en la formación de los invidividuos y en el tiempo real de trabajo. Por tanto, creemos interesante plantear un estudio de la optimalidad de los tipos impositivos de las rentas salariales con la introducción de incertidumbre en el tiempo de formación y en la oferta laboral real de los individuos.

Objetivos

El objetivo general de este trabajo es analizar la influencia de la incertidumbre en las decisiones de formación de los individuos y en la oferta laboral. Este objetivo se desarrolla de la siguiente manera:

En *primer lugar*, se caracterizan las clases de las funciones de bienestar social que se utilizarán en este trabajo. Su grado de concavidad determina el nivel de aversión a la desigualdad, por parte del gobierno, en la distribución de las utilidades renta y ocio de la población.

En *segundo lugar*, se pretende la construcción de una serie de modelos de complejidad creciente que relacionen el tiempo de formación aleatorio de los individuos y los ingresos previsibles a lo largo de su vida laboral. Una vez fijado el tiempo óptimo esperado de formación, por parte del individuo, el gobierno determinará unos parámetros fiscales óptimos (tipo impositivo y renta de garantía) que maximicen el valor de la función de bienestar social correspondiente a las expectativas de aversión a la desigualdad en las rentas entre la colectividad.

En *tercer lugar*, y siguiendo la línea del trabajo de Stiglitz, se quiere incorporar al modelo del impuesto lineal sobre las rentas salariales, la posibilidad de aleatoriedad en el tiempo real de trabajo y la percepción de una renta no contributiva de garantía por parte de los individuos que no trabajan. Con esta estructura, el modelo presenta rasgos de tipo progresivo y redistributivo en las rentas del factor trabajo.

En *cuarto lugar*, se quiere analizar la estructura de un impuesto general sobre la renta salarial, su progresividad y características en los tipos marginales. Pretendemos construir un conjunto de modelos cada vez más completos en la globalidad de la población. Para el caso más general nos centraremos en la línea del trabajo clásico de Mirrlees, con algunas variaciones en el modelo.

En *quinto lugar*, utilizando los postulados teóricos y modelos anteriores, queremos realizar el estudio de la estructura y propiedades del impuesto general progresivo sobre la renta salarial, incorporando incertidumbre en el tiempo real de trabajo.

En *sexto lugar*, sólo con el objetivo de aplicar las teorías expuestas, pretendemos explorar los resultados que obtendríamos en las rentas del trabajo de la población española utilizando: un modelo de probabilidad log-normal en la distribución de habilidades, una función de utilidad renta-ocio del individuo y una función de bienestar social con un grado de concavidad superior al utilitarista.

Metodología

Para el desarrollo de este trabajo se ha llevado a cabo, en primer lugar, un análisis exhaustivo de diversa bibliografía especializada sobre la imposición directa y la oferta de trabajo. En particular, se han analizado en profundidad los trabajos de Mirrlees (1971), Atkinson y Stiglitz (1980), Tuomala (1990) y Spadaro (2002). Partiendo de sus ideas y contenidos hemos considerado la posibilidad de introducir incertidumbre en la oferta laboral y en el tiempo de formación de los individuos y, posteriormente, determinar los parámetros fiscales óptimos que maximizan una función de bienestar social.

Para la determinación de los tipos impositivos óptimos, en la mayor parte de la literatura sobre la imposición directa, prácticamente, sólo se utilizan dos tipos de funciones de bienestar social: la utilitarista (mínima preocupación del gobierno por las desigualdades sociales de las utilidades individuales de la población) y la rawlsiana (máxima preocupación). Por lo que se ha creído conveniente incluir el estudio y la caracterización de las funciones de bienestar social conducente a una mejor interpretación de la equidad y eficiencia en los tipos impositivos.

Se han consultado las aportaciones sobre los estudios estadísticos y la determinación de ajustes con modelos probabilísticos a las rentas poblacionales de García (2000), constatando que los tres tipos más importantes de leyes probabilidad teóricas que se ajustan mejor a la distribución de la renta observada de la población son: la distribución log-normal, la exponencial y la de Pareto. Las tres tienen una forma similar y, básicamente, se diferencian en el crecimiento más o menos intenso de las rentas más bajas y en el decrecimiento más o menos relentizado de las rentas medio-altas y altas. La bondad del ajuste de un modelo teórico a una distribución observada puede evaluarse calculando el *coeficiente de determinación* entre los datos observados empíricamente y el modelo teórico. En su trabajo Mirrlees utiliza la distribución log-normal. Nosotros, en los distintos casos prácticos expuestos, empleamos la distribución exponencial y la de Pareto, principalmente.

Con el objetivo de dar un cierto grado de uniformidad y estructura expositiva al trabajo, partimos del modelo más simplificado posible para, finalmente, terminar el capítulo correspondiente con un modelo general, utilizando una ley de probabilidad continua en la distribución de las habilidades de la población. Concretamente desarrollamos los modelos de colectivos compuestos por: un individuo y el gobierno, dos individuos y el gobierno, n individuos y el gobierno y el caso general (gobierno y ley de probabilidad de habilidades o rentas salariales por unidad de tiempo). Se expone un capítulo con estos modelos, adaptados al tema a tratar, referidos al caso determinista y en el siguiente, con los mismos modelos, se trata la situación aleatoria.

La gran mayoría de los contenidos teóricos son originales. Durante la exposición de los desarrollos teóricos se van introduciendo ejemplos prácticos, exceptuando los referidos a los modelos más simples que resultan, casi siempre, triviales.

Los cálculos numéricos, que resultan de gran compejidad, se han realizado con el programa MAPLE 12 de cálculo numérico, simbólico y gráfico. También hemos utilizado, en los cálculos estadísticos y probabilísticos, los paquetes estadísticos: Minitab y Statgraphics.

Estructura del trabajo

El marco teórico y los resultados de los ejemplos prácticos de nuestro trabajo se exponen a lo largo de 8 capítulos:

- El *primer capítulo* está dedicado a las funciones de bienestar social. Se caracterizan los formas funcionales que se utilizaran y se da un criterio para medir su grado de concavidad.

-En el *segundo capítulo,* se desarrollan 4 modelos de colectivos utilizando, para la optimización del tiempo de formación determinista, una función de los ingresos de las rentas del trabajo previstas descontadas al tiempo de iniciar la formación. Posteriormente, el gobierno "para determinar los valores óptimos de los parámetros fiscales" maximiza una función de bienestar social, dependiente del tiempo óptimo de formación y de los parámetros fiscales, sujeta a las necesidades de recaudación. Finalmente, se exponen otros criterios, sustitutivos de la función de bienestar social, que también pueden utilizarse para obtener los parámetros fiscales óptimos.

-En el *tercer capítulo,* se realiza un estudio paralelo al primero, pero utilizando un tiempo de formación aleatorio. Aquí, la función a optimizar es la esperanza matemática de una función de los ingresos netos esperados descontados al tiempo de iniciar la formación por parte del individuo.

-En el *cuarto capítulo,* se utilizan los 4 modelos de colectivos, aplicados a la oferta laboral determinista con un impuesto lineal sobre la renta salarial. Los individuos maximizan una función de utilidad con el objetivo de fijar su oferta óptima de trabajo. Posteriormente, el gobierno fija el tipo impositivo lineal y la renta de garantía exenta maximizando una función de bienestar social, cuyo grado de concavidad depende del nivel existente de aversión social a la desigualdad de la renta.

-En el *quinto capítulo*, se presentan contenidos parecidos al cuarto con una oferta laboral incierta en el tiempo real trabajado.

-En el *sexto capítulo*, se aplica a los modelos de colectivos un impuesto progresivo sobre la renta salarial. La oferta individual de trabajo es de tipo determinista. Los contenidos estan inspirados en el trabajo de Mirrlees (1971), pero con planteamientos que presentan diferencias. El gobierno determina los impuestos progresivos o la función impositiva progresiva (cuarto modelo), maximizando una función de bienestar social sujeta a las necesidades de recaudación.

-En el *séptimo capítulo*, se desarrollan los mismos contenidos que en el sexto con una oferta laboral, en régimen de incertidumbre, en el tiempo real de trabajo.

-En el *último capítulo,* con el objetivo de desarrollar una aplicación práctica de este trabajo, se hace un estudio de la fiscalidad de la renta salarial declarada en España en el año 2007. Con modelos de ajuste, simulación y cálculo numérico determinamos los tipos impositivos resultantes, a distintos niveles de renta, y se comparan con los reales. Economía positiva *versus* economía normativa.

CAPÍTULO I

Funciones de bienestar social a utilizar

En el problema de la imposición directa existen dos caminos que aumentan el bienestar social: por un lado la elección de unos tipos impositivos que hagan máxima la eficiencia (una menor disminución de la renta global neta), así se dispone de más recursos para repartir entre la población, y por otro lado las cuestiones de equidad distributiva resultantes de esa asignación. En este sentido es clara la presencia de un *trade off* entre objetivos de eficiencia y equidad, hasta el punto que un sistema altamente redistritutivo no aumenta el bienestar social si los sacrificios de eficiencia son demasiado elevados y, de la misma forma, sistemas tributarios que busquen la máxima eficiencia no por ello permitirán una mayor felicidad a los miembros de la sociedad. Para el acierto del sistema fiscal es necesario que un aumento del bienestar social, resultante de la redistribución de la renta, venga compensado por una reducción del bienestar social producido por la mayor ineficiencia. Si una sociedad o gobierno tiene aversión a la desigualdad ponderará más los cambios de bienestar de los individuos con utilidades más bajas.

Para modelizar el bienestar social, ordenar las utilidades individuales y ponderar las desigualdades sociales en los modelos de imposición y redistribución óptima de la renta se utilizan las *funciones de bienestar social*. Estas funciones, que son una medida del bienestar social general de una colectividad, se forman por una agregación del bienestar individual asignando pesos distintos a los individuos en función de sus utilidades y de la aversión del gobierno a la desigualdad.

Seguidamente desarrollamos la teoría de las funciones de bienestar social de una forma parcial, no general. Pretendemos llegar a una caracterización de las funciones de bienestar social que utilizaremos. Primero, las funciones de bienestar social formadas con los vectores de utilidad de n individuos y, posteriormente, las funciones que nos darán el bienestar social esperado o medio de una colectividad de individuos con una distribución de probabilidad absolutamente continua de sus habilidades o productividades.

I.1. Funciones de bienestar social de utilidades individuales

I.1.1. Definición e interpretación

Sea A el conjunto de alternativas individuales (horas de trabajo, tiempo de formación...) y X el conjunto de alternativas del gobierno (tipos impositivos, rentas de garantía, ayudas sociales...). Si $U_i(a,x)$, con $a \in A$ y $x \in X$, representa la función de utilidad del individuo i, su función de utilidad indirecta es $V_i(x) = \max_{a \in A} U_i(a,x)$.

Una función de bienestar social es una función $\Psi : R^n \to R$ que asigna un número real a un conjunto de n utilidades indirectas individuales. La función puede escribirse $\Psi(V_1(x), V_2(x), \ldots, V_n(x))$, donde $V_i(x)$ denota la utilidad indirecta del individuo i correspondiente a la alternativa gubernamental x, del conjunto X de alternativas posibles.

En este contexto, decimos que una alternativa x es socialmente preferible a una alternativa x' respecto a la función de bienestar social Ψ si

$$\Psi(V_1(x), V_2(x), \ldots, V_n(x)) > \Psi(V_1(x'), V_2(x'), \ldots, V_n(x')).$$

Una función de bienestar social Ψ ordena de una manera racional todas las alternativas disponibles en el conjunto X. La función de bienestar social permite agregar las utilidades indirectas que los individuos de una sociedad obtienen de cada alternativa $x \in X$. Llamamos *óptimo social* al subconjunto de alternativas del conjunto X que maximizan la función de bienestar social Ψ.

I.1.2. Características y propiedades

Necesitamos suponer que las funciones de bienestar social satisfacen determinadas propiedades convencionales:

1) Ψ es creciente.

Si $V_i' \geq V_i,\ i = 1,2,\ldots,n \Rightarrow \Psi(V_1', V_2', \ldots, V_n') \geq \Psi(V_1, V_2, \ldots, V_n)$

y si $V_i' > V_i,\ i = 1,2,\ldots,n \Rightarrow \Psi(V_1', V_2', \ldots, V_n') > \Psi(V_1, V_2, \ldots, V_n)$.

2) Ψ es estrictamente creciente.

Si $V_i' \geq V_i,\ i = 1,2,\ldots,n$ y $\exists i$ tal que $V_i' > V_i \Rightarrow \Psi(V_1', V_2', \ldots, V_n') > \Psi(V_1, V_2, \ldots, V_n)$.

3) Ψ es simétrica.

Si para cualquier permutación $(V_{i_1}, \ldots, V_{i_n})$ del vector de utilidades indirectas individuales $(V_1, \ldots, V_n)$ es

$$\Psi(V_{i_1}, \ldots, V_{i_n}) = \Psi(V_1, \ldots, V_n).$$

La idea intuitiva es que todos los individuos, independientemente de su función de utilidad indirecta, cuentan igual.

4) Una curva de indiferencia de una función de bienestar social Ψ es un conjunto de puntos socialmente equivalentes o indiferentes. La expresión matemática es (K denota un número real):

$$\Psi(U_1, U_2, \ldots, U_n) = K.$$

5) Ψ es cóncava.

El grado de concavidad se interpreta como el grado de aversión a la desigualdad. A más concavidad, mayor aversión.

I.1.3. Funciones de bienestar social notables

Con la definición dada en el apartado I.1.1, consideramos los dos casos que representan las aversiones extremas a la desigualdad social y que han recibido mayor atención en la literatura de la imposición óptima:

a) La **utilitarista pura**. Se corresponde con

$$\Psi(V_1, V_2, \ldots, V_n) = \sum_{i=1}^{n} V_i.$$

Esta función de bienestar social es simétrica, cóncava y estrictamente creciente. Sus curvas de indiferencia (con dos individuos) son rectas paralelas. El óptimo social (u óptimos) de cualquier conjunto de posibles valores del vector de las utilidades indirectas individuales $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$, según esta función, es aquel vector o vectores donde la cantidad total de utilidad indirecta es la mayor posible. En esta caso, no se muestra ninguna aversión a la desigualdad en la distribución de la utilidad indirecta.

b) La **maximin** o **rawlsiana**. Se corresponde con

$$\Psi(V_1, V_2, \ldots, V_n) = \min\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}.$$

Esta función de bienestar social es simétrica, cóncava y creciente. Sus curvas de indiferencia (con dos individuos) tienen forma de L. El óptimo social, según esta función, se encuentra en aquella alternativa o alternativas de combinaciones de valores del vector de utilidades indirectas $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ donde el individuo con menor utilidad del grupo sale lo mejor parado posible. Esta función de bienestar social se preocupa *exclusivamente* de la gente con mayores necesidades, muestra una aversión extrema a la desigualdad en la distribución de la utilidad indirecta.

I.1.4. Función de bienestar social utilitarista generalizada

Son las funciones de bienestar social que utilizaremos en la mayor parte de este trabajo. Una función de bienestar social **utilitarista generalizada** se corresponde con

$$\Psi(V_1, V_2, \ldots, V_n) = \sum_{i=1}^{n} g(V_i),$$

donde g es una función con derivada segunda continua, creciente y cóncava.

Estas funciones presentan la particularidad que aumentando la concavidad de g podemos aumentar la aversión a la desigualdad. Cada unidad sucesiva de utilidad que recibe una persona incrementa de manera decreciente el bienestar social, en la función de bienestar social utilitarista pura esta cualidad estaba ausente. Por ello, esta función de bienestar social se preocupa sobre todo (pero no en exclusividad) por las personas con menor utilidad indirecta individual o más necesitadas.

Medida del grado de concavidad

Para estas funciones introducimos una medida del grado de concavidad, que llamamos *pseudoconcavidad de* Ψ y definimos por la expresión

$$p(\Psi) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{g''(V_i)}{g'(V_i)}, \tag{I.1}$$

donde V_i representa la función de utilidad indirecta del individuo i. Un mayor valor de $p(\Psi)$ indica más aversión a la desigualdad. Para ilustrar esto, consideramos las funciones de bienestar social:

1) La función isoelástica, Atkinson y Stiglitz (1980):

$$\Psi_1(V_1, V_2, \ldots, V_n) = \frac{1}{1-v} \sum_{i=1}^{n} (V_i^{1-v} - 1)$$

con $v \geq 0$ i $v \neq 1$. Resulta

$$p(\Psi_1) = v \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{V_i}.$$

2) Para la función isoelástica cuando $v = 1$, pasando a calcular el límite cuando v tiende a 1 y aplicando la regla de l'Hôpital, obtenemos la función suma de logaritmos de las utilidades indirectas:

$$\Psi_2(V_1, V_2, \ldots, V_n) = \lim_{v \to 1} \sum_{i=1}^{n} \frac{V_i^{1-v} - 1}{1-v} = \sum_{i=1}^{n} \ln(V_i)$$

y

$$p(\Psi_2) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{V_i}.$$

3) Para $v = 0$, en la función isoelástica, resulta la función utilitarista (suma de las utilidades individuales):

$$\Psi_3(V_1, V_2, \ldots, V_n) = \sum_{i=1}^{n} V_i$$

y

$$p(\Psi_3) = 0.$$

4) En la función, inspirada en las utilizadas en los trabajos de Mirrlees (1971) y Tuomala (1990):

$$\Psi_4(V_1, V_2, \ldots, V_n) = \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^{n} (1 - \exp(-\beta V_i))$$

con $\beta > 0$. Resulta

$$p(\Psi_4) = n\beta.$$

5) De la función anterior cuando $\beta = 0$, pasando al límite y aplicando la regla de Hôpital, obtenemos la función utilitarista:

$$\Psi_5(V_1, V_2, \ldots, V_n) = \lim_{\beta \to 0^+} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1 - \exp(-\beta V_i)}{\beta} \right) = \sum_{i=1}^{n} V_i.$$

I.2. Bienestar social y función densidad de habilidades

Aquí la distribución de habilidades o productividades de la población w está definida sobre un intervalo $(\underline{\omega}, \overline{\varpi})$ y se representa por una función densidad $f(w)$, absolutamente continua. La relación entre la utilidad de los individuos y el bienestar social, como en los trabajos de Mirrlees (1971), Stern (1976) y Atkinson y Stiglitz (1980), está representada por una función $\Psi(V)$ con derivada segunda continua, creciente y cóncava. La concavidad de Ψ significa que el gobierno quiere redistribuir una parte de la renta de aquellos que tienen una utilidad indirecta más elevada y, por lo tanto, una productividad w más alta, hacia los individuos con una menor productividad. El nivel de aversión a la desigualdad se mide a través del grado de concavidad de la función de bienestar social. Utilizaremos la fórmula (I.1) para la medida del grado de concavidad de $\Psi(V)$.

En este caso, para determinar los parámetros fiscales óptimos, no maximizamos la función de bienestar social $\Psi(V)$ sino el bienestar social medio

$$\int_{\underline{\omega}}^{\overline{\varpi}} \Psi(V) f(w) dw.$$

Es importante destacar que la heterogeneidad de los individuos se considera unidimensional, es decir, sólo difieren en sus productividades y, por tanto, la aversión a la desigualdad del gobierno también es unidimensional. A mayor grado de concavidad de la función de bienestar social $\Psi(V)$ corresponde un menor bienestar social medio (menor eficiencia), pero un mayor bienestar social medio relativo para el colectivo con habilidades más bajas (mayor equidad). Así, si Ψ_1 y Ψ_2 son dos funciones de bienestar social tales que $p(\Psi_1) < p(\Psi_2)$ y $\Psi_1(V) \geq \Psi_2(V)$ para todo V, resulta:

1) Para el bienestar social medio

$$\int_{\underline{\omega}}^{\overline{\omega}} \Psi_1(V)f(w)dw \geq \int_{\underline{\omega}}^{\overline{\omega}} \Psi_2(V)f(w)dw.$$

2) Para intervalos $(\underline{\omega}, w_i)$ del nivel inferior de habilidades o productividades

$$\frac{\int_{\underline{\omega}}^{w_i} \Psi_1(V)f(w)dw}{\int_{\underline{\omega}}^{\overline{\omega}} \Psi_1(V)f(w)dw} < \frac{\int_{\underline{\omega}}^{w_i} \Psi_2(V)f(w)dw}{\int_{\underline{\omega}}^{\overline{\omega}} \Psi_2(V)f(w)dw}.$$

I.2.1. Funciones de bienestar social seleccionadas

Por las consideraciones anteriores y las analogías con los trabajos de Mirrlees (1971), Stern (1976) y Atkinson y Stiglitz (1980), las funciones de bienestar social Ψ que consideramos interesantes en nuestro trabajo son:

1) La utilitarista o benthamita $\Psi_1(V) = V.$

2) Las de la familia $\Psi_2(V) = \dfrac{1 - \exp(-\beta V)}{\beta}$, con $\beta > 0$. Observemos que pasando al límite cuando β tiende a cero por la derecha y, aplicando la regla de l'Hôpital, resulta la función de bienestar social utilitarista:

$$\Psi_1(V) = \lim_{\beta \to 0^+} \frac{1 - \exp(-\beta V)}{\beta} = \lim_{\beta \to 0^+} V\exp(-\beta V) = V.$$

3) La logarítmica $\Psi_3(V) = \ln(V)$.

I.2.2. Funciones de bienestar social definidas por tramos lineales

Siguiendo y profundizando en la idea de Bourguignon y Spadaro (2000), que utilizan una función de bienestar social lineal en dos tramos, introducimos el concepto de función de bienestar social continua y creciente definida por tramos lineales, para colectivos de individuos cuyos niveles de habilidad o productividad w vienen dados por una función de distribución de probabilidad absolutamente continua $F(w)$.

Consideremos n centiles de la distribución de habilidades $w_{\alpha_i}, i = 1,\ldots,n,$ siendo $\underline{\omega} < w_{\alpha_1} < w_{\alpha_2} <,\ldots,< w_{\alpha_n} < \overline{\omega}$; o sea, $F(w_{\alpha_1}) = \alpha_1, F(w_{\alpha_2}) = \alpha_2,\ldots, F(w_{\alpha_n}) = \alpha_n$. Si $V(w)$ es la función de utilidad indirecta del individuo con nivel de habilidad o productividad w, definimos la función de bienestar social continua en tramos lineales $\Psi(V)$ por la expresión:

$$\Psi(V) = \begin{cases} V(w) & \text{si } \underline{\omega} \leq w < w_{\alpha_1} \\ V(w_{\alpha_1}) + \beta_1(V(w) - V(w_{\alpha_1})) & \text{si } w_{\alpha_1} \leq w < w_{\alpha_2} \\ V(w_{\alpha_2}) + \beta_2(V(w) - V(w_{\alpha_2})) & \text{si } w_{\alpha_2} \leq w < w_{\alpha_3} \\ V(w_{\alpha_3}) + \beta_3(V(w) - V(w_{\alpha_2})) & \text{si } w_{\alpha_3} \leq w < w_{\alpha_4} \\ \ldots & \\ V(w_{\alpha_n}) + \beta_n(V(w) - V(w_{\alpha_n})) & \text{si } w_{\alpha_n} \leq w < \overline{\omega} \end{cases}$$

siendo $\beta_i > \beta_{i+1} > 0, i = 1,\ldots,n-1$ y $\sum_{i=1}^{n} \beta_i \leq 1$. La función $\Psi(V)$ no es derivable en los puntos $w = w_{\alpha_i}, i = 1,\ldots,n$. En cada tramo se asigna un peso redistributivo constante y un peso constante pero inferior al precedente; también, en cada tramo siguiente se garantiza un nivel de bienestar superior al del actual.

Este tipo de funciones simplifican en gran medida los cálculos en la imposición óptima y representan con gran acierto el dilema que se establece, en la imposición directa, entre la equidad distributiva de la renta salarial y la eficiencia económica.

CAPÍTULO II

Impuestos lineales con tiempo de formación determinista

En los últimos años de la década de 1970 surge el interés por el estudio de la provisión óptima de educación pública y los efectos redistributivos en presencia de decisiones de formación. Tal como se especifica en Spadaro (2002), en los trabajos que consideran conjuntamente imposición óptima sobre la renta y decisiones de educación es posible distinguir fundamentalmente tres tipos de modelos: 1) aquellos en los que el problema del gobierno es la determinación simultánea del impuesto sobre la renta y de la educación obligatoria; 2) los modelos en los que las decisiones de educación se toman desde un nivel individual, pero sin que se conozca la habilidad inicial (los individuos la descubrirán después de haberse formado); y 3) los modelos en los cuales las decisiones sobre educación y oferta de trabajo son individuales, y los individuos conocen su habilidad actual y futura.

En este capítulo, con los planteamientos del tercer modelo, presentamos el equilibrio entre las condiciones de eficiencia (nivel de formación) y equidad (redistribución de la renta) en las circunstancias más simples. Con este objetivo, desarrollamos unos modelos de complejidad creciente en los cuales los ingresos brutos dependen del nivel de habilidad y de las decisiones sobre el nivel de educación, y donde el gobierno exige un impuesto lineal sobre la renta de naturaleza redistributiva. El tiempo de formación real que reciben los individuos es conocido de antemano.

II.1. Hipótesis generales

Todos los modelos que desarrollamos presentan, entre otras, las siguientes características:

a) Los ingresos de los individuos dependen solamente de su habilidad innata w y del tiempo de educación recibida X: esto es, las horas de trabajo se suponen fijas. Concretamente, los ingresos del individuo $Z(w,X)$ son proporcionales a sus años de formación:

$$Z(w,X) = wX.$$

b) Mientras un individuo recibe educación, sus ingresos son nulos.

c) Cuando un individuo trabaja percibe una cantidad constante $Z(w,X)$ y se retira después de trabajar Q años.

d) El esquema impositivo $T(Z)$ es lineal progresivo, existe una renta de garantía G y un tipo impositivo marginal α constante:

$$T(Z) = \alpha Z(w,X) - G.$$

e) Los individuos con nivel de habilidad $w \geq w_0$ deciden formarse, una vez han completado la escolarización obligatoria. Este punto se toma como origen en los cálculos del tiempo de formación y de la actividad laboral.

f) Los individuos con nivel de habilidad $w \geq w_0$ trabajan Q años desde la finalización de la etapa formativa laboral. De este modo se retiran $X+Q$ años después de iniciar su formación. Eso significa que las personas con mayor formación se retiran a una edad mayor. Se adopta este supuesto simplificativo, en aras a una mayor claridad expositiva de los modelos.

g) Los individuos sin formación sólo cobran la renta de garantía G durante Q años, una vez han completado la escolarización obligatoria.

h) La tasa de descuento de las rentas debe ser $0 < r < w_0$. Condición de racionalidad económica, pero que preferimos incluir para evitar situaciones ambiguas.

i) La renta de garantía G debe ser menor o igual que el valor de una renta perpetua anual de las habilidades netas mínimas $w_0(1-\alpha)$ descontada al tipo de interés r. O sea, $G \leq \frac{w_0(1-\alpha)}{r}$.

j) En los distintos modelos que se exponen, los individuos maximizan el valor actual de todas sus rentas ς, descontadas al tipo de interés r al momento de iniciar su formación. Aquí la variable a optimizar será el tiempo de formación X.

k) El gobierno tiene unas necesidades de recaudación estimadas en R_0.

l) Una vez los individuos han fijado sus preferencias temporales de formación X^*, el gobierno determinará los parámetros fiscales óptimos α^* y G^* maximizando una función de bienestar social Ψ, sujeta a la restricción de recaudación. La elección de la función de bienestar social Ψ la hace el gobierno según su grado de aversión a la desigualdad en los ingresos individuales de la población.

II.2. El problema del individuo

El individuo maximizará el valor actual de todas sus rentas, descontadas al tipo de interés r en el momento de comenzar su formación

$$\begin{aligned} \varsigma &= \int_X^{X+Q} (Z - T(Z))e^{-rt}dt \\ &= \int_X^{X+Q} (wX - (\alpha wX - G))e^{-rt}dt \\ &= ((1-\alpha)wX + G)\int_X^{X+Q} e^{-rt}dt \\ &= ((1-\alpha)wX + G)e^{-rX}\left(\frac{1-e^{-rQ}}{r}\right). \end{aligned}$$

Al ser la expresión

$$\frac{1-e^{-rQ}}{r}$$

constante y positiva, la función precedente ς es proporcional a

$$\chi = ((1-\alpha)wX + G)e^{-rX}. \qquad \text{(II.1)}$$

El individuo se enfrenta al siguiente problema de maximización:

$$\begin{cases} \max \chi \\ s.a.\ X \geq 0. \end{cases} \qquad \text{(II.2)}$$

Al ser $\chi > 0$, la función $\ln(\chi)$ monótona creciente, el problema de optimización (II.2) resulta equivalente a

$$\begin{cases} \max \ln(\chi) \\ s.a.\ X \geq 0. \end{cases} \qquad \text{(II.3)}$$

La función $\ln(\chi)$ de (3) queda expresada por

$$\ln(\chi) = \ln((1-\alpha)wX + G) - rX.$$

Derivando $\ln(\chi)$ respecto a la variable X y aplicando la condición de primer orden, que al ser la función $\ln(\chi)$ cóncava resulta necesaria y suficiente para el problema de optimización, tenemos:

$$\frac{1}{\chi}\frac{\partial\chi}{\partial X} = \frac{(1-\alpha)w}{(1-\alpha)wX + G} - r = 0.$$

Ordenando esta última expresión, la solución es

$$X = \frac{1}{r} - \frac{G}{(1-\alpha)w}.$$

II.2.1. Tiempo de formación. Ingresos y función impositiva

Con las hipótesis iniciales y los resultados anteriores, el tiempo de formación óptimo de los individuos queda establecido por

$$X^* = \frac{1}{r} - \frac{G}{(1-\alpha)w} \text{ para } w \geq w_0 \tag{II.4}$$

$$X^* = 0 \text{ para } w < w_0.$$

El nivel resultante de ingresos χ^* viene dado por

$$\ln\chi^* = \frac{rG}{(1-\alpha)w} + \ln(1-\alpha) + \ln\frac{w}{r} - 1 \text{ para } w \geq w_0 \tag{II.5}$$

$$\ln \chi^* = \ln G \text{ para } w < w_0.$$

La cantidad impositiva T^* que pagará o recibirá el individuo viene expresada por

$$T^* = \frac{\alpha w}{r} - \frac{G}{1-\alpha} \text{ para } w \geq w_0 \tag{II.6}$$

$$T^* = -G \text{ para } w < w_0.$$

Debe destacarse que el efecto de la imposición consiste en reducir los diferenciales de renta después de impuestos.

II.3. Colectivo formado por un individuo y el gobierno

Sea un individuo con nivel de habilidad $w_1 \geq w_0$, que ha fijado su tiempo óptimo de formación X^*. El gobierno debe determinar los parámetros fiscales α^* y G^*, maximizando la función de bienestar social seleccionada $\Psi(\chi^*)$ sujeta a las restricciones de recaudación y compatibilidad. Con este objetivo, planteamos el problema de optimización:

$$\left\{\begin{array}{c} \max \Psi(\chi^*) \\ s.a. \\ T^* \geq R_0 \\ w_0 - \dfrac{rG}{1-\alpha} \geq 0 \end{array}\right. ,$$

donde T^* es la función impositiva lineal progresiva, R_0 las necesidades de recaudación y χ^* la función de los ingresos óptimos del individuo. El lagrangiano del problema de maximización es

$$\Im(\lambda_i, \alpha, G) = \Psi(\chi^*) + \lambda_1(T^* - R_0) + \lambda_2(w_0 - \frac{rG}{1-\alpha})$$

y diferenciando respecto a cada una de las variables fiscales, α, G, y los multiplicadores de Kuhn-Tucker, λ_1, λ_2. Las condiciones de primer orden que caracterizan la solución α^*, G^* son

$$\Psi_{\chi^*}(\chi^*)\frac{\partial \chi^*}{\partial \alpha} + \lambda_1 \frac{\partial T^*}{\partial \alpha} - \frac{\lambda_2 rG}{(1-\alpha)^2} = 0 \tag{II.7}$$

$$\Psi_{\chi^*}(\chi^*)\frac{\partial \chi^*}{\partial G} + \lambda_1 \frac{\partial T^*}{\partial G} - \frac{\lambda_2 r}{1-\alpha} = 0 \tag{II.8}$$

$$\lambda_1(R_0 - T^*) = 0 \tag{II.9}$$

$$\lambda_2\Big(\frac{rG}{1-\alpha} - w_0\Big) = 0 \tag{II.10}$$

$$T^* \geq R_0$$

$$w_0 - \frac{rG}{1-\alpha} \geq 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \geq 0.$$

Analizando las posibles soluciones, según los valores de los multiplicadores, resulta:

1) Si suponemos que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. De (II.7) y (II.8) obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \chi^*}{\partial \alpha} = 0 \\ \dfrac{\partial \chi^*}{\partial G} = 0, \end{cases}$$

que es incompatible.

2) Si suponemos que $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 > 0$. De (II.7), (II.8) y (II.10) obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \Psi_{\chi^*}(\chi^*)\dfrac{\partial \chi^*}{\partial \alpha} - \dfrac{\lambda_2 r G}{(1-\alpha)^2} = 0 \\ \Psi_{\chi^*}(\chi^*)\dfrac{\partial \chi^*}{\partial G} - \dfrac{\lambda_2 r}{1-\alpha} = 0 \\ \dfrac{rG}{1-\alpha} - w_0 = 0, \end{cases}$$

que es incompatible.

3) Si suponemos que $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. De (II.7) y (II.10) resulta la contradicción $\lambda_2 < 0$.

4) Si suponemos $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 = 0$. De (II.7), (II.8) y (II.9) obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{\dfrac{\partial \chi^*}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial \chi^*}{\partial G}} = \dfrac{\dfrac{\partial T^*}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial T^*}{\partial G}} \\ T^* = R_0, \end{cases}$$

que nos proporciona la solución trivial $\alpha^* = 0$ y $G^* = -R_0$.

II.4. Colectivo formado por dos individuos y el gobierno

A partir de aquí, a las hipótesis generales del modelo añadimos la siguiente: *la renta de garantía G no puede ser negativa*.

En este modelo los niveles de habilidad de los individuos son $w_i, i = 1,2$ y suponemos, en principio, que $w_0 \leq w_1 < w_2$. Los individuos fijan su tiempo óptimo de formación $X_i^*, i = 1,2$. Posteriormente, el gobierno debe determinar los parámetros fiscales α^* y G^*, maximizando la función de bienestar social seleccionada $\Psi(\chi_1^*, \chi_2^*)$ sujeta a las restricciones de recaudación y compatibilidad. Con este objetivo, planteamos el problema de optimización:

$$\begin{cases} \max \Psi(\chi_1^*, \chi_2^*) \\ s.a. \\ T_1^* + T_2^* \geq R_0 \\ w_0 - \dfrac{rG}{1-\alpha} \geq 0 \\ G \geq 0\ , \end{cases}$$

donde $T_i^*, i = 1,2$ son las funciones impositivas lineales progresivas de cada individuo, R_0 las necesidades de recaudación y $\chi_i^*, i = 1,2$ las funciones de los ingresos óptimos de cada individuo. El lagrangiano del problema de maximización es

$$\Im(\lambda_i, \alpha, G) = \Psi(\chi_1^*, \chi_2^*) + \lambda_1(T_1^* + T_2^* - R_0) + \lambda_2(w_0 - \frac{rG}{1-\alpha}) + \lambda_3 G$$

y diferenciando respecto a cada una de las variables fiscales, α, G, y los multiplicadores de Kuhn-Tucker, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Las condiciones de primer orden que caracterizan la solución α^*, G^* son

$$\Psi_{\chi_1}(\chi_1^*,\chi_2^*)\frac{\partial\chi_1^*}{\partial\alpha}+\Psi_{\chi_2}(\chi_1^*,\chi_2^*)\frac{\partial\chi_2^*}{\partial\alpha}+\lambda_1\left(\frac{\partial T_1^*}{\partial\alpha}+\frac{\partial T_2^*}{\partial\alpha}\right)-\frac{\lambda_2 rG}{(1-\alpha)^2}=0 \tag{II.11}$$

$$\Psi_{\chi_1}(\chi_1^*,\chi_2^*)\frac{\partial\chi_1^*}{\partial G}+\Psi_{\chi_2}(\chi_1^*,\chi_2^*)\frac{\partial\chi_2^*}{\partial G}+\lambda_1\left(\frac{\partial T_1^*}{\partial G}+\frac{\partial T_2^*}{\partial G}\right)-\frac{\lambda_2 r}{1-\alpha}+\lambda_3=0 \tag{II.12}$$

$$\lambda_1(R_0-T_1^*-T_2^*)=0 \tag{II.13}$$

$$\lambda_2\left(\frac{rG}{1-\alpha}-w_0\right)=0 \tag{II.14}$$

$$-\lambda_3 G=0 \tag{II.15}$$

$$T_1^*+T_2^*\geq R_0$$

$$w_0-\frac{rG}{1-\alpha}\geq 0$$

$$G\geq 0$$

$$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\geq 0.$$

Analizando las posibles soluciones, según los valores de los multiplicadores, resulta:

1) Si $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$. De (II.11) y (II.12) obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases}\Psi_{\chi_1}(\chi_1^*,\chi_2^*)\dfrac{\partial\chi_1^*}{\partial\alpha}+\Psi_{\chi_2}(\chi_1^*,\chi_2^*)\dfrac{\partial\chi_2^*}{\partial\alpha}=0\\ \Psi_{\chi_1}(\chi_1^*,\chi_2^*)\dfrac{\partial\chi_1^*}{\partial G}+\Psi_{\chi_2}(\chi_1^*,\chi_2^*)\dfrac{\partial\chi_2^*}{\partial G}=0,\end{cases}$$

que es incompatible. Pues reordenando, debería cumplirse la igualdad

$$\Psi_{\chi_1^*}(\chi_1^*,\chi_2^*)\left(\frac{\partial\chi_1^*}{\partial\alpha}-\frac{\partial\chi_1^*}{\partial G}\right)+\Psi_{\chi_2^*}(\chi_1^*,\chi_2^*)\left(\frac{\partial\chi_1^*}{\partial\alpha}-\frac{\partial\chi_1^*}{\partial G}\right)=0$$

y el miembro de la izquierda es estrictamente negativo.

2) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 > 0$. De (II.12) resulta la contradicción $\lambda_3 < 0$.

3) Si $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ y $\lambda_2 > 0$. De (II.11), (II.12) y (II.14) obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} \Psi_{\chi_1}(\chi_1^*,\chi_2^*)\dfrac{\partial\chi_1^*}{\partial\alpha}+\Psi_{\chi_2}(\chi_1^*,\chi_2^*)\dfrac{\partial\chi_2^*}{\partial\alpha} = \dfrac{\lambda_2 rG}{(1-\alpha)^2} \\ \Psi_{\chi_1}(\chi_1^*,\chi_2^*)\dfrac{\partial\chi_1^*}{\partial G}+\Psi_{\chi_2}(\chi_1^*,\chi_2^*)\dfrac{\partial\chi_2^*}{\partial G} = \dfrac{\lambda_2 r}{1-\alpha} \\ \dfrac{rG}{1-\alpha}-w_0 = 0, \end{array}\right.$$

que es incompatible. Como $\Psi_{\chi_1}(\chi_1^*,\chi_2^*),\Psi_{\chi_2}(\chi_1^*,\chi_2^*) > 0$, $\dfrac{\partial\chi_1^*}{\partial\alpha},\dfrac{\partial\chi_2^*}{\partial\alpha} < 0$ y $\dfrac{\partial\chi_1^*}{\partial G},\dfrac{\partial\chi_2^*}{\partial G} > 0$; de la primera y tercera ecuaciones deducimos que debería ser $\lambda_2 < 0$ (contrario a la restricción del problema) y, por otra parte, de la segunda y tercera resultaría $\lambda_2 > 0$.

4) Para las combinaciones de valores $\lambda_1,\lambda_3 > 0$ y $\lambda_2 = 0$; $\lambda_2,\lambda_3 > 0$ y $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 > 0$ no existe solución. Debería ser $w_0 = 0$, según (II.14) y (II.15).

5) Si $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ y $\lambda_1 > 0$. De (II.11), (II.12) y (II.13) resulta el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{\Psi_{\chi_1}(\chi_1^*,\chi_2^*)\dfrac{\partial\chi_1^*}{\partial\alpha}+\Psi_{\chi_2}(\chi_1^*,\chi_2^*)\dfrac{\partial\chi_2^*}{\partial\alpha}}{\Psi_{\chi_1}(\chi_1^*,\chi_2^*)\dfrac{\partial\chi_1^*}{\partial G}+\Psi_{\chi_2}(\chi_1^*,\chi_2^*)\dfrac{\partial\chi_2^*}{\partial G}} = \dfrac{\dfrac{\partial T_1^*}{\partial\alpha}+\dfrac{\partial T_2^*}{\partial\alpha}}{\dfrac{\partial T_1^*}{\partial G}+\dfrac{\partial T_2^*}{\partial G}} \\ T_1^*+T_2^* = R_0 \end{cases} \tag{II.16}$$

que nos proporciona posibles valores óptimos de α y G.

6) Si $\lambda_1,\lambda_2 > 0$ y $\lambda_3 = 0$. De (II.13) y (II.14) obtenemos la solución de esquina

$$\alpha = \frac{2w_0 + rR_0}{w_1 + w_2} \quad \text{y} \quad G = \frac{w_0}{r}\left(1 - \frac{2w_0 + rR_0}{w_1 + w_2}\right). \tag{II.17}$$

La solución óptima (α^*, G^*) será alguna de las del sistema (II.16) o la solución de esquina (II.17).

II.4.1. Ejemplo de aplicación

En éste y en los siguientes ejemplos de aplicación del capítulo, adoptaremos una función de bienestar social utilitarista generalizada de tipo logarítmico cuyo grado de concavidad permite incrementar los ingresos de las personas menos hábiles y, a la vez, preservar la eficiencia económica general. Con una función de bienestar social utilitarista generalizada de tipo exponencial el crecimiento económico se vería fuertemente afectado, ya que los tipos impositivos resultarían demasiado elevados para los individuos con un mayor nivel de productividad potencial w y sus perspectivas de remuneración neta serían menores (después de educarse), a causa de la progresividad impositiva.

Sea el modelo con los siguientes parámetros conocidos:

Función de bienestar social	$\Psi(\chi_1^*, \chi_2^*) = \ln \chi_1^* + \ln \chi_2^*$
Nivel de habilidad del individuo i	$w_i > w_0, i = 1,2$
Tipo de interés de descuento	r
Necesidades de recaudación	R_0

Solución:

Utilizando (II.5) y (II.6) y sus derivadas respecto a α y G, sustituimos en (II.16) y resulta el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha = 1 - \dfrac{4}{\left(\sum_{i=1}^{2} w_i\right) \sum_{i=1}^{2} \dfrac{1}{w_i}} \\ \alpha \sum_{i=1}^{2} w_i = r\left(R_0 + \dfrac{2G}{1-\alpha}\right) \end{cases}$$

Tomando los siguientes valores para los parámetros del modelo:

$w_0 = 875$ u.m.
$w_1 = 1.000$ u.m.
$w_2 = 2.000$ u.m.
$r = ln(1,07)$
$R_0 = 2.500$ u.m.

Obtenemos

$\alpha^* = 11,11\%$
$G^* = 1.078,53$ u.m.
$X_1^* = 13,57$ años
$X_2^* = 14,17$ años

y comprobamos que la solución de esquina, $\alpha = 63{,}97\%$ y $G = 4.659{,}40$ u.m., no es la óptima.

II.5. Colectivo formado por n individuos y el gobierno

En este modelo y siguiendo los postulados anteriores, consideramos una población formada por n individuos y el gobierno. Del colectivo, h individuos tienen un nivel de habilidad $w_i > w_0, i = 1,\ldots,h$ y para el resto $n-h$, resulta inferior a w_0.

Una vez los h individuos han fijado su tiempo de formación $X_i^*, i = 1,\ldots,h$, el gobierno determina los parámetros fiscales α y G. Con este objetivo, planteamos el problema de optimización:

$$\begin{cases} \max \Psi(\chi_1^*,\ldots,\chi_h^*,\chi_{h+1}^*,\ldots,\chi_n^*) \\ \qquad\qquad s.a. \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{h} T_i^* - (n-h)G \geq R_0 \\ w_0 - \dfrac{rG}{1-\alpha} \geq 0 \\ G \geq 0\ , \end{cases}$$

donde Ψ es la función de bienestar social seleccionada por el gobierno, $T_i^*, i = 1,\ldots,h$ las funciónes impositivas lineales, R_0 las necesidades de recaudación y $\chi_i^*, i = 1,\ldots,n$ la función de los ingresos óptimos del individuo i. El lagrangiano del problema de maximización de la función de bienestar social es

$$\Im(\lambda_i, \alpha, G) = \Psi(\chi_1^*, \ldots, \chi_h^*, \chi_{h+1}^*, \ldots, \chi_n^*) + \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^{h} T_i^* - (n-h)G - R_0 \right)$$
$$+ \lambda_2 (w_0 - \frac{rG}{1-\alpha}) + \lambda_3 G$$

y diferenciando respecto a cada una de las variables fiscales, α, G, y los multiplicadores de Kuhn-Tucker, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Las condiciones de primer orden que caracterizan la solución α^*, G^* son

$$\sum_{i=1}^{n} \Psi_{\chi_i^*} \frac{\partial \chi_i^*}{\partial \alpha} + \lambda_1 \sum_{i=1}^{h} \frac{\partial T_i^*}{\partial \alpha} - \frac{\lambda_2 r G}{(1-\alpha)^2} = 0 \tag{II.18}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Psi_{\chi_i^*} \frac{\partial \chi_i^*}{\partial G} + \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^{h} \frac{\partial T_i^*}{\partial G} - (n-h) \right) - \frac{\lambda_2 r}{1-\alpha} + \lambda_3 = 0 \tag{II.19}$$

$$\lambda_1 \left(R_0 + (n-h)G - \sum_{i=1}^{h} T_i^* \right) = 0 \tag{II.20}$$

$$\lambda_2 \left(\frac{rG}{1-\alpha} - w_0 \right) = 0 \tag{II.21}$$

$$-\lambda_3 G = 0 \tag{II.22}$$

$$\sum_{i=1}^{h} T_i^* - (n-h)G \geq R_0$$

$$w_0 - \frac{rG}{1-\alpha} \geq 0$$

$$G \geq 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0.$$

Analizando las posibles soluciones, según los valores de los multiplicadores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, resulta:

1) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. De (II.18) y (II.19), obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \Psi_{\chi_i}(\chi_1^*, \ldots, \chi_h^*, \chi_{h+1}^*, \ldots, \chi_n^*) \dfrac{\partial \chi_i^*}{\partial \alpha} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \Psi_{\chi_i}(\chi_1^*, \ldots, \chi_h^*, \chi_{h+1}^*, \ldots, \chi_n^*) \dfrac{\partial \chi_i^*}{\partial G} = 0, \end{cases}$$

que es incompatible. Pues reordenando, debería cumplirse la igualdad

$$\sum_{i=1}^{n} \Psi_{\chi_i}(\chi_1^*, \ldots, \chi_h^*, \chi_{h+1}^*, \ldots, \chi_n^*) \left(\frac{\partial \chi_i^*}{\partial \alpha} - \frac{\partial \chi_i^*}{\partial G} \right) = 0$$

y el miembro de la izquierda es estrictamente negativo.

2) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 > 0$. De (II.19), resulta la contradicción $\lambda_3 < 0$.

3) Si $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ y $\lambda_2 > 0$. De (II.18), (II.19) y (II.21) obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \Psi_{\chi_i}(\chi_1^*, \ldots, \chi_h^*, \chi_{h+1}^*, \ldots, \chi_n^*) \dfrac{\partial \chi_i^*}{\partial \alpha} = \dfrac{\lambda_2 r G}{(1-\alpha)^2} \\ \sum_{i=1}^{n} \Psi_{\chi_i}(\chi_1^*, \ldots, \chi_h^*, \chi_{h+1}^*, \ldots, \chi_n^*) \dfrac{\partial \chi_i^*}{\partial G} = \dfrac{\lambda_2 r}{1-\alpha} \\ \dfrac{rG}{1-\alpha} - w_0 = 0, \end{cases}$$

que es incompatible. Como $\Psi_{\chi_i}(\chi_1^*,\ldots,\chi_h^*,\chi_{h+1}^*,\ldots,\chi_n^*) > 0$, $\dfrac{\partial\chi_i^*}{\partial\alpha} < 0$ y $\dfrac{\partial\chi_i^*}{\partial G} > 0$ para $i = 1,\ldots,n$; de la primera y tercera ecuaciones deducimos que debería ser $\lambda_2 < 0$ (contrario a la restricción del problema) y, por otra parte, de la segunda y tercera resultaría $\lambda_2 > 0$.

4) Para las combinaciones de valores $\lambda_1,\lambda_3 > 0$ y $\lambda_2 = 0$; $\lambda_2,\lambda_3 > 0$ y $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 > 0$ no existe solución. Debería ser $w_0 = 0$, según (II.21) y (II.22).

5) Si $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ y $\lambda_1 > 0$. De (II.18), (II.19) y (II.20) resulta el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Psi_{\chi_i}(\chi_1^*,\ldots,\chi_h^*,\chi_{h+1}^*,\ldots,\chi_n^*)\frac{\partial\chi_i^*}{\partial\alpha}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Psi_{\chi_i}(\chi_1^*,\ldots,\chi_h^*,\chi_{h+1}^*,\ldots,\chi_n^*)\frac{\partial\chi_i^*}{\partial G}} = \dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{h}\frac{\partial T_i^*}{\partial\alpha}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{h}\frac{\partial T_i^*}{\partial G} - (n-h)} \\ \alpha\displaystyle\sum_{i=1}^{h} w_i = rR_0 + rG\left(\frac{h}{1-\alpha} + n - h\right) \end{cases} \tag{II.23}$$

que nos proporciona posibles valores óptimos de α y G.

6) Si $\lambda_1,\lambda_2 > 0$ y $\lambda_3 = 0$. De (II.20) y (II.21) obtenemos la solución de esquina

$$\alpha = \frac{nw_0 + rR_0}{(n-h)w_0 + \displaystyle\sum_{i=1}^{h} w_i} \quad \text{y} \quad G = \frac{w_0}{r}\left(1 - \frac{nw_0 + rR_0}{(n-h)w_0 + \displaystyle\sum_{i=1}^{h} w_i}\right). \tag{II.24}$$

La solución óptima (α^*, G^*) será alguna de las del sistema (II.23) o la solución de esquina (II.24).

II.5.1. Ejemplo de aplicación

Sea el modelo con los siguientes parámetros conocidos:

Función de bienestar social	$\Psi(\chi_1^*,\ldots,\chi_n^*) = \ln\chi_1^* + \ldots + \ln\chi_n^*$
Nivel de habilidad del individuo i	$w_i > w_0, i = 1,\ldots,h$
Tipo de interés de descuento	r
Necesidades de recaudación	R_0

Solución:

Utilizando (II.5) y (II.6) y sus derivadas respecto a α y G, sustituimos en (II.22) y resulta el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{(1-\alpha)h - rG\displaystyle\sum_{i=1}^{h}\frac{1}{w_i}}{\dfrac{(n-h)(1-\alpha)}{G} + r\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{w_i}} = \dfrac{\dfrac{(1-\alpha)^2}{r}\displaystyle\sum_{i=1}^{h} w_i - hG}{n-(n-h)\alpha} \\ \alpha\displaystyle\sum_{i=1}^{h} w_i = r\left(R_0 + \dfrac{hG}{1-\alpha} + (n-h)G\right) \end{array}\right.$$

Tomando los siguientes valores para los parámetros del modelo:

$w_0 = 875$ u.m.
250 individuos con nivel de habilidad $w_1 = 1.750$ u.m.
350 individuos con nivel de habilidad $w_2 = 2.000$ u.m.
150 individuos con nivel de habilidad $w_3 = 3.000$ u.m.
50 individuos con nivel de habilidad $w_4 = 4.000$ u.m.
200 individuos con nivel de habilidad inferior a w_0
$r = ln(1,07)$
$R_0 = 3.000.000$ u.m.

Obtenemos

$\alpha^* = 37{,}21\%$
$G^* = 4.633{,}26$ u.m.
$X_1^* = 10{,}56$ años
$X_2^* = 11{,}09$ años
$X_3^* = 12{,}32$ años
$X_4^* = 12{,}94$ años

y comprobamos que la solución de esquina, $\alpha = 54{,}93\%$ y $G = 5.828{,}87$ u.m., no es la óptima.

II.5.2. Casos particulares del modelo

Los dos siguientes modelos pueden considerarse como casos particulares del anterior:

1) El formado por dos individuos y el gobierno, en que un individuo tiene nivel de habilidad $w_1 > w_0$ y la del otro es $w_2 < w_0$. Basta tomar $n = 2$ y $h = 1$.

2) El formado por n individuos y el gobierno, en que todos los individuos tienen un nivel de habilidad $w_i > w_0, i = 1, \ldots, n$. Tomamos $h = 0$.

II.6. Colectivo con habilidades especificadas por una función densidad

Desarrollamos un modelo de un colectivo formado por un conjunto de individuos y el gobierno, siguiendo las hipótesis generales de los anteriores. Las habilidades de los individuos vienen dadas por una distribución de probabilidad $F(w)$, absolutamente continua, cuyo rango de valores está comprendido entre $\underline{\omega}$ (que puede ser cero) y $\overline{\omega}$

(que puede ser infinito). Una parte de la población, con nivel de habilidad $w < w_0$, sólo percibe la renta de garantía G.

Una vez los individuos han fijado su tiempo óptimo de formación X^*, el gobierno determina los parámetros fiscales α^* y G^* maximizando el bienestar social medio medible por la función $\Psi(\chi^*)$ seleccionada, sujeta a las necesidades de recaudación media R_0 y compatibilidad. Con este objetivo, planteamos el problema de optimización:

$$\begin{cases} \max \int_{\underline{\omega}}^{\overline{\omega}} \Psi(\chi^*)dF(w) \\ s.a. \\ \int_{w_0}^{\overline{\omega}} T^* dF(w) - \int_{\underline{\omega}}^{w_0} GdF(w) \geq R_0 \\ w_0 - \dfrac{rG}{1-\alpha} \geq 0 \\ G \geq 0\ , \end{cases}$$

donde Ψ es la función asociada al bienestar social seleccionada por el gobierno, T^* la función impositiva lineal progresiva, R_0 las necesidades de recaudación, χ^* la función de los ingresos óptimos del individuo y $\underline{\omega}$ el nivel inferior de habilidades de la población (que puede ser cero), con $F(\underline{\omega}) = 0$. El lagrangiano del problema de maximización de la función de bienestar social es

$$\begin{aligned}\Im(\lambda_i, \alpha, G) = \int_{\underline{\omega}}^{\overline{\omega}} \Psi(\chi^*)dF(w) + \lambda_1\left(\int_{w_0}^{\overline{\omega}} T^* dF(w) - R_0 - \int_{\underline{\omega}}^{w_0} GdF(w)\right) \\ + \lambda_2(w_0 - \frac{rG}{1-\alpha}) + \lambda_3 G\end{aligned}$$

y, diferenciando respecto a cada una de las variables fiscales, α, G, y los multiplicadores de Kuhn-Tucker, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Las condiciones de primer orden que caracterizan la solución

α^*, G^* son

$$\int_{\underline{\omega}}^{\overline{\omega}} \Psi'(\chi^*)\frac{\partial \chi^*}{\partial \alpha} dF(w) + \lambda_1 \int_{w_0}^{\overline{\omega}} \frac{\partial T^*}{\partial \alpha} dF(w) - \frac{\lambda_2 r G}{(1-\alpha)^2} = 0 \tag{II.25}$$

$$\int_{\underline{\omega}}^{\overline{\omega}} \Psi'(\chi^*)\frac{\partial \chi^*}{\partial G} dF(w) + \lambda_1 \left(\int_{w_0}^{\overline{\omega}} \frac{\partial T^*}{\partial G} dF(w) - F(w_0) \right) - \frac{\lambda_2 r}{1-\alpha} + \lambda_3 = 0 \tag{II.26}$$

$$\lambda_1 \left(\int_{w_0}^{\overline{\omega}} T^* dF(w) - R_0 - GF(w_0) \right) = 0 \tag{II.27}$$

$$\lambda_2 \left(\frac{rG}{1-\alpha} - w_0 \right) = 0 \tag{II.28}$$

$$-\lambda_3 G = 0 \tag{II.29}$$

$$\int_{w_0}^{\overline{\omega}} T^* dF(w) - \int_{\underline{\omega}}^{w_0} G dF(w) \geq R_0$$

$$w_0 - \frac{rG}{1-\alpha} \geq 0$$

$$G \geq 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0.$$

Analizando las posibles soluciones, según los valores de los multiplicadores, resulta:

1) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. De (II.25) y (II.26) obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \int_{\underline{\omega}}^{\overline{\omega}} \Psi'(\chi^*) \dfrac{\partial \chi^*}{\partial \alpha} dF(w) = 0 \\ \int_{\underline{\omega}}^{\overline{\omega}} \Psi'(\chi^*) \dfrac{\partial \chi^*}{\partial G} dF(w) = 0, \end{cases}$$

que por ser $\Psi'(\chi^*) > 0$ y $F(w)$ una función de distribución de probabilidad, se transforma en el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \chi^*}{\partial \alpha} = 0 \\ \dfrac{\partial \chi^*}{\partial G} = 0, \end{cases}$$

que es incompatible.

2) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 > 0$. De (II.26) resulta la contradicción $\lambda_3 < 0$. Al ser $\dfrac{\partial \chi^*}{\partial G} > 0$, $\Psi'(\chi^*) > 0$ y $F(w)$ una función de distribución de probabilidad.

3) Si $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ y $\lambda_2 > 0$. De (II.25), (II.26) y (II.28) obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \int_{\underline{\omega}}^{\overline{\omega}} \Psi'(\chi^*) \dfrac{\partial \chi^*}{\partial \alpha} dF(w) = \dfrac{\lambda_2 r G}{(1-\alpha)^2} \\ \int_{\underline{\omega}}^{\overline{\omega}} \Psi'(\chi^*) \dfrac{\partial \chi^*}{\partial G} dF(w) = \dfrac{\lambda_2 r}{1-\alpha} \\ \dfrac{rG}{1-\alpha} - w_0 = 0 \end{cases}$$

que es incompatible. Como $\Psi'(\chi^*) > 0$, $\dfrac{\partial \chi^*}{\partial \alpha} < 0$, $\dfrac{\partial \chi^*}{\partial G} > 0$ y $F(w)$ es una función de distribución de probabilidad; de la primera y tercera ecuaciones deducimos que debería ser $\lambda_2 < 0$ (contrariamente a la restricción del problema) y, por otra parte, de la segunda y tercera resultaría $\lambda_2 > 0$.

4) Para las combinaciones de valores $\lambda_1, \lambda_3 > 0$ y $\lambda_2 = 0$; $\lambda_2, \lambda_3 > 0$ y $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ no existe solución. Debería ser $w_0 = 0$, según (II.28), (II.29) y cumplir las otras restricciones.

5) Si $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ y $\lambda_1 > 0$. De (II.25), (II.26) y (II.27) resulta el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{\int_{\underline{\omega}}^{\overline{\omega}} \Psi'(\chi^*) \dfrac{\partial \chi^*}{\partial \alpha} dF(w)}{\int_{\underline{\omega}}^{\overline{\omega}} \Psi'(\chi^*) \dfrac{\partial \chi^*}{\partial G} dF(w)} = \dfrac{\int_{w_0}^{\overline{\omega}} \dfrac{\partial T^*}{\partial \alpha} dF(w)}{\int_{w_0}^{\overline{\omega}} \dfrac{\partial T^*}{\partial G} dF(w) - F(w_0)} \\ \alpha \int_{w_0}^{\overline{\omega}} w dF(w) = rR_0 + \dfrac{rG(1 - \alpha F(w_0))}{1 - \alpha}, \end{cases} \qquad \text{(II.30)}$$

que nos proporciona posibles valores óptimos de α y G.

6) Si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ y $\lambda_3 = 0$. De (II.27) y (II.28) obtenemos la solución

$$\alpha = \frac{w_0 + rR_0}{w_0 F(w_0) + \int_{w_0}^{\overline{\omega}} w dF(w)} \text{ y } G = \frac{w_0}{r}\left(1 - \frac{w_0 + rR_0}{w_0 F(w_0) + \int_{w_0}^{\overline{\omega}} w dF(w)}\right). \qquad \text{(II.31)}$$

La solución óptima α^*, G^* será alguna de las del sistema (II.30) o la solución de esquina (II.31).

II.6.1. Ejemplos de aplicación

En Mirrlees (1971), Atkinson y Stiglitz (1980) y García (2000) se expone que los modelos probabilísticos teóricos que mejor se ajustan a los valores observados en las distribuciones de la renta y los niveles de habilidad de los individuos son las de Pareto, log-normal y exponencial. Las tres tienen una forma similar y, principalmente, se diferencian en el crecimiento más o menos intenso en las habilidades más bajas y en el crecimiento más o menos relentizado de las habilidades medio-altas y altas. Nosotros adoptaremos la exponencial, por ser la que más se aproxima a la observada, tal como se justifica en los estudios realizados por Garcia (2000).

En la maximización del bienestar social esperado (medio), adoptaremos una función utilitarista generalizada de tipo logarítmico cuyo grado de concavidad permite incrementar la satistacción de los más débiles o menos hábiles y, a la vez, mantiene un alto grado de eficiencia en el producto social generado.

De todos modos, hemos de subrayar que estos casos son meremente ilustrativos y no pretenden ser realistas.

a) Sea el modelo con los siguientes parámetros conocidos:

Función asociada de bienestar social	$\Psi(\chi) = \ln(\chi)$
Función densidad de las habilidades	$f(w) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda(w-\omega)) & \text{si } w \geq \omega \\ 0 & \text{si } w < \omega \end{cases}$
Tipo de interés de descuento	r
Necesidades de recaudación media	R_0
Nivel de habilidad mínimo de formación	w_0

Solución:

Utilizando (II.5) y (II.6) y sus derivadas respecto a α y G, sustituimos en (II.30) y resulta el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{(1-\alpha) - rG\displaystyle\int_{w_0}^{\infty} \frac{f(w)}{w} dw}{\displaystyle\int_{w_0}^{\infty} \frac{f(w)}{w} dw + \frac{(1-\alpha)F(w_0)}{rG}} = \dfrac{(1-\alpha)^2 \displaystyle\int_{w_0}^{\infty} wf(w)dw - rG(1-F(w_0))}{1-\alpha F(w_0)} \\ \alpha \displaystyle\int_{w_0}^{\infty} wf(w)dw = rR_0 + \frac{rG(1-\alpha F(w_0))}{1-\alpha} \end{cases} \quad \text{(II.32)}$$

Tomando los siguientes valores para los parámetros del modelo:

$\omega = 750$ u.m.
$w_0 = 850$ u.m.
$r = \ln 1,07$
$R_0 = 4000$ u.m.
$\lambda = \frac{1}{2000}$

Obtenemos

$\alpha^* = 32,73\%$
$G^* = 6.230,95$ u.m.

y comprobamos que la solución de esquina, $\alpha = 40,71\%$ y $G = 7.448,15$ u.m., no es la óptima.

b) Sea el modelo con los siguientes parámetros conocidos:

Función asociada de bienestar social	$\Psi(\chi) = \ln(\chi)$
Función densidad de las habilidades	$f(w) = \begin{cases} \frac{(\mu-1)\omega^{\mu-1}}{w^{\mu}} & \text{si } w \geq \omega \\ 0 & \text{si } w < \omega \end{cases}$
Tipo de interés de descuento	r
Necesidades de recaudación media	R_0
Nivel de habilidad mínimo de formación	w_0

Solución:

Tomando los siguientes valores para los parámetros del modelo:

$\omega = 750$ u.m.
$w_0 = 900$ u.m.
$r = \ln 1,07$
$R_0 = 7.500$ u.m.
$\mu = 2,51$

y utilizando el sistema de ecuaciones (II.32), resulta que

$\alpha^* = 47,57\%$
$G^* = 3.982,31$ u.m.

Posteriormente, comprobamos que la solución de esquina, $\alpha = 62,34\%$ y $G = 11.138,59$ u.m., no es la óptima.

CAPÍTULO III

Impuestos lineales con incertidumbre en el tiempo de formación

En el capítulo anterior hemos presentado un modelo en el cual los ingresos brutos de los individuos dependían de su nivel de habilidades y de sus decisiones sobre el tiempo de formación, después de su escolarización obligatoria, y donde el gobierno exigía un impuesto lineal sobre la renta de naturaleza redistributiva.

En la vida real al individuo se le presentan diversos factores de incertidumbre y muchas de sus planificaciones iniciales, en el medio y largo plazos, no se cumplen por factores aleatorios, favorables o adversos, que no puede controlar. También, la incertidumbre puede darse, muchas veces, en el tiempo de formación, deseado por el individuo, es decir, las personas no pueden saber con exactitud cuál será su tiempo real de formación, por factores aleatorios o estados de la naturaleza incontrolables. La ausencia de incertidumbre en el tiempo de formación real de los invividuos supone una clara limitación de la representación en la toma de deciciones óptimas de los agentes económicos.

Si las rentas brutas del individuo dependen de su nivel de habilidad, esfuerzo y de un componente aleatorio, que incremente o disminuya el tiempo real de formación; el gobierno puede estar interesado en asegurar la renta de los individuos a través de un impuesto que financie la compensación de sucesos aleatorios desfavorables a su tiempo de formación. El *trade off* eficiencia-seguro y las necesidades de recaudación del gobierno generan problemas de incentivos fiscales que consideramos interesantes de modelizar y analizar.

Seguidamente, en la línea y con algunas hipótesis del capítulo anterior, pasamos a tratar los tipos impositivos lineales aplicados sobre la parte de la renta no exenta, en los cuales el tiempo real de formación del individuo puede tener un componente aleatorio.

III.1. Hipótesis iniciales

Utilizaremos los mismos modelos e hipótesis del capítulo anterior, con las siguientes diferencias:

1) El tiempo real de formación podrá presentar componente aleatorio. Inicialmente el individuo planifica un tiempo de formación t, pero el tiempo real dedicado será diferente (menor o mayor que t).

2) En vez de una función de los ingresos netos descontados de los individuos al tiempo de iniciar su formación, utilizaremos funciones de utilidad y desutilidad esperada de los ingresos netos y del tiempo dedicado a la formación.

3) El nivel de habilidad w_0, a partir del cual los individuos se forman, se fijará en cada aplicación correspondiente del modelo.

Las demás hipótesis y características se irán añadiendo en los distintos apartados del capítulo.

III.2. La utilidad esperada de los ingresos netos del individuo

Consideraremos un individuo cuyo tiempo de formación ξ depende de la variable tiempo t y de un parámetro θ: $\xi(t,\theta) = t(1+\theta)$. El individuo decide el valor de la variable t, pero no del parámetro θ, sobre el cual no tiene ningún control, y es desconocido en el momento de tomar la decisión. Formalmente, tomaremos $t \in R_+$, donde R_+ es el conjunto de los números reales positivos y el cero, y θ es una variable aleatoria real continua, con función de distribución H y esperanza matemática $E(\theta) > -1$. De acuerdo con esta formalización, para cada elección de t el individuo tendrá un tiempo real de formación $\xi(t,\theta)$; que también será una variable aleatoria, al serlo θ.

Supondremos que los ingresos salariales netos aleatorios η del individuo, al igual que en el capítulo anterior, dependen de su nivel de habilidad innata w, del tiempo real de formación ξ, del tipo impositivo lineal α y de la renta de garantía G. Concretamente,

$$\eta = \eta(t,\theta) = (1-\alpha)(1+\theta)tw + G. \tag{III.1}$$

Admitiremos que el individuo posee una relación de preferencia $\succeq$ sobre el conjunto de todos sus ingresos netos (inciertos) posibles: $\Omega = \{\eta | \eta = \eta(t,\theta) \text{ para algún } t \in R_+\}$. Asimismo, supondremos que esta relación de preferencia se puede representar mediante una función de utilidad $\hat{U}$, de forma que: $\forall(\eta,\eta') \in \Omega^2, \eta \succeq \eta' \Leftrightarrow \hat{U}(\eta) \geq \hat{U}(\eta')$.

Supondremos, finalmente, que la relación de preferencia $\succeq$ no sólo es representable por una función de utilidad, sino por una función de utilidad de von Neumann-Morgenstern, es decir, por una función de utilidad con la forma de la utilidad esperada. Esto implica la existencia de una función u, real de variable real, que asigna a cada ingreso neto seguro n una utilidad $u(n)$, de manera que la utilidad de un ingreso neto incierto η puede ser evaluada de la forma:

$$\hat{U}(\eta) = \hat{U}(\eta(t,\theta)) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} u((1-\alpha)(1+x)tw + G)dH = E(u(\eta(t,\theta))),$$

donde $E(.)$ designa la esperanza matemática de la variable aleatoria correspondiente y $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$, con $\theta_1 > -1$ y θ_2, que puede ser ∞. A la función u la supondremos al menos dos veces derivable, creciente y estrictamente cóncava.

La función de utilidad u está definida sobre ingresos netos seguros, a diferencia de la función de utilidad $\hat{U}$, que lo está sobre las variables aleatorias ingreso neto del conjunto Ω. También consideraremos la función de utilidad U definida sobre el conjunto R_+, de esta forma: $t \mapsto U(t) = \hat{U}(\eta(t,\theta))$. Se verifica:

$$\forall (t,t') \in R_+^2, \eta(t,\theta) \geq \eta(t',\theta) \Leftrightarrow \hat{U}(\eta(t,\theta)) \geq \hat{U}(\eta(t',\theta) \Leftrightarrow U(t) \geq U(t').$$

III.3. El problema del individuo

El individuo elegirá un tiempo planificado óptimo de formación t^*, teniendo en cuenta la incertidumbre, maximizando la función $R(t)$ resultante de la utilidad esperada de los ingresos netos y de la desutilidad esperada en el esfuerzo de formación. Concretamente, se plantea el siguiente problema de optimización:

$$\begin{gathered} \max_{t \in R_+} R(t) = \max_{t \in R_+}(U(t) - btE(1+\theta)) \\ s.a. \\ t \geq 0, \end{gathered}$$

donde $b > 0$ es un parámetro real, y $E(.)$ el operador esperanza matemática.

La condición necesaria de primer orden para la existencia de un máximo $t = t^*$ en R_+ viene dada por

$$R'(t) = E(u'(1-\alpha)(1+\theta)w) - bE(1+\theta) = 0$$

que, finalmente, podemos expresar en la forma

$$E(u'(1+\theta)) = \frac{bE(1+\theta)}{w(1-\alpha)}. \tag{III.2}$$

La condición resulta también suficiente, ya que

$$R''(t^*) = E(u''(1-\alpha)^2(1+\theta)^2w^2)|_{t=t^*} = w^2(1-\alpha)^2E(u''(1+\theta)^2)|_{t=t^*} < 0.$$

Proposición III.3.1. *El problema de optimización tiene una solución interior en* R_+ *si* $u'(G) > \dfrac{b}{(1-\alpha)w}$.

Demostración. Calculando el valor de $R'(t)$ para $t = 0$:

$$R'(0) = E(u'(1-\alpha)(1+\theta)w)|_{t=0} - bE(1+\theta) = E(1+\theta)((1-\alpha)wu'(G) - b).$$

Como $E(1+\theta) > 0$, de $R'(0) > 0$ resulta la condición □

Diferenciando (III.2) respecto a α:

$$w\Big((1-\alpha)\frac{\partial t^*}{\partial \alpha} - t^*\Big)E(u''(1+\theta)^2)|_{t=t^*} = \frac{bE(1+\theta)}{w(1-\alpha)^2}$$

resulta

$$\frac{\partial t^*}{\partial \alpha} = \frac{bE(1+\theta)}{w^2(1-\alpha)^3 E(u''((1+\theta)^2)|_{t=t^*}} + \frac{t^*}{1-\alpha}. \tag{III.3}$$

.

Diferenciando (III.2) respecto a G:

$$(1-\alpha)w\frac{\partial t^*}{\partial G}E(u''(1+\theta)^2)|_{t=t^*} + E(u''(1+\theta))|_{t=t^*} = 0$$

resulta

$$\frac{\partial t^*}{\partial G} = -\frac{E(u''(1+\theta))|_{t=t^*}}{w(1-\alpha)E(u''(1+\theta)^2)|_{t=t^*}}. \tag{III.4}$$

Seguidamente calculamos $\frac{\partial R(t^*)}{\partial \alpha}$ y $\frac{\partial R(t^*)}{\partial G}$, que seran utilizados posteriormente, teniendo en cuenta la condición (III.2):

$$\begin{aligned}\frac{\partial R(t^*)}{\partial \alpha} &= E(u'|_{t=t^*}(-(1+\theta)wt^* + (1-\alpha)(1+\theta)w\frac{\partial t^*}{\partial \alpha}) - bE(1+\theta)\frac{\partial t^*}{\partial \alpha} \\ &= w\Big((1-\alpha)\frac{\partial t^*}{\partial \alpha} - t^*\Big)E(u'(1+\theta))|_{t=t^*} - bE(1+\theta)\frac{\partial t^*}{\partial \alpha} \\ &= w\Big((1-\alpha)\frac{\partial t^*}{\partial \alpha} - t^*\Big)\frac{bE(1+\theta)}{w(1-\alpha)} - bE(1+\theta)\frac{\partial t^*}{\partial \alpha} \\ &= -\frac{bt^*E(1+\theta)}{1-\alpha}\end{aligned} \tag{III.5}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial R(t^*)}{\partial G} &= E(u'\Big(w(1-\alpha)(1+\theta)\frac{\partial t^*}{\partial G} + 1\Big))|_{t=t^*} - bE(1+\theta))\frac{\partial t^*}{\partial G} \\ &= w(1-\alpha)\frac{\partial t^*}{\partial G}E(u'|_{t=t^*}(1+\theta)) + E(u')|_{t=t^*} - bE(1+\theta))\frac{\partial t^*}{\partial G} \\ &= \Big(w(1-\alpha)\frac{\partial t^*}{\partial G}\Big)\frac{bE(1+\theta)}{w(1-\alpha)} + E(u')|_{t=t^*} - bE(1+\theta))\frac{\partial t^*}{\partial G} \\ &= E(u')|_{t=t^*}.\end{aligned} \tag{III.6}$$

III.3.1. Caso particular del tiempo de formación determinista

Tomando $\theta = 0$, las igualdades (III.1) y (III.2) quedan expresadas en la forma:

$$\eta = \eta(t) = (1-\alpha)tw + G$$

$$u'|_{t=t^*} = \frac{b}{(1-\alpha)w}.$$

III.4. Colectivo formado por un individuo y el gobierno

Sea un individuo con nivel de habilidad $w_1 \geq w_0$, que ha fijado su tiempo de formación óptimo inicial para $t = t^*$. Seguidamente el gobierno determina los parámetros fiscales α^* y G^*, maximizando la función de bienestar social seleccionada $\Psi(R(t^*))$ sujeta a las restricciones de recaudación esperada necesaria y compatibilidad. Con este objetivo, planteamos el problema de optimización:

$$\left\{\begin{array}{c} \max \Psi(R(t^*)) \\ s.a. \\ \alpha w t^* E(1+\theta) - G \geq R_0 \\ u'(G) \geq \dfrac{b}{(1-\alpha)w_1} \end{array}\right. ,$$

siendo R_0 la recaudación esperada; α el tipo impositivo lineal; G la renta de garantía y exenta del impuesto, $R(t^*)$ la utilidad-desutilidad esperada máxima del individuo en función de α y G; θ la variable aleatoria asociada al tiempo real de formación, con función de distribución de probabilidad H y w_0 el nivel mínimo de habilidad, a partir del cual el individuo recibe formación. El lagrangiano del problema de maximización es

$$\Im(\lambda_1,\lambda_2,\alpha,G) = \Psi(R(t^*)) \; + \lambda_1(\alpha w_1 t^* E(1+\theta) - G - R_0) + \lambda_2\left(u'(G) - \frac{b}{(1-\alpha)w_1}\right)$$

y diferenciando respecto a cada una de las variables fiscales, α, G, y los multiplicadores de Kuhn-Tucker, λ_1, λ_2 y teniendo en cuenta (III.2), (III.3) y (III.4), las condiciones de primer orden que caracterizan la solución α^*, G^* son

$$\Psi'(R(t^*))\frac{\partial R(t^*)}{\partial \alpha} + \lambda_1 w_1 E(1+\theta)\left(t^* + \alpha\frac{\partial t^*}{\partial \alpha}\right) - \frac{\lambda_2 b}{(1-\alpha)^2 w_1} = 0 \qquad \text{(III.7)}$$

$$\Psi'(R(t^*))\frac{\partial R(t^*)}{\partial G} + \lambda_1\left(w_1 E(1+\theta)\alpha\frac{\partial t^*}{\partial G} - 1\right) + \lambda_2 u''(G) = 0 \qquad \text{(III.8)}$$

$$\lambda_1(R_0 + G - \alpha w_1 t^* E(1+\theta)) = 0 \qquad \text{(III.9)}$$

$$\lambda_2\left(\frac{b}{(1-\alpha)w_1} - u'(G)\right) = 0 \qquad \text{(III.10)}$$

$$\alpha w_1 t^* E(1+\theta) - G \geq R_0$$

$$u'(G) \geq \frac{b}{(1-\alpha)w_1}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \geq 0.$$

Analizando las posibles soluciones, según los valores del los multiplicadores λ_1, λ_2, tenemos:

1) Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, resulta el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R(t^*)}{\partial \alpha} = 0 \\ \dfrac{\partial R(t^*)}{\partial G} = 0 \end{cases}$$

que es incompatible, como podemos comprobar utilizando (III.5) y (III.6).

2) La combinación $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 > 0$ no es posible. Si $\lambda_1 = 0$, de (III.7) resulta $\lambda_2 < 0$.

3) Para $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, de (III.9) y (III.10) resulta el sistema de ecuaciones en las variables α y G:

$$\begin{cases} G = \alpha w_1 t^* E(1+\theta) - R_0 \\ u'(G) = \dfrac{b}{(1-\alpha) w_1} \end{cases} \tag{III.11}$$

que si es compatible. Los valores obtenidos para α y G nos proporcionan posibles soluciones del problema de optimización.

4) Para $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 = 0$, de (III.7), (III.8) y (III.9) resulta el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{\dfrac{\partial R(t^*)}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial R(t^*)}{\partial G}} = \dfrac{w_1 E(1+\theta)\left(t^* + \alpha \dfrac{\partial t^*}{\partial \alpha}\right)}{w_1 E(1+\theta)\alpha \dfrac{\partial t^*}{\partial G} - 1} \\ \alpha w_1 t^* E(1+\theta) - G = R_0 \end{cases} \tag{III.12}$$

cuyos valores en α y G nos proporcionan posibles soluciones del problema de optimización.

Los parámetros fiscales óptimos α^* y G^* los obtenemos de (III.11) y (III.12), junto con las expresiones (III.1), (III.2), (III.5) y (III.6). De todas las soluciones factibles del problema de optimización deberemos seleccionar la que cumple la condición de máximo.

Para el caso de no aleatoriedad en el tiempo de formación basta tomar $\theta = 0$ en las expresiones (III.1), (III.2), (III.5), (III.6), (III.11) y (III.12).

III.4.1. Ejemplo de aplicación del modelo con aleatoriedad

Sea un individuo y el gobierno con los siguientes valores para los parámetros del modelo:

Nivel de habilidad mínimo formación	$w_0 = w_1$
Nivel de habilidad del individuo	$w_1 = 2.000$ u.m.
Recaudación esperada del gobierno	$R_0 = 1.500$ u.m.
Función densidad de la variable aleatoria θ	$h(x) = \begin{cases} 4e^{-4x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
Función de utilidad de los ingresos netos	$u(\eta) = \eta - \dfrac{\eta^2}{100000}$
Valor de b para la función $R(t)$	$b = 800$
Función de bienestar social	$\Psi(R(t))$

Solución:

Obtenemos los siguientes valores:

$t^* = 11,60$ años
$\alpha^* = 6,64\%$
$G^* = 425,70$ u.m.

III.4.2. Ejemplo de aplicación del modelo sin aleatoriedad

Sea un individuo y el gobierno con los siguientes valores para los parámetros del modelo:

Nivel de habilidad mínimo de formación	$w_0 = w_1$
Nivel de habilidad del individuo	$w_1 = 2.000$ u.m.
Recaudación del gobierno	$R_0 = 1.500$ u.m.
Función de utilidad de los ingresos netos	$u(\eta) = \eta - \dfrac{\eta^2}{100000}$
Valor de b para la función $R(t)$	$b = 800$
Función de bienestar social	$\Psi(R(t))$

Solución:

Obtenemos los valores

$t^* = 15,75$ años
$\alpha^* = 0,00\%$
$G^* = -1.500$ u.m.

III.5. Colectivo formado por dos individuos y el gobierno

A partir de aquí, a las hipótesis generales del modelo añadimos la siguiente: *la renta de garantía G no puede ser negativa*.

En este modelo los niveles de habilidad de los individuos son $w_i, i = 1,2$ y suponemos, en principio, que $w_0 \leq w_1 < w_2$. Los individuos fijan su tiempo de formación óptimo inicial $t_i^*, i = 1,2$. Posteriormente, el gobierno debe determinar los parámetros fiscales α^* y G^* maximizando la función de bienestar social seleccionada $\Psi(R(t_1^*), R(t_2^*))$ sujeta a las restricciones de recaudación y compatibilidad. Con este objetivo, planteamos el problema de optimización:

$$
\begin{cases}
\max \Psi(R(t_1^*), R(t_2^*)) \\
s.a. \\
\alpha E(1+\theta) \sum_{i=1}^{2} w_i t_i^* - 2G \geq R_0 \\
u'(G) \geq \dfrac{b}{(1-\alpha) w_1} \\
G \geq 0,
\end{cases}
$$

siendo R_0 la recaudación esperada; α el tipo impositivo lineal; G la renta de garantía y exenta del impuesto, $R(t_i^*), i = 1,2$ la utilidad-desutilidad esperada máxima del individuo i en función de α y G; θ la variable aleatoria asociada al tiempo real de formación, con función de distribución de probabilidad H y w_0 el nivel mínimo de habilidad, a partir del cual los individuos reciben formación. El lagrangiano del problema de maximización es

$$
\begin{aligned}
\Im(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \alpha, G) = \Psi(R(t_1^*), R(t_2^*)) + \lambda_1 \left(\alpha E(1+\theta) \sum_{i=1}^{2} w_i t_i^* - 2G - R_0 \right) \\
+ \lambda_2 \left(u'(G) - \frac{b}{(1-\alpha) w_1} \right) + \lambda_3 G
\end{aligned}
$$

y diferenciando respecto a cada una de las variables fiscales, α, G, y los multiplicadores de Kuhn-Tucker, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Teniendo en cuenta (III.2), (III.3) y (III.4), las condiciones de primer orden que caracterizan la solución α^*, G^* son

$$
\sum_{i=1}^{2} \Psi_{R(t_i^*)} \frac{\partial R(t_i^*)}{\partial \alpha} + \lambda_1 E(1+\theta) \sum_{i=1}^{2} w_i \left(t_i^* + \alpha \frac{\partial t_i}{\partial \alpha} \right) - \frac{\lambda_2 b}{(1-\alpha)^2 w_1} = 0 \tag{III.13}
$$

$$
\sum_{i=1}^{2} \Psi_{R(t_i^*)} \frac{\partial R(t_i^*)}{\partial G} + \lambda_1 \left(\alpha E(1+\theta) \sum_{i=1}^{2} w_i \frac{\partial t_i^*}{\partial G} - 2 \right) + \lambda_2 u''(G) + \lambda_3 = 0 \tag{III.14}
$$

$$\lambda_1\left(R_0 + 2G - \alpha E(1+\theta)\sum_{i=1}^{2} w_i t_i^*\right) = 0 \qquad \text{(III.15)}$$

$$\lambda_2\left(\frac{b}{(1-\alpha)w_1} - u'(G)\right) = 0 \qquad \text{(III.16)}$$

$$-\lambda_3 G = 0 \qquad \text{(III.17)}$$

$$\alpha E(1+\theta)\sum_{i=1}^{2} w_i t_i^* - 2G \geq R_0$$

$$u'(G) \geq \frac{b}{(1-\alpha)w_1}$$

$$G \geq 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0.$$

Seguidamente analizamos las posibles soluciones del problema de optimización para las distintas posibilidades en los valores de los parámetros:

1) Para la combinación $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, de (III.13), (III.14), (III.15), (III.16) y (III.17) resulta el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{2} \Psi_{R(t_i^*)} \dfrac{\partial R(t_i^*)}{\partial \alpha} = 0 \\ \sum_{i=1}^{2} \Psi_{R(t_i^*)} \dfrac{\partial R(t_i^*)}{\partial G} = 0 \end{cases}$$

incompatible, como comprobamos utilizando (III.5) y (III.6).

2) La combinación $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2, \lambda_3 > 0$ no es posible. Para $\lambda_1 = 0$, de la igualdad (III.13) resulta que $\lambda_2 < 0$.

3) En la combinación $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_1, \lambda_3 > 0$, de (III.15) y (III.17) resulta

$$G = 0 \text{ y } \alpha = \frac{R_0}{E(1+\theta)\sum_{i=1}^{2} w_i t_i^*}, \tag{III.18}$$

una posible solución del problema de optimización.

4) Para la combinación $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ y $\lambda_3 = 0$, de (III.15) y (III.16) resulta el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha E(1+\theta)\sum_{i=1}^{2} w_i t_i^* - 2G = R_0 \\ u'(G) = \dfrac{b}{(1-\alpha)w_1} \end{cases} \tag{III.19}$$

y los valores obtenidos para las variables α y G nos proporcionan posibles soluciones del problema de optimización.

5) En la combinación $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$, de (III.15), (III.16) y (III.17) resulta un sistema de ecuaciones incompatible.

6) Para la combinación $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, de (III.13), (III.14) y (III.15) resulta el sistema de ecuaciones:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\sum_{i=1}^{2} \Psi_{R(t_i^*)} \dfrac{\partial R(t_i^*)}{\partial \alpha}}{\sum_{i=1}^{2} \Psi_{R(t_i^*)} \dfrac{\partial R(t_i^*)}{\partial G}} = \dfrac{E(1+\theta)\sum_{i=1}^{2} w_i \left(t_i^* + \alpha \dfrac{\partial t_i^*}{\partial \alpha} \right)}{\alpha E(1+\theta)\sum_{i=1}^{2} w_i \dfrac{\partial t_i^*}{\partial G} - 2} \\
\alpha E(1+\theta)\sum_{i=1}^{2} w_i t_i^* - 2G = R_0
\end{cases}
\qquad \text{(III.20)}
$$

y los valores en α y G nos proporcionan posibles soluciones para el problema de optimización.

7) La combinación $\lambda_2 > 0$ y $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ no es posible. Si $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, de (III.13) deducimos que debe ser $\lambda_2 < 0$.

8) La combinación $\lambda_3 > 0$ y $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ no es posible. Si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, de (III.14) deducimos que debe ser $\lambda_3 < 0$.

Los parámetros fiscales óptimos α^* y G^* los obtenemos de (III.18), (III.19) y (III.20), junto con las expresiones (III.1), (III.2), (III.5) y (III.6). De todas las soluciones factibles del problema de optimización deberemos seleccionar la que cumple la condición de máximo.

Para el caso de no aleatoriedad en el tiempo de formación basta tomar $\theta = 0$ en las expresiones (III.1), (III.2), (III.5), (III.6), (III.18), (III.19) y (III.20).

III.5.1. Ejemplo de aplicación del modelo con aleatoriedad

Sean dos individuos y el gobierno con los siguientes valores para los parámetros del modelo:

Nivel de habilidad mínimo de formación	$w_0 = w_1$
Nivel de habilidad del primer individuo	$w_1 = 2.000$ u.m.
Nivel de habilidad del segundo individuo	$w_2 = 4.000$ u.m.
Recaudación esperada del gobierno	$R_0 = 11.500$ u.m.
Función de utilidad de los ingresos netos	$u(\eta) = \eta - \frac{\eta^2}{100.000}$
Función densidad de la variable aleatoria θ	$h(x) = \begin{cases} 4e^{-4x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
Valor de b para las funciones $R_i(t), i = 1,2$	$b = 800$
Función de bienestar social	$\Psi(R_1(t), R_2(t)) = \sum_{i=1}^{2} \ln(R_i(t))$

Solución:

Obtenemos los valores

$t_1^* = 10,34$ años
$t_2^* = 8,65$ años
$\alpha^* = 25,63\%$
$G^* = 3.107,20$ u.m.

III.5.2. Ejemplo de aplicación del modelo sin aleatoriedad

Sean dos individuos y el gobierno con los siguientes valores para los parámetros del modelo:

Nivel de habilidad mínimo de formación	$w_0 = w_1$
Nivel de habilidad del primer individuo	$w_1 = 2.000$ u.m.
Nivel de habilidad del segundo individuo	$w_2 = 4.000$ u.m.
Recaudación esperada del gobierno	$R_0 = 11.500$ u.m.
Función de utilidad de los ingresos netos	$u(\eta) = \eta - \dfrac{\eta^2}{100.000}$
Valor de b para las funciones $R_i(t), i = 1,2$	$b = 800$
Función de bienestar social	$\Psi(R_1(t), R_2(t)) = \sum_{i=1}^{2} \ln(R_i(t))$

Solución:

Obtenemos los valores

$t_1^* = 14,54$ años
$t_2^* = 11,20$ años
$\alpha^* = 20,23\%$
$G^* = 1.724,16$ u.m.

III.6. Colectivo formado por n individuos y el gobierno

En este modelo y siguiendo los postulados anteriores, consideramos una población formada por n individuos y el gobierno. Del colectivo, los h primeros individuos tienen un nivel de habilidad $w_i > w_0, i = 1,\ldots,h$ y para el resto $n-h$, resulta inferior a w_0.

Suponemos, en principio, que $w_0 \leq w_1 < w_2 <\ldots< w_h$. Los individuos planifican su tiempo de formación óptimo inicial $t_i^*, i = 1,2,\ldots,h$ y $t_i^* = 0, i = h+1,\ldots,n$. Posteriormente, el gobierno debe determinar los parámetros fiscales α^* y G^* maximizando la función de bienestar social seleccionada $\Psi(R(t_1^*),\ldots,R(t_h^*),R(t_{h+1}^*)\ldots,R(t_n^*))$ sujeta a las restricciones de recaudación y compatibilidad. Con este objetivo, planteamos el problema de optimización:

$$\begin{cases} \max \Psi(R(t_1^*),\ldots,R(t_h^*),R(t_{h+1}^*)\ldots,R(t_n^*)) \\ \qquad\qquad s.a \\ \alpha E(1+\theta)\displaystyle\sum_{i=1}^{h} w_i t_i^* - nG \geq R_0 \\ u'(G) \geq \dfrac{b}{(1-\alpha)w_1} \\ G \geq 0, \end{cases}$$

siendo R_0 la recaudación esperada; α el tipo impositivo lineal; G la renta de garantía y exenta del impuesto, $R(t_i^*), i = 1,2,\ldots,n$ la utilidad-desutilidad esperada máxima del individuo i en función de α y G; θ la variable aleatoria asociada al tiempo real de formación, con función de distribución de probabilidad H y w_0 el nivel mínimo de habilidad, a partir del cual los individuos reciben formación. El lagrangiano del problema de maximización es

$$\begin{aligned} \Im(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\alpha,G) = \Psi + \lambda_1\left(\alpha E(1+\theta)\sum_{i=1}^{h} w_i t_i^* - nG - R_0\right) \\ + \lambda_2\left(u'(G) - \frac{b}{(1-\alpha)w_1}\right) + \lambda_3 G \end{aligned}$$

y diferenciando respecto a cada una de las variables fiscales, α, G, y los multiplicadores de Kuhn-Tucker, $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$. Teniendo en cuenta (III.1), (III.2), (III.3) y (III.4), las condiciones de primer orden que caracterizan la solución α^*, G^* son:

$$\sum_{i=1}^{h} \Psi_{R(t_i^*)} \frac{\partial R(t_i^*)}{\partial \alpha} + \lambda_1 E(1+\theta) \sum_{i=1}^{h} w_i \left(t_i^* + \alpha \frac{\partial t_i^*}{\partial \alpha} \right) = \frac{\lambda_2 b}{(1-\alpha)^2 w_1} \tag{III.21}$$

$$\sum_{i=1}^{h} \Psi_{R(t_i^*)} \frac{\partial R(t_i^*)}{\partial G} + u'(G) \sum_{i=h+1}^{n} \Psi_{R(t_i^*)} \tag{III.22}$$

$$= -\lambda_1 \left(\alpha E(1+\theta) \sum_{i=1}^{h} w_i \frac{\partial t_i^*}{\partial G} - n \right) - \lambda_2 u''(G) - \lambda_3$$

$$\lambda_1 \left(R_0 + nG - \alpha E(1+\theta) \sum_{i=1}^{h} w_i t_i^* \right) = 0 \tag{III.23}$$

$$\lambda_2 \left(\frac{b}{(1-\alpha) w_1} - u'(G) \right) = 0 \tag{III.24}$$

$$-\lambda_3 G = 0 \tag{III.25}$$

$$\alpha E(1+\theta) \sum_{i=1}^{h} w_i t_i^* - nG \geq R_0$$

$$u'(G) \geq \frac{b}{(1-\alpha) w_1}$$

$$G \geq 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0.$$

Seguidamente analizamos las posibles soluciones del problema de optimización con distintas posibilidades en los valores de los parámetros:

1) Para la combinación $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. De (III.21), (III.22), (III.23), (III.24) y (III.25) resulta el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{h} \Psi_{R(t_i^*)} \dfrac{\partial R(t_i^*)}{\partial \alpha} = 0 \\ \sum_{i=1}^{h} \Psi_{R(t_i^*)} \dfrac{\partial R(t_i^*)}{\partial G} + u'(G) \sum_{i=h+1}^{n} \Psi_{R(t_i^*)} = 0 \end{cases}$$

que es incompatible. Como comprobamos utilizando (III.5) y (III.6).

2) La combinación $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2, \lambda_3 > 0$ no es posible. Para $\lambda_1 = 0$, de la igualdad (III.21) resulta $\lambda_2 < 0$, al ser $\dfrac{\partial R(t_i^*)}{\partial \alpha} < 0$.

3) En la combinación $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_1, \lambda_3 > 0$. De (III.23) y (III.25) resulta la posible solución

$$\alpha = \frac{R_0}{E(1+\theta) \sum_{i=1}^{h} w_i t_i^*} \text{ y } G = 0 \tag{III.26}$$

para el problema de optimización. Compatible, en principio, con las ecuaciones (III.21) y (III.22).

4) Para la combinación $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ y $\lambda_3 = 0$. De (III.23) y (III.24) resulta el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha E(1+\theta)\sum_{i=1}^{h} w_i t_i^* - nG = R_0 \\ &u'(G) = \frac{b}{(1-\alpha)w_1} \end{aligned}\right. \qquad \text{(III.27)}$$

compatible, en principio, con las ecuaciones (III.21) y (III.22). Los valores obtenidos de α y G nos proporcionan posibles soluciones del problema de optimización.

5) En la combinación $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$. De (III.23), (III.24) y (III.25) obtenemos un sistema de ecuaciones incompatible.

6) Para la combinación $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. De (III.21), (III.22) y (III.23) resulta el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\sum_{i=1}^{h} \Psi_{R(t_i^*)} \frac{\partial R(t_i^*)}{\partial \alpha}}{\sum_{i=1}^{h} \Psi_{R(t_i^*)} \frac{\partial R(t_i^*)}{\partial G} + +u'(G) \sum_{i=h+1}^{n} \Psi_{R(t_i^*)}} = \frac{E(1+\theta)\sum_{i=1}^{h} w_i \left(t_i^* + \alpha \frac{\partial t_i^*}{\partial \alpha} \right)}{\alpha E(1+\theta) \sum_{i=1}^{h} w_i \frac{\partial t_i^*}{\partial G} - n} \\ &\alpha E(1+\theta)\sum_{i=1}^{h} w_i t_i^* - nG = R_0 \end{aligned}\right. \qquad \text{(III.28)}$$

cuyos valores en las variables α y G nos proporcionan posibles soluciones para el problema de optimización.

7) La combinación $\lambda_2 > 0$ y $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ no es posible. Si $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, de (III.21) obtenemos $\lambda_2 < 0$, al ser $\frac{\partial R(t_i^*)}{\partial \alpha} < 0$.

8) La combinación $\lambda_3 > 0$ y $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ no es posible. Si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, de (III.22) obtenemos $\lambda_3 < 0$, al ser $\frac{\partial R(t_i^*)}{\partial G} > 0$.

Los parámetros fiscales óptimos α^* y G^* resultan de (III.26), (III.27) y (III.28), junto con las expresiones (III.1), (III.2), (III.5) y (III.6). De todas las soluciones factibles del problema de optimización deberemos seleccionar la que cumple la condición de máximo.

Para el caso de no aleatoriedad, en el tiempo de formación, basta tomar $\theta = 0$ en las expresiones (III.1), (III.2), (III.5), (III.6), (III.26), (III.27) y (III.28).

III.6.1. Ejemplo de aplicación del modelo con aleatoriedad

Sea un colectivo de individuos y el gobierno con los siguientes valores para los parámetros del modelo:

Número total de individuos	$n = 1.000$
Número total de individuos con formación	$h = 800$
Nivel de habilidad mínimo de formación	$w_0 = w_1$
Hay 250 individuos con nivel de habilidad	$w_1 = 1.800$ u.m.
Hay 200 individuos con nivel de habilidad	$w_2 = 2.000$ u.m.
Hay 150 individuos con ninel de habilidad	$w_3 = 3.000$ u.m.
Hay 125 individuos con nivel de habilidad	$w_4 = 4.000$ u.m.
Hay 75 individuos con nivel de habilidad	$w_5 = 6.000$ u.m.
Recaudación esperada del gobierno	$R_0 = 1.900.000$ u.m.
Función densidad de la variable aleatoria θ	$h(x) = \begin{cases} 4e^{-4x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
Función de utilidad de los ingresos netos	$u(\eta) = \eta - \frac{\eta^2}{100.000}$
Valor de b para las funciones $R_i(t), i = 1, \ldots, n$	$b = 800$
Función de bienestar social	$\Psi(R_1(t), \ldots, R_n(t)) = \sum_{i=1}^{n} \ln(R_i(t))$

Solución:

Obtenemos los valores

$t_1^* = 2,58$ u.t.t
$t_2^* = 5,12$ u.t.t
$t_3^* = 9,00$ u.t.t
$t_4^* = 8,85$ u.t.t.
$t_5^* = 7,30$ u.t.t
$\alpha^* = 44,71\%$
$G^* = 6.467,27$ u.m.

III.6.2. Ejemplo de aplicación del modelo sin aleatoriedad

Sea un colectivo de individuos y el gobierno con los siguientes valores para los parámetros del modelo:

Número total de individuos	$n = 1.000$
Número total de individuos con formación	$h = 800$
Nivel de habilidad mínimo de formación	$w_0 = 500$ u.m.
Hay 250 individuos con nivel de habilidad	$w_1 = 1.800$ u.m.
Hay 200 individuos con nivel de habilidad	$w_2 = 2.000$ u.m.
Hay 150 individuos con ninel de habilidad	$w_3 = 3.000$ u.m.
Hay 125 individuos con nivel de habilidad	$w_4 = 4.000$ u.m.
Hay 75 individuos con nivel de habilidad	$w_5 = 6.000$ u.m.
Recaudación esperada del gobierno	$R_0 = 1.900.000$ u.m.
Función de utilidad de los ingresos netos	$u(\eta) = \eta - \frac{\eta^2}{100.000}$
Valor de b para las funciones $R_i(t), i = 1,\ldots,n$	$b = 800$
Función de bienestar social	$\Psi(R_1(t),\ldots,R_n(t)) = \sum_{i=1}^{n} \ln(R_i(t))$

Solución:

Obtenemos los valores

$t_1^* = 3,28$ años
$t_2^* = 6,56$ años
$t_3^* = 11,59$ años
$t_4^* = 11,40$ años.
$t_5^* = 9,41$ años
$\alpha^* = 44,52\%$
$G^* = 6.670,59$ u.m.

III.6.3. Casos particulares del modelo

Los dos siguientes modelos pueden considerarse como casos particulares del anterior:

1) El formado por dos individuos y el gobierno, en que un individuo tiene nivel de habilidad $w_1 > w_0$ y la del otro es $w_2 < w_0$. Hemos de tomar $n = 2$ y $h = 1$.

2) El formado por n individuos y el gobierno, en que todos los individuos tienen un nivel de habilidad $w_i > w_0, i = 1, \ldots, n$. Hemos de asignar el valor $h = n$.

III.7. Colectivo con habilidades especificadas por una función densidad

Desarrollamos un modelo de un colectivo formado por un conjunto de individuos y el gobierno, siguiendo las hipótesis generales de los anteriores. Las habilidades de los individuos vienen dadas por una distribución de probabilidad $F(w)$, absolutamente continua, cuyo rango de valores está comprendido entre $\underline{\omega}$ (que puede ser cero) y $\overline{\varpi}$ (que puede ser infinito). Una parte de la población, con nivel de habilidad $w < w_0$, sólo percibe la renta de garantía G.

Una vez los individuos han planificado su tiempo óptimo de formación inicial en t^*, el gobierno determina los parámetros fiscales α^* y G^* maximizando el bienestar social medio, dado por la función $\Psi(R(t^*))$ seleccionada, sujeto a las necesidades de recaudación media R_0 y compatibilidad. Con este objetivo, planteamos el problema de optimización:

$$\begin{cases} \max \int_{\underline{\omega}}^{\overline{\omega}} \Psi(R(t^*))dF(w) \\ s.a. \\ \int_{w_0}^{\overline{\omega}} (\alpha E(1+\theta)t^* w - G)dF(w) - \int_{\underline{\omega}}^{w_0} GdF(w) \geq R_0 \\ u'(G) \geq \dfrac{b}{(1-\alpha)w_0} \\ G \geq 0, \end{cases}$$

siendo R_0 la recaudación esperada necesaria; α el tipo impositivo lineal; G la renta de garantía y exenta del impuesto, $R(t^*)$ la utilidad-desutilidad esperada máxima del individuo con nivel de habilidad w en función de α y G; θ la variable aleatoria asociada al tiempo real de formación, con función de distribución de probabilidad absolutamente continua H; w_0 el nivel mínimo de habilidad, a partir del cual los individuos reciben formación y $\underline{\omega}$ el nivel inferior de habilidades de la población (que puede ser cero), con $F(\underline{\omega}) = 0$. El lagrangiano del problema de maximización de la función de bienestar social es

$$\Im(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \alpha, G) = \int_{\underline{\omega}}^{\overline{\omega}} \Psi(R(t^*))dF + \lambda_1 \left(\alpha E(1+\theta) \int_{w_0}^{\overline{\omega}} t^* w dF - G - R_0 \right) + \lambda_2 (u'(G) - \frac{b}{(1-\alpha)w_0}) + \lambda_3 G$$

y diferenciando respecto a cada una de las variables fiscales, α, G, y los multiplicadores de Kuhn-Tucker, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Teniendo en cuenta (III.1), (III.2), (III.3) y (III.4), las condiciones de primer orden que caracterizan la solución α^*, G^* son

$$\int_{\underline{\omega}}^{\overline{\omega}} \Psi'(R(t^*)) \frac{\partial R(t^*)}{\partial \alpha} dF + \lambda_1 E(1+\theta) \int_{w_0}^{\overline{\omega}} w\left(t^* + \alpha \frac{\partial t^*}{\partial \alpha}\right) dF - \frac{\lambda_2 b}{(1-\alpha)^2 w_0} = 0 \tag{III.29}$$

$$\int_{\underline{\omega}}^{\overline{\omega}} \Psi'(R(t^*)) \frac{\partial R(t^*)}{\partial G} dF + \lambda_1 \left(\alpha E(1+\theta) \int_{w_0}^{\overline{\omega}} w \frac{\partial t^*}{\partial G} dF - 1\right) + \lambda_2 u''(G) + \lambda_3 = 0 \tag{III.30}$$

$$\lambda_1 \left(R_0 + G - \alpha E(1+\theta) \int_{w_0}^{\overline{\omega}} t^* w dF\right) = 0 \tag{III.31}$$

$$\lambda_2 \left(\frac{b}{(1-\alpha) w_0} - u'(G)\right) = 0 \tag{III.32}$$

$$-\lambda_3 G = 0 \tag{III.33}$$

$$\alpha E(1+\theta) \int_{w_0}^{\overline{\omega}} t^* w dF - G \geq R_0$$

$$u'(G) \geq \frac{b}{(1-\alpha) w_0}$$

$$u'(G) \geq \frac{b}{(1-\alpha) w_1}$$

$$G \geq 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0.$$

Seguidamente analizamos las posibles soluciones del problema de optimización para distintas posibilidades en los valores de los parámetros:

1) Para la combinación $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. De (III.29), (III.30), (III.31), (III.32) y (III.33)

resulta el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \int_{\underline{\omega}}^{\overline{\omega}} \Psi'(R(t^*)) \dfrac{\partial R(t^*)}{\partial \alpha} dF = 0 \\ \int_{\underline{\omega}}^{\overline{\omega}} \Psi'(R(t^*)) \dfrac{\partial R(t^*)}{\partial G} dF = 0 \end{cases}$$

que es incompatible, como podemos verificar por (III.5) y (III.6).

2) La combinación $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2, \lambda_3 > 0$ no es posible. Para $\lambda_1 = 0$, de (III.29) resulta $\lambda_2 < 0$, ya que $\dfrac{\partial R(t^*)}{\partial \alpha} < 0$ y la integral es negativa.

3) En la combinación $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_1, \lambda_3 > 0$. De (III.31) y (III.33), resulta la posible solución

$$G = 0 \text{ y } \alpha = \frac{R_0}{E(1+\theta)\int_{w_0}^{\overline{\omega}} t^* w dF}. \tag{III.34}$$

4) Para la combinación $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ y $\lambda_3 = 0$, de (III.31) y (III.32) obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha E(1+\theta)\int_{w_0}^{\overline{\omega}} t^* w dF - G = R_0 \\ u'(G) = \dfrac{b}{(1-\alpha) w_0} \end{cases} \tag{III.35}$$

compatible, en principio, con las ecuaciones (III.29) y (III.30). Los valores obtenidos para α y G nos proporcionan posibles soluciones del problema de optimización.

5) En la combinación $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$, de (III.31), (III.32) y (III.33) obtenemos un sistema de ecuaciones incompatible.

6) Para la combinación $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, de (III.29), (III.30) y (III.31) resulta el

sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{c} \dfrac{\int_{\underline{\omega}}^{\overline{\omega}} \Psi'(R(t^*)) \dfrac{\partial R(t^*)}{\partial \alpha} dF}{\int_{\underline{\omega}}^{\overline{\omega}} \Psi'(R(t^*)) \dfrac{\partial R(t^*)}{\partial G} dF} = \dfrac{E(1+\theta) \int_{w_0}^{\overline{\omega}} w\left(t^* + \alpha \dfrac{\partial t^*}{\partial \alpha}\right) dF}{\alpha E(1+\theta) \int_{w_0}^{\overline{\omega}} w \dfrac{\partial t^*}{\partial G} dF - 1} \\ \alpha E(1+\theta) \int_{w_0}^{\overline{\omega}} t^* w dF - G = R_0 \end{array}\right. \qquad \text{(III.36)}$$

cuyos valores en α y G nos proporcionan potenciales soluciones para el problema de optimización.

7) La combinación $\lambda_2 > 0$ y $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ no es posible. Si $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, de (III.29) resulta $\lambda_2 < 0$, ya que $\dfrac{\partial R(t^*)}{\partial \alpha} < 0$ y la integral es negativa.

8) La combinación $\lambda_3 > 0$ y $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ no es posible. Si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, de (III.30) resulta $\lambda_3 < 0$, ya que $\dfrac{\partial R(t^*)}{\partial G} > 0$ y la integral es positiva.

Los parámetros fiscales óptimos α^* y G^* los obtenemos de (III.34), (III.35) y (III.36), junto con las expresiones (III.1), (III.2), (III.5) y (III.6). De todas las soluciones factibles del problema de optimización deberemos seleccionar la que cumple la condición de máximo.

Para el caso de no aleatoriedad, en el tiempo de formación, basta tomar $\theta = 0$ en las expresiones (III.1), (III.2), (III.5), (III.6), (III.34), (III.35) y (III.36).

III.7.1. Ejemplo de aplicación del modelo con aleatoriedad

Suponemos la existencia de un colectivo de individuos y el gobierno con las siguientes características:

1) Las habilidades w, en unidades monetarias, de la población se corresponden con la función densidad de probabilidad

$$f(w) = \begin{cases} \dfrac{1,05k(1200)^{1,05}}{w^{2,05}} & \text{si } 1200 \leq w \leq 8000 \\ 0 & \text{si } w < 1200, \end{cases}$$

siendo

$$k = \frac{1}{\displaystyle\int_{1200}^{8000} \frac{1,05(1200)^{1,05}}{w^{2,05}} dw}.$$

2) El nivel de habilidad w_0, a partir del cual los individuos reciben formación, es de 1.250 u.m.

3) La recaudación R_0 necesaria esperada del gobierno por individuo es de 1.900 u.m.

4) La función de utilidad de los ingresos netos η de cada individuo del colectivo es

$$u(\eta) = \eta - \frac{\eta^2}{25000}.$$

5) El valor del parámetro b, de la función $R(t^*(w))$, es 400.

6) La función de bienestar social seleccionada por el gobierno es

$$\Psi(R(t^*)) = \begin{cases} R(t^*(w)) & \text{si } 1200 \leq w \leq w_\alpha \\ R(t^*(w_\alpha)) + (1-\beta)(R(t^*(w)) - R(t^*(w_\alpha))) & \text{si } w_\alpha < w \leq 8000, \end{cases}$$

siendo w_α el centil α de la distribución de habilidades de la población y β un parámetro seleccionados por el gobierno, en función de objetivos distributivos de la renta salarial y de eficiencia económica. En este caso, tomamos $\alpha = 35\%$ y $\beta = 0,54$.

6) La función de densidad de la variable aleatoria θ es

$$h(x) = \begin{cases} 4e^{-4x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Solución:

Obtenemos los valores óptimos $\alpha^* = 38,81\%$ y $G^* = 1.985,53$ u.m. para los parámetros fiscales.

III.7.2. Ejemplo de aplicación del modelo sin aleatoriedad

Suponemos la existencia de un colectivo de individuos y el gobierno con las mismas características que en el apartado 7.1, excepto en la existencia de aleatoriedad. O sea, $\theta = 0$ en este caso.

Solución:

Obtenemos los valores óptimos $\alpha^* = 24,75\%$ y $G^* = 792,10$ u.m, para los parámetros fiscales.

CAPÍTULO IV

Impuesto lineal y oferta de trabajo determinista

En esta capítulo desarrollamos el tratamiento de la oferta individual de trabajo y el impuesto lineal sobre la renta. La tasa real de aprovechamiento del tiempo de trabajo del individuo coincide con su función de oferta de trabajo. La progresividad del tipo impositivo medio estará en función de la renta de garantía G, que todos los individuos perciben y se descuenta de la base imponible.

IV.1. Hipótesis generales

Todos los modelos que desarrollamos en este capítulo presentan, entre otras, las siguientes características:

a) Los ingresos brutos del individuo Z dependen de su renta salarial w y del tiempo de trabajo L. O sea, $Z = wL$.

b) Hay una tasa impositiva lineal α y una renta de garantía G, no negativa ($G \geq G_0$ y puede ser $G_0 = 0$). La renta de garantía se descuenta de la base imponible individual.

c) La oferta de trabajo L es no negativa.

d) La oferta de trabajo L y el tiempo real de aprovechamiento del trabajo coinciden.

e) Los individuos que no trabajan perciben la renta de garantía G.

f) Las preferencias de los individuos son representables mediante un mismo tipo de función de utilidad $U(Y,L)$, donde Y es la renta neta salarial y L la oferta de trabajo. Como en Mirrlees (1971), Atkinson y Stiglitz (1980), Tuomala (1990) y Spadaro (2002), suponemos que U es una función cuasicóncava, continuamente diferenciable, estrictamente creciente en Y y estrictamente decreciente en L. Al exigir la cuasiconcavidad a la función de utilidad U, aseguramos que las curvas de indiferencia de los individuos son convexas y, como consecuencia, la relación marginal de sustitución entre renta neta Y (consumo potencial) y oferta de trabajo L es decreciente.

g) Se cumple el principio de separabilidad entre la renta neta salarial Y y el ocio, considerándolo como un menor tiempo de trabajo. En otras palabras, las preferencias por el ocio y las posibilidades de consumo del individuo resultan independientes. Esto lleva implícita la condición que la utilidad marginal de la renta neta salarial $U_Y(Y,L)$ no depende del tiempo de trabajo L, o sea $U_{YL}(Y,L) = 0$.

h) Una vez los individuos han fijado su función de utilidad indirecta $V(Y^{*},L^{*}) = V(w,\alpha,G)$, obtenida del problema de optimización

$$\left\{ \begin{array}{c} \max U(Y,L) \\ s.a. \\ Y = (1-\alpha)wL + G \\ L \geq 0, \end{array} \right.$$

se determinan los parámetros fiscales óptimos α^{*} y G^{*} maximizando una función de bienestar social $\Psi(V)$, cuyo grado de concavidad depende del nivel de aversión a la desigualdad social por parte del gobierno.

i) Un aumento del tipo impositivo lineal α representa un factor de ineficiencia económica. Con la finalidad de garantizar que la elasticidad de la oferta de trabajo óptima L^{*}

respecto al tipo impositivo lineal α, sea $\in_{L^*,\alpha} > -1$. Exigimos que las funciones de utilidad de los individuos $U(Y,L)$ cumplan la condición

$$\alpha w U_Y(Y,L) + L(U_{LL}(Y,L) + (1-\alpha)w^2 U_{YY}(Y,L)) < 0. \tag{IV.1}$$

j) Existen unas necesidades de recaudación del gobierno, que designamos por R_0.

k) La legislación laboral determina un salario mínimo por unidad de tiempo de trabajo w_0, a partir del cual se perciben rentas salariales. Este nivel w_0 representa una variable exógena del modelo y es superior a la renta salarial crítica por unidad de tiempo de trabajo v, a la que los individuos estan dispuestos a trabajar.

IV.2. Oferta de trabajo y función de utilidad indirecta del individuo

Para la determinación de la oferta de trabajo individual, consideramos el siguiente problema de optimización:

$$\begin{cases} \max U(Y,L) \\ s.a. \\ Y = Z - T(Z) \\ L \geq 0, \end{cases}$$

donde la variable del problema es la oferta de trabajo L, Z es la renta antes de impuestos, $T(Z)$ los impuestos a pagar y Y la renta después de impuestos.

La restricción presupuestaria del individuo viene expresada por

$$Y = wL - \alpha(wL - G) = (1-\alpha)wL + G, \tag{IV.2}$$

siendo α el tipo impositivo y G la renta de garantía.

Formando el lagrangiano del problema de optimización

$$\Im(\lambda_1, \lambda_2, Y, L) = U(Y,L) + \lambda_1((1-\alpha)wL + G - Y) + \lambda_2 L$$

y diferenciando respecto a cada una de las variables Y, L, y los multiplicadores de Kuhn-Tucker, λ_1, λ_2:

$$\frac{\partial \Im}{\partial Y} = U_Y(Y,L) - \lambda_1 = 0 \qquad \text{(IV.3)}$$

$$\frac{\partial \Im}{\partial L} = U_L(Y,L) + \lambda_1(1-\alpha)w + \lambda_2 = 0 \qquad \text{(IV.4)}$$

$$-\lambda_2 L = 0 \qquad \text{(IV.5)}$$

$$Y - (1-\alpha)wL - G = 0$$

$$L \geq 0$$

$$\lambda_2 \geq 0.$$

Analizando las posibles soluciones del problema de optimización para los valores de los parámetros λ_1, λ_2:

1) De (IV.3) deducimos que debe ser $\lambda_1 > 0$.

2) Para $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 = 0$. De (IV.3) y (IV.4) resulta la ecuación:

$$(1-\alpha)wU_Y(Y,L) + U_L(Y,L) = 0. \tag{IV.6}$$

3) Para $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. De (IV.3), (IV.4) y (IV.5) obtenemos:

$$(1-\alpha)wU_Y(G,0) + U_L(G,0) \leq 0 \text{ y } L = 0. \tag{IV.7}$$

De (IV.2), (IV.6) y (IV.7) deducimos los valores de Y^* y L^*. Con lo que la función de utilidad indirecta de un individuo con nivel de habilidad w es $V(w,\alpha,G) = U(Y^*,L^*)$.

Proposición IV.2.1. *Existe una renta salarial crítica por unidad de tiempo de trabajo* v *tal que*

$$L(w) > 0 \text{ para } w > v$$
$$L(w) = 0 \text{ para } w \leq v.$$

Demostración. En (IV.7), designando por $g(w) \equiv (1-\alpha)wU_Y(G,0) + U_L(G,0)$, es $g(w)$ estrictamente negativo en $w = 0$ ($U_L(G,0) < 0$, al ser $U(Y,L)$ estrictamente decreciente con L), y $g(w)$ es una función creciente con w. Existe, por tanto, un valor v tal que $g(v) = 0$ y $g(w) > 0$ para $w > v$. Supongamos que fuese $L(w) = 0$ para $w > v$, entonces $U(Y,L) = U(G,0)$ y $U_Y(Y,L) = U_L(Y,L) = 0$. Resultaría $g(w) = 0$ para $w > v$, no posible. Así, $L(w) > 0$ □

Proposición IV.2.2. *La oferta óptima de trabajo* $L^* = L^*(w,\alpha,G)$ *es una función no creciente con la renta de garantía* G.

Demostración. De las hipótesis iniciales sobre la función de utilidad $U(Y,L)$ y derivando la igualdad (IV.6) respecto a G, resulta:

$$\frac{\partial L^*}{\partial G} = -\frac{(1-\alpha)wU_{Y^*Y^*}}{(1-\alpha)^2 w^2 U_{Y^*Y^*} + U_{L^*L^*}} \leq 0 \square$$

Proposición IV.2.3. *Si la elasticidad entre la oferta óptima de trabajo* L^* *y el tipo impositivo lineal* α es *superior a* -1, *entonces*

$$L^* + \alpha \frac{\partial L^*}{\partial \alpha} > 0.$$

Demostración. De $\in_{L^*,\alpha} = \frac{\partial L^*}{\partial \alpha} \frac{\alpha}{L} > -1$ resulta:

$$L^* + \alpha \frac{\partial L^*}{\partial \alpha} = L^*(1 + \frac{\partial L^*}{\partial \alpha} \frac{\alpha}{L}) > 0 \square$$

Proposición IV.2.4. *La función de utilidad indirecta* $V(w, \alpha, G)$ *es creciente con la renta de garantía* G y *decreciente con el tipo impositivo lineal* α.

Demostración. Teniendo en cuenta (IV.6) y derivando la función de utilidad indirecta $V(w, \alpha, G)$, resulta:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V(w,\alpha,G)}{\partial G} &= \frac{\partial U(Y^*,L^*)}{\partial G} \\
&= U_{Y^*}\frac{\partial Y^*}{\partial G} + U_{L^*}\frac{\partial L^*}{\partial G} \\
&= U_{Y^*}((1-\alpha)w\frac{\partial L^*}{\partial G} + 1) + U_{L^*}\frac{\partial L^*}{\partial G} \\
&= (U_{Y^*}(1-\alpha)w + U_{L^*})\frac{\partial L^*}{\partial G} + U_{Y^*} \\
&= U_{Y^*} > 0
\end{aligned}$$

y

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V(w,\alpha,G)}{\partial \alpha} &= \frac{\partial U(Y^*,L^*)}{\partial \alpha} \\
&= U_{Y^*}\frac{\partial Y^*}{\partial \alpha} + U_{L^*}\frac{\partial L^*}{\partial \alpha} \\
&= U_{Y^*}(-wL^* + (1-\alpha)w\frac{\partial L^*}{\partial \alpha}) + U_{L^*}\frac{\partial L^*}{\partial \alpha} \\
&= (U_{Y^*}(1-\alpha)w + U_{L^*})\frac{\partial L^*}{\partial \alpha} - wL^*U_{Y^*} \\
&= -wL^*U_{Y^*} < 0 \,\square
\end{aligned}
$$

IV.3. Colectivo formado por un individuo y el gobierno

En este caso postulamos que la productividad del individuo es $w_1 > w_0$. Una vez fijada la función de utilidad indirecta por parte del individuo $V_1(w_1,\alpha,G)$, el gobierno determina los parámetros fiscales óptimos α^* y G^*. Con este objetivo planteamos el problema de optimización:

$$
\begin{cases}
\max \Psi(V_1) \\
s.a. \\
\alpha w_1 L_1^* - G \geq R_0 \\
G - G_0 \geq 0 \\
L_0^* \geq 0,
\end{cases}
$$

donde Ψ es la función de bienestar social seleccionada por el gobierno, L_0^* la oferta de trabajo óptima al nivel de renta salarial por unidad de tiempo de trabajo w_0 y R_0 las necesidades de recaudación. El lagrangiano del problema de maximización es

$$
\Im(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\alpha,G) = \Psi(V_1) + \lambda_1(\alpha w_1 L_1^* - G - R_0) + \lambda_2(G - G_0) + \lambda_3 L^*(w_0)
$$

y diferenciando respecto a cada una de las variables fiscales, α, G y los multiplicadores de Kuhn-Tucker, $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$. Las condiciones de primer orden que caracterizan la solución α^* y G^* son

$$\frac{\partial \Im}{\partial \alpha} = \Psi'(V_1)\frac{\partial V_1}{\partial \alpha} + \lambda_1 w_1\left(L_1^* + \alpha\frac{\partial L_1^*}{\partial \alpha}\right) + \lambda_3\frac{\partial L_0^*}{\partial \alpha} = 0 \qquad \text{(IV.8)}$$

$$\frac{\partial \Im}{\partial G} = \Psi'(V_1)\frac{\partial V_1}{\partial G} + \lambda_1\left(\alpha w_1\frac{\partial L_1^*}{\partial G} - 1\right) + \lambda_2 + \lambda_3\frac{\partial L_0^*}{\partial G} = 0 \qquad \text{(IV.9)}$$

$$-\lambda_1(\alpha w_1 L_1^* - G - R_0) = 0 \qquad \text{(IV.10)}$$

$$-\lambda_2(G - G_0) = 0 \qquad \text{(IV.11)}$$

$$-\lambda_3 L_0^* = 0 \qquad \text{(IV.12)}$$

$$\alpha w_1 L_1^* - G \geq R_0$$

$$G - G_0 \geq 0$$

$$L_0^* \geq 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0.$$

Analizando las posibles soluciones del problema de optimización para los valores de los parámetros $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, de las que resulten factibles, deberemos seleccionar aquellas que maximicen el valor de $\Psi(V_1)$:

1) Para $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Como $\Psi'(V_1)\frac{\partial V_1}{\partial \alpha} < 0$. No se cumple, por ejemplo, la ecuacion (IV.8).

2) Para $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2, \lambda_3 > 0$. El sistema de ecuaciones resultante de (IV.11) y (IV.12) es

$$G = G_0 \qquad \text{(IV.13)}$$
$$L_0^* = 0.$$

3) Para $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_1, \lambda_3 > 0$. El sistema de ecuaciones resultante de (IV.10) y (IV.12) es

$$L_0^* = 0 \qquad \text{(IV.14)}$$
$$\alpha w_1 L_1^* - G = R_0.$$

4) Para $\lambda_3 = 0$ y $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. De (IV.10) y (IV.11) resulta la posible solución

$$G = G_0 \text{ y } \alpha = \frac{R_0 + G_0}{w_1 L_1^*}. \qquad \text{(IV.15)}$$

5) Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 > 0$. De (IV.8), (IV.9) y (IV.12) resulta el sistema de ecuaciones:

$$\frac{\dfrac{\partial V_1}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial V_1}{\partial G}} = \frac{\dfrac{\partial L_0^*}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial L_0^*}{\partial G}} \qquad \text{(IV.16)}$$
$$L_0^* = 0.$$

6) Para $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ y $\lambda_2 > 0$. De (IV.9) resulta $\lambda_2 = -\Psi'(V_1)\dfrac{\partial V_1}{\partial G} < 0$, valor no posible por las restricciones del problema de optimización.

7) Para $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ y $\lambda_1 > 0$. De (IV.8), (IV.9) y (IV.10) resulta el sistema de ecuaciones:

$$\frac{\dfrac{\partial V_1}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial V_1}{\partial G}} = \frac{w_1\left(L_1^* + \alpha \dfrac{\partial L_1^*}{\partial \alpha}\right)}{\alpha w_1 \dfrac{\partial L_1^*}{\partial G} - 1} \qquad \text{(IV.17)}$$

$$\alpha w_1 L_1^* = G + R_0.$$

8) Para $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$. El sistema de ecuaciones resultante de (IV.10), (IV.11) y (IV.12) es incompatible.

Los valores óptimos α^* y G^* los obtenemos de (IV.13), (IV.14), (IV.15), (IV.16) y (IV.17).

IV.3.1. Ejemplo de aplicación

Sea el modelo anterior con la función de utilidad del individuo

$$U_1(Y_1, L_1) = \ln Y_1 + \ln(1 - L_1) \qquad \text{(IV.18)}$$

y la función de bienestar social

$$\Psi(V_1) = -\frac{1}{V_1}.$$

Aplicando la igualdad (IV.6) a (IV.18) y considerando (IV.2) es

$$\frac{(1-\alpha)w}{(1-\alpha)wL_1 + G} - \frac{1}{1 - L_1} = 0.$$

De donde, obtenemos la oferta de trabajo del individuo

$$L_1^* = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{G}{(1-\alpha)w_1}\right). \qquad \text{(IV.19)}$$

Por analogía a (IV.19) resulta

$$L_0^* = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{G}{(1-\alpha)w_0}\right). \qquad \text{(IV.20)}$$

La función de utilidad indirecta del individuo es

$$V_1(w_1,\alpha,G) = 2\ln((1-\alpha)w_1 + G) - \ln(1-\alpha) - \ln w_1 - 2\ln 2. \qquad \text{(IV.21)}$$

Derivando las igualdades (IV.19) y (IV.20) respecto a α y G, resulta:

$$\frac{\partial L_1^*}{\partial \alpha} = -\frac{G}{2(1-\alpha)^2 w_1} \qquad \text{(IV.22)}$$

$$\frac{\partial L_1^*}{\partial G} = -\frac{1}{2(1-\alpha)w_1} \qquad \text{(IV.23)}$$

$$\frac{\partial L_0^*}{\partial \alpha} = -\frac{G}{2(1-\alpha)^2 w_0} \qquad \text{(IV.24)}$$

$$\frac{\partial L_0^*}{\partial G} = -\frac{1}{2(1-\alpha)w_0}. \qquad \text{(IV.25)}$$

Derivando la ecuación (IV.21) respecto a α y G, tenemos:

$$\frac{V_1(w_1,\alpha,G)}{\partial \alpha} = \frac{-w_1(1-\alpha) + G}{(1-\alpha)((1-\alpha)w_1 + G)} \qquad \text{(IV.26)}$$

$$\frac{V_1(w_1,\alpha,G)}{\partial G} = \frac{2}{(1-\alpha)w_1 + G}. \qquad \text{(IV.27)}$$

Seguidamente, llevamos las igualdades (IV.19), (IV.20), (IV.21), (IV.22), (IV.23), (IV.24), (IV.25), (IV.26) y (IV.27) a los sistemas de ecuaciones (IV.13) al (IV.17).

Tomando para los parámetros los siguientes valores:

$w_0 = 800$ u.m.
$w_1 = 6.000$ u.m.
$R_0 = 300$ u.m.
$G_0 = 200$ u.m.

Obtenemos la solución óptima

$\alpha^* = 17{,}36\%$
$G^* = 200$ u.m.
$L_1^* = 0{,}479830$, del tiempo total sobre la unidad entre ocio y trabajo

IV.4. Colectivo formado por dos individuos y el gobierno

En este modelo consideramos que el nivel de habilidad de los dos individuos es $w_i > w_0, i = 1.2$. Una vez los individuos han fijado su función de utilidad indirecta $V_i(w_i, \alpha, G), i = 1,2$, el gobierno determina los paràmetros fiscales óptimos α^* y G^*. Con este objetivo planteamos el problema de optimización:

$$\left\{ \begin{array}{c} \max \Psi(V_1, V_2) \\ s.a. \\ \alpha \displaystyle\sum_{i=1}^{2} w_i L_i^* - 2G \geq R_0 \\ G \geq 0 \\ L_0^* \geq 0, \end{array} \right.$$

donde Ψ es la función de bienestar social seleccionada por el gobierno, L_0^* la oferta de trabajo óptima al nivel de renta salarial por unidad de tiempo de trabajo w_0 y R_0 las necesidades de recaudación. El lagrangiano del problema de maximización de la función de bienestar social Ψ es

$$\Im(\lambda_1, \lambda_2, \alpha, G) = \Psi(V_1, V_2) + \lambda_1(\alpha \sum_{i=1}^{2} w_i L_i^* - 2G - R_0) + \lambda_2(G - G_0) + \lambda_3 L_0^*$$

y diferenciando respecto a una cada de las variables fiscales, α, G y los multiplicadores de Kuhn-Tucker, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Las condiciones de primer orden que caracterizan la solución α^* y G^* son

$$\frac{\partial \Im}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{2} \Psi_{V_i}(V_1, V_2) \frac{\partial V_i}{\partial \alpha} + \lambda_1 \sum_{i=1}^{2} w_i \left(L_i^* + \alpha \frac{\partial L_i^*}{\partial \alpha} \right) + \lambda_3 \frac{\partial L_0^*}{\partial \alpha} = 0 \qquad \text{(IV.28)}$$

$$\frac{\partial \Im}{\partial G} = \sum_{i=1}^{2} \Psi_{V_i}(V_1, V_2) \frac{\partial V_i}{\partial G} + \lambda_1 \left(\alpha \sum_{i=1}^{2} w_i \frac{\partial L_i^*}{\partial G} - 2 \right) + \lambda_2 + \lambda_3 \frac{\partial L_0^*}{\partial G} = 0 \qquad \text{(IV.29)}$$

$$-\lambda_1(\alpha \sum_{i=1}^{2} w_i L_i^* - 2G - R_0) = 0 \qquad \text{(IV.30)}$$

$$-\lambda_2(G - G_0) = 0 \qquad \text{(IV.31)}$$

$$-\lambda_3 L_0^* = 0 \qquad \text{(IV.32)}$$

$$\alpha \sum_{i=1}^{2} w_i L_i^* - 2G \geq R_0$$

$$G - G_0 \geq 0$$

$$L_0^* \geq 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0.$$

Analizando las posibles soluciones del problema de optimización para los valores de los parámetros $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, de las que resulten factibles, seleccionaremos aquellas que maximicen el valor de $\Psi(V_1, V_2)$:

1) Para $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Como $\sum_{i=1}^{2} \Psi_{V_i}(V_1, V_2) \frac{\partial V_i}{\partial \alpha} < 0$. No se cumple, por ejemplo, la ecuacion (IV.28).

2) Para $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2, \lambda_3 > 0$. El sistema de ecuaciones resultante de (IV.31) y (IV.32) es

$$\begin{aligned} G &= G_0 \\ L_0^* &= 0. \end{aligned} \tag{IV.33}$$

3) Para $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_1, \lambda_3 > 0$. El sistema de ecuaciones resultante de (IV.30) y (IV.32) es

$$\begin{aligned} \alpha \sum_{i=1}^{2} w_i L_i^* &= 2G + R_0 \\ L_0^* &= 0. \end{aligned} \tag{IV.34}$$

4) Para $\lambda_3 = 0$ y $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. De (IV.30) y (IV.31) resulta la posible solución

$$G = G_0 \text{ y } \alpha = \frac{R_0 + G_0}{\sum_{i=1}^{2} w_i L_i^*}. \tag{IV.35}$$

5) Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 > 0$. De (IV.28), (IV.29) y (IV.32) resulta el sistema de ecuaciones:

$$\frac{\sum_{i=1}^{2}\Psi_{V_i}(V_1,V_2)\dfrac{\partial V_i}{\partial \alpha}}{\sum_{i=1}^{2}\Psi_{V_i}(V_1,V_2)\dfrac{\partial V_i}{\partial G}} = \frac{\dfrac{\partial L_0^*}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial L_0^*}{\partial G}} \tag{IV.36}$$

$$L_0^* = 0.$$

6) Para $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ y $\lambda_2 > 0$. De (IV.29), resulta $\lambda_2 = -\sum_{i=1}^{2}\Psi_{V_i}(V_1,V_2)\dfrac{\partial V_i}{\partial G} < 0$. Valor no posible, por las restricciones del problema de optimización.

7) Para $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ y $\lambda_1 > 0$. De (IV.28), (IV.29) y (IV.30) resulta el sistema de ecuaciones:

$$\frac{\sum_{i=1}^{2}\Psi_{V_i}(V_1,V_2)\dfrac{\partial V_i}{\partial \alpha}}{\sum_{i=1}^{2}\Psi_{V_i}(V_1,V_2)\dfrac{\partial V_i}{\partial G}} = \frac{\sum_{i=1}^{2} w_i\left(L_i^* + \alpha\dfrac{\partial L_i^*}{\partial \alpha}\right)}{\alpha\sum_{i=1}^{2} w_i\dfrac{\partial L_i^*}{\partial G} - 2} \tag{IV.37}$$

$$\alpha\sum_{i=1}^{2} w_i L_i = 2G + R_0.$$

8) Para $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$. El sistema de ecuaciones resultante de (IV.30), (IV.31) y (IV.32) es incompatible.

Los valores óptimos α^* y G^* los obtenemos de (IV.33), (IV.34), (IV.35), (IV.36) y (IV.37).

IV.4.1. Ejemplo de aplicación

Sea el modelo anterior con las siguientes características específicas:

Renta salarial unitaria mínima	$w_0 = 800$ u.m.
Renta salarial unitaria del primer individuo	$w_1 = 2.000$ u.m.
Renta salarial unitaria del segundo individuo	$w_2 = 3.000$ u.m.
Las necesidades de recaudación	$R_0 = 600$ u.m.
Función de bienestar social	$\Psi(V_1, V_2) = -(e^{-V_1} + e^{-V_2})$
Función de utilidad de los individuos	$U_i = U_i(Y_i, L_i) = \ln Y_i + \ln(1 - L_i), i = 1,2$
Valor mínimo de la renta de garantía	$G_0 = 200$ u.m.

Solución:

De la ecuación (IV.19) deducimos que la oferta de trabajo óptima de los individuos es

$$L_i^* = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{G}{(1-\alpha)w_i}\right), i = 1,2 \tag{IV.38}$$

y su función indirecta de utilidad

$$V_i(w_i, \alpha, G) = 2\ln((1-\alpha)w_i + G) - \ln(1-\alpha) - \ln w_i - 2\ln 2, i = 1,2. \tag{IV.39}$$

Derivando (IV.39) respecto a α y G:

$$\frac{\partial V_i}{\partial \alpha} = -\frac{(1-\alpha)w_i - G}{((1-\alpha)w_i + G)(1-\alpha)}, i = 1,2 \tag{IV.40}$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial G} = \frac{2}{(1-\alpha)w_i + G}, i = 1,2. \tag{IV.41}$$

Derivando (IV.38) respecto a α y G:

$$\frac{\partial L_i^*}{\partial \alpha} = -\frac{G}{2(1-\alpha)^2 w_i}, i = 1,2 \tag{IV.42}$$

$$\frac{\partial L_i^*}{\partial G} = -\frac{1}{2(1-\alpha) w_i}, i = 1,2. \tag{IV.43}$$

Seguidamente, llevamos las igualdades (IV.20), (IV.24), (IV.25), (IV.38), (IV.39), (IV.40), (IV.41), (IV.42) y (IV.43) a los sistemas de ecuaciones (IV.33) al (IV.37). Así resulta:

$L_1^* = 0,459165$, del tiempo total sobre la unidad entre ocio y trabajo
$L_2^* = 0,479825$, del tiempo total sobre la unidad entre ocio y trabajo
$\alpha^* = 38,78\%$
$G^* = 200$ u.m

IV.5. Colectivo formado por n individuos y el gobierno

Consideramos un colectivo formado por n individuos, h de los cuales tienen un nivel de habilidad $w_i > w_0, i = 1,\ldots,h$ y los restantes sólo perciben la renta de garantía G. Suponemos que los individuos que trabajan son los h primeros y sus niveles de habilidad en orden creciente son $w_1 \leq w_2 \leq \ldots \leq w_h$.

Una vez los individuos han fijado su función de utilidad indirecta $V_i(w_i, \alpha, G), i = 1\ldots,h$ y $V_i(G) = U(G,0), i = h+1,\ldots,n$, el gobierno determina los parámetros fiscales óptimos α^* y G^*. Con este objetivo planteamos el problema de optimización:

$$\begin{cases} \max \Psi(V_1,\ldots,V_n) \\ s.a. \\ \alpha \sum_{i=1}^{h} w_i L_i^* - nG \geq R_0 \\ G - G_0 \geq 0 \\ L_0^* \geq 0, \end{cases}$$

donde Ψ es la función de bienestar social seleccionada por el gobierno, L_0^* la oferta de trabajo óptima al nivel de renta salarial por unidad de tiempo de trabajo w_0 y R_0 las necesidades de recaudación. El lagrangiano del problema de maximización de la función de bienestar social Ψ es

$$\Im(\lambda_1,\lambda_2,\alpha,G) = \Psi(V_1,\ldots,V_n) + \lambda_1(\alpha \sum_{i=1}^{h} w_i L_i^* - nG - R_0) + \lambda_2(G - G_0) + \lambda_3 L_0^*$$

y diferenciando respecto a una cada de las variables fiscales, α, G y los multiplicadores de Kuhn-Tucker, $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$. Las condiciones de primer orden que caracterizan la solución α^* y G^* son

$$\frac{\partial \Im}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{n} \Psi_{V_i} \frac{\partial V_i}{\partial \alpha} + \lambda_1 \sum_{i=1}^{h} w_i \left(L_i^* + \alpha \frac{\partial L_i^*}{\partial \alpha} \right) + \lambda_3 \frac{\partial L_0^*}{\partial \alpha} = 0 \qquad \text{(IV.44)}$$

$$\frac{\partial \Im}{\partial G} = \sum_{i=1}^{n} \Psi_{V_i} \frac{\partial V_i}{\partial G} + \lambda_1 \left(\alpha \sum_{i=1}^{h} w_i \frac{\partial L_i^*}{\partial G} - n \right) + \lambda_2 + \lambda_3 \frac{\partial L_0^*}{\partial G} = 0 \qquad \text{(IV.45)}$$

$$-\lambda_1(\alpha \sum_{i=1}^{h} w_i L_i^* - nG - R_0) = 0 \qquad \text{(IV.46)}$$

$$-\lambda_2(G - G_0) = 0 \qquad \text{(IV.47)}$$

$$-\lambda_3 L_0^* = 0 \tag{IV.48}$$

$$\alpha \sum_{i=1}^{h} w_i L_i^* - nG \geq R_0$$

$$G - G_0 \geq 0$$

$$L_0^* \geq 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0.$$

Analizando las posibles soluciones del problema de optimización para los valores de los parámetros $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, de las que resulten factibles, seleccionaremos las que maximicen el valor de $\Psi(V_1, \ldots, V_n)$:

1) Para $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Como $\sum_{i=1}^{n} \Psi_{V_i} \frac{\partial V_i}{\partial \alpha} < 0$. No se cumple, por ejemplo, la ecuacion (IV.44).

2) Para $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2, \lambda_3 > 0$. El sistema de ecuaciones resultante de (IV.47) y (IV.48) es

$$\begin{aligned} G &= G_0 \\ L_0^* &= 0. \end{aligned} \tag{IV.49}$$

3) Para $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_1, \lambda_3 > 0$. El sistema de ecuaciones resultante de (IV.46) y (IV.48) es

$$\alpha \sum_{i=1}^{h} w_i L_i^* = nG + R_0 \tag{IV.50}$$

$$L_0^* = 0.$$

4) Para $\lambda_3 = 0$ y $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. De (IV.46) y (IV.47) resulta la posible solución

$$G = G_0 \text{ y } \alpha = \frac{R_0 + nG_0}{\sum_{i=1}^{h} w_i L_i^*}. \tag{IV.51}$$

5) Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 > 0$. De (IV.44), (IV.45) y (IV.48) resulta el sistema de ecuaciones

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \Psi_{V_i}(V_1, \ldots, V_n) \dfrac{\partial V_i}{\partial \alpha}}{\sum_{i=1}^{n} \Psi_{V_i}(V_1, \ldots, V_n) \dfrac{\partial V_i}{\partial G}} = \frac{\dfrac{\partial L_0^*}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial L_0^*}{\partial G}} \tag{IV.52}$$

$$L_0^* = 0.$$

6) Para $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ y $\lambda_2 > 0$. De (IV.45) resulta $\lambda_2 = -\sum_{i=1}^{n} \Psi_{V_i}(V_1, \ldots, V_n) \dfrac{\partial V_i}{\partial G} < 0$, no posible por las restricciones del problema de optimización.

7) Para $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ y $\lambda_1 > 0$. De (IV.44), (IV.45) y (IV.46) resulta el sistema de ecuaciones

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \Psi_{V_i}(V_1, \ldots, V_n) \dfrac{\partial V_i}{\partial \alpha}}{\sum_{i=1}^{n} \Psi_{V_i}(V_1, \ldots, V_n) \dfrac{\partial V_i}{\partial G}} = \frac{\sum_{i=1}^{h} w_i \left(L_i^* + \alpha \dfrac{\partial L_i^*}{\partial \alpha} \right)}{\alpha \sum_{i=1}^{h} w_i \dfrac{\partial L_i^*}{\partial G} - n} \tag{IV.53}$$

$$\alpha \sum_{i=1}^{h} w_i L_i^* = nG + R_0.$$

8) Para $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$. El sistema de ecuaciones resultante de (IV.46), (IV.47) y (IV.48) es incompatible.

Los valores óptimos α^* y G^* los obtenemos de (IV.49), (IV.50), (IV.51), (IV.52) y (IV.53).

IV.5.1. Ejemplo de aplicación

Sea el modelo anterior con las siguientes características específicas:

Número de individuos	$n = 1.000$
Sólo perciben la renta de garantía	$n - h = 200$
100 individuos con renta unitaria	$w_1 = 2.700$ u.m.
250 individuos con renta unitaria	$w_2 = 3.000$ u.m.
150 individuos con renta unitaria	$w_3 = 3.500$ u.m.
170 individuos con renta unitaria	$w_4 = 4.000$ u.m.
130 individuos con renta unitaria	$w_5 = 4.500$ u.m.
Necesidades de recaudación	$R_0 = 37.500$ u.m.
Función de bienestar social	$\Psi(V_1,\ldots,V_n) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt[3]{V_i^2}$
Función de utilidad con renta	$U_i = U(Y_i, L_i) = \ln Y_i + \ln(1 - L_i), i = 1,\ldots,h$
Función de utilidad sin renta	$U_j = U(Y_j, L_j) = \ln G, j = h+1,\ldots,n$
Valor mínimo de la renta de garantía	$G_0 = 200$ u.m.
Valor mínimo de la renta salarial	$w_0 = 800$ u.m.

Solución:

De la ecuación (IV.19) deducimos que la oferta de trabajo de los individuos es

$$L_i^* = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{G}{(1-\alpha)w_i}\right), i = 1,\ldots,h, \tag{IV.54}$$

y su función indirecta de utilidad

$$V_i(w_i,\alpha,G) = 2\ln((1-\alpha)w_i + G) - \ln(1-\alpha) - \ln w_i - 2\ln 2, i = 1,\ldots,h. \tag{IV.55}$$

Para los $(n-h)$ individuos que sólo perciben la renta de garantía G, la función de utilidad indirecta es $V_j = \ln G, j = h+1,\ldots,n$.

Derivando (IV.54) y (IV.55) respecto a α y G:

$$\frac{\partial L_i^*}{\partial \alpha} = -\frac{G}{2(1-\alpha)^2 w_i}, i = 1, \ldots, h \qquad \text{(IV.56)}$$

$$\frac{\partial L_i^*}{\partial G} = -\frac{1}{2(1-\alpha)w_i}, i = 1, \ldots, h \qquad \text{(IV.57)}$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial \alpha} = -\frac{(1-\alpha)w_i - G}{((1-\alpha)w_i + G)(1-\alpha)}, i = 1, \ldots, h \qquad \text{(IV.58)}$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial G} = \frac{2}{(1-\alpha)w_i + G}, i = 1, \ldots, h. \qquad \text{(IV.59)}$$

Seguidamente, llevamos las igualdades (IV.20), (IV.24), (IV.25), (IV.54), (IV.55), (IV.56), (IV.57), (IV.58) y (IV.59) a los sistemas de ecuaciones (IV.49) al (IV.53). Así resulta:

$L_1^* = 0,376287$, del tiempo total sobre la unidad entre ocio y trabajo
$L_2^* = 0,388658$, del tiempo total sobre la unidad entre ocio y trabajo
$L_3^* = 0,404564$, del tiempo total sobre la unidad entre ocio y trabajo
$L_4^* = 0,416493$, del tiempo total sobre la unidad entre ocio y trabajo
$L_5^* = 0,425772$, del tiempo total sobre la unidad entre ocio y trabajo
$\alpha^* = 39,07\%$
$G^* = 407,04$ u.m

IV.5.2. Casos paticulares del modelo

Los dos siguientes modelos pueden considerarse como casos particulares del anterior:

1) El formado por dos individuos y el gobierno, en que un individuo tiene nivel de renta salarial unitaria o productividad $w_1 > w_0$ y la del otro es $w_2 < w_0$. Hemos de tomar $n = 2$ y $h = 1$.

2) El formado por n individuos y el gobierno, en que todos los individuos tienen un nivel de habilidad $w_i > w_0, i = 1, \ldots, n$. Hemos de tomar $h = n$.

IV.6. Colectivo con rentas salariales unitarias dadas por una función densidad

Desarrollamos un modelo de un colectivo formado por un conjunto de individuos y el gobierno, siguiendo las hipótesis generales de los anteriores. Las rentas salariales unitarias de los individuos vienen dadas por una distribución de probabilidad $F(w)$, absolutamente continua, cuyo rango de valores está comprendido entre $\underline{\omega}$ (que puede ser cero) y $\overline{\varpi}$ (que puede ser infinito). Una parte de la población, con nivel de renta unitaria $w < w_0$, sólo percibe la renta de garantía G.

Una vez los individuos han fijado su función indirecta de utilidad $V(w, \alpha, G)$, el gobierno determina los parámetros fiscales óptimos α^* y G^*. Con este objetivo planteamos el siguiente problema de optimización:

$$\left\{\begin{array}{c} \max \int_{\underline{\omega}}^{\overline{\varpi}} \Psi(V) dF(w) \\ s.a. \\ \alpha \int_{w_0}^{\overline{\varpi}} wL^* dF(w) - G \geq R_0 \\ G - G_0 \geq 0 \\ L_0^* \geq 0, \end{array}\right.$$

donde Ψ es la función de bienestar social seleccionada por el gobierno, L_0^* la oferta de trabajo óptima al nivel de renta salarial por unidad de tiempo de trabajo w_0 y R_0 las necesidades de recaudación. El lagrangiano del problema de maximización del bienestar social esperado es

$$\Im(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\alpha,G) = \int_{\underline{\omega}}^{\overline{\omega}} \Psi(V)dF(w) + \lambda_1(\alpha\int_{w_0}^{\overline{\omega}} wL^* dF(w) - G - R_0) + \lambda_2(G-G_0) + \lambda_3 L_0^*$$

y diferenciando respecto a cada una de las variables fiscales, α, G y los multiplicadores de Kuhn-Tucker, $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$. Las condiciones de primer orden que caracterizan la solución α^* y G^* son

$$\frac{\partial\Im}{\partial\alpha} = \int_{\underline{\omega}}^{\overline{\omega}} \Psi'(V)\frac{\partial V}{\partial\alpha}dF(w) + \lambda_1\int_{w_0}^{\overline{\omega}} w(L^* + \alpha\frac{\partial L^*}{\partial\alpha})dF(w) + \lambda_3\frac{\partial L_0^*}{\partial\alpha} = 0 \qquad \text{(IV.60)}$$

$$\frac{\partial\Im}{\partial G} = \int_{\underline{\omega}}^{\overline{\omega}} \Psi'(V)\frac{\partial V}{\partial G}dF(w) + \lambda_1\left(\alpha\int_{w_0}^{\overline{\omega}} w\frac{\partial L^*}{\partial G}dF(w) - 1\right) + \lambda_2 + \lambda_3\frac{\partial L_0^*}{\partial G} = 0 \qquad \text{(IV.61)}$$

$$-\lambda_1(\alpha\int_{w_0}^{\overline{\omega}} wL^* dF(w) - G - R_0) = 0 \qquad \text{(IV.62)}$$

$$-\lambda_2(G-G_0) = 0 \qquad \text{(IV.63)}$$

$$-\lambda_3 L_0^* = 0 \qquad \text{(IV.64)}$$

$$\alpha\int_{w_0}^{\overline{\omega}} wL^* dF(w) - G \geq R_0$$

$$G \geq 0$$

$$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \geq 0.$$

Analizando las posibles soluciones del problema de optimización para los valores de los parámetros $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, de las que resulten factibles, seleccionaremos las que maximicen el valor de $\int_{\omega}^{\varpi} \Psi(V) dF(w)$:

1) Para $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Como $\int_{\omega}^{\varpi} \Psi'(V) \frac{\partial V}{\partial \alpha} dF(w) < 0$. No se cumple, por ejemplo, la ecuacion (IV.60).

2) Para $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2, \lambda_3 > 0$. El sistema de ecuaciones resultante de (IV.63) y (IV.64) es

$$
\begin{aligned}
G &= G_0 \\
L_0^* &= 0.
\end{aligned}
\tag{IV.65}
$$

3) Para $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_1, \lambda_3 > 0$. El sistema de ecuaciones resultante de (IV.62) y (IV.64) es

$$
\begin{gathered}
\alpha \int_{w_0}^{\varpi} w L^* dF(w) = G + R_0 \\
L_0^* = 0.
\end{gathered}
\tag{IV.66}
$$

4) Para $\lambda_3 = 0$ y $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. De (IV.62) y (IV.63) resulta la posible solución

$$
G = G_0 \text{ y } \alpha = \frac{R_0 + G_0}{E(\theta) \int_{w_0}^{\varpi} w L^* dF(w)}. \tag{IV.67}
$$

5) Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 > 0$. De (IV.60), (IV.61) y (IV.64) resulta el sistema de ecuaciones:

$$
\begin{gathered}
\frac{\int_{\omega}^{\varpi} \Psi'(V) \frac{\partial V}{\partial \alpha} dF(w)}{\int_{\omega}^{\varpi} \Psi'(V) \frac{\partial V}{\partial G} dF(w)} = \frac{\frac{\partial L_0^*}{\partial \alpha}}{\frac{\partial L_0^*}{\partial G}} \\
L^*(w_0) = 0.
\end{gathered}
\tag{IV.68}
$$

6) Para $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ y $\lambda_2 > 0$. De (IV.61) resulta $\lambda_2 = -\int_{\omega}^{\varpi} \Psi'(V) \frac{\partial V}{\partial G} dF(w) < 0$, no

posible por las restricciones del problema de optimización.

7) Para $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ y $\lambda_1 > 0$. De (IV.60), (IV.61) y (IV.62) resulta el sistema de ecuaciones:

$$\frac{\int_{\underline{\omega}}^{\overline{\omega}} \Psi'(V)\frac{\partial V}{\partial \alpha}dF(w)}{\int_{\underline{\omega}}^{\overline{\omega}} \Psi'(V)\frac{\partial V}{\partial G}dF(w)} = \frac{\int_{w_0}^{\overline{\omega}} w(L^* + \alpha\frac{\partial L^*}{\partial \alpha})dF(w)}{\alpha\int_{w_0}^{\overline{\omega}} w\frac{\partial L^*}{\partial G}dF(w) - 1} \qquad \text{(IV.69)}$$

$$\alpha\int_{w_0}^{\overline{\omega}} wL^* dF(w) = G + R_0.$$

8) Para $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$. El sistema de ecuaciones resultante de (IV.62), (IV.63) y (IV.64) es incompatible.

Los valores óptimos α^* y G^* los obtenemos de (IV.65), (IV.66), (IV.67), (IV.68) y (IV.69).

IV.6.1. Ejemplo de aplicación

Sea el modelo anterior con las siguientes características específicas:

Función de bienestar social	$\Psi(V) = V$
Función de utilidad de los individuos	$U = U(Y,L) = \ln Y + \ln(1-L)$
Función densidad de las habilidades	$f(w) = \begin{cases} \dfrac{(\mu-1)\omega^{\mu-1}}{w^{\mu}} & \text{para } w \geq \omega \\ 0 & \text{para } w < \omega \end{cases}$
Nivel mínimo de renta salarial unitaria	$w_0 = 2.150$ u.m.
Valor del parámetro ω	$\omega = 2.000$ u.m.
Valor del parámetro μ	$\mu = 3,1$
Necesidades de recaudación	$R_0 = 300$ u.m.
Valor mínimo de la renta de garantía	$G_0 = 50$ u.m.

De la ecuación (IV.19), deducimos que la oferta de trabajo de los individuos es

$$L^* = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{G}{(1-\alpha)w}\right) \qquad \text{(IV.70)}$$

y sus funciones de utilidad indirecta

$$V(w,\alpha,G) = 2\ln((1-\alpha)w + G) - \ln(1-\alpha) - \ln w - 2\ln 2. \qquad \text{(IV.71)}$$

Para los individuos que sólo perciben la renta de garantía G, sus funciones de utilidad indirecta son

$$V(G) = \ln G. \qquad \text{(IV.72)}$$

Derivando (IV.70) y (IV.71) respecto a α y G:

$$\frac{\partial L^*}{\partial \alpha} = -\frac{G}{2(1-\alpha)^2 w} \qquad \text{(IV.73)}$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial G} = -\frac{1}{2(1-\alpha)w}. \tag{IV.74}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = -\frac{(1-\alpha)w - G}{((1-\alpha)w + G)(1-\alpha)} \tag{IV.75}$$

$$\frac{\partial V}{\partial G} = \frac{2}{(1-\alpha)w + G}. \tag{IV.76}$$

Llevando las expresiones (IV.20), (IV.24), (IV.25), (IV.70), (IV.72), (IV.73), (IV.74), (IV.75) y (IV.76) a (IV.65), (IV.66), (IV.67), (IV.68) y (IV.69) nos proporcionan los valores óptimos $\alpha^* = 20,16\%$ y $G^* = 50$ u.m.

CAPÍTULO V

Impuesto lineal y oferta de trabajo con aleatoriedad

Al igual que en el capítulo anterior, desarrollamos la oferta de trabajo y el impuesto lineal sobre la renta salarial. La tasa real de aprovechamiento del tiempo de trabajo del individuo no coincide con su función de oferta. Los trabajadores planifican inicialmente una oferta de trabajo deseada, pero por diversas circunstancias imprevistas (cierre patronal, incapacidades laborales transitorias, circunstancias familiares, problemas personales, horas extraordinarias, etc.) se les presenta incertidumbre en su tiempo real de trabajo y, en consecuencia, en sus ingresos procedentes del factor trabajo. La progresividad del tipo impositivo medio estará en función de la renta de garantía G, que todos los individuos perciben y que se descuenta de la base imponible.

En el caso que los ingresos salariales brutos del individuo dependen de su renta por unidad de tiempo de trabajo w y del tiempo real trabajado incierto, el gobierno puede buscar compensar la incertidumbre a los individuos a través de los parámetros fiscales (tipo impositivo lineal α y renta de garantía G), pero que, a la vez, incentiven la eficiencia económica. La terna: ayuda social, crecimiento económico y necesidades de recaudación genera una problemática fiscal interesante de analizar y formalizar matemáticamente.

V.1. Algunas hipótesis generales

Utilizaremos los mismos modelos y muchas hipótesis del capítulo anterior, con las siguientes particularidades:

1) El tiempo real de trabajo presenta un componente aleatorio. El individuo planifica su oferta de trabajo L considerando estratégicamente esta circunstancia.

2) La función a maximizar por parte del individuo será su utilidad esperada.

3) La función de bienestar social Ψ o el bienestar social medio $\int_{\underline{\omega}}^{\overline{\omega}} \Psi dF(w)$, por parte del gobierno, será una función resultante de las utilidades individuales esperadas maximizadas dependiente de los parámetros fiscales α y G.

Otras hipótesis se irán añadiendo a lo largo del capítulo.

V.2. La utilidad esperada del individuo. Hipótesis adicional

Consideramos que la oferta real de trabajo del individuo depende de una oferta planificada L y de un parámetro θ: $\zeta(L,\theta) = L\theta$. El individuo tiene poder de decisión sobre la variable L pero no del parámetro θ, sobre el cual no puede ejercer ningún control. Formalmente $L \in R_+$, donde R_+ es el conjunto de los números reales positivos y el cero, y θ es una variable aleatoria real continua y positiva, con función de distribución H y esperanza matemática $0 < E(\theta) \leq 1$. Con esta formalización para cada elección de L el individuo desempeña un tiempo real de trabajo $\zeta(L,\theta)$, que también será una variable aleatoria al serlo θ.

Los ingresos salariales netos aleatorios η del individuo, al igual que en el capítulo anterior, dependen de su renta salarial unitaria o nivel de habilidad w, del tipo impositivo lineal α y de la renta de garantía G. Concretamente,

$$\eta = \eta(L,\theta) = (1-\alpha)wL\theta + G. \tag{V.1}$$

Con fundamentos teóricos y razonamientos parecidos a los del apartado 2 del capítulo III, llegamos a que existe una función real de dos variables u que asigna a cada renta salarial neta cierta Y y a cada tiempo de trabajo, también cierto L, una utilidad $u(Y,L)$, de modo que la utilidad de un ingreso neto salarial incierto η y un tiempo de trabajo incierto ζ puede ser evaluada de la forma:

$$\hat{U}(\eta,\zeta) = \hat{U}(\eta(L,\theta),\zeta(L,\theta)) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} u((1-\alpha)wxL + G, xL)dH = E(u(\eta(L,\theta),\zeta(L,\theta))),$$

donde $E(.)$ designa la esperanza matemática de la variable aleatoria correspondiente con $0 \leq \theta_1 < \theta_2$ y $0 < E(\theta) \leq 1$. La función u la suponemos con las mismas hipótesis que la función de utilidad del capítulo anterior.

Una vez establecida la utilidad esperada del individuo, podemos reformular la hipótesis i) del capítulo anterior adaptada al modelo aleatorio: *para que la elasticidad unitaria de la oferta de trabajo planificada L^* y el tipo impositivo lineal α sea $\in_{L^*,\alpha} > -1$, se debe cumplir que*

$$\alpha w E(\theta)E(u_\eta) + L((1-\alpha)w^2E(\theta)E(\theta u_{\eta\eta}) + E(\theta u_{\zeta\zeta})) < 0. \tag{V.2}$$

V.3. El problema del individuo

El individuo elegirá un tiempo planificado óptimo de trabajo L^*, teniendo en cuenta la incertidumbre, maximizando su utilidad esperada $\hat{U}(\eta,\zeta)$ sujeta la restricción de los ingresos netos salariales esperados $E(\eta)$. Concretamente, se plantea el siguiente problema de optimización:

$$\begin{cases} \hat{U}^*(\eta,\zeta) = \max E(u(\eta,\zeta)) \\ s.a. \\ E(\eta) = E((1-\alpha)wL\theta + G) \\ L \geq 0, \end{cases}$$

donde $E(.)$ es la esperanza matemática, η los ingresos netos salariales aleatorios, ζ la oferta de trabajo aleatoria y L la oferta de trabajo planificada, la variable del problema de optimización.

La restricción presupuestaria del individuo viene expresada por

$$E(\varsigma) = (1-\alpha)wLE(\theta) + G, \tag{V.3}$$

siendo α el tipo impositivo, w la renta salarial unitaria o la productividad del individuo, θ la variable aleatoria continua asociada a la oferta de trabajo y G la renta de garantía.

Formando el lagrangiano del problema de optimización

$$\Im(\lambda_1,\lambda_2,E(\eta),L) = E(u(\eta,\zeta)) + \lambda_1((1-\alpha)wLE(\theta) + G - E(\eta)) + \lambda_2 L$$

y diferenciando respecto a cada una de las variables η, L, y los multiplicadores de Kuhn-Tucker, λ_1, λ_2. Las condiciones de primer orden son

$$\frac{\partial\Im}{\partial\eta} = E(u_\eta(\eta,\zeta)) - \lambda_1 = 0 \tag{V.4}$$

$$\frac{\partial\Im}{\partial L} = E(\theta u_\zeta(\eta,\zeta)) + \lambda_1(1-\alpha)wE(\theta) + \lambda_2 = 0 \tag{V.5}$$

$$-\lambda_2 L = 0 \tag{V.6}$$

$$E(\eta) - (1-\alpha)wLE(\theta) - G = 0$$

$$L \geq 0$$

$$\lambda_2 \geq 0.$$

Analizando las posibles soluciones del problema de optimización para los valores de los parámetros λ_1, λ_2:

1) De (V.4) deducimos que debe ser $\lambda_1 > 0$.

2) Para $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 = 0$. De (V.4) y (V.5) resulta la ecuación:

$$E(u_\eta(\eta,\zeta))(1-\alpha)wE(\theta) + E(\theta u_\zeta(\eta,\zeta)) = 0. \tag{V.7}$$

3) Para $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. De (V.4), (V.5) y (V.6) obtenemos:

$$(1-\alpha)wu_\eta(G,0) + u_\zeta(G,0) \leq 0 \text{ y } L = 0. \tag{V.8}$$

En los terminos y razonamientos parecidos a las proposiciones IV.2.1 y IV.2.3 podemos enunciar:

Proposición V.3.1. *Existe una renta salarial crítica por unidad de tiempo de trabajo v tal que*

$$L(w) > 0 \text{ para } w > v$$
$$L(w) = 0 \text{ para } w \leq v.$$

Proposición V.3.2. *Al ser la elasticidad entre la oferta óptima de trabajo planeada L^* y el tipo impositivo lineal α superior a -1, entonces*

$$L^* + \alpha \frac{\partial L^*}{\partial \alpha} > 0.$$

Al aumentar las ayudas sociales, por parte del gobierno, los individuos tienden a reducir su oferta de trabajo. En estos términos anunciamos la siguiente proposición:

Proposición V.3.3. *La oferta óptima de trabajo planeada $L^* = L^*(w, \alpha, G)$ es una función no creciente con la renta de garantía G.*

Demostración. De las hipótesis iniciales sobre la función de utilidad u y derivando la igualdad (V.7) respecto a G, resulta:

$$\frac{\partial L^*}{\partial G} = -\frac{(1-\alpha)wE(\theta)E(u_{\eta^*\eta^*})}{(1-\alpha)^2 w^2 E(\theta u_{\eta^*\eta^*}) + E(\theta^2 u_{\zeta^*\zeta^*})} \leq 0 \,\square$$

V.4. Colectivo formado por un individuo y el gobierno

Consideramos que la productividad del individuo es $w_1 > w_0$. Una vez fijada la oferta planificada de trabajo L^*, resultante de la maximización de su utilidad esperada $\hat{U}(\eta, \zeta)$, el gobierno determina los parámetros fiscales óptimos α^* y G^*. Con este objetivo planteamos el problema de optimización:

$$\begin{cases} \max \Psi(\hat{U}_1^*) \\ s.a. \\ \alpha w_1 L_1^* E(\theta) - G \geq R_0 \\ G - G_0 \geq 0 \\ L_0^* \geq 0, \end{cases}$$

donde Ψ es la función de bienestar social seleccionada por el gobierno, $\hat{U}_1^* = \hat{U}_1^*(w_1, \alpha, G)$ la utilidad esperada màxima del individuo, L_0^* la oferta de trabajo planificada óptima al nivel de renta salarial por unidad de tiempo de trabajo w_0 y R_0 las necesidades esperadas de recaudación. El lagrangiano del problema de maximización es

$$\Im(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \alpha, G) = \Psi(\hat{U}_1^*) + \lambda_1(\alpha w_1 L_1^* E(\theta) - G - R_0) + \lambda_2(G - G_0) + \lambda_3 L_0^*$$

y diferenciando respecto a cada una de las variables fiscales, α, G y los multiplicadores de Kuhn-Tucker, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Las condiciones de primer orden que caracterizan la solución α^* y G^* son

$$\frac{\partial \Im}{\partial \alpha} = \Psi'(\hat{U}_1^*) \frac{\partial \hat{U}_1^*}{\partial \alpha} + \lambda_1 w_1 E(\theta) \left(L_1^* + \alpha \frac{\partial L_1^*}{\partial \alpha} \right) + \lambda_3 \frac{\partial L_0^*}{\partial \alpha} = 0 \qquad \text{(V.9)}$$

$$\frac{\partial \Im}{\partial G} = \Psi'(\hat{U}_1^*)\frac{\partial \hat{U}_1^*}{\partial G} + \lambda_1\left(\alpha w_1 E(\theta)\frac{\partial L_1^*}{\partial G} - 1\right) + \lambda_2 + \lambda_3\frac{\partial L_0^*}{\partial G} = 0 \qquad \text{(V.10)}$$

$$-\lambda_1(\alpha w_1 E(\theta)L_1^* - G - R_0) = 0 \qquad \text{(V.11)}$$

$$-\lambda_2(G - G_0) = 0 \qquad \text{(V.12)}$$

$$-\lambda_3 L_0^* = 0 \qquad \text{(V.13)}$$

$$\alpha w_1 E(\theta)L_1^* - G \geq R_0$$

$$G - G_0 \geq 0$$

$$L_0^* \geq 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0.$$

Analizando las posibles soluciones del problema de optimización para los valores de los parámetros $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, de las que resulten factibles, deberemos seleccionar aquellas que maximicen el valor de $\Psi(\hat{U}_1^*)$:

1) Para $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Como $\Psi'(\hat{U}_1^*)\frac{\partial \hat{U}_1^*}{\partial \alpha} < 0$, no se cumple, por ejemplo, la ecuacion (V.9).

2) Para $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2, \lambda_3 > 0$. El sistema de ecuaciones resultante de (V.12) y (V.13) es

$$
\begin{aligned}
G &= G_0 \\
L_0^* &= 0.
\end{aligned}
\tag{V.14}
$$

3) Para $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_1, \lambda_3 > 0$. El sistema de ecuaciones resultante de (V.11) y (V.13) es

$$
\begin{aligned}
L_0^* &= 0 \\
\alpha w_1 E(\theta) L_1^* - G &= R_0.
\end{aligned}
\tag{V.15}
$$

4) Para $\lambda_3 = 0$ y $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. De (V.11) y (V.12) resulta la posible solución

$$
G = G_0 \text{ y } \alpha = \frac{R_0 + G_0}{w_1 E(\theta) L_1^*}. \tag{V.16}
$$

5) Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 > 0$. De (V.9), (V.10) y (V.13) resulta el sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
\frac{\dfrac{\partial \hat{U}_1^*}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial \hat{U}_1^*}{\partial G}} &= \frac{\dfrac{\partial L_0^*}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial L_0^*}{\partial G}} \\
L_0^* &= 0.
\end{aligned}
\tag{V.17}
$$

6) Para $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ y $\lambda_2 > 0$. De (V.10) resulta $\lambda_2 = -\Psi'(\hat{U}_1^*)\dfrac{\partial \hat{U}_1^*}{\partial G} < 0$, no posible por las restricciones del problema de optimización.

7) Para $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ y $\lambda_1 > 0$. De (V.9), (V.10) y (V.11) resulta el sistema de ecuaciones:

$$
\frac{\dfrac{\partial \hat{U}_1^*}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial \hat{U}_1^*}{\partial G}} = \frac{w_1 E(\theta)\left(L_1^* + \alpha \dfrac{\partial L_1^*}{\partial \alpha}\right)}{\alpha w_1 E(\theta) \dfrac{\partial L_1^*}{\partial G} - 1} \tag{V.18}
$$

$$
\alpha w_1 E(\theta) L_1^* = G + R_0.
$$

8) Para $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$. El sistema de ecuaciones resultante de (V.11), (V.12) y (V.13) es incompatible.

Los valores óptimos α^* y G^* los obtenemos de (V.14), (V.15), (V.16), (V.17) y (V.18).

V.4.1. Funciones de utilidad cuasilineales en la renta neta salarial

Desde el punto de vista analítico las soluciones del problema de la imposición óptima sobre las rentas salariales resultan bastante complejas, sin establecer ciertas restricciones sobre las funciones de utilidad y las preferencias individuales. Siguiendo a Bourguignon y Spadaro (2000), los casos que han atraído mucho la atención en los últimos años y que permiten identificar claramente los parámetros estructurales del problema son las funciones de utilidad individual cuasilineales en la renta neta salarial e isoelásticas en la oferta de trabajo. En los ejemplos prácticos muchas veces, a partir de ahora, utilizaremos las funciones de utilidad individual del tipo:

$$U(Y,L) = aY - \frac{bL^{\frac{1}{\in}+1}}{\frac{1}{\in}+1} \tag{V.19}$$

en las que Y es la renta neta salarial o renta disponible por el individuo, L la oferta de trabajo y $a, b, \in$ son constantes positivas. La constante $\in$ representa la elasticidad salario unitario w de la oferta de trabajo.

V.4.2. Ejemplo de aplicación

Sea el modelo anterior con los valores para los parámetros:

Función de bienestar social	$\Psi(\hat{U}_1^*) = -\frac{1}{\hat{U}_1^*}$
Función de utilidad individual del tipo (V.19) con $a = b = \in = 1$	$u(\eta,\zeta) = \eta - \frac{\zeta^2}{2}$
Función densidad de la variable θ	$h(x) = \begin{cases} 1,025e^{-1,025x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
Nivel mínimo de renta salarial unitaria	$w_0 = 40$ u.m.
Renta salarial unitaria del individuo	$w_1 = 200$ u.m.
Renta de mínima garantía	$G_0 = 1500$ u.m.
Recaudación esperada	$R_0 = 6.000$ u.m.

Obtenemos los valores óptimos

$L_1^* = 102,50$ u.t.
$\alpha^* = 48,75\%$
$G^* = 3.850$ u.m.

V.5. Colectivo formado por dos individuos y el gobierno

En este modelo consideramos que el nivel de habilidad de los dos individuos es $w_i > w_0, i = 1.2$. Una vez fijada la oferta planificada de trabajo por parte de los individuos $L_i^*, i = 1,2,$ resultante de la maximización de su utilidad esperada $\hat{U}_i(\eta,\zeta)), i = 1,2,$ el gobierno determina los parámetros fiscales óptimos α^* y G^*. Con este objetivo planteamos el problema de optimización:

$$\begin{cases} \max \Psi(\hat{U}_1^*, \hat{U}_2^*) \\ s.a. \\ \alpha\ E(\theta) \sum_{i=1}^{2} w_i L_i^* - 2G \geq R_0 \\ G - G_0 \geq 0 \\ L_0^* \geq 0, \end{cases}$$

donde Ψ es la función de bienestar social seleccionada por el gobierno,

$\hat{U}_i^* = \hat{U}_i^*(w_i, \alpha, G), i = 1,2$ la utilidad esperada maximizada de los individuos, L_0^* la oferta de trabajo óptima planificada al nivel de renta salarial por unidad de tiempo de trabajo w_0 y R_0 las necesidades esperadas de recaudación. El lagrangiano del problema de maximización de la función de bienestar social Ψ es

$$\Im(\lambda_1, \lambda_2, \alpha, G) = \Psi(\hat{U}_1^*, \hat{U}_2^*) + \lambda_1(\alpha E(\theta) \sum_{i=1}^{2} w_i L_i^* - 2G - R_0) + \lambda_2(G - G_0) + \lambda_3 L_0^*$$

y diferenciando respecto a una cada de las variables fiscales, α, G y los multiplicadores de Kuhn-Tucker, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Las condiciones de primer orden que caracterizan la solución α^* y G^* son

$$\frac{\partial \Im}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{2} \Psi_{\hat{U}_i^*}(\hat{U}_1^*, \hat{U}_2^*) \frac{\partial \hat{U}_i^*}{\partial \alpha} + \lambda_1 E(\theta) \sum_{i=1}^{2} w_i \left(L_i^* + \alpha \frac{\partial L_i^*}{\partial \alpha} \right) + \lambda_3 \frac{\partial L_0^*}{\partial \alpha} = 0 \qquad \text{(V.20)}$$

$$\frac{\partial \Im}{\partial G} = \sum_{i=1}^{2} \Psi_{\hat{U}_i^*}(\hat{U}_1^*, \hat{U}_2^*) \frac{\partial \hat{U}_i^*}{\partial G} + \lambda_1 \left(\alpha\, E(\theta) \sum_{i=1}^{2} w_i \frac{\partial L_i^*}{\partial G} - 2 \right) + \lambda_2 + \lambda_3 \frac{\partial L_0^*}{\partial G} = 0 \qquad \text{(V.21)}$$

$$-\lambda_1(\alpha\, E(\theta) \sum_{i=1}^{2} w_i L_i^* - 2G - R_0) = 0 \qquad \text{(V.22)}$$

$$-\lambda_2(G - G_0) = 0 \qquad \text{(V.23)}$$

$$-\lambda_3 L_0^* = 0 \qquad \text{(V.24)}$$

$$\alpha E(\theta) \sum_{i=1}^{2} w_i L_i^* - 2G \geq R_0$$

$$G - G_0 \geq 0$$

$$L_0^* \geq 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0.$$

Analizando las posibles soluciones del problema de optimización para los valores de los parámetros $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, de las que resulten factibles, seleccionaremos las que maximicen el valor de $\Psi(\hat{U}_1^*, \hat{U}_2^*)$:

1) Para $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Como $\sum_{i=1}^{2} \Psi_{\hat{U}_i^*}(\hat{U}_1^*, \hat{U}_2^*) \frac{\partial \hat{U}_i^*}{\partial \alpha} < 0$. No se cumple, por ejemplo, la ecuacion (V.20).

2) Para $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2, \lambda_3 > 0$. El sistema de ecuaciones resultante de (V.23) y (V.24) es

$$\begin{aligned} G &= G_0 \\ L_0^* &= 0. \end{aligned} \tag{V.25}$$

3) Para $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_1, \lambda_3 > 0$. El sistema de ecuaciones resultante de (V.22) y (V.24) es

$$\begin{gathered} \alpha\, E(\theta) \sum_{i=1}^{2} w_i L_i^* = 2G + R_0 \\ L_0^* = 0. \end{gathered} \tag{V.26}$$

4) Para $\lambda_3 = 0$ y $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. De (V.22) y (V.23) resultan las expresiones de una posible solución:

$$G = G_0 \tag{V.27}$$

$$\alpha = \frac{R_0 + 2G_0}{E(\theta)\sum_{i=1}^{2} w_i L_i^*}.$$

5) Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 > 0$. De (V.20), (V.21) y (V.24) resulta el sistema de ecuaciones:

$$\frac{\sum_{i=1}^{2} \Psi_{\hat{U}_i^*}(\hat{U}_1^*, \hat{U}_2^*)\frac{\partial \hat{U}_i^*}{\partial \alpha}}{\sum_{i=1}^{2} \Psi_{\hat{U}_i^*}(\hat{U}_1^*, \hat{U}_2^*)\frac{\partial \hat{U}_i^*}{\partial G}} = \frac{\frac{\partial L_0^*}{\partial \alpha}}{\frac{\partial L_0^*}{\partial G}} \tag{V.28}$$

$$L_0^* = 0.$$

6) Para $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ y $\lambda_2 > 0$. De (V.21), resulta $\lambda_2 = -\sum_{i=1}^{2} \Psi_{\hat{U}_i^*}(\hat{U}_1^*, \hat{U}_2^*)\frac{\partial \hat{U}_i^*}{\partial G} < 0$. No posible, por las restricciones del problema de optimización.

7) Para $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ y $\lambda_1 > 0$. De (V.20), (V.21) y (V.22) resulta el sistema de ecuaciones:

$$\frac{\sum_{i=1}^{2} \Psi_{\hat{U}_i^*}(\hat{U}_1^*, \hat{U}_2^*)\frac{\partial \hat{U}_i^*}{\partial \alpha}}{\sum_{i=1}^{2} \Psi_{\hat{U}_i^*}(\hat{U}_1^*, \hat{U}_2^*)\frac{\partial \hat{U}_i^*}{\partial G}} = \frac{E(\theta)\sum_{i=1}^{2} w_i\left(L_i^* + \alpha\frac{\partial L_i^*}{\partial \alpha}\right)}{\alpha\, E(\theta)\sum_{i=1}^{2} w_i\frac{\partial L_i^*}{\partial G} - 2} \tag{V.29}$$

$$\alpha\, E(\theta)\sum_{i=1}^{2} w_i L_i = 2G + R_0.$$

8) Para $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$. El sistema de ecuaciones resultante de (V.22), (V.23) y (V.24) es

incompatible.

Los valores óptimos α^* y G^* se obtienen de (V.25), (V.26), (V.27), (V.28) y (V.29).

V.5.1. Ejemplo de aplicación

Sea el modelo anterior con los valores para los parámetros:

Función de bienestar social	$\Psi(\hat{U}_1^*, \hat{U}_2^*) = -\frac{1}{e^{\hat{U}_1^*}} - \frac{1}{e^{\hat{U}_2^*}}$
Función de utilidad individual	$u(\eta, \zeta) = \eta - \frac{\zeta^2}{2}$
Función densidad de la variable θ	$h(x) = \begin{cases} 1,025e^{-1,025x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
Nivel mínimo de renta salarial unitaria	$w_0 = 40$ u.m.
Renta salarial unitaria del individuo 1	$w_1 = 200$ u.m.
Renta salarial unitaria del individuo 2	$w_2 = 300$ u.m.
Renta de mínima garantía	$G_0 = 1500$ u.m..
Recaudación esperada	$R_0 = 10.000$ u.m

Obtenemos los valores óptimos

$L_1^* = 100$ u.t.t
$L_2^* = 150$ u.t.t
$\alpha^* = 50,00\%$
$G^* = 9.853,66$ u.m.

V.6. Colectivo formado por n individuos y el gobierno

Consideramos un colectivo formado por n individuos, h de los cuales tienen un nivel de productividad $w_i > w_0, i = 1, \ldots, h$ y los restantes sólo perciben la renta de garantía G. Suponemos que los individuos que trabajan son los h primeros y sus niveles de habilidad en orden creciente son $w_1 \leq w_2 \leq \ldots \leq w_h$.

Una vez fijada la oferta planificada de trabajo por parte de los individuos $L_i^*, i = 1, \ldots, h$, resultante de la maximización de su utilidad esperada $\hat{U}_i(\eta,\zeta)), i = 1,\ldots,h$, el gobierno determina los parámetros fiscales óptimos α^* y G^*. Con este objetivo planteamos el problema de optimización:

$$\begin{cases} \max \Psi(\hat{U}_1,\ldots,\hat{U}_n) \\ s.a. \\ \alpha E(\theta)\sum_{i=1}^{h} w_i L_i^* - nG \geq R_0 \\ G - G_0 \geq 0 \\ L_0^* \geq 0, \end{cases}$$

donde Ψ es la función de bienestar social seleccionada por el gobierno, $\hat{U}_i^* = \hat{U}_i^*(w_i,\alpha,G), i = 1,\ldots,h$ y $\hat{U}_j^* = u_j(G,0), j = h+1,\ldots,n$ la utilidad esperada maximizada de los individuos, L_0^* la oferta de trabajo óptima planificada al nivel de renta salarial por unidad de tiempo de trabajo w_0 y R_0 las necesidades esperadas de recaudación. El lagrangiano del problema de maximización de la función de bienestar social Ψ es

$$\Im(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\alpha,G) = \Psi(\hat{U}_1,\ldots,\hat{U}_n) + \lambda_1(\alpha E(\theta)\sum_{i=1}^{h} w_i L_i^* - nG - R_0) + \lambda_2(G - G_0) + \lambda_3 L_0^*$$

y diferenciando respecto a una cada de las variables fiscales, α, G y los multiplicadores de Kuhn-Tucker, $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$. Las condiciones de primer orden que caracterizan la solución α^* y G^* son

$$\frac{\partial \Im}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{n} \Psi_{\hat{U}_i}\frac{\partial \hat{U}_i}{\partial \alpha} + \lambda_1 E(\theta)\sum_{i=1}^{h} w_i\left(L_i^* + \alpha\frac{\partial L_i^*}{\partial \alpha}\right) + \lambda_3\frac{\partial L_0^*}{\partial \alpha} = 0 \qquad \text{(V.30)}$$

$$\frac{\partial \Im}{\partial G} = \sum_{i=1}^{n} \Psi_{\hat{U}_i} \frac{\partial \hat{U}_i}{\partial G} + \lambda_1 \left(\alpha\, E(\theta) \sum_{i=1}^{h} w_i \frac{\partial L_i^*}{\partial G} - n \right) + \lambda_2 + \lambda_3 \frac{\partial L_0^*}{\partial G} = 0 \tag{V.31}$$

$$-\lambda_1 (\alpha E(\theta) \sum_{i=1}^{h} w_i L_i^* - nG - R_0) = 0 \tag{V.32}$$

$$-\lambda_2 (G - G_0) = 0 \tag{V.33}$$

$$-\lambda_3 L_0^* = 0 \tag{V.34}$$

$$\alpha E(\theta) \sum_{i=1}^{h} w_i L_i^* - nG \geq R_0$$

$$G - G_0 \geq 0$$

$$L_0^* \geq 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0.$$

Analizando las posibles soluciones del problema de optimización para los valores de los parámetros $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, de las que resulten factibles, seleccionaremos las que maximicen el valor de $\Psi(\hat{U}_1, \ldots, \hat{U}_n)$:

1) Para $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Como $\sum_{i=1}^{n} \Psi_{\hat{U}_i} \frac{\partial \hat{U}_i}{\partial \alpha} < 0$. No se cumple, por ejemplo, la ecuacion (V.30).

2) Para $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2, \lambda_3 > 0$. El sistema de ecuaciones resultante de (V.33) y (V.34) es

$$G = G_0 \tag{V.35}$$
$$L_0^* = 0.$$

3) Para $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_1, \lambda_3 > 0$. El sistema de ecuaciones resultante de (V.32) y (V.34) es

$$\alpha E(\theta) \sum_{i=1}^{h} w_i L_i^* = nG + R_0 \tag{V.36}$$
$$L_0^* = 0.$$

4) Para $\lambda_3 = 0$ y $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. De (V.32) y (V.33) resulta una posible solución de las expresiones:

$$G = G_0 \tag{V.37}$$

$$\alpha = \frac{R_0 + nG_0}{E(\theta) \sum_{i=1}^{h} w_i L_i^*}.$$

5) Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 > 0$. De (V.30), (V.31) y (V.34) resulta el sistema de ecuaciones:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \Psi_{\hat{U}_i} \frac{\partial \hat{U}_i}{\partial \alpha}}{\sum_{i=1}^{n} \Psi_{\hat{U}_i} \frac{\partial \hat{U}_i}{\partial G}} = \frac{\frac{\partial L_0^*}{\partial \alpha}}{\frac{\partial L_0^*}{\partial G}} \tag{V.38}$$
$$L_0^* = 0.$$

6) Para $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ y $\lambda_2 > 0$. De (V.31), resulta $\lambda_2 = -\sum_{i=1}^{n} \Psi_{\hat{U}_i} \frac{\partial \hat{U}_i}{\partial G} < 0$. No posible por

las restricciones del problema de optimización.

7) Para $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ y $\lambda_1 > 0$. De (V.30), (V.31) y (V.32) resulta el sistema de ecuaciones:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \Psi_{\hat{U}_i} \frac{\partial \hat{U}_i}{\partial \alpha}}{\sum_{i=1}^{n} \Psi_{\hat{U}_i} \frac{\partial \hat{U}_i}{\partial G}} = \frac{E(\theta) \sum_{i=1}^{h} w_i \left(L_i^* + \alpha \frac{\partial L_i^*}{\partial \alpha} \right)}{\alpha\, E(\theta) \sum_{i=1}^{h} w_i \frac{\partial L_i^*}{\partial G} - n} \tag{V.39}$$

$$\alpha E(\theta) \sum_{i=1}^{h} w_i L_i^* = nG + R_0.$$

8) Para $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$. El sistema de ecuaciones resultante de (V.32), (V.33) y (V.34) es incompatible.

Los valores óptimos α^* y G^* los obtenemos de (V.35), (V.36), (V.37), (V.38) y (V.39).

V.6.1. Ejemplo de aplicación

Sea el modelo anterior con las siguientes características específicas:

Número de individuos	$n = 1.000$
Sólo perciben la renta de garantía	$n - h = 200$
100 individuos con renta unitaria	$w_1 = 200$ u.m.
250 individuos con renta unitaria	$w_2 = 300$ u.m.
150 individuos con renta unitaria	$w_3 = 350$ u.m.
170 individuos con renta unitaria	$w_4 = 400$ u.m.
130 individuos con renta unitaria	$w_5 = 450$ u.m.
Necesidades esperadas de recaudación	$R_0 = 1.000.000$ u.m.
Valor mínimo de la renta salarial	$w_0 = 40$ u.m.
Función de utilidad individual	$u_i = u_i(\pi_i,\zeta_i) = \eta_i - \frac{\zeta_i^2}{2}, i = 1,\ldots,h$
Función de utilidad sin renta salarial	$u_j = u(G,0) = G, j = h+1,\ldots,n$
Valor mínimo de la renta de garantía	$G_0 = 1.500$ u.m.
Función densidad de la variable θ	$h(x) = \begin{cases} 1,025e^{-1,025x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
Función de bienestar social	$\Psi(\hat{U}_1^*,\ldots,\hat{U}_n^*) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt[3]{\hat{U}_i^{*2}}$

Obtenemos los valores óptimos

$L_1^* = 102,26$ u.t.t
$L_2^* = 153,39$ u.t.t
$L_3^* = 178,95$ u.t.t.
$L_4^* = 204,52$ u.t.t
$L_5^* = 230,08$ u.t.t
$\alpha^* = 48,87\%$
$G^* = 23.962,87$ u.m

V.6.2. Casos paticulares del modelo

Los dos siguientes modelos pueden considerarse como casos particulares del modelo anterior:

1) El formado por dos individuos y el gobierno, en que un individuo tiene nivel de renta salarial unitaria o productividad $w_1 > w_0$ y la del otro es $w_2 < w_0$. Hemos de tomar $n = 2$ y $h = 1$.

2) El formado por n individuos y el gobierno, en que todos los individuos tienen un nivel de habilidad $w_i > w_0, i = 1, \ldots, n$. Hemos de tomar $h = n$.

V.7. Colectivo con productividades dadas por una función densidad

Desarrollamos un modelo de un colectivo formado por un conjunto de individuos y el gobierno, siguiendo las hipótesis generales de los precedentes. Las rentas salariales unitarias de los individuos vienen dadas por una distribución de probabilidad $F(w)$, absolutamente continua, cuyo rango de valores está comprendido entre $\underline{\omega}$ (que puede ser cero) y $\overline{\omega}$ (que puede ser infinito). Una parte de la población, con nivel de renta unitaria $w < w_0$, sólo percibe la renta de garantía G.

Una vez fijada la oferta planificada de trabajo por parte de los individuos L^*, resultante de la maximización de su utilidad esperada $\hat{U}(\eta, \zeta))$, el gobierno determina los parámetros fiscales óptimos α^* y G^*. Con este objetivo planteamos el siguiente problema de optimización:

$$
\left\{
\begin{array}{c}
\max \displaystyle\int_{\underline{\omega}}^{\overline{\omega}} \Psi(\hat{U}^*) dF(w) \\
s.a. \\
\alpha E(\theta) \displaystyle\int_{w_0}^{\overline{\omega}} wL^* dF(w) - G \geq R_0 \\
G - G_0 \geq 0 \\
L_0^* \geq 0,
\end{array}
\right.
$$

donde Ψ es la función de bienestar social seleccionada por el gobierno, $\hat{U}^* = \hat{U}^*(w, \alpha, G)$ y $\hat{U}^* = u(G, 0)$, para los individuos que sólo perciben la renta de garantía, la utilidad esperada maximizada de los individuos, L_0^* la oferta de trabajo óptima planificada al nivel de renta salarial por unidad de tiempo de trabajo w_0 y R_0 las necesidades esperadas de recaudación. El lagrangiano del problema de maximización de la función de bienestar social Ψ es

$$\begin{aligned}\Im(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\alpha,G) &= \int_{\underline{\omega}}^{\overline{\varpi}} \Psi(\hat{U}^*)dF(w) \\ &+ \lambda_1(\alpha E(\theta)\int_{w_0}^{\overline{\varpi}} wL^*dF(w) - G - R_0) + \lambda_2(G-G_0) + \lambda_3 L^*(w_0)\end{aligned}$$

y diferenciando respecto a cada una de las variables fiscales, α, G y los multiplicadores de Kuhn-Tucker, $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$. Las condiciones de primer orden que caracterizan la solución α^* y G^* son:

$$\frac{\partial\Im}{\partial\alpha} = \int_{\underline{\omega}}^{\overline{\varpi}} \Psi'(\hat{U}^*)\frac{\partial\hat{U}^*}{\partial\alpha}dF(w) + \lambda_1 E(\theta)\int_{w_0}^{\overline{\varpi}} w(L^* + \alpha\frac{\partial L^*}{\partial\alpha})dF(w) + \lambda_3\frac{\partial L_0^*}{\partial\alpha} = 0 \qquad \text{(V.40)}$$

$$\frac{\partial\Im}{\partial G} = \int_{\underline{\omega}}^{\overline{\varpi}} \Psi'(\hat{U}^*)\frac{\partial\hat{U}^*}{\partial G}dF(w) + \lambda_1\left(\alpha E(\theta)\int_{w_0}^{\overline{\varpi}} w\frac{\partial L^*}{\partial G}dF(w) - 1\right) + \lambda_2 + \lambda_3\frac{\partial L_0^*}{\partial G} = 0 \qquad \text{(V.41)}$$

$$-\lambda_1(\alpha E(\theta)\int_{w_0}^{\overline{\varpi}} wL^*dF(w) - G - R_0) = 0 \qquad \text{(V.42)}$$

$$-\lambda_2(G-G_0) = 0 \qquad \text{(V.43)}$$

$$-\lambda_3 L_0^* = 0 \qquad \text{(V.44)}$$

$$\alpha\int_{w_0}^{\overline{\varpi}} wL^*dF(w) - G \geq R_0$$

$$G \geq 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0.$$

Analizando las posibles soluciones del problema de optimización para los valores de los parámetros $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, de las que resulten factibles, seleccionaremos aquellas que maximicen el valor de $\int_{\underline{\omega}}^{\overline{\omega}} \Psi(\hat{U}^*) dF(w)$:

1) Para $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Como $\int_{\underline{\omega}}^{\overline{\omega}} \Psi'(\hat{U}^*) \frac{\partial \hat{U}^*}{\partial \alpha} dF(w) < 0$. No se cumple, por ejemplo, la ecuacion (V.40).

2) Para $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2, \lambda_3 > 0$. El sistema de ecuaciones resultante de (V.43) y (V.44) es

$$\begin{aligned} G &= G_0 \\ L_0^* &= 0. \end{aligned} \tag{V.45}$$

3) Para $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_1, \lambda_3 > 0$. El sistema de ecuaciones resultante de (V.42) y (V.44) es

$$\begin{gathered} \alpha E(\theta) \int_{w_0}^{\overline{\omega}} w L^* dF(w) = G + R_0 \\ L_0^* = 0. \end{gathered} \tag{V.46}$$

4) Para $\lambda_3 = 0$ y $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. De (V.42) y (V.43) resultan las expresiones para una posible solución:

$$G = G_0 \tag{V.47}$$

$$\alpha = \frac{R_0 + G_0}{E(\theta) \int_{w_0}^{\overline{\omega}} w L^* dF(w)}.$$

5) Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 > 0$. De (V.40), (V.41) y (V.44) resulta el sistema de

ecuaciones:

$$\frac{\int_{\omega}^{\varpi} \Psi'(\hat{U}^*) \frac{\partial \hat{U}^*}{\partial \alpha} dF(w)}{\int_{\omega}^{\varpi} \Psi'(\hat{U}^*) \frac{\partial \hat{U}^*}{\partial G} dF(w)} = \frac{\frac{\partial L_0^*}{\partial \alpha}}{\frac{\partial L_0^*}{\partial G}} \tag{V.48}$$

$$L_0^* = 0.$$

6) Para $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ y $\lambda_2 > 0$. De (V.41), resulta $\lambda_2 = -\int_{\omega}^{\varpi} \Psi'(\hat{U}^*) \frac{\partial \hat{U}^*}{\partial G} dF(w) < 0$. Valor no posible, por las restricciones del problema de optimización.

7) Para $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ y $\lambda_1 > 0$. De (V.40), (V.41) y (V.42) resulta el sistema de ecuaciones:

$$\frac{\int_{\omega}^{\varpi} \Psi'(\hat{U}^*) \frac{\partial \hat{U}^*}{\partial \alpha} dF(w)}{\int_{\omega}^{\varpi} \Psi'(\hat{U}^*) \frac{\partial \hat{U}^*}{\partial G} dF(w)} = \frac{E(\theta) \int_{w_0}^{\varpi} w(L^* + \alpha \frac{\partial L^*}{\partial \alpha}) dF(w)}{\alpha E(\theta) \int_{w_0}^{\varpi} w \frac{\partial L^*}{\partial G} dF(w) - 1} \tag{V.49}$$

$$\alpha E(\theta) \int_{w_0}^{\varpi} w L^* dF(w) = G + R_0.$$

8) Para $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$. El sistema de ecuaciones resultante de (V.42), (V.43) y (V.44) es incompatible.

Los valores óptimos α^* y G^* se obtienen de (V.45), (V.46), (V.47), (V.48) y (V.49).

V.7.1. Ejemplo de aplicación

Sea el modelo anterior con las siguientes características específicas:

Función de bienestar social	$\Psi(\hat{U}^*) = \hat{U}^*$
Función de utilidad de los individuos	$u = u(\eta,\zeta) = \eta - \dfrac{\zeta^2}{2}$
Función densidad de las productividades	$f(w) = \begin{cases} \dfrac{(\mu-1)\omega^{\mu-1}}{w^{\mu}} & \text{para } w \geq \omega \\ 0 & \text{para } w < \omega \end{cases}$
Nivel mínimo de renta salarial unitaria	$w_0 = 215$ u.m.
Valor del parámetro ω	$\omega = 200$ u.m.
Valor del parámetro μ	$\mu = 3,1$
Recaudación esperada	$R_0 = 102.600$ u.m.
Valor mínimo de la renta de garantía	$G_0 = 1.500$ u.m.
Función densidad de la variable θ	$h(x) = \begin{cases} 1,025e^{-1,025x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Obtenemos los valores óptimos $\alpha^* = 45,37\%$ y $G^* = 1.500$ u.m.

Capítulo VI

Impuesto progresivo en el modelo determinista

El problema que analizamos consiste en determinar la estructura del impuesto óptimo sobre la renta procedente del factor trabajo a partir: de las consideraciones iniciales del gobierno sobre el nivel de aversión a la desigualdad, de la distribución de las habilidades innatas de la población y de la intensidad de las reacciones de comportamiento de los individuos respecto de su oferta de trabajo. Estos tres elementos serán los factores básicos y determinantes para la identificación de la redistribución óptima.

Hasta ahora, el supuesto de una estructura impositiva lineal ha excluido las discusiones acerca de si es deseable que los tipos Impositivos aumenten o disminuyan con la renta. Aquí consideramos un impuesto $T(Z)$, relacionado con la renta salarial Z generada por el individuo. El trabajo clasico en esta temática es el de Mirrlees (1971), en que el instrumento redistributivo considerado es el impuesto/subsidio sobre la renta del trabajo. Con el mismo instrumento impositivo y objetivos iguales, planteamos el estudio de la imposición directa progresiva no lineal sobre las rentas salariales adoptando los modelos utilizados en los capítulos anteriores.

VI.1.Hipótesis generales

Todos los modelos que desarrollamos en este capítulo presentan, entre otras, las siguientes características:

a) Los ingresos brutos del individuo Z dependen de su renta salarial unitaria w y del tiempo de trabajo L. O sea,

$$Z = wL.$$

b) El importe de los impuestos a pagar $T(Z)$ es progresivo. A mayores ingresos salariales mayor porcentaje de impuesto a pagar.

c) Existe un nivel de renta salarial unitaria o productividad w_0 por debajo del cual los individuos no trabajan. O sea, $L = 0$ para $w \leq w_0$.

d) La oferta de trabajo L y el tiempo real de aprovechamiento del trabajo coinciden.

e) Como en los trabajos de Mirrlees (1971), Stern (1976) y Atkinson y Stiglitz (1980), las preferencias de los individuos en renta salarial neta Y y tiempo de trabajo L vienen representadas por una función de $U(Y,L)$ *cuasicóncava, continuamente diferenciable, estrictamente creciente en* Y *y estrictamente decreciente en* L.

f) Los individuos determinan su función indirecta de utilidad $V[w,T(wL^*)] = U(Y^*,L^*)$ con la combinación preferida (Y^*,L^*), resultante de la maximización de la función $U(Y,L)$ sujeta a la restricción presupuestaria $Y = Z - T(Z) = wL - T(wL)$ a la que se encuentran sometidos.

g) Se cumple el principio de separabilidad entre la renta neta salarial Y y el ocio, considerándolo como un menor tiempo de trabajo. En otras palabras, las preferencias por el ocio y las posibilidades de consumo del individuo resultan independientes. Esto lleva implícita la condición que la utilidad marginal de la renta neta salarial $U_Y(Y,L)$ no depende del tiempo de trabajo L. O sea, $U_{YL}(Y,L) = 0$

h) Una vez los individuos han fijado su función de utilidad indirecta, el gobierno toma la decisión sobre la estructura del impuesto que los individuos pagan en función de su renta salarial observada. Para ello, se utiliza una función de bienestar social Ψ para medir el grado bienestar o el bienestar social medio o esperado resultante de la agregación del bienestar individual asignando pesos distintos a los diferentes individuos en función de su posición social. La función Ψ utilizada es creciente y cóncava, su grado de concavidad depende del nivel de aversión a la desigualdad en los ingresos salariales por parte del gobierno.

i) El impuesto óptimo será áquel que maximiza el bienestar social total o esperado teniendo en cuenta que:

1) Hay que recaudar la cantidad R_0 de nivel de gasto público exógeno y esto no genera efectos redistributivos.

2) Los individuos reaccionan estratégicamente ante impuestos demasiado elevados.

VI.2. Colectivo formado por dos individuos y el gobierno

VI.2.1. Hipótesis particulares

Además de las hipótesis generales, este modelo presenta las siguientes características:

1) La existencia de dos individuos y el gobierno.

2) Las productividades de ambos individuos son conocidas. Así para el primero es w_1 y para el segundo es w_2, con $w_2 > w_1$.

3) El individuo con renta salarial unitaria $w_i, i = 1,2$ para obtener su función indirecta de utilidad maximiza la función $U_i = U(Y_i, L_i)$ sujeta a la correspondiente restricción presupuestaria, donde $Y_i, i = 1,2$ es la renta salarial después de impuestos y $L_i, i = 1,2$ el tiempo de trabajo.

4) El tiempo de trabajo de ambos individuos es positivo. O sea, $L_i > 0, i = 1,2$.

5) Los impuestos a pagar por el individuo i, vienen determinados por

$$T(Z_i) = \alpha_i w_i L_i,$$

siendo la tasa impositiva $0 < \alpha_i < 1$. Así, la renta salarial neta para el individuo i queda establecida por

$$Y_i = Z_i - T(Z_i) = w_i L_i - \alpha_i w_i L_i = (1 - \alpha_i) w_i L_i.$$

6) El grado de progresividad del tipo impositivo $\alpha_i, i = 1,2$ viene determinado por la

productividad o nivel de renta unitaria salarial $w_i, i = 1,2$ de los individuos. Así, si $w_1 < w_2$ es $\alpha_1 < \alpha_2$.

VI.2.2. Determinación de la oferta de trabajo y la función de utilidad indirecta

El individuo i se enfrenta al siguiente problema de optimización:

$$\begin{cases} V(w_i,\alpha_i) = \max\ U(Y_i,L_i) \\ s.a. \\ Y_i = (1-\alpha_i)w_iL_i \\ L_i \geq 0. \end{cases}$$

El lagrangiano correspondiente es

$$\Im(\lambda_1,\lambda_2,Y_i,L_i) = U(Y_i,L_i) + \lambda_1((1-\alpha_i)w_iL_i - Y_i) + \lambda_2L_i.$$

y diferenciando respecto a cada una de las variables Y_i, L_i, y los multiplicadores de Kuhn-Tucker, λ_1,λ_2. Las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial\Im}{\partial Y_i} = U_{Y_i}(Y_i,L_i) - \lambda_1 = 0 \tag{VI.1}$$

$$\frac{\partial\Im}{\partial L_i} = U_{L_i}(Y_i,L_i) + \lambda_1(1-\alpha_i)w_i + \lambda_2 = 0 \tag{VI.2}$$

$$-\lambda_2L_i = 0 \tag{VI.3}$$

$$Y_i - (1-\alpha_i)w_iL_i = 0$$

$$L_i \geq 0$$

$$\lambda_2 \geq 0.$$

Analizando las soluciones del problema de optimización para los valores de los parámetros λ_1, λ_2:

1) De (VI.3) deducimos que debe ser $\lambda_1 > 0$.

2) Para $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 = 0$. De (VI.1) y (VI.2) resulta la ecuación:

$$(1-\alpha_i)w_i U_{Y_i}(Y_i, L_i) + U_{L_i}(Y_i, L_i) = 0. \tag{VI.4}$$

3) Para $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. De (VI.1), (VI.2) y (VI.3) obtenemos la condición:

$$(1-\alpha_i)w_i U_{Y_i}(0,0) + U_{L_i}(0,0) \leq 0 \text{ y } L_i = 0. \tag{VI.5}$$

De (VI.4) y (VI.5) obtenemos los valores de Y_i^* y L_i^*. Por lo que, la función de utilidad indirecta del individuo con nivel de productividad w_i es $V_i(w_i, \alpha_i) = U(Y_i^*, L_i^*)$.

Proposición VI.2.1. *La función de utilidad indirecta individual $V_i(w_i, \alpha_i)$ es decreciente con el tipo impositivo α_i.*

Demostración. Derivando $V_i(w_i, \alpha_i)$ respecto a α_i y considerando (VI.4):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_i}{\partial \alpha_i} &= U_{Y_i^*}\frac{\partial Y_i^*}{\partial \alpha_i} + U_{L_i^*}\frac{\partial L_i^*}{\partial \alpha_i} \\
&= U_{Y_i^*}\left(-w_i L_i^* + (1-\alpha_i)w_i \frac{\partial L_i^*}{\partial \alpha_i}\right) + U_{L_i^*}\frac{\partial L_i^*}{\partial \alpha_i} \\
&= -w_i L_i^* U_{Y_i^*} + ((1-\alpha_i)w_i U_{Y_i^*} + U_{L_i^*})\frac{\partial L_i^*}{\partial \alpha_i} \\
&= -w_i L_i^* U_{Y_i^*} < 0 \; \square
\end{aligned}$$

VI.2.3. Los tipos impositivos óptimos

Una vez determinada por los individuos su función de utilidad indirecta $V_i(w_i, \alpha_i), i = 1,2$ y la oferta de trabajo $L_i^*, i = 1,2$, el gobierno elige $\alpha_i, i = 1,2$ con el objetivo de maximizar la función de bienestar social $\Psi(V_1, V_2)$ sujeta a la restricciones de recaudación y de los tipos impositivos. Con este objetivo, planteamos el problema de optimización:

$$\begin{cases} \max \ \Psi(V_1, V_2) \\ s.a \\ \sum_{i=1}^{2} \alpha_i w_i L_i^* \geq R_0 \\ \alpha_1 > 0 \\ \alpha_2 > \alpha_1 \\ \alpha_2 < 1. \end{cases}$$

Formando el lagrangiano

$$\Im(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \alpha_1, \alpha_2) = \Psi(V_1, V_2) + \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^{2} \alpha_i w_i L_i^* - R_0 \right) + \lambda_2 \alpha_1 + \lambda_3(\alpha_2 - \alpha_1) + \lambda_4(1 - \alpha_2)$$

y diferenciando respecto a cada uno de los tipos impositivos $\alpha_i, i = 1,2$ y los multiplicadores de Kuhn-Tucker, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$. Las condiciones de primer orden que caracterizan la solución $\alpha_i^*, i = 1,2$ son

$$\frac{\partial \Im}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial \Psi}{\partial V_1} \frac{\partial V_1}{\partial \alpha_1} + \lambda_1 w_1 \left(L_1^* + \alpha_1 \frac{\partial L_1^*}{\partial \alpha_1} \right) + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \qquad \text{(VI.6)}$$

$$\frac{\partial \Im}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial \Psi}{\partial V_2}\frac{\partial V_2}{\partial \alpha_2} + \lambda_1 w_2\left(L_2^* + \alpha_2 \frac{\partial L_2^*}{\partial \alpha_2}\right) + \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \tag{VI.7}$$

$$-\lambda_1\left(\sum_{i=1}^{2} \alpha_i w_i L_i^* - R_0\right) = 0 \tag{VI.8}$$

$$-\lambda_2 \alpha_1 = 0 \tag{VI.9}$$

$$-\lambda_3(\alpha_2 - \alpha_1) = 0 \tag{VI.10}$$

$$-\lambda_4(1 - \alpha_2) = 0 \tag{VI.11}$$

$$\sum_{i=1}^{2} \alpha_i w_i L_i^* - R_0 \geq 0$$

$$\alpha_1 > 0$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 > 0$$

$$1 - \alpha_2 > 0$$

$$\lambda_i \geq 0, i = 1, \ldots, 4.$$

Analizando los posibles valores de los $\lambda_i, i = 1, \ldots, 4$ resulta:

1) Si algún $\lambda_i > 0, i = 2, \ldots, 4$. La solución no es factible. Así:

a) Para $\lambda_2 > 0$. De (VI.9), resulta $\alpha_1 = 0$.

b) Para $\lambda_3 > 0$. De (VI.10), resulta $\alpha_1 = \alpha_2$.

c) Para $\lambda_4 > 0$. De (VI.11), resulta $\alpha_2 = 1$.

2) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. De (VI.6) y (VI.7) resulta un sistema de ecuaciones incompatible, ya que $\frac{\partial \Psi}{\partial V_i} \frac{\partial V_i}{\partial \alpha_i} < 0$ (por las características de Ψ y la proposición VI.2.1).

3) Si $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. De las igualdades (VI.6), (VI.7) y (VI.8) deducimos el sistema de ecuaciones:

$$\frac{\frac{\partial \Psi}{\partial V_1} \frac{\partial V_1}{\partial \alpha_1}}{\frac{\partial \Psi}{\partial V_2} \frac{\partial V_2}{\partial \alpha_2}} = \frac{w_1\left(L_1^* + \alpha_1 \frac{\partial L_1^*}{\partial \alpha_1}\right)}{w_2\left(L_2^* + \alpha_2 \frac{\partial L_2^*}{\partial \alpha_2}\right)} \tag{VI.12}$$

$$\sum_{i=1}^{2} \alpha_i w_i L_i^* = R_0.$$

De los puntos críticos obtenidos de (VI.12), el teorema de Weierstrass asegura la existencia de al menos una solución óptima (α_1^*, α_2^*).

VI.2.4. Ejemplo de aplicación

Sea el modelo anterior con las siguientes características específicas:

Función de bienestar social	$\Psi(V_1,V_2) = -\left(\frac{1}{V_1}+\frac{1}{V_2}\right)$
Función de utilidad de los individuos	$U_i(Y_i,L_i) = Y_i + \ln(1-L_i)$
Renta salarial unitaria individuo 1	$w_1 = 30$ u.m.
Renta salarial unitaria individuo 2	$w_2 = 50$ u.m.
Necesidades de recaudación	$R_0 = 42$ u.m.

Obtenemos los resultados

$\alpha_1^* = 41,63\%$
$\alpha_2^* = 64,00\%$
$L_1^* = 0,942891$, del tiempo total sobre la unidad entre trabajo y ocio
$L_2^* = 0,944439$, del tiempo total sobre la unidad entre trabajo y ocio

VI.3. Colectivo formado por n individuos y el gobierno

VI.3.1. Hipótesis particulares del modelo

Además de las hipótesis generales, este modelo presenta las siguientes características:

1) La existencia n individuos y el gobierno.

2) La renta salarial unitaria de los h individuos que trabajan es mayor que w_0 (renta mínima unitaria a percibir por el trabajo) y los $(n-h)$ restantes perciben una renta de garantía o subsidio G y no pagan impuestos.

3) Las rentas salariales unitarias w_i de los individuos son conocidos de antemano. Así

n_1 perciben la renta salarial unitaria w_1, n_2 perciben la renta salarial unitaria w_2,...y n_k perciben la renta salarial unitaria w_k, siendo $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = h$. Las rentas salariales unitarias figuran en orden creciente $w_1 < w_2 < \ldots < w_h$.

4) La condición de progresividad del tipo impositivo $\alpha_i, i = 1,\ldots,h$ viene determinada por $w_i < w_j \Rightarrow \alpha_i < \alpha_j$.

5) La utilidad para los individuos que sólo perciben la renta de garantía G es $U(G,0)$.

6) El gobierno maximiza una función de bienestar social $\Psi(V_{1,\ldots,}V_n)$, la cual para distintas hipótesis (grado de concavidad) produce los objetivos sociales deseados.

VI.3.2. Oferta de trabajo y función de utilidad indirecta

Con planteamientos y cálculos parecidos a los del apartado VI.2.2 obtenemos que

$$(1-\alpha_i)w_i U_{Y_i}(Y_i,L_i) + U_{L_i}(Y_i,L_i) = 0, i = 1,\ldots,k \tag{VI.13}$$

y

$$(1-\alpha_i)w_i U_{Y_i}(G,0) + U_{L_i}(0,0) \leq 0 \text{ y } L_i = 0, i = h+1,\ldots,n. \tag{VI.14}$$

De (VI.13) y (VI.14), deducimos los valores de Y_i^* y L_i^*. Por lo que, la función de utilidad indirecta del individuo con nivel de productividad w_i es $V_i(w_i,\alpha_i) = U(Y_i^*,L_i^*)$ y para el que sólo percibe la renta de garantía es $V(G) = U(G,0)$.

VI.3.3. Los tipos impositivos óptimos y la renta de garantía

Una vez fijadas por los individuos las funciones de utilidad indirecta $V_i(w_i,\alpha_i), i = 1,\ldots,k$ y $V(G) = U(G,0)$, para los que no trabajan, y las ofertas óptimas de trabajo $L_i^*, i = 1,\ldots,h$. El gobierno debe determinar los tipos impositivos óptimos

$\alpha_i^*, i = 1, \ldots, k$ y la renta de garantía G^* con el objetivo de maximizar la función de bienestar social $\Psi(V_1, \ldots, V_n)$, sujeta a la restricciones de recaudación y de los tipos impositivos. Así, formulamos el problema de optimización:

$$\left\{\begin{array}{c} \max\ \Psi(V_1, \ldots, V_n) \\ s.a. \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{k} n_i \alpha_i w_i L_i^* - (n-h)G \geq R_0 \\ G > 0 \\ (1-\alpha_1) w_1 L_1 > G \\ \alpha_1 > 0 \\ \alpha_2 - \alpha_1 > 0 \\ \alpha_3 - \alpha_2 > 0 \\ \ldots \\ \alpha_k - \alpha_{k-1} > 0 \\ 1 - \alpha_k < 0. \end{array}\right.$$

Formando el lagrangiano

$$\begin{aligned} \Im = \Psi(V_1, \ldots, V_n) + \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^{k} n_i \alpha_i w_i L_i^* - (n-h)G - R_0 \right) \\ + \lambda_2 G + \lambda_3((1-\alpha_1)w_1 L_1 - G) + \lambda_4 \alpha_1 + \lambda_5(\alpha_2 - \alpha_1) + \ldots + \lambda_{k+4}(1-\alpha_k) \end{aligned}$$

y diferenciando respecto a cada uno de los tipos impositivos $\alpha_i, i = 1, \ldots, k$, la renta de garantía G y los multiplicadores de Kuhn-Tucker asociados, $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+4}$. Las condiciones de primer orden que caracterizan la solución $\alpha_i^*, i = 1, \ldots, k$ y G^* son

$$\frac{\partial \Im}{\partial G} = \sum_{i=h+1}^{n} \frac{\partial \Psi}{\partial V_i} \frac{\partial V_i}{\partial G} - (n-h)\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \qquad \text{(VI.15)}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Im}{\partial \alpha_1} &= \sum_{i=1}^{n_1} \frac{\partial \Psi}{\partial V_i} \frac{\partial V_i}{\partial \alpha_1} + \lambda_1 n_1 w_1 \left(L_1^* + \alpha_1 \frac{\partial L_1^*}{\partial \alpha_1} \right) \\ &\quad + \lambda_3 w_1 (-L_1^* + (1-\alpha_1) \frac{\partial L_1^*}{\partial \alpha_1}) + \lambda_4 - \lambda_5 \\ &= 0\end{aligned} \tag{VI.16}$$

$$\frac{\partial \Im}{\partial \alpha_2} = \sum_{i=1}^{n_2} \frac{\partial \Psi}{\partial V_i} \frac{\partial V_i}{\partial \alpha_2} - \lambda_1 n_2 w_2 \left(L_2^* + \alpha_2 \frac{\partial L_2^*}{\partial \alpha_2} \right) + \lambda_5 - \lambda_6 = 0 \tag{VI.17}$$

$$\cdots$$

$$\frac{\partial \Im}{\partial \alpha_{k-1}} = \sum_{i=1}^{n_{k-1}} \frac{\partial \Psi}{\partial V_i} \frac{\partial V_i}{\partial \alpha_{k-1}} + \lambda_1 n_{k-1} w_{k-1} \left(L_{k-1}^* + \alpha_{k-1} \frac{\partial L_{k-1}^*}{\partial \alpha_{k-1}} \right) + \lambda_{k+2} - \lambda_{k+3} = 0 \tag{VI.18}$$

$$\frac{\partial \Im}{\partial \alpha_k} = \sum_{i=1}^{n_k} \frac{\partial \Psi}{\partial V_i} \frac{\partial V_i}{\partial \alpha_k} + \lambda_1 n_k w_k \left(L_k^* + \alpha_k \frac{\partial L_k^*}{\partial T_k} \right) + \lambda_{k+3} - \lambda_{k+4} = 0 \tag{VI.19}$$

$$-\lambda_1 \left(\sum_{i=1}^{k} n_i \alpha_i w_i L_i^* - (n-h)G - R_0 \right) = 0 \tag{VI.20}$$

$$-\lambda_2 G = 0 \tag{VI.21}$$

$$-\lambda_3((1-\alpha_1) w_1 L_1 - G) = 0 \tag{VI.22}$$

$$-\lambda_4 \alpha_1 = 0 \tag{VI.23}$$

$$-\lambda_5(\alpha_2 - \alpha_1) = 0 \tag{VI.24}$$

$$-\lambda_6(\alpha_3-\alpha_2)=0 \tag{VI.25}$$

$$\ldots$$

$$-\lambda_{k+4}(1-\alpha_k)=0 \tag{VI.26}$$

$$\sum_{i=1}^{k} n_i\alpha_i w_i L_i^* -(n-h)G \geq R_0$$

$$G>0$$

$$(1-\alpha_1)w_1L_1 > G$$

$$\alpha_1 > 0$$

$$\alpha_2-\alpha_1 > 0$$

$$\ldots$$

$$1-\alpha_k > 0$$

$$\lambda_i \geq 0, i=1,\ldots,k+4.$$

Analizamos diferentes escenarios, según los valores de los parámetros $\lambda_i, i=1,\ldots,k+4$:

1) Si algún $\lambda_i > 0$, para $i=2,\ldots,k+2$. La solución no es factible. Así:

a) Para $\lambda_2 > 0$. De (VI.21), resulta $G = 0$.

b) Para $\lambda_3 > 0$. De (VI.22), resulta $G = (1-\alpha_1)w_1L_1^*$.

c) Para $\lambda_4 > 0$. De (VI.23), resulta $\alpha_1 = 0$.

d) Para $\lambda_5 > 0$. De (VI.24), resulta $\alpha_1 = \alpha_2$.

e) Para $\lambda_6 > 0$. De (VI.25), resulta $\alpha_2 = \alpha_3$.

...

f) Para $\lambda_{k+4} > 0$. De (VI.26), resulta $\alpha_k = 1$.

2) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{k+3} = \lambda_{k+4} = 0$. De (VI.15), (VI.16), (VI.17), (VI.18) y (VI.19) resulta un sistema de ecuaciones incompatible, ya que $\sum_{i=h+1}^{n} \frac{\partial \Psi}{\partial V_i}\frac{\partial V_i}{\partial G} > 0$ y $\sum_{i=1}^{n_j} \frac{\partial \Psi}{\partial V_i}\frac{\partial V_i}{\partial \alpha_1} < 0, j = 1, \ldots, k$.

3) Si $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_{k+3} = \lambda_{k+4} = 0$. De las igualdades (VI.15), (VI.16), (VI.17), (VI.18), (VI.19) y (VI.20) deducimos las ecuaciones:

$$\sum_{i=1}^{n_1} \frac{\partial \Psi}{\partial V_i}\frac{\partial V_i}{\partial \alpha_1} + \frac{n_1 w_1}{n-h}\left(L_1^* + \alpha_1 \frac{\partial L_1^*}{\partial \alpha_1}\right)\sum_{i=h+1}^{n} \frac{\partial \Psi}{\partial V_i}\frac{\partial V_i}{\partial G} = 0 \qquad \text{(VI.27)}$$

$$\sum_{i=1}^{n_2} \frac{\partial \Psi}{\partial V_i}\frac{\partial V_i}{\partial \alpha_2} + \frac{n_2 w_2}{n-h}\left(L_2^* + \alpha_1 \frac{\partial L_2^*}{\partial \alpha_2}\right)\sum_{i=h+1}^{n} \frac{\partial \Psi}{\partial V_i}\frac{\partial V_i}{\partial G} = 0 \qquad \text{(VI.28)}$$

$$\sum_{i=1}^{n_3} \frac{\partial \Psi}{\partial V_i} \frac{\partial V_i}{\partial \alpha_3} + \frac{n_3 w_3}{n-h}\left(L_3^* + \alpha_3 \frac{\partial L_3^*}{\partial \alpha_3}\right) \sum_{i=h+1}^{n} \frac{\partial \Psi}{\partial U_i} \frac{\partial U_i}{\partial G} = 0 \tag{VI.29}$$

$$\ldots$$

$$\sum_{i=1}^{n_{k-1}} \frac{\partial \Psi}{\partial V_i} \frac{\partial V_i}{\partial \alpha_{k-1}} + \frac{n_{k-1} w_{k-1}}{n-h}\left(L_{k-1}^* + \alpha_{k-1} \frac{\partial L_{k-1}^*}{\partial \alpha_{k-1}}\right) \sum_{i=h+1}^{n} \frac{\partial \Psi}{\partial V_i} \frac{\partial V_i}{\partial G} = 0 \tag{VI.30}$$

$$\sum_{i=1}^{n_k} \frac{\partial \Psi}{\partial V_i} \frac{\partial V_i}{\partial \alpha_k} + \frac{n_k w_k}{n-h}\left(L_{k-1}^* + \alpha_k \frac{\partial L_k^*}{\partial \alpha_k}\right) \sum_{i=h+1}^{n} \frac{\partial \Psi}{\partial V_i} \frac{\partial V_i}{\partial G} = 0 \tag{VI.31}$$

$$\sum_{i=1}^{k} n_i \alpha_i w_i L_i^* - (n-h)G = R_0. \tag{VI.32}$$

Seguidamente seleccionamos los puntos $(G, \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, soluciones factibles para el problema de optimización del sistema de ecuaciones resultante de las igualdades (VI.27), (VI.28), (VI.29), (VI.30), (VI.31) y (VI.32). De los puntos obtenidos, el teorema de Weierstrass asegura la existencia de al menos una solución óptima $(G^*, \alpha_1^*, \ldots, \alpha_k^*)$.

VI.3.4. Ejemplo de aplicación

Sea el modelo anterior con las siguientes características específicas y valores de los parámetros representativos:

Función de bienestar social	$\Psi(V_1,\ldots,V_2) = -\left(\frac{1}{V_1}+\frac{1}{V_2}+\ldots+\frac{1}{V_n}\right)$
Función de utilidad de los individuos	$U_i(Y_i,L_i) = Y_i + \ln(1-L_i), i = 1,\ldots,4$
Necesidades de recaudación	$R_0 = 100$ u.m.
Total de individuos de la población	$n = 100$
Primer grupo de individuos	$n_1 = 25, w_1 = 40$ u.m.
Segundo grupo de individuos	$n_2 = 20, w_2 = 50$ u.m.
Tercer grupo de individuos	$n_3 = 18, w_3 = 60$ u.m.
Cuarto grupo de individuos	$n_4 = 17, w_4 = 70$ u.m.
Total de individuos sin rentas salariales	$n-h = 20$

Obtenemos los valores

$G^* = 99,34$ u.m.
$\alpha_1^* = 39,15\%$
$\alpha_2^* = 50,96\%$
$\alpha_3^* = 52,91\%$
$\alpha_4^* = 58,44\%$
$L_1^* = 0,958917$, del tiempo total sobre la unidad entre trabajo y ocio
$L_2^* = 0,959221$, del tiempo total sobre la unidad entre trabajo y ocio
$L_3^* = 0,964608$, del tiempo total sobre la unidad entre trabajo y ocio
$L_4^* = 0,965626$, del tiempo total sobre la unidad entre trabajo y ocio

VI.3.5. Casos paticulares del modelo

Los dos siguientes modelos pueden considerarse como casos derivados del anterior:

1) El formado por dos individuos y el gobierno, en que un individuo tiene nivel de renta salarial unitaria o productividad $w_1 > w_0$, siendo w_0 la renta salarial unitaria mínima a percibir por el trabajo y la del otro es $w_2 < w_0$. Hemos de tomar $n = 2$, $n_1 = 1$ y $h = 1$.

2) El formado por n individuos y el gobierno, en que todos los individuos tienen un nivel de habilidad $w_i > w_0, i = 1,\ldots,n$. Se ha de tomar $h = n$, cumpliéndose $n_1 + n_2 +\ldots+n_k = n$.

VI.4. Colectivo con productividades dadas por una función densidad

VI.4.1. Hipótesis particulares

Además de las hipótesis generales, este modelo presenta las siguientes características:

1) Resulta imposible conocer con exactitud la productividad w de cada individuo. Nos encontramos en una situación de información asimétrica, en la cual la única información disponible es la forma de la distribución de las productividades entre la población.

2) La renta salarial unitaria o productividad de los individuos w viene determinada por una función de distribución de probabilidad $F(w)$, absolutamente continua, con $F(\underline{\omega}) = 0$ (el valor de $\underline{\omega}$ puede ser cero) y $F(\overline{\omega}) = 1$ (el valor de $\overline{\omega}$ puede ser ∞)

3) La estructura de un impuesto general sobre la renta está representada por una función $T(Z)$ diferenciable, al menos dos veces, para $Z > 0$ y con derivada lateral derecha en $Z = 0$, siendo Z los ingresos salariales brutos del individuo.

4) La función de los ingresos netos es $Y = Z - T(Z)$. Al ser, al menos, dos veces diferenciable aseguramos que Z es una función creciente con el nivel de productividad individual w, Mirrlees(1971).

5) La función

$$N(Y,L) = \frac{LU_L(Y,L)}{U_Y(Y,L)} \tag{VI.33}$$

está acotada para $0 < Y,L < \infty$.

6) El bienestar social medio o esperado de la población es $\int_{\underline{\omega}}^{\overline{\omega}} \Psi dF(w)$, donde Ψ es una función cóncava, creciente y continuamente diferenciable. El grado de concavidad de Ψ depende del nivel de aversión a la desigualdad en los ingresos salariales por parte del gobierno.

7) El valor w_0, a partir del cuál es $L(w) > 0$, no se fija de antemano. Viene determinado por las condiciones particulares del modelo (función de distribución de las productividades $F(w)$, restricción recaudatoria, etc.).

8) Para la renta mínima salarial unitaria w_0, los impuestos a pagar son nulos.

9) Los individuos que no trabajan cobran un subsidio de desempleo o renta de garantía G. Su utilidad indirecta es $\overline{V} = U(G,0)$. El valor de G es menor que los ingresos salariales mínimos, $Z_0 = w_0 L_0^*$, siendo L_0^* la oferta óptima de trabajo para el nivel de productividad w_0.

VI.4.2. Oferta de trabajo y función de utilidad indirecta individual

El problema de optimización para la maximización de la utilidad individual queda formulado por

$$\begin{cases} V[w, T(wL^*)] = \max U(Y,L) \\ \qquad s.a. \\ Y = wL - T(wL) \\ L \geq 0. \end{cases}$$

Formando el lagrangiano correspondiente

$$\Im(\lambda_1, \lambda_2, Y, L) = U(Y, L) + \lambda_1(wL - T(wL) - Y) + \lambda_2 L$$

y diferenciando respecto a cada una de las variables Y, L, y los multiplicadores de Kuhn-Tucker, λ_1, λ_2. Las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial \Im}{\partial Y} = U_Y(Y, L) - \lambda_1 = 0 \tag{VI.34}$$

$$\frac{\partial \Im}{\partial L} = U_L(Y, L) + \lambda_1 w(1 - T'(wL)) + \lambda_2 = 0 \tag{VI.35}$$

$$-\lambda_2 L = 0$$

$$wL - T(wL) - Y = 0$$

$$L \geq 0$$

$$Y - (1 - \alpha)wL - G = 0$$

$$L \geq 0$$

$$\lambda_2 \geq 0.$$

Analizando las posibles soluciones del problema de optimización según los valores de los parámetros λ_1, λ_2:

1) De (VI.34) deducimos que debe ser $\lambda_1 > 0$.

2) Para $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 = 0$. De (VI.34) y (VI.35) resulta la ecuación:

$$w(1 - T'(wL))U_Y(Y,L) + U_L(Y,L) = 0. \tag{VI.36}$$

3) Para $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. De (VI.34), (VI.35) y la ecuación $\lambda_2 L = 0$ obtenemos:

$$w(1 - T'(0))U_Y(-T(0),0) + U_L(-T(0),0) \leq 0 \text{ y } L = 0. \tag{VI.37}$$

De la restricción presupuestaria individual, (VI.36) y (VI.37) obtenemos los valores de Y^* y L^*. Con lo que, la función de utilidad indirecta de un individuo con nivel de habilidad w es $V[w, T(wL^*)] = U(Y^*, L^*)$.

Proposición VI.4.1. El impuesto marginal es $T'(wL) < 1$.

Demostración. De la igualdad (VI.36) resulta que

$$T'(wL) = 1 + \frac{U_L}{wU_Y} < 1,$$

al ser $w > 0$, $U_Y > 0$ (U es estrictamente creciente en Y) y $U_L < 0$ (U es estrictamente decreciente en L) □

Proposición VI.4.2. *Existe una renta salarial crítica por unidad de tiempo de trabajo v_c tal que*

$$L > 0 \text{ para } w \geq v_c$$
$$L = 0 \text{ para } w < v_c.$$

Demostración. En (VI.37), designando por $g(w) \equiv w(1 - T'(0))U_Y(-T(0),0) + U_L(-T(0),0)$, es $g(w)$ estrictamente negativo en $w = 0$ ($U_L(-T(0),0) < 0$, al ser $U(Y,L)$ estrictamente decreciente con L) y $g(w)$ es una función creciente con w. Existe, por tanto, un valor v_c tal que $g(v_c) = 0$ y $g(w) > 0$ para $w > v_c$. Supongamos que fuese $L = 0$ para $w > v_c$, entonces $U(Y,L) = U(-T(0),0)$ y $U_Y(Y,L) = U_L(Y,L) = 0$. Resultaría $g(w) = 0$ para $w > v_c$, no posible. Así, debe ser $L > 0$ □

Proposición VI.4.3. *La función* $N(Y,L)$ *es negativa, para* $0 < Y,L < \infty$.

Demostración. Como es $L > 0$, $U_Y > 0$ (U es estrictamente creciente en Y) y $U_L < 0$ (U es estrictamente decreciente en L), de donde resulta:

$$N(Y,L) = \frac{LU_L}{U_Y} < 0 \ \square$$

Proposición VI.4.4. *La función* $Z = wL$ *es estrictamente creciente con la renta salarial unitaria* w.

Demostración. La condición de primer orden para la maximización de $U(Y,L)$ puede expresarse:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dZ}U(Y,L) &= \frac{d}{dZ}U\left(Y(Z), \frac{Z}{w}\right) \\
&= U_Y\frac{dY}{dZ} + U_L\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{Z}{w}\right) \\
&= (1 - T')U_Y + \frac{1}{w}U_L \\
&= \frac{U_Y}{Z}\left(Z(1 - T') + \frac{Z}{w}\frac{U_L}{U_Y}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

En el óptimo

$$\frac{U_Y}{Z}\left(Z(1 - T') + \frac{Z}{w}\frac{U_L}{U_Y}\right) = 0,$$

con $Z = Z'$.Además, por la condición de segundo orden, la derivada es decreciente para $Z = Z'$. O sea,

$$\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{U_Y}{Z}\left(Z(1-T')+\frac{Z}{w}\frac{U_L}{U_Y}\right)\right)\Big|_{Z=Z'}<0$$

y desarrollando esta expresión

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{U_Y}{Z}\left(Z(1-T')+\frac{Z}{w}\frac{U_L}{U_Y}\right)\right)\Big|_{Z=Z'}\\
&=\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{U_Y}{Z}\right)\left(Z(1-T')+\frac{Z}{w}\frac{U_L}{U_Y}\right)\Big|_{Z=Z'}+\frac{U_Y}{Z}\frac{\partial}{\partial Z}\left(Z(1-T')+\frac{Z}{w}\frac{U_L}{U_Y}\right)\Big|_{Z=Z'}\\
&=\frac{U_Y}{Z}\frac{\partial}{\partial Z}\left(Z(1-T')+\frac{Z}{w}\frac{U_L}{U_Y}\right)\Big|_{Z=Z'}.
\end{aligned}$$

Como

$$\frac{U_Y}{Z}\Big|_{Z=Z'}>0,$$

también

$$\frac{\partial}{\partial Z}\left(Z(1-T')+\frac{Z}{w}\frac{U_L}{U_Y}\right)\Big|_{Z=Z'}<0.$$

De (VI.36) obtenemos la ecuación

$$\frac{w}{Z'}\left(Z'(1-T'(Z'))+\frac{Z'}{w}\frac{U_L(Z'-T(Z'),\frac{Z'}{w})}{U_Y(Z'-T(Z'),\frac{Z'}{w})}\right)=0,$$

deducimos la igualdad

$$Z'(1-T'(Z'))+\frac{Z'}{w}\frac{U_L(Z'-T(Z'),\frac{Z'}{w})}{U_Y(Z'-T(Z'),\frac{Z'}{w})}=0$$

y derivando con respecto a w

$$\frac{\partial}{\partial Z}\left[Z(1-T'(Z)) + \frac{Z}{w}\frac{U_L(Z-T(Z),\frac{Z}{w})}{U_Y(Z-T(Z),\frac{Z}{w})} \right]\Bigg|_{Z=Z'} \cdot \frac{dZ'}{dw} = N_L((Z'-T(Z'),\frac{Z'}{w})\left(\frac{\partial L}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial w}\Big|_{Z=Z'}\right)$$
$$= N_L((Z'-T(Z'),\frac{Z'}{w})\frac{Z'}{w^2},$$

donde

$$\frac{\partial}{\partial Z}\left[Z(1-T'(Z)) + \frac{Z}{w}\frac{U_L(Z-T(Z),\frac{Z}{w})}{U_Y(Z-T(Z),\frac{Z}{w})} \right]\Bigg|_{Z=Z'} < 0,\ N_L((Z'-T(Z'),\frac{Z'}{w}) < 0 \text{ y } \frac{Z'}{w^2} > 0.$$

Por tanto deducimos que ha de ser $\frac{dZ'}{dw} > 0$, excepto para $Z' = 0$ □

VI.4.3. El problema del gobierno

El gobierno elige la función $T(Z)$ en el problema de optimización:

$$\begin{cases} \max\left(\Psi(\overline{V}) + \int_{w_0}^{\varpi} \Psi(V[w,T(wL^*)])dF(w)\right) \\ s.a. \\ \int_{w_0}^{\varpi} wL^* dF(w) = \int_{w_0}^{\varpi} Y^* dF(w) + GF(w_0) + R_0. \end{cases}$$

El problema puede resolverse utilizando el principio del máximo. La función objetivo puede escribirse (con λ como multiplicador asociado a la restricción de recaudación):

$$\max\left\{\Psi(\overline{V})F(w_0) + \int_{w_0}^{\varpi}\left[\Psi(V[w,T(wL^*)]) + \lambda\left(wL^* - Y^* - \frac{GF(w_0)+R_0}{1-F(w_0)}\right)\right]dF\right\}.$$

El término $\Psi(\overline{V})F(w_0)$ es un factor constante y no incidirá en los cálculos a realizar. En este proceso de maximización, $V[w,T(wL^*)] = U(Y^*,L^*)$ se trata como una variable de estado y necesitamos derivar las ecuaciones diferenciales que gobiernan su comportamiento. La diferenciación de la función indirecta de utilidad V y la restricción presupuestaria individual $T(wL^*) = wL^* - Y^*$, juntamente con la condición de primer orden (VI.36), nos llevan a:

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dw} &= U_Y(Y^*,L^*)\frac{\partial Y^*}{\partial w} + U_L(Y^*,L^*)\frac{\partial L^*}{\partial w} \\ &= U_Y(Y^*,L^*)(1-T'(Z^*))\left(L^* + w\frac{\partial L^*}{\partial w}\right) + U_{L^*}(Y^*,L^*)\frac{\partial L^*}{\partial w} \\ &= U_Y(1-T'(Z^*))L^* + U_L\frac{\partial L^*}{\partial w} + U_{Y^*}(Y^*,L^*)(1-T'(Z^*))w\frac{\partial L^*}{\partial w} \\ &= U_Y(Y^*,L^*)(1-T'(Z^*))L^* + U_L(Y^*,L^*)\frac{\partial L^*}{\partial w} - U_L(Y^*,L^*)\frac{\partial L^*}{\partial w} \\ &= -\frac{L^*U_L(Y^*,L^*)}{w}.\end{aligned} \tag{VI.38}$$

La variable de control adoptada es L^*, e Y^* está determinada a partir de L^* y V. Al aplicar el principio del Máximo, introducimos el multiplicador $\zeta(w)$ asociado a la ecuación diferencial (VI.38), y escribimos el hamiltoniano

$$\Re = [\Psi(V) + \lambda(wL^* - Y^* - R_0)]f + \zeta\frac{dV}{dw},$$

siendo f la función de densidad de la distribución de w y donde ζ satisface

$$-\frac{d\zeta}{dw} = \frac{\partial\Re}{\partial V} = \left(\Psi' - \lambda\frac{\partial Y^*}{\partial V}\right)f + \zeta\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{dV}{dw}\right),$$

con las condiciones de contorno $\zeta(w_0) = \zeta(\overline{\varpi}) = 0$. Por (VI.38) y diferenciando respecto a V manteniendo constante L^*, pero permitiendo la dependencia de Y^* respecto de V

$$-\frac{d\zeta}{dw} = \left(\Psi'(V) - \lambda\frac{\partial Y^*}{\partial V}\right)f - \zeta\frac{L^*}{w}U_{LY}(Y^*,L^*)\frac{\partial Y^*}{\partial V}. \tag{VI.39}$$

La variable de control L^* se elige para maximizar $\Re$, y la condición de primer orden es

$$\frac{\partial\Re}{\partial L} = \lambda\left(w - \frac{dY}{dL}\Big|_{V=\overline{V}}\right)f + \zeta\frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{dV}{dw}\right) = 0, \tag{VI.40}$$

donde $Z^* = wL^*$ es estrictamente creciente con w y $V = \overline{V}$ es el valor de la utilidad indirecta en el óptimo.

En el óptimo

$$V[w, T(wL^*)] = U(Y^*, L^*) = \overline{V}$$

y diferenciando

$$U_Y(Y,L)dY + U_L(Y,L)dL|_{V=\overline{V}} = 0,$$

de donde resulta

$$\frac{dY}{dL}\Big|_{V=\overline{V}} = -\frac{U_L(Y^*,L^*)}{U_Y(Y^*,L^*)}. \tag{VI.41}$$

Utilizando (VI.41), la ecuación (VI.40) queda expresada por

$$1 + \frac{1}{w}\frac{U_L(Y^*,L^*)}{U_Y(Y^*,L^*)} = \left(\frac{-\zeta(w)}{\lambda f w}\right)\left[\frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{dV}{dw}\right)\right]$$

y de (VI.36), resulta:

$$T'(Z^*) = \left(\frac{-\zeta(w)}{\lambda f w}\right)\left[\frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{dV}{dw}\right)\right]. \tag{VI.42}$$

Por la hipótesis establecida sobre la función de utilidad, se debe cumplir $U_{LY}(Y^*,L^*) = 0$. Ello nos permite, usando la condición de contorno $\zeta(\varpi) = 0$ y reordenando (VI.39), deducir la ecuación:

$$\frac{-\zeta(w)}{\lambda} = \int_{w}^{\overline{\varpi}} \left(\frac{1}{U_Y(Y^*, L^*)} - \frac{\Psi'(V)}{\lambda} \right) dF(w). \qquad \text{(VI.43)}$$

De las igualdades (VI.43) y (VI.42) se sigue que

$$T'(Z^*) = \left(\int_{w}^{\overline{\varpi}} \left(\frac{1}{U_Y(Y^*, L^*)} - \frac{\Psi'(V)}{\lambda} \right) dF \right) \left(\frac{\partial}{\partial L^*} \left(\frac{dV}{dw} \right) \right) \frac{1}{wf(w)}. \qquad \text{(VI.44)}$$

Como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial L^*} \left(\frac{dV}{dw} \right) &= -\frac{\partial}{\partial L^*} \left(\frac{LU_L(Y^*, L^*)}{w} \right) \\
&= -\frac{1}{w} \frac{\partial}{\partial L^*} (L^* U_L(Y^*, L^*)) \\
&= -\frac{1}{w} (U_L(Y^*, L^*) + L^* U_{LL}(Y^*, L^*)) \\
&= -\frac{U_L(Y^*, L^*)}{w} \left(1 + \frac{L^* U_{LL}(Y^*, L^*)}{U_L(Y^*, L^*)} \right).
\end{aligned}$$

De (VI.36) deducimos

$$-\frac{U_L(Y^*, L^*)}{w} = (1 - T'(Z^*)) U_Y((Y^*, L^*)$$

y si

$$\psi \equiv 1 + \frac{L^* U_{LL}(Y^*, L^*)}{U_L(Y^*, L^*)},$$

resulta

$$\frac{\partial}{\partial L^*} \left(\frac{dV}{dw} \right) = (1 - T'(Z^*)) U_Y(Y^*, L^*) \psi. \qquad \text{(VI.45)}$$

Utilizando (VI.45) y reordenando (VI.44), obtenemos la igualdad

$$\frac{T'(Z^*)}{1 - T'(Z^*)} = U_Y(Y^*,L^*)\left[\int_w^{\varpi}\left(\frac{1}{U_Y(Y^*,L^*)} - \frac{\Psi'(V)}{\lambda}\right)dF\right]\left(\frac{\psi}{wf(w)}\right). \qquad \text{(VI.46)}$$

De la anterior igualdad para $w = \varpi$, resulta la siguiente:

Proposición VI.4.5. *El impuesto marginal T' para los individuos con mayor nivel de productividad w es cero.*

Considerando la ecuación (VI.46) y la igualdad (VI.43) para $w = w_0$, podemos enunciar:

Proposición VI.4.6. *El tipo marginal T' del individuo con menor productividad w es cero.*

Supongamos que reducimos la utilidad de todo el mundo por encima de w en una unidad marginal. El factor $\frac{1}{U_Y(Y^*,L^*)}$ representa el beneficio del aumento de recaudación por persona; el factor $\frac{\Psi'(V)}{\lambda}$ es el coste por la pérdida de bienestar al disminuir la utilidad. Por tanto, la integral representa un efecto neto de la reducción marginal de U por encima de w. Ello depende del número de personas por encima de w y de la función asociada al bienestar social Ψ.

La integral

$$\int_w^{\varpi}\left(\frac{1}{U_Y(Y^*,L^*)} - \frac{\Psi'(V)}{\lambda}\right)dF(w)$$

primero aumenta (cuando $\frac{1}{U_Y(Y^*,L^*)} < \frac{\Psi'(V)}{\lambda}$) y después disminuye. Para valores pequeños de w la integral es pequeña; la integral alcanza el máximo en el punto donde la ganancia neta $\frac{1}{U_Y(Y^*,L^*)} - \frac{\Psi'(V)}{\lambda} = 0$; para valores elevados de w la integral es pequeña. Esta propiedad depende del grado de concavidad de la función de bienestar social Ψ. En el caso rawlsiano el gobierno maximiza $V(w_0)$ y $\Psi(V) = 0$ para $w > w_0$, de modo que la integral disminuye en todo el intervalo.

El factor $\frac{\psi}{wf(w)}$ representa el efecto de la oferta de trabajo sobre el impuesto marginal. El efecto depende de:

1) ψ, es una medida de la elasticidad de la oferta de trabajo. El valor de $\psi = 1$ si $U_{LL}(Y^*, L^*) = 0$, o sea si la desutilidad marginal del trabajo $U_L\ (Y^*, L^*)$ es constante, y ψ aumenta a medida que la oferta de trabajo se convierte en menos elástica.

2) El número de unidades de trabajo afectadas $wf(w)$. Si el trabajo potencial afectado es bajo, entonces el tipo impositivo marginal puede ser alto.

En algunos casos podremos trabajar con la ecuación (VI.46), pero en otros, siguiendo las directrices de Mirrlees (1971), página 187 y Atkinson y Stiglitz (1980), página 94, resulta mejor reordenar la expresión (VI.46) en la forma:

$$\begin{aligned}
&\int_w^\infty \left(\frac{1}{U_Y(Y^*, L^*)} - \frac{\Psi'(V)}{\lambda} \right) dF(w) \\
&= \frac{T'(Z^*) wf(w)}{(1 - T'(Z^*)) \psi U_Y(Y^*, L^*)} \\
&= \frac{\left(1 + \frac{U_L(Y^*, L^*)}{wU_Y(Y^*, L^*)} \right) wf(w)}{-\frac{U_L(Y^*, L^*)}{w} \left(1 + \frac{L^* U_{LL}(Y^*, L^*)}{U_L(Y^*, L^*)} \right)} \\
&= \frac{\left(1 + \frac{U_L(Y^*, L^*)}{wU_Y(Y^*, L^*)} \right) w^2 f(w)}{-U_L(Y^*, L^*) - L^* U_{LL}(Y^*, L^*)}.
\end{aligned} \tag{VI.47}$$

Derivando la igualdad anterior con respecto a w

$$\left(-\frac{\dfrac{U_L(Y^*,L^*)}{w^2U_Y(Y^*,L^*)}}{-U_L(Y^*,L^*)-L^*U_{LL}(Y^*,L^*)}\right)w^2f(w)$$
$$+\left(\frac{1+\dfrac{U_L(Y^*,L^*)}{wU_Y(Y^*,L^*)}}{-U_L(Y^*,L^*)-L^*U_{LL}(Y^*,L^*)}\right)(2wf(w)+w^2f'(w))$$
$$=-\left(\frac{1}{U_Y(Y^*,L^*)}-\frac{\Psi'(V)}{\lambda}\right)f(w),$$

designando por

$$r\equiv\frac{1+\dfrac{U_L(Y^*,L^*)}{wU_Y(Y^*,L^*)}}{-U_L(Y^*,L^*)-L^*U_{LL}(Y^*,L^*)} \tag{VI.48}$$

y reordenando, resulta la ecuación diferencial

$$\frac{dr}{dw}=-\frac{r}{w}\left(2+\frac{wf'(w)}{f(w)}\right)-\left(\frac{1}{U_Y(Y^*,L^*)}-\frac{\Psi'(V)}{\lambda}\right)\frac{1}{w^2}. \tag{VI.49}$$

Con las expresiones (VI.38) y (VI.49) formamos el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\left\{\begin{aligned}\frac{dV}{dw}&=-\frac{L^*U_L(Y^*,L^*)}{w}\\ \frac{dr}{dw}&=-\frac{r}{w}\left(2+\frac{wf'(w)}{f(w)}\right)-\left(\frac{1}{U_Y(Y^*,L^*)}-\frac{\Psi'(V)}{\lambda}\right)\frac{1}{w^2}\end{aligned}\right. \tag{VI.50}$$

no lineales en V y r, para la solución del problema de la imposición óptima, junto con las condiciones iniciales

$$\int_{w_0}^{\varpi} wL^* dF(w) = \int_{w_0}^{\varpi} Y^* dF(w) + GF(w_0) + R_0 \tag{VI.51}$$

y

$$\int_{w_0}^{\varpi} \left(\frac{1}{U_Y(Y^*, L^*)} - \frac{\Psi'(V)}{\lambda} \right) dF(w) = 0, \tag{VI.52}$$

para la determinación de w_0, $V_0 = V[w_0, T(w_0 L^*)]$ y r_0.

Proposición VI.4.7. *El impuesto marginal T' es no negativo.*

Demostración. Sea la función

$$g(w) = \int_{w}^{\varpi} \left(\frac{1}{U_Y(Y^*, L^*)} - \frac{\Psi'(V)}{\lambda} \right) dF(w).$$

De (VI.52) y la condición de transversalidad $\zeta(w_0) = 0$, deducimos que $g(w_0) = 0$. También $g(\varpi) = 0$. Derivando $g(w)$ y aplicando la condición de primer orden para su optimización, se alcanza el máximo en

$$\frac{1}{U_Y(Y^*, L^*)} = \frac{\Psi'(V)}{\lambda}.$$

Deducimos que es $g(w) \geq 0$ y de (VI.46) que $T' \geq 0$, ya que todos los factores del lado derecho de la igualdad son positivos □

VI.4.4. Ejemplo de aplicación

a) **Datos específicos del modelo**:

1) Función de utilidad de los individuos

$$U(Y,L) = aY - b\frac{L^{1+\frac{1}{\in}}}{1+\frac{1}{\in}},$$

con los valores $a = 1$, $b = 1$ y $\in = 1$.

2) Función densidad de las productividades

$$f(w) = \begin{cases} \frac{\mu\omega^{\mu}}{w^{\mu+1}} & \text{si } w \geq \omega \\ 0 & \text{si } w < \omega, \end{cases}$$

con los valores $\mu = 2,1$ y $\omega = 5$.

3) Función de bienestar social

$$\Psi(V) = \begin{cases} V & \text{si } w \leq w_{\alpha} \\ V_{w_{\alpha}} + (1-\beta)(V - V_{w_{\alpha}}) & \text{si } w > w_{\alpha}, \end{cases}$$

con los valores $\beta = 0,4$ y $w_{\alpha} = w_{60}$ (el centil 60 de la distribución de las productividades de la población).

4) El producto medio del trabajo individual en esta economia es $\int_{w_0}^{\infty} wL_1^* dF(w) = C$, siendo L_1^* la oferta óptima de trabajo de los individuos en ausencia de impuestos y el valor $C = 520,1$ u.m.

5) El gasto público exógeno R_0 que el gobierno debe financiar y que no tiene efectos redistributivos es $R_0 = pC$, con el valor $p = 9,5\%$. Los individuos que no trabajan perciben el subsidio G y el gasto exógeno para el gobierno es $S_0 = qC$, con el valor $q = 0,5\%$.

b) **La solución del modelo**:

1) *Oferta laboral óptima* L_1^* *de los individuos en ausencia de impuestos.* En esta caso es $Y = wL$ y sustituyendo en (VI.36) resulta

$$L_1^* = w.$$

2) *Cálculo de* w_0. Planteamos la ecuación

$$\int_{w_0}^{\infty} wL_1^* dF(w) = C$$

y obtenemos que $w_0 = 5,491544424$ u.m.

3) *Determinación del valor de* λ. De (VI.52) resulta

$$\lambda = \frac{\int_{w_0}^{\infty} \Psi' dF(w)}{\int_{w_0}^{\infty} \frac{1}{U_Y} dF(w)} = \frac{F(w_{60}) - F(w_0) + (1-\beta)(1 - F(w_{60}))}{(1 - F(w_0))} = 0,805176462.$$

4) *Valor de* G. Se cumple que

$$GF(w_0) = qC$$

y resulta, $G = 14,55$ u.m.

5) *Oferta laboral óptima* L^* *de los individuos*. De (VI.36) resulta:

$$L^* = w(1 - T').$$

6) *Ecuación para los tipos marginales*. De (VI.46) obtenemos:

$$\frac{T'}{1-T'} = \begin{cases} \frac{2}{wf}\left[\int_{w}^{w_{60}}\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)dF + \int_{w_{60}}^{\infty}\left(1-\frac{1-\beta}{\lambda}\right)dF\right] & \text{si } w_0 \leq w < w_{60} \\ \frac{2}{wf}\int_{w}^{\infty}\left(1-\frac{1-\beta}{\lambda}\right)dF & \text{si } w \geq w_{60} \end{cases}$$

7) *Hipótesis impositiva de la productividad mínima.* $T(w_0) = 0$.

8) *Cumplimiento de la condición para el subsidio o garantía social* G. Se cumple la condición requerida:

$$G = 14,55 < 30,16 = w_0 L^*.$$

9) *Tabla resumen con algunos resultados:*

w	$F(w)$	**Tipo marginal**	**Tipo medio**
$5,49$ u.m.	$17,95\%$	$0,00\%$	$0,00\%$
$5,73$ u.m.	25%	$2,14\%$	$0,07\%$
$6,96$ u.m.	50%	$12,90\%$	$1,82\%$
$7,31$ u.m.	55%	$15,97\%$	$2,61\%$
$7,74$ u.m.	60%	$19,53\%$	$3,62\%$
$9,68$ u.m.	75%	$19,53\%$	$9,36\%$
$14,97$ u.m.	90%	$19,53\%$	$15,28\%$
$44,81$ u.m.	99%	$19,53\%$	$19,05\%$
$401,54$ u.m.	$99,99\%$	$19,53\%$	$19,52\%$

Capítulo VII

Impuesto progresivo en el modelo aleatorio

Como en el capítulo anterior desarrollamos la oferta de trabajo y el impuesto progresivo sobre la renta salarial. Al individuo se le presenta incertidumbre futura en su tiempo real de trabajo: insolvencia empresarial, accidentes, problemas familiares, absentismo laboral, etc. Inicialmente planifica una oferta de trabajo deseada que, posteriormente, no coincide con la real por diversas situaciones imprevistas.

Las rentas salariales brutas de los individuos dependen de su productividad w y del tiempo real aleatorio trabajado. En este caso, el gobierno puede estar interesado en encontrar una estructura impositiva progresiva directa que financie la compensación de sucesos aleatorios negativos y que contemple la eficiencia económica, la desigualdad social de las rentas y el nivel recaudatorio exógeno necesario. Esta situación genera una problemática fiscal que debe ser modelizada matemáticamente y analizada desde una perspectiva económica.

VII.1.Hipótesis generales

En este capítulo utilizaremos los mismos modelos e hipótesis del capítulo anterior, con las particularidades de diferenciación:

a) El tiempo real de trabajo presenta componente aleatorio. El individuo planifica su oferta de trabajo L, considerando estratégicamente esta circunstancia.

b) La función a maximizar por parte del individuo será su utilidad esperada.

c) La función de bienestar social Ψ o el bienestar social esperado $\int_{\underline{\omega}}^{\overline{\omega}} \Psi dF(w)$ (dependiendo de los modelos considerados), por parte del gobierno, será una función del conjunto de las utilidades esperadas maximizadas para cada nivel de productividad w de la población.

VII.2. La utilidad esperada del individuo

Aquí, el tiempo real de trabajo del individuo depende de una oferta planificada de trabajo L y de un parámetro θ: $\zeta(L,\theta) = L\theta$. El individuo tiene poder de decisión sobre la variable L pero no en el parámetro θ, sobre el cual no puede ejercer ningún control. Formalmente $L \in R_+$, donde R_+ es el conjunto de los números reales positivos y el cero, y θ es una variable aleatoria real continua y positiva, con función de distribución H y esperanza matemática $0 < E(\theta) \leq 1$. Con esta formalización, para cada elección de L el individuo desempeña un tiempo real de trabajo $\zeta(L,\theta)$, que también será una variable aleatoria al serlo θ.

Los ingresos salariales netos aleatorios χ del individuo, al igual que en el capítulo anterior, dependen de su renta salarial unitaria o productividad w, del tiempo aleatorio de trabajo $\zeta(L,\theta)$ y de los impuestos aleatorios a pagar $\tau = \tau(wL\theta)$. Concretamente,

$$\chi = \chi(w,L,\theta) = wL\theta - \tau. \tag{VII.1}$$

Con los fundamentos teóricos y razonamientos parecidos a los del apartado 2 del capítulo III, llegamos a que existe una función real de dos variables u que asigna a cada renta salarial neta cierta Y y a cada tiempo de trabajo, también cierto L, una utilidad $u(Y,L)$, de modo que la utilidad de un ingreso neto salarial incierto χ y un tiempo de trabajo incierto ζ puede ser evaluada de la forma:

$$\widetilde{U}(\chi,\zeta) = \widetilde{U}(\chi(w,L,\theta),\zeta(L,\theta)) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} u(wxL-\tau,xL)dH(x) = E(u(\chi(w,L,\theta),\zeta(L,\theta))),$$

donde $E(.)$ designa la esperanza matemática de la variable aleatoria correspondiente con $0 \leq \theta_1 < \theta_2$ y $0 < E(\theta) \leq 1$. La función u la suponemos con las mismas características que la función de utilidad del capítulo anterior.

VII.3. El problema del individuo

El individuo elegirá un tiempo planificado óptimo de trabajo L^*, teniendo en cuenta la incertidumbre, maximizando su utilidad esperada $\widetilde{U}(\chi,\zeta)$ sujeta la restricción de los ingresos netos salariales aleatorios $\chi = wL\theta - \tau(wL\theta)$. Concretamente, planteamos el problema de optimización:

$$\begin{cases} \widetilde{U}^*(\chi,\zeta) = \max E(u[wL\theta - \tau(wL\theta), L\theta]) \\ \qquad\qquad s.a. \\ \qquad\qquad L \geq 0, \end{cases}$$

donde $E(.)$ es la esperanza matemática, w el nivel de renta salarial unitaria o productividad individual y L la oferta de trabajo planificada, la variable del problema de optimización.

Formando el lagrangiano del problema de optimización

$$\Im(\lambda_1,L) = E(u[wL\theta - \tau(wL\theta),L\theta]) + \lambda_1 L$$

y diferenciando respecto a L y el multiplicador de Kuhn-Tucker, λ_1. Las condiciones de primer orden son

$$\frac{\partial\Im}{\partial L} = E(w(1-\tau')\theta u_\chi(\chi,\zeta)) + \theta u_\zeta(\eta,\zeta)) \ + \lambda_1 = 0 \qquad \text{(VII.2)}$$

$$-\lambda_1 L = 0 \qquad \text{(VII.3)}$$

$$L \geq 0$$

$$\lambda_1 \geq 0.$$

Analizando las posibles soluciones del problema de optimización para los valores del parámetro λ_1:

1) Para $\lambda_1 = 0$, de (VII.2) resulta la ecuación:

$$wE(\theta(1-\tau')u_\chi(\chi,\zeta)) \ + E(\theta u_\zeta(\chi,\zeta)) = 0. \qquad \text{(VII.4)}$$

2) Para $\lambda_1 > 0$, de (VII.2) y (VII.3) obtenemos:

$$w(1-\tau'(0))u_\chi(-\tau(0),0) + u_\zeta(-\tau(0),0) \leq 0 \text{ y } L = 0. \qquad \text{(VII.5)}$$

VII.4. Colectivo formado por dos individuos y el gobierno

VII.4.1. Hipótesis particulares

Además de las hipótesis generales, este modelo presenta las siguientes características:

1) La existencia de dos individuos y el gobierno.

2) Las productividades de ambos individuos son conocidas. Así para el primero es w_1 y para el segundo es w_2, con $w_2 > w_1$.

3) La oferta de trabajo planificada de ambos individuos es positiva. O sea, $L_i > 0, i = 1,2$.

4) Los impuestos aleatorios a pagar por el individuo i vienen determinados por

$$\tau_i = \tau_i(w_i\theta L_i) = \alpha_i w_i L_i \theta,$$

siendo la tasa impositiva $0 < \alpha_i < 1$. Así, la renta salarial neta aleatoria para el individuo i queda establecida mediante la igualdad:

$$\chi_i = w_i L_i \theta - \tau(w_i L_i \theta) = w_i L_i \theta - \alpha_i w_i L_i \theta = (1 - \alpha_i) w_i L_i \theta.$$

Los impuestos esperados a pagar por parte del individuo i son

$$E(\tau_i) = E(\alpha_i w_i L_i \theta) = \alpha_i w_i L_i E(\theta).$$

5) El grado de progresividad del tipo impositivo $\alpha_i, i = 1,2$ viene determinado por la

productividad o nivel de renta salarial unitaria $w_i, i = 1,2$ de los individuos. Así, si $w_1 < w_2$ es $\alpha_1 < \alpha_2$.

6) La oferta planificada de trabajo es estrictamente decreciente con la tasa impositiva. Designando por

$$\Lambda_i \equiv E(\theta u_{\chi_i}(\chi_i,\zeta_i)) + (1-\alpha_i)w_i L_i E(\theta^2 u_{\chi_i\chi_i}(\chi_i,\zeta_i)),$$

debe cumplirse $\Lambda_i > 0, i = 1,2$. Aseguramos el efecto desincentivador del aumento de la tasa impositiva α_i sobre la oferta de trabajo planificada individual óptima L_i^*, ya que será $\frac{\partial L_i^*}{\partial \alpha_i} < 0$.

VII.4.2. Oferta de trabajo óptima planificada

Las ecuaciones (VII.2) para la determinación de la oferta planificada óptima de trabajo de los individuos $L_i^*, i = 1,2$ quedan establecidas por

$$(1-\alpha_i)w_i E(\theta u_{\chi_i}(\chi_i,\zeta_i)) + E(\theta u_{\zeta_i}(\chi_i,\zeta_i)) = 0, i = 1,2. \qquad \text{(VII.6)}$$

Una vez determinada la oferta de trabajo planificada óptima L_i^* para el individuo i, su tiempo de trabajo aleatorio óptimo es $\zeta_i^* = \theta L_i^*$ y sus ingresos netos aleatorios óptimos son $\chi_i^* = (1-\alpha_i)w_i L_i^* \theta$.

Proposición VII.4.1. *La función de la utilidad esperada maximizada individual* $\widetilde{U}_i^*(\chi_i,\zeta_i)$ *es decreciente con la tasa impositiva* α_i.

Demostración. Derivando $\widetilde{U}_i^*(\chi_i,\zeta_i)$ respecto a α_i y considerando (VII.6):

$$
\begin{aligned}
\frac{\widetilde{U}_i^*(\chi_i,\zeta_i)}{\partial\alpha_i} &= E\left(u_{\chi_i}(\chi_i^*,\zeta_i^*)\frac{\partial\chi_i^*}{\partial\alpha_i} + u_{\zeta_i}(\chi_i^*,\zeta_i^*)\frac{\partial\zeta_i^*}{\partial\alpha_i}\right)\\
&= E\left(u_{\chi_i}(\chi_i^*,\zeta_i^*)(-w_iL_i^*\theta + (1-\alpha_i)w_i\theta\frac{\partial L_i^*}{\partial\alpha_i}) + u_{\zeta_i}(\chi_i^*,\zeta_i^*)\theta\frac{\partial L_i^*}{\partial\alpha_i}\right)\\
&= -w_iL_i^*E(\theta u_{\chi_i}(\chi_i^*,\zeta_i^*)) \;+ ((1-\alpha_i)w_iE(\theta u_{\chi_i}(\chi_i^*,\zeta_i^*) + E(\theta u_{\zeta_i}(\chi_i^*,\zeta_i^*))\frac{\partial L_i^*}{\partial\alpha_i}\\
&= -w_iL_i^*E(\theta u_{\chi_i}(\chi_i^*,\zeta_i^*)) \;< 0,
\end{aligned}
$$

al ser $E(\theta u_{\chi_i}(\chi_i^*,\zeta_i^*)) \;> 0$ □

VII.4.3. Los tipos impositivos óptimos

Una vez determinada por los individuos su oferta planificada óptima de trabajo $L_i^*, i = 1,2,$ el gobierno elige $\alpha_i, i = 1,2$ con el objetivo de maximizar la función de bienestar social $\Psi(\widetilde{U}_1^*, \widetilde{U}_2^*)$ sujeta a la restricciones de recaudación y de los tipos impositivos. Así, resulta el problema de optimización:

$$
\left\{
\begin{array}{c}
\max\ \Psi(\widetilde{U}_1^*, \widetilde{U}_2^*)\\
s.a\\
E(\theta)\sum_{i=1}^{2}\alpha_i w_i L_i^* \geq R_0\\
\alpha_1 > 0\\
\alpha_2 > \alpha_1\\
\alpha_2 < 1\\
\Lambda_i > 0, i = 1,2.
\end{array}
\right.
$$

Formando el lagrangiano

$$
\begin{aligned}
\Im(\lambda_1,\ldots,\lambda_6,\alpha_1,\alpha_2) = \Psi(\widetilde{U}_1^*, \widetilde{U}_2^*) + \lambda_1\left(E(\theta)\sum_{i=1}^{2}\alpha_i w_i L_i^* - R_0\right)\\
+ \lambda_2\alpha_1 + \lambda_3(\alpha_2-\alpha_1) + \lambda_4(1-\alpha_2) - \lambda_5\Lambda_1 - \lambda_6\Lambda_2
\end{aligned}
$$

y diferenciando respecto a cada uno de los tipos impositivos $\alpha_i, i = 1,2$ y los multiplicadores de Kuhn-Tucker, $\lambda_1, \ldots, \lambda_6$. Las condiciones de primer orden que caracterizan la solución $\alpha_i^*, i = 1,2$ son

$$\frac{\partial \Im}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial \Psi}{\partial \widetilde{U}_1^*} \frac{\partial \widetilde{U}_1^*}{\partial \alpha_1} + \lambda_1 w_1 E(\theta)\left(L_1^* + \alpha_1 \frac{\partial L_1^*}{\partial \alpha_1}\right) + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_5 \frac{\partial \Lambda_5}{\partial \alpha_1} = 0 \qquad \text{(VII.7)}$$

$$\frac{\partial \Im}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial \Psi}{\partial \widetilde{U}_2^*} \frac{\partial \widetilde{U}_2^*}{\partial \alpha_2} + \lambda_1 w_2 E(\theta)\left(L_2^* + \alpha_2 \frac{\partial L_2^*}{\partial \alpha_2}\right) + \lambda_3 - \lambda_4 + \lambda_6 \frac{\partial \Lambda_6}{\partial \alpha_2} = 0 \qquad \text{(VII.8)}$$

$$-\lambda_1\left(E(\theta)\sum_{i=1}^{2} \alpha_i w_i L_i^* - R_0\right) = 0 \qquad \text{(VII.9)}$$

$$-\lambda_2 \alpha_1 = 0 \qquad \text{(VII.10)}$$

$$-\lambda_3(\alpha_2 - \alpha_1) = 0 \qquad \text{(VII.11)}$$

$$-\lambda_4(1 - \alpha_2) = 0 \qquad \text{(VII.12)}$$

$$-\lambda_5 \Lambda_1 = 0 \qquad \text{(VII.13)}$$

$$-\lambda_6 \Lambda_2 = 0 \qquad \text{(VII.14)}$$

$$E(\theta)\sum_{i=1}^{2} \alpha_i w_i L_i^* - R_0 \geq 0$$

$$\alpha_1 > 0$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 > 0$$

$$1 - \alpha_2 > 0$$

$$\Delta_i > 0. i = 1,2$$

$$\lambda_i \geq 0, i = 1, \ldots, 6.$$

Analizando los posibles valores de los $\lambda_i, i = 1, \ldots, 6$ se deduce:

1) Si algún $\lambda_i > 0, i = 2, \ldots, 6$. La solución no es factible. Así:

a) Para $\lambda_2 > 0$. De (VII.10), resulta $\alpha_1 = 0$.

b) Para $\lambda_3 > 0$. De (VII.11), resulta $\alpha_1 = \alpha_2$.

c) Para $\lambda_4 > 0$. De (VII.12), resulta $\alpha_2 = 1$.

d) Para $\lambda_5 > 0$. De (VII.13), resulta $\Lambda_1 = 0$.

e) Para $\lambda_6 > 0$. De (VII.14), resulta $\Lambda_2 = 0$.

2) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0$. De (VII.7) y (VII.8) resulta un sistema de ecuaciones incompatible, ya que $\frac{\partial \Psi}{\partial \widetilde{U}_i^*} \frac{\partial \widetilde{U}_i^*}{\partial \alpha_i} < 0$ (por las características de Ψ y la proposición VII.4.1).

3) Si $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0$. De las igualdades (VII.7), (VII.8) y (VII.9) deducimos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{\dfrac{\partial \Psi}{\partial \widetilde{U}_1^*}\dfrac{\partial \widetilde{U}_1^*}{\partial \alpha_1}}{\dfrac{\partial \Psi}{\partial \widetilde{U}_2^*}\dfrac{\partial \widetilde{U}_2^*}{\partial \alpha_2}} = \dfrac{w_1\left(L_1^* + \alpha_1 \dfrac{\partial L_1^*}{\partial \alpha_1}\right)}{w_2\left(L_2^* + \alpha_2 \dfrac{\partial L_2^*}{\partial \alpha_2}\right)} \\ E(\theta)\displaystyle\sum_{i=1}^{2} \alpha_i w_i L_i^* = R_0. \end{cases} \tag{VII.15}$$

De las soluciones factibles obtenidas de (VII.15), el teorema de Weierstrass asegura la existencia de al menos una solución óptima (α_1^*, α_2^*).

VII.4.4. Ejemplo de aplicación

Sea el modelo anterior con las siguientes características específicas:

Función de bienestar social	$\Psi(\widetilde{U}_1^*, \widetilde{U}_2^*) = -\left(\dfrac{1}{\widetilde{U}_1^*} + \dfrac{1}{\widetilde{U}_2^*}\right)$
Función de utilidad de los individuos	$u(\chi_i, \zeta_i) = \chi_i - \dfrac{\zeta_i^4}{4}$
Función densidad de la variable θ	$h(x) = \begin{cases} \dfrac{421}{400}\exp(-\dfrac{421}{400}x) \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \quad \text{en otro caso} \end{cases}$
Renta salarial unitaria del individuo 1	$w_1 = 30$ u.m.
Renta salarial unitaria del individuo 2	$w_2 = 50$ u.m.
Recaudación esperada necesaria	$R_0 = 4.200$ u.m.

Obtenemos los valores

$\alpha_1^* = 29,66\%$
$\alpha_2^* = 44,76\%$
$L_1^* = 2,1433$ u.t.t
$L_2^* = 2,1681$ u.t.t

VII.5. Colectivo formado por n individuos y el gobierno

VII.5.1. Hipótesis particulares del modelo

Además de las hipótesis generales, este modelo presenta las siguientes características:

1) La existencia n individuos y el gobierno.

2) Hay h individuos que trabajan. Los $(n-h)$ restantes perciben una renta de garantía o subsidio G y no pagan impuestos.

3) Las rentas salariales unitarias w_i de los individuos son conocidos de antemano. Así n_1 perciben la renta salarial unitaria w_1, n_2 perciben la renta salarial unitaria w_2,...y n_k perciben la renta salarial unitaria w_k, siendo $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = h$. Las rentas salariales unitarias figuran dadas en orden creciente $w_1 < w_2 < \ldots < w_k$.

4) La condición de progresividad del tipo impositivo $\alpha_i, i = 1,\ldots,k$ viene determinada por $w_i < w_j \Rightarrow \alpha_i < \alpha_j$.

5) Los ingresos netos de los individuos que no trabajan son $\chi = G$. Su utilidad esperada maximizada resulta $\widetilde{U}^* = u(G,0)$.

6) Los impuestos aleatorios a pagar por los individuos que trabajan vienen determinados por

$$\tau_i = \tau_i(w_i\theta L_i) = \alpha_i w_i L_i \theta, i = 1,\ldots,k,$$

siendo la tasa impositiva $0 < \alpha_i < 1$. Así, su renta salarial neta aleatoria queda establecida mediante la igualdad

$$\chi_i = (1-\alpha_i)w_iL_i\theta, i = 1,\ldots,k.$$

Los impuestos esperados a pagar por los individuos que trabajan son

$$E(\tau_i) = E(\tau_i(w_i\theta L_i)) \;\; = \alpha_i w_i L_i E(\theta), i = 1,\ldots,k$$

y su renta salarial neta esperada es

$$E(\chi_i) = (1-\alpha_i)w_iL_iE(\theta), i = 1,\ldots,k.$$

7) El gobierno maximiza una función de bienestar social $\Psi(\widetilde{U}^*_{1,\ldots,}\widetilde{U}^*_n)$, que para distintas hipótesis (grado de concavidad) produce los objetivos sociales deseados.

8) La oferta planificada de trabajo es estrictamente decreciente con la tasa impositiva. Designando por

$$\Lambda_i \equiv E(\theta u_{\chi_i}(\chi_i,\zeta_i)) \; + (1-\alpha_i)w_iL_iE(\theta^2 u_{\chi_i\chi_i}(\chi_i,\zeta_i)), i = 1,\ldots,k,$$

debe cumplirse $\Lambda_i > 0, i = 1,\ldots,k$. Aseguramos el efecto desincentivador del aumento de la tasa impositiva α_i sobre la oferta de trabajo planificada individual óptima L_i^*, ya que será $\frac{\partial L_i^*}{\partial \alpha_i} < 0$.

VII.5.2. Oferta de trabajo óptima planificada

De (VII.4) obtenemos que

$$(1-\alpha_i)w_iE(\theta u_{\chi_i}(\chi_i,\zeta_i)) + E(\theta u_{\zeta_i}(\chi_i,\zeta_i)) = 0, i = 1,\ldots,k. \tag{VII.16}$$

Determinada la oferta de trabajo planificada óptima L_i^* para el individuo con nivel de productividad w_i, su tiempo de trabajo óptimo aleatorio es $\zeta_i^* = \theta L_i^*$ y sus ingresos netos óptimos aleatorios son $\chi_i^* = (1-\alpha_i)w_iL_i^*\theta$.

VII.5.3. Los tipos impositivos óptimos y la renta de garantía

Una vez fijadas por los individuos sus ofertas óptimas de trabajo planificadas $L_i^*, i = 1,\ldots,k$. El gobierno debe determinar los tipos impositivos óptimos $\alpha_i^*, i = 1,\ldots,k$ y la renta de garantía G^* con el objetivo de maximizar la función de bienestar social $\Psi(\widetilde{U}_{1,\ldots,}^*\widetilde{U}_n^*)$, sujeta a la restricciones de recaudación y de los tipos impositivos. Así, resulta el problema de optimización:

$$\left\{\begin{array}{c}
\max\ \Psi(\widetilde{U}_{1,\ldots,}^*\widetilde{U}_n^*)\\
s.a.\\
E(\theta)\ \displaystyle\sum_{i=1}^{k} n_i\alpha_iw_iL_i^* - (n-h)G \geq R_0\\
G > 0\\
E(\theta)(1-\alpha_1)w_1L_1 > G\\
\alpha_1 > 0\\
\alpha_2 - \alpha_1 > 0\\
\alpha_3 - \alpha_2 > 0\\
\ldots\\
\alpha_k - \alpha_{k-1} > 0\\
1 - \alpha_k < 0\\
\Lambda_i > 0, i = 1,\ldots,k.
\end{array}\right.$$

Formando el lagrangiano

$$\Im = \Psi(\widetilde{U}^*_{1,...,}\widetilde{U}^*_n) + \lambda_1\left(E(\theta)\sum_{i=1}^{k} n_i\alpha_i w_i L^*_i - (n-h)G - R_0\right) + \lambda_2 G +$$

$$\lambda_3((1-\alpha_1)E(\theta)w_1L_1 - G) + \lambda_4\alpha_1 + \lambda_5(\alpha_2-\alpha_1) + \ldots + \lambda_{k+4}(1-\alpha_k) + \sum_{i=k+5}^{2k+4}\lambda_i\Lambda_i$$

y diferenciando respecto a cada uno de los tipos impositivos $\alpha_i, i = 1,\ldots,k$, la renta de garantía G y los multiplicadores de Kuhn-Tucker, $\lambda_1,\ldots,\lambda_{2k+4}$. Las condiciones de primer orden que caracterizan la solución $\alpha^*_i, i = 1,\ldots,k$ y G^* son:

$$\frac{\partial\Im}{\partial G} = \sum_{i=h+1}^{n}\frac{\partial\Psi}{\partial\widetilde{U}^*_i}\frac{\partial\widetilde{U}^*_i}{\partial G} - (n-h)\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \tag{VII.17}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Im}{\partial\alpha_1} &= \sum_{i=1}^{n_1}\frac{\partial\Psi}{\partial\widetilde{U}^*_i}\frac{\partial\widetilde{U}^*_i}{\partial\alpha_1} + \lambda_1 n_1 w_1 E(\theta)\left(L^*_1 + \alpha_1\frac{\partial L^*_1}{\partial\alpha_1}\right)\\ &\quad + \lambda_3 w_1(-L^*_1 + (1-\alpha_1)\frac{\partial L^*_1}{\partial\alpha_1}) + \lambda_4 - \lambda_5 + \lambda_{k+5}\frac{\partial\Lambda_1}{\partial\alpha_1}\\ &= 0\end{aligned} \tag{VII.18}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Im}{\partial\alpha_2} &= \sum_{i=1}^{n_2}\frac{\partial\Psi}{\partial\widetilde{U}^*_i}\frac{\partial\widetilde{U}^*_i}{\partial\alpha_2} - \lambda_1 n_2 w_2 E(\theta)\left(L^*_2 + \alpha_2\frac{\partial L^*_2}{\partial\alpha_2}\right)\\ &\quad + \lambda_5 - \lambda_6 + \lambda_{k+6}\frac{\partial\Lambda_2}{\partial\alpha_2}\\ &= 0\end{aligned} \tag{VII.19}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Im}{\partial\alpha_{k-1}} &= \sum_{i=1}^{n_{k-1}}\frac{\partial\Psi}{\partial\widetilde{U}^*_i}\frac{\partial\widetilde{U}^*_i}{\partial\alpha_{k-1}} + \lambda_1 n_{k-1} w_{k-1} E(\theta)\left(L^*_{k-1} + \alpha_{k-1}\frac{\partial L^*_{k-1}}{\partial\alpha_{k-1}}\right)\\ &\quad + \lambda_{k+2} - \lambda_{k+3} + \lambda_{2k+3}\frac{\partial\Lambda_{k-1}}{\partial\alpha_{k-1}}\\ &= 0\end{aligned} \tag{VII.20}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \Im}{\partial \alpha_k} &= \sum_{i=1}^{n_k} \frac{\partial \Psi}{\partial \widetilde{U}_i^*} \frac{\partial \widetilde{U}_i^*}{\partial \alpha_k} + \lambda_1 n_k w_k E(\theta)\left(L_k^* + \alpha_k \frac{\partial L_k}{\partial \alpha_k}\right) \\
&\quad + \lambda_{k+3} - \lambda_{k+4} + \lambda_{2k+4} \frac{\partial \Lambda_k}{\partial \alpha_k} + \lambda_{k+3} - \lambda_{k+4} + \lambda_{2k+4} \frac{\partial \Lambda_k}{\partial \alpha_k} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{VII.21}
$$

$$
-\lambda_1\left(E(\theta)\sum_{i=1}^{k} n_i \alpha_i w_i L_i^* - (n-h)G - R_0\right) = 0 \tag{VII.22}
$$

$$
-\lambda_2 G = 0 \tag{VII.23}
$$

$$
-\lambda_3((1-\alpha_1)w_1 L_1 E(\theta) - G) = 0 \tag{VII.24}
$$

$$
-\lambda_4 \alpha_1 = 0 \tag{VII.25}
$$

$$
-\lambda_5(\alpha_2 - \alpha_1) = 0 \tag{VII.26}
$$

$$
-\lambda_6(\alpha_3 - \alpha_2) = 0 \tag{VII.27}
$$

$$
\ldots
$$

$$
-\lambda_{k+4}(1-\alpha_k) = 0 \tag{VII.28}
$$

$$
-\lambda_i \Lambda_i = 0, i = k+5, \ldots, 2k+4 \tag{VII.29}
$$

$$
\sum_{i=1}^{k} n_i \alpha_i w_i L_i^* - (n-h)G \geq R_0
$$

$$G > 0$$

$$(1-\alpha_1)w_1L_1E(\theta) > G$$

$$\alpha_1 > 0$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 > 0$$

$$\ldots$$

$$1-\alpha_k > 0$$

$$\Lambda_i > 0, i = k+5, \ldots, 2k+4$$

$$\lambda_i \geq 0, i = 1, \ldots, 2k+4.$$

Analizando los posibles valores para $\lambda_i, i = 1, \ldots, 2k+4$, obtenemos:

1) Si algún $\lambda_i > 0$, para $i = 2, \ldots, k+2$. La solución no es factible. Así:

a) Para $\lambda_2 > 0$. De (VII.23), resulta $G = 0$.

b) Para $\lambda_3 > 0$. De (VII.24), resulta $G = (1-\alpha_1)w_1L_1^*E(\theta)$.

c) Para $\lambda_4 > 0$. De (VII.25), resulta $\alpha_1 = 0$.

d) Para $\lambda_5 > 0$. De (VII.26), resulta $\alpha_1 = \alpha_2$.

e) Para $\lambda_6 > 0$. De (VII.27), resulta $\alpha_2 = \alpha_3$.

...

f) Para $\lambda_{k+4} > 0$. De (VII.28), resulta $\alpha_k = 1$.

g) Para $\lambda_i > 0, i = k+5,\ldots,2k+4$. De (VII.29), resulta $\Lambda_i > 0, i = k+5,\ldots,2k+4$.

2) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{2k+4} = 0$. De (VII.17), (VII.18). (VII.19), (VII.20) y (VII.21) resulta un sistema de ecuaciones incompatible, ya que $\sum_{i=h+1}^{n} \frac{\partial \Psi}{\partial \widetilde{U}_i^*} \frac{\partial \widetilde{U}_i^*}{\partial G} > 0$ y $\sum_{i=1}^{n_j} \frac{\partial \Psi}{\partial \widetilde{U}_i^*} \frac{\partial \widetilde{U}_i^*}{\partial \alpha_j} < 0, j = 1,\ldots,k.$

3) Si $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_{k+3} = \lambda_{2k+4} = 0$. De las igualdades (VII.17), (VII.18), (VII.19), (VII.20), (VII.21) y (VII.22) deducimos las ecuaciones:

$$\sum_{i=1}^{n_1} \frac{\partial \Psi}{\partial \widetilde{U}_i^*} \frac{\partial \widetilde{U}_i^*}{\partial \alpha_1} + \frac{n_1 w_1 E(\theta)}{n-h} \left(L_1^* + \alpha_1 \frac{\partial L_1^*}{\partial \alpha_1} \right) \sum_{i=h+1}^{n} \frac{\partial \Psi}{\partial \widetilde{U}_i^*} \frac{\partial \widetilde{U}_i^*}{\partial G} = 0, \tag{VII.30}$$

$$\sum_{i=1}^{n_2} \frac{\partial \Psi}{\partial \widetilde{U}_i^*} \frac{\partial \widetilde{U}_i^*}{\partial \alpha_1} + \frac{n_2 w_2 E(\theta)}{n-h} \left(L_2^* + \alpha_1 \frac{\partial L_2^*}{\partial \alpha_2} \right) \sum_{i=h+1}^{n} \frac{\partial \Psi}{\partial \widetilde{U}_i^*} \frac{\partial \widetilde{U}_i^*}{\partial G} = 0 \tag{VII.31}$$

$$\sum_{i=1}^{n_3} \frac{\partial \Psi}{\partial \widetilde{U}_i^*} \frac{\partial \widetilde{U}_i^*}{\partial \alpha_1} + \frac{n_3 w_3 E(\theta)}{n-h} \left(L_3^* + \alpha_3 \frac{\partial L_3^*}{\partial \alpha_3} \right) \sum_{i=h+1}^{n} \frac{\partial \Psi}{\partial \widetilde{U}_i^*} \frac{\partial \widetilde{U}_i^*}{\partial G} = 0 \tag{VII.32}$$

$$\ldots$$

$$\sum_{i=1}^{n_{k-1}} \frac{\partial \Psi}{\partial \widetilde{U}_i^*} \frac{\partial \widetilde{U}_i^*}{\partial \alpha_1} + \frac{n_{k-1} w_{k-1} E(\theta)}{n-h} \left(L_{k-1}^* + \alpha_{k-1} \frac{\partial L_{k-1}^*}{\partial \alpha_{k-1}} \right) \sum_{i=h+1}^{n} \frac{\partial \Psi}{\partial \widetilde{U}_i^*} \frac{\partial \widetilde{U}_i^*}{\partial G} = 0 \tag{VII.33}$$

$$\sum_{i=1}^{n_k} \frac{\partial \Psi}{\partial \widetilde{U}_i^*} \frac{\partial \widetilde{U}_i^*}{\partial \alpha_1} + \frac{n_k w_k E(\theta)}{n-h} \left(L_{k-1}^* + \alpha_k \frac{\partial L_k^*}{\partial \alpha_k} \right) \sum_{i=h+1}^{n} \frac{\partial \Psi}{\partial \widetilde{U}_i^*} \frac{\partial \widetilde{U}_i^*}{\partial G} = 0 \qquad \text{(VII.34)}$$

$$E(\theta) \sum_{i=1}^{k} n_i \alpha_i w_i L_i^* - (n-h)G = R_0. \qquad \text{(VII.35)}$$

Seguidamente seleccionamos los puntos $(G, \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, soluciónes factibles del problema de optimización resultantes del sistema de ecuaciones formado con las igualdades (VII.30), (VII.31), (VII.32), (VII.33), (VII.34) y (VII.35). De los puntos obtenidos, el teorema de Weierstrass asegura la existencia de al menos una solución óptima $(G^*, \alpha_1^*, \ldots, \alpha_k^*)$.

VII.5.4. Ejemplo de aplicación

Sea el modelo anterior con las siguientes características específicas y valores de los parámetros representativos:

Función de bienestar social	$\Psi(\widetilde{U}_1^*, \ldots, \widetilde{U}_n^*) = -\left(\frac{1}{\widetilde{U}_1^*} + \frac{1}{\widetilde{U}_2^*} + \ldots + \frac{1}{\widetilde{U}_n^*} \right)$
Función de utilidad de los individuos	$u(\chi_i, \zeta_i) = \chi_i - \frac{\zeta_i^3}{3}, i = 1, \ldots, 4$
Función densidad de la variable θ	$h(x) = \begin{cases} \frac{421}{400} \exp(-\frac{421}{400}x) \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \quad \text{en otro caso} \end{cases}$
Necesidades de recaudación	$R_0 = 1.200$ u.m.
Total de individuos de la población	$n = 100$
Primer grupo de individuos	$n_1 = 25, w_1 = 40$ u.m.
Segundo grupo de individuos	$n_2 = 20, w_2 = 50$ u.m.
Tercer grupo de individuos	$n_3 = 18, w_3 = 60$ u.m.
Cuarto grupo de individuos	$n_4 = 17, w_4 = 70$ u.m.
Total de individuos sin rentas salariales	$n - h = 20$

Obtenemos los valores

$G^* = 162,64$ u.m.
$\alpha_1^* = 38,56\%$
$\alpha_2^* = 47,19\%$
$\alpha_3^* = 49,53\%$
$\alpha_4^* = 53,31\%$
$L_1^* = 2,1300$ u.t.t.
$L_2^* = 2,2079$ u.t.t.
$L_3^* = 2,3645$ u.t.t.
$L_4^* = 2,4564$ u.t.t.

VII.5.5. Casos paticulares del modelo

Los dos siguientes modelos pueden considerarse como casos particulares del anterior:

1) El formado por dos individuos y el gobierno, en que un individuo tiene nivel de renta salarial unitaria o productividad $w_1 > w_0$ (w_0 es la renta salarial unitaria mínima del trabajo) y la del otro es $w_2 < w_0$. Hemos de tomar $n = 2$, $n_1 = 1$ y $h = 1$.

2) El formado por n individuos y el gobierno, en que todos los individuos tienen un nivel de habilidad $w_i > w_0, i = 1, \ldots, n$. Hemos de tomar $h = n$, cumpliéndose $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

VII.6. Productividades dadas por una función densidad

VII.6.1. Hipótesis particulares

Además de las hipótesis generales del capítulo y las particulares del apartado VI.4.1, este modelo presenta las siguientes características:

1) Los ingresos salariales brutos aleatorios del individuo con nivel de productividad $w \geq w_0$ vienen especificados por la variable aleatoria $\upsilon = wL\theta$, siendo L la oferta de trabajo planificada y θ la variable aleatoria asociada, igual que en los apartados anteriores de este capítulo. La variable aleatoria υ es creciente con el nivel de productividad w del individuo y toma el valor cero, con probabilidad uno, si $L = 0$.

2) La estructura del impuesto aleatorio general sobre la renta del trabajo está representado por una variable aleatoria $\tau = \tau(\upsilon)$, diferenciable, al menos dos veces, para $\upsilon > 0$ y, además, derivable a la derecha en $\upsilon = 0$.

3) La variable aleatoria de los ingresos netos salariales es $\chi = \upsilon - \tau(\upsilon)$.

4) La función del bienestar social medio o esperado para la población es $\int_{\underline{\omega}}^{\overline{\omega}} \Psi(\widetilde{U}^*)dF(w)$, donde Ψ es una función cóncava, creciente y continuamente diferenciable y $\widetilde{U}^*$ la utilidad esperada maximizada del individuo con nivel de productividad w.

5) Utilizaremos los conceptos de ingreso salarial bruto esperado $E(\upsilon)$, impuesto salarial esperado a pagar $E(\tau(\upsilon))$, renta salarial neta esperada $E(\chi)$ e impuesto marginal esperado (definido más adelante).

6) Para la renta mínima salarial unitaria w_0, la cantidad impositiva esperada a pagar es cero. Es decir, $E(\tau(w_0)) = 0$.

7) Los individuos que no trabajan cobran un subsidio de desempleo o renta de garantía G. Su utilidad esperada es $\overline{\widetilde{U}} = u(G,0)$. El valor de G es menor que los ingresos salariales mínimos esperados, $E(\upsilon_0) = E(w_0 L_0^* \theta)$, siendo L_0^* la oferta óptima de trabajo

planificada para el nivel de productividad w_0.

8) La función de utilidad $u(Y,L)$, además, cumple la condición $u_Y(Y,L) \leq 1$ para $w \geq w_0$. Con esta hipótesis aseguramos que $E(u_\chi(\chi,\zeta)) \leq 1$.

VII.6.2. La oferta planificada de trabajo y el impuesto marginal aleatorio

Se debe cumplir la ecuación (VII.4), si la oferta óptima de trabajo planificada es $L^* > 0$ y la desigualdad (VII.5), si es $L^* = 0$. Para los individuos con $L^* > 0$, su tiempo aleatorio óptimo de trabajo es $\zeta^* = L^*\theta$, sus ingresos salariales brutos aleatorios óptimos son $\upsilon^* = wL^*\theta$ y los correspondientes netos $\chi^* = \upsilon^* - \tau(\upsilon^*) = wL^*\theta - \tau(wL^*\theta)$, siendo $\tau(\upsilon^*) = \tau(wL^*\theta)$ los impuestos óptimos aleatorios.

Proposición VII.6.1. *Existe una renta salarial crítica por unidad de tiempo de trabajo* v_c, *tal que para la oferta planificada de trabajo es*

$$L > 0 \text{ para } w \geq v_c$$
$$L = 0 \text{ para } w < v_c.$$

Demostración. En (VII.5), designando por $k(w) \equiv w(1 - \tau'(0))(u_\chi(-\tau(0),0)) + u_\zeta(-\tau(0),0)$, es $k(w)$ estrictamente negativo en $w = 0$ $(u_\zeta(-\tau(0),0) < 0$, al ser $u(\eta,\zeta)$ estrictamente decreciente en ζ) y $k(w)$ es una función creciente con w. Existe, por tanto, un valor $w = v_c$ tal que $g(v_c) = 0$ y $g(w) > 0$ para $w > v_c$. Supongamos que fuese $L = 0$ para $w > v_c$, entonces $u(\eta,\zeta) = u(-\tau(0),0)$ y $u_\eta(\eta,\zeta) = u_\zeta(\eta,\zeta) = 0$. Resultaría $k(w) = 0$ para $w > v_c$, no posible. Así, debe ser $L > 0$ □

Proposición VII.6.2. *A cada nivel de productividad* w, *para la oferta de trabajo óptima planificada* L^* *se cumple*

$$E(\frac{\partial\tau^*}{\partial Z^*}u_\chi(\chi^*,\zeta^*)) \;=\; E(\theta u_\chi(\chi^*,\zeta^*)) \;+\; \frac{E(\theta u_\zeta(\chi^*,\zeta^*))}{w}, \qquad \text{(VII.36)}$$

siendo $Z^* = wL^*$.

Demostración. De (VII.4) resulta:

$$E(\frac{\partial\tau^*}{\partial\upsilon^*}\theta u_\chi(\chi^*,\zeta^*)) \;=\; \frac{wE(\theta u_\chi(\chi^*,\zeta^*)) \;+E(\theta u_\zeta(\chi^*,\zeta^*))}{w}$$

y, reordenando la igualdad anterior

$$\begin{aligned}
E(\frac{\partial\tau^*}{\partial Z^*}\frac{\partial Z^*}{\partial\upsilon^*}\theta u_\chi(\chi^*,\zeta^*)) \;&=\; E(\frac{\partial\tau^*}{\partial Z^*}\frac{1}{\frac{\partial\upsilon^*}{\partial Z^*}}\theta u_\chi(\chi^*,\zeta^*)) \\
&= E(\frac{\partial\tau^*}{\partial Z^*}\frac{1}{\theta}\theta u_\chi(\chi^*,\zeta^*)) \\
&= E(\frac{\partial\tau^*}{\partial Z^*}u_\chi(\chi^*,\zeta^*)) \\
&= E(\theta u_\chi(\chi^*,\zeta^*)) \;+\; \frac{E(\theta u_\zeta(\chi^*,\zeta^*))}{w} \quad \square
\end{aligned}$$

Al valor $E(\frac{\partial\tau^*}{\partial Z^*})$ lo llamaremos *impuesto marginal esperado* asociado al nivel de productividad o renta salarial unitaria w.

Proposición VII.6.3. *Para cada nivel de productividad individual* w *es* $E(\frac{\partial\tau^*}{\partial Z^*}u_\chi(\chi^*,\zeta^*)) \;\le 1$.

Demostración. De (VII.36), al ser $u_\zeta(\chi^*,\zeta^*) < 0$ y $0 < u_\chi(\chi^*,\zeta^*) \le 1$, resulta:

$$E(\frac{\partial\tau^*}{\partial Z^*}u_\chi(\chi^*,\zeta^*)) \;\le E(\theta) + \frac{E(\theta u_\zeta(\chi^*,\zeta^*))}{w} \le 1 + \frac{E(\theta u_\zeta(\chi^*,\zeta^*))}{w} \le 1 \;\; \square$$

VII.6.3. El problema del gobierno

El gobierno elige la variable aleatoria impositiva $\tau(\upsilon^*)$ para el problema de optimización:

$$\begin{cases} \max\left(\Psi(\overline{U})F(w_0) + \int_{w_0}^{\varpi} \Psi(\widetilde{U}^*) dF(w) \right) \\ s.a. \\ \int_{w_0}^{\varpi} E(\upsilon^*) dF(w) = \int_{w_0}^{\varpi} E(\chi^*) dF(w) + GF(w_0) + R_0 \end{cases}$$

El problema puede resolverse utilizando el principio del máximo. La función objetivo puede escribirse (con λ como multiplicador asociado a la restricción de recaudación):

$$\max\left\{ \Psi(\overline{U})F(w_0) + \int_{w_0}^{\varpi} \left[\Psi(\widetilde{U}^*) + \lambda\left(wL^* E(\theta) - E(\chi^*) - \left(\frac{GF(w_0) + R_0}{1 - F(w_0)} \right) \right) \right] dF \right\}.$$

El término $\Psi(\overline{U})F(w_0)$ es un factor constante y no incidirá en los cálculos a realizar. En este proceso de maximización, $\widetilde{U}^*$ se trata como una variable de estado y necesitamos derivar las ecuaciones diferenciales que gobiernan su comportamiento. La diferenciación de la función de utilidad esperada maximizada $\widetilde{U}^*$ y la restricción presupuestaria esperada individual $E(\tau(\upsilon^*)) = wL^* - E(\chi^*)$, juntamente con la condición de primer orden (VII.4), nos llevan a:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\widetilde{U}^*}{dw} &= E(\frac{\partial(u(\chi^*,\zeta^*))}{\partial w}) && \text{(VII.37)}\\
&= E(u_\chi(\chi^*,\zeta^*)\frac{\partial\chi^*}{\partial w} + u_\zeta(\chi^*,\zeta^*)\frac{\partial\zeta^*}{\partial w})\\
&= E((1-\tau')\theta\Big(L^* + w\frac{\partial L^*}{\partial w}\Big)u_\chi(\chi^*,\zeta^*) + \theta u_\zeta(\chi^*,\zeta^*)\frac{\partial L^*}{\partial w})\\
&= L^*E((1-\tau')\theta u_\chi(\chi^*,\zeta^*)) \ + (wE((1-\tau')\theta u_\chi(\chi^*,\zeta^*)) + E(\theta u_\zeta(\chi^*,\zeta^*)))\frac{\partial L^*}{\partial w}\\
&= L^*E((1-\tau')\theta u_\chi(\chi^*,\zeta^*))\\
&= -\frac{L^*E(\theta u_\zeta(\chi^*,\zeta^*))}{w}.
\end{aligned}
$$

La variable de control adoptada es L^* y $E(\chi^*)$ está determinada a partir de L^* y $\widetilde{U}^*$. Al aplicar el principio del Máximo, introducimos el multiplicador $\rho(w)$ asociado a la ecuación diferencial (VII.37), y escribimos el hamiltoniano

$$
\Re = \Big[\Psi(\widetilde{U}^*) + \lambda(wL^*E(\theta) - E(\chi^*) - R_0)\Big]f + \rho\frac{d\widetilde{U}^*}{dw},
$$

siendo f la función de densidad de la distribución de w y donde ρ satisface

$$
-\frac{d\rho}{dw} = \frac{\partial\Re}{\partial\widetilde{U}^*} = \left(\Psi'(\widetilde{U}^*) - \lambda\frac{\partial E(\chi^*)}{\partial\widetilde{U}^*}\right)f + \rho\frac{\partial}{\partial\widetilde{U}^*}\left(\frac{d\widetilde{U}^*}{dw}\right),
$$

con las condiciones de contorno $\rho(w_0) = \rho(\varpi) = 0$. Por (VII.37) y diferenciando respecto a $\widetilde{U}^*$ manteniendo constante L^* y θ, pero permitiendo la dependencia respecto de $\widetilde{U}^*$

$$
-\frac{d\rho}{dw} = \left(\Psi'(\widetilde{U}^*) - \lambda\frac{\partial E(\chi^*)}{\partial\widetilde{U}^*}\right)f - \rho\frac{L^*}{w}E(\theta u_{\chi\zeta}(\chi^*,\zeta^*)\frac{\partial\chi^*}{\partial\widetilde{U}^*}). \tag{VII.38}
$$

La variable de control L^* se elige para maximizar $\Re$, y la condición de primer orden es

$$
\frac{\partial\Re}{\partial L^*} = \lambda\left(wE(\theta) - E\left(\frac{d\chi^*}{dL^*}\right)\Big|_{\widetilde{U}^*=\widetilde{U}^*_m}\right)f + \rho\frac{\partial}{\partial L^*}\left(\frac{d\widetilde{U}^*}{dw}\right) = 0, \tag{VII.39}
$$

donde $\upsilon^* = wL^*\theta$ es una variable aleatoria estrictamente creciente con w y $\widetilde{U}^* = \widetilde{U}_m^*$ es el valor de la utilidad esperada en el óptimo.

En el óptimo

$$\widetilde{U}^*[w, \tau(wL^*))] = E(u(\chi^*, \zeta^*)) = \widetilde{U}_m^*$$

y derivando respecto a L^*

$$E(u_\chi(\chi^*, \zeta^*)\frac{\partial \chi^*}{\partial L^*}) + E(\theta u_\zeta(\chi^*, \zeta^*)) = 0,$$

de donde

$$E(\theta u_\chi(\chi^*, \zeta^*)) - E(\theta\tau' u_\chi(\chi^*, \zeta^*)) = -\frac{E(\theta u_\zeta(\chi^*, \zeta^*))}{w}. \qquad \text{(VII.40)}$$

En (VII.38), teniendo en cuenta que $u_{\chi\zeta}(\chi^*, \zeta^*) = 0$ y reordenando, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho}{dw} &= -\left(\Psi'(\widetilde{U}^*) - \lambda\frac{\partial E(\chi^*)}{\partial \widetilde{U}^*}\right)f \qquad \text{(VII.41)}\\
&= -\left(\Psi'(\widetilde{U}^*) - \lambda E\left(\frac{\partial \chi^*}{\partial \widetilde{U}^*}\right)\right)f\\
&= -\left(\Psi'(\widetilde{U}^*) - \lambda E\left(\frac{1}{E\left(\frac{\partial u(\chi^*, \zeta^*)}{\partial \chi^*}\right)}\right)\right)f\\
&= -\left(\Psi'(\widetilde{U}^*) - \lambda\left(\frac{1}{E(u_\chi(\chi^*, \zeta^*))}\right)\right)f.
\end{aligned}$$

Desarrollando $E\left(\frac{d\chi^*}{dL^*}\right)$ de la ecuación (VII.39):

$$E\left(\frac{d\chi^*}{dL^*}\right) = E\left(\frac{\partial(wL^*\theta - \tau)}{\partial L^*}\right) \tag{VII.42}$$
$$= E(w\theta - \tau' w\theta)$$
$$= E(w(1-\tau')\theta)$$
$$= wE((1-\tau')\theta)$$
$$= wE(\theta) - wE(\tau'\theta).$$

Teniendo en cuenta (VII.37), desarrollamos la expresión $\frac{\partial}{\partial L^*}\left(\frac{d\widetilde{U}^*}{dw}\right)$ de (VII.39):

$$\frac{\partial}{\partial L^*}\left(\frac{d\widetilde{U}^*}{dw}\right) = \frac{\partial}{\partial L^*}\left(-\frac{L^* E(\theta u_\zeta(\chi^*,\zeta^*))}{w}\right) \tag{VII.43}$$
$$= -\frac{(E(\theta u_\zeta(\chi^*,\zeta^*)) + L^* E(\theta^2 u_{\zeta\zeta}(\chi^*,\zeta^*)))}{w}.$$

Seguidamente, sustituímos las expresiones (VII.42) y (VII.43) en la ecuación (VII.39):

$$E(\tau'\theta) = \frac{\rho}{\lambda w^2 f}(E(\theta u_\zeta(\chi^*,\zeta^*)) + L^* E(\theta^2 u_{\zeta\zeta}(\chi^*,\zeta^*))) \tag{VII.44}$$

De (VII.41) y considerando la condición de transversalidad $\rho(\varpi) = 0$, deducimos que

$$\rho(w) = \int_w^{\varpi}\left(\Psi'(\widetilde{U}^*) - \frac{\lambda}{E(u_\chi(\chi^*,\zeta^*))}\right) f(w)dw \tag{VII.45}$$

y sustituyendo en (VII.44), tenemos:

$$E(\tau'\theta) = \frac{E(\theta u_\zeta)}{\lambda w^2 f}\left(\int_w^{\varpi}\left(\Psi'(\widetilde{U}^*) - \frac{\lambda}{E(u_\chi)}\right) f(w)dw\right)\left(1 + \frac{L^* E(\theta^2 u_{\zeta\zeta})}{E(\theta u_\zeta)}\right). \tag{VII.46}$$

Por la igualdad (VII.40) y sustituyendo en (VII.46) resulta la ecuación:

$$\frac{E\left(\frac{\partial\tau}{\partial Z^*}\right)}{E(\theta u_\chi) - E(\frac{\partial\tau}{\partial Z^*}u_\chi)} = \frac{1}{wf}\left(\int_w^{\varpi}\left(\frac{1}{E(u_\chi)} - \frac{\Psi'(\widetilde{U}^*)}{\lambda}\right)dF(w)\right)\left(1 + \frac{L^*E(\theta^2 u_{\zeta\zeta})}{E(\theta u_\zeta)}\right) \qquad \text{(VII.47)}$$

con $Z^* = wL^*$.

De (VII.45) y la condición de transversalidad $\rho(w_0) = 0$, obtenemos el valor del parámetro λ:

$$\lambda = \frac{\int_{w_0}^{\varpi} \Psi'(\widetilde{U}^*)f(w)dw}{\int_{w_0}^{\varpi} \frac{f(w)dw}{E(u_\chi(\chi^*,\zeta^*))}}. \qquad \text{(VII.48)}$$

VII.6.4. Ejemplo de aplicación

a) **Datos específicos del modelo**:

1) Función de utilidad de los individuos $u(\chi,\zeta)$:

$$u(\chi,\zeta) = a\chi - b\frac{\zeta^{1+\frac{1}{\in}}}{1+\frac{1}{\in}}$$

con los valores $a = 1,1$, $b = 1$ y $\in = 1$.

2) Función densidad de las productividades w:

$$f(w) = \begin{cases} \frac{\mu\omega^\mu}{w^{\mu+1}} & \text{si } w \geq \omega \\ 0 & \text{si } w < \omega \end{cases}$$

con los valores $\mu = 2,1$ y $\omega = 5$.

3) Función de bienestar social:

$$\Psi(\widetilde{U}^*) = \begin{cases} \widetilde{U}^* & \text{si } w \leq w_\alpha \\ \widetilde{U}^*_{w_\alpha} + (1-\beta)(\widetilde{U}^* - \widetilde{U}^*_{w_\alpha}) & \text{si } w > w_\alpha, \end{cases}$$

con los valores $\beta = 0,4$ y $w_\alpha = w_{60}$ (el centil 60 de la distribución de las productividades de la población).

4) Función densidad de la variable θ:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{40}{39} \exp(-\dfrac{40}{39}x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

5) El producto medio esperado del trabajo individual, en esta economia, es $\int_{w_0}^{\infty} wL_1^* E(\theta) dF(w) = C$, siendo L_1^* la oferta óptima de trabajo de los individuos en ausencia de impuestos y el valor $C = 260,5$ u.m.

6) El gasto público exógeno medio esperado R_0 que el gobierno debe financiar y que no tiene efectos redistributivos es $R_0 = pC$, con el valor $p = 9,5\%$. Los individuos que no trabajan perciben el subsidio G y el gasto exógeno para el gobierno es $S_0 = qC$, con el valor $q = 0,5\%$.

b) **La solución del modelo**:

1) *Oferta laboral óptima planificada L_1^* de los individuos en ausencia de impuestos.* En esta caso es $\chi = wL\theta$ y sustituyendo en (VII.4), resulta:

$$L_1^* = \frac{wE(\theta)}{E(\theta^2)}.$$

2) *Cálculo de* w_0. Planteamos la ecuación

$$\int_{w_0}^{\infty} wL_1^* E(\theta) dF(w) = C$$

y obtenemos que $w_0 = 5,397414929$ u.m.

3) *Determinación del valor de* λ. De (VII.48) resulta:

$$\lambda = \frac{\displaystyle\int_{w_0}^{\infty} \Psi'(\widetilde{U}^*) f(w) dw}{\displaystyle\int_{w_0}^{\infty} \frac{f(w)dw}{E(u_\chi(\chi^*, \zeta^*))}} = \frac{F(w_{60}) - F(w_0) + (1-\beta)(1 - F(w_{60}))}{1 - F(w_0)} = 0,8121231951.$$

4) *Valor de* G. Se cumple que

$$GF(w_0) = qC$$

y obtenemos $G = 8,78$ u.m.

5) *Oferta laboral planificada óptima* L^* *de los individuos*. De (VII.4) resulta:

$$L^* = \frac{20w}{39}(1 - E(\theta\tau')).$$

6) *Ecuación para los tipos marginales*. De (VII.47) obtenemos:

$$\frac{40E\left(\frac{\partial\tau}{\partial Z^*}\right)}{39-40E(\frac{\partial\tau}{\partial Z^*})} = \begin{cases} \frac{2,95}{wf}\left[\int_w^{w_{60}}\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)dF+\int_{w_{60}}^{\infty}\left(1-\frac{1-\beta}{\lambda}\right)dF\right] & \text{si } w_0 \leq w < w_{60} \\ \frac{2,95}{wf}\int_{w_{60}}^{\infty}\left(1-\frac{1-\beta}{\lambda}\right)dF & \text{si } w \geq w_{60} \end{cases} \quad \text{(IV.54)}$$

7) *Hipótesis impositiva de la productividad mínima.* $E(\tau(w_0)) = 0$.

8) *Cumplimiento de la condición para el subsidio o garantía social* G. Se cumple la condición requerida:

$$G = 8,78 < 14,57 = E(w_0 L_0^* \theta).$$

9) *Tabla resumen con algunos resultados:*

w	$F(w)$	**Tipo marginal esperado**	**Tipo medio esperado**
$5,49$ u.m.	$14,84\%$	$0,00\%$	$0,00\%$
$5,73$ u.m.	25%	$4,11\%$	$0,17\%$
$6,96$ u.m.	50%	$18,04\%$	$2,87\%$
$7,31$ u.m.	55%	$21,92\%$	$4,10\%$
$7,74$ u.m.	60%	$26,17\%$	$5,71\%$
$9,68$ u.m.	75%	$26,17\%$	$11,56\%$
$14,97$ u.m.	90%	$26,17\%$	$20,46\%$
$44,81$ u.m.	99%	$26,17\%$	$26,13\%$
$401,54$ u.m.	$99,99\%$	$26,17\%$	$26,83\%$

Capítulo VIII

Rentas salariales en el IRPF del año 2007

Finalmente, desarrollamos una aplicación práctica de los contenidos estudiados adaptada a las rentas salariales declaradas en el IRPF del año 2007. Contrastamos los tipos impositivos de la normativa fiscal de este año con los resultantes de la aplicación de algunas hipótesis y resultados de los capítulos anteriores, especialmente los dirigidos a la progresividad de los tipos impositivos según el nivel de renta del trabajo.

Hemos seleccionado el año 2007 por ser el último del que se dispone de una información estadística más amplia y detallada, en las publicaciones por parte de la Agencia Tributaria.

VIII.1. Rentas salariales deterministas

Las rentas salariales declaradas en el IRPF del año 2007 son tratadas siguiendo las hipótesis, principios teóricos y resultados expuestos en el apartado VI.4. El objetivo principal es analizar una aplicación práctica real y contrastar lo establecido en la economía normativa (la legislación fiscal del IRPF en el año 2007, en este caso) con los principios y análisis de la economia positiva (la progresividad y eficiencia económica expuestas en los contenidos estudiados)

VIII.1.1. Hipótesis adicionales a considerar en la adaptación

Junto con las hipótesis establecidas en el apartado VI.4, para adaptar y contextualizar la aplicación de los principios teóricos que utilizaremos, hemos de considerar que:

1) La función de utilidad es

$$U(Y,L) = Y - \frac{L^{1+\frac{1}{\in}}}{1+\frac{1}{\in}}, \qquad \text{(VIII.1)}$$

con $\in = 0,5$. Tal como se determina en Bourguignon y Spadaro (2000), que las elasticidades son bajas para la oferta de trabajo en países como Francia y España.

2) Las función de bienestar social es del tipo de las introducidas en este trabajo. O sea, lineal por tramos.

3) La función densidad de las productividades w de la población será una log-normal, ajustada a los datos estadísticos reales disponibles.

4) Con los tramos de la base imponible disponibles del IRPF ordenados por intervalos, los porcentajes de cada tramo que corresponden a la renta salarial, las frecuencias relativas de la población adscrita a cada tramo general impositivo y la función de utilidad $U(Y,L)$, determinamos los parámetros μ y σ de la función densidad log-normal a ajustar a las productividades w:

$$f(w) = \frac{1}{w\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(\ln w - \mu)^2}{2\sigma^2})$$

para $w \geq 0$.

5) Al ser los ingresos salariales obtenidos de la base impositiva general, ya figuran netos de los descuentos salariales asociados (Seguridad Social, MUFACE, cuotas a sindicatos, etc.).

6) No existe renta de garantía o subsidio salarial. En este caso es $G = 0$. Los subsidios, si existen, forman parte de los gastos exógenos R_0 a recaudar por el gobierno.

7) El nivel de productividad mínimo es $w_0 = 0$ y toda renta salarial generada está sujeta al impuesto. O sea, $T(0) = 0$ y $T(w) > 0$, para $w > 0$.

VIII.1.2. Intervalos de renta salarial y frecuencias relativas

Los datos y cálculos de la siguiente tabla, de cuatro columnas, figuran configurados en la forma:

-En la primera columna, consta la renta total declarada sujeta a IRPF del año 2007 clasificada por tramos.

-En la segunda columna, figura el porcentaje de la renta de cada tramo que corresponde a ingresos salariales.

-En la tercera columna, los intervalos de renta salarial esperada resultantes de aplicar los porcentajes de la segunda columna a la primera.

-En la cuarta columna, las frecuencias relativas de los declarantes de cada tramo de renta en el IRPF del 2007.

Tramo renta IRPF	Porcentaje	Intervalo calculado	Frecuencia relativa
$[0; 3.000)$	$71,81\%$	$[0; 2.154)$	$6,49\%$
$[3.000; 4.500)$	$75,59\%$	$[2.154; 3.402)$	$5,02\%$
$[4.500; 6.000)$	$72,68\%$	$[3.402; 4.361)$	$5,01\%$
$[6.000; 7.500)$	$72,49\%$	$[4.361; 5.437)$	$4,51\%$
$[7.500; 9.000)$	$75,34\%$	$[5.437; 6.781)$	$4,74\%$
$[9.000; 10.500)$	$78,44\%$	$[6.781; 8.236)$	$5,03\%$
$[10.500; 12.000)$	$83,54\%$	$[8.236; 10.025)$	$6,32\%$
$[12.000; 15.000)$	$82,93\%$	$[10.025; 12.440)$	$11,51\%$
$[15.000; 18.000)$	$82,92\%$	$[12.440; 14.296)$	$9,45\%$
$[18.000; 21.000)$	$83,76\%$	$[14.296; 17.590)$	$7,78\%$
$[21.000; 24.000)$	$85,04\%$	$[17.590; 20.410)$	$6,44\%$
$[24.000; 27.000)$	$85,75\%$	$[20.410; 23.153)$	$5,28\%$
$[27.000; 30.000)$	$86,02\%$	$[23.153; 25.806)$	$4,34\%$
$[30.000; 36.000)$	$84,88\%$	$[25.806; 30.557)$	$6,13\%$
$[36.000; 42.000)$	$81,52\%$	$[30.557; 34.238)$	$3,39\%$
$[42.000; 48.000)$	$79,11\%$	$[34.238; 37.973)$	$2,12\%$
$[48.000; 54.000)$	$77,65\%$	$[37.973; 41.931)$	$1,46\%$
$[54.000; 60.000)$	$76,01\%$	$[41.931; 45.606)$	$1,05\%$
$[60.000; 72.000)$	$73,69\%$	$[45.606; 53.057)$	$1,35\%$
$[72.000; 84.000)$	$69,97\%$	$[53.057; 58.775)$	$0,79\%$
$[84.000; 96.000)$	$65,71\%$	$[58.775; 63.082)$	$0,47\%$
$[96.000; 120.000)$	$60,51\%$	$[63.082; 72.612)$	$0,51\%$
$[120.000; 144.000)$	$54,25\%$	$[72.612; 78.120)$	$0,25\%$
$[144.000; 168.000)$	$50,56\%$	$[78.120; 84.941)$	$0,15\%$
$[168.000; 192.000)$	$48,20\%$	$[84.941; 92.544)$	$0,09\%$
$[192.000; 216.000)$	$45,64\%$	$[92.544; 98.582)$	$0,06\%$
$[216.000; 240.000)$	$43,28\%$	$[98.582; 103.872)$	$0,04\%$
$[240.000; \infty)$	$30,89\%$	$[103.872; \infty)$	$0,22\%$
TOTALES		$298.543.514.000$	100%

El valor total de las rentas salariales es $C = 298.543.514.000$ € y los impuestos recaudados por el gobierno son $R_0 = 54.003.173.210$ €, que representan un $18,089\%$ de la renta generada por los asalariados.

VIII.1.3. Intervalos de niveles de productividad y frecuencias acumuladas

Tomando la función de utilidad (VIII.1) y sustituyendo en la ecuación (VI.36), obtenemos que la oferta óptima de los individuos con nivel de productividad w, sin considerar impuestos directos, es

$$L_1^* = \sqrt{w}\,. \tag{VIII.2}$$

De (VIII.2) obtenemos los intervalos de productividad, que constan en la tabla de la página siguiente:

Intervalos renta salarial	**Intervalos de productividad**	**Frecuencia acumulada $F(x)$**
$[0; 2.154)$	$[0; 166,79)$	$6,49\%$
$[2.154; 3.402)$	$[166,79; 226,20)$	$11,51\%$
$[3.402; 4.361)$	$[226,20; 266,93)$	$16,52\%$
$[4.361; 5.437)$	$[266,93; 309,20)$	$21,03\%$
$[5.437; 6.781)$	$[309,20; 358,26)$	$25,77\%$
$[6.781; 8.236)$	$[358,26; 407,83)$	$30,80\%$
$[8.236; 10.025)$	$[407,83; 464,93)$	$37,12\%$
$[10.025; 12.440)$	$[464,93; 536,88)$	$48,63\%$
$[12.440; 14.296)$	$[536,88; 589,04)$	$58,08\%$
$[14.296; 17.590)$	$[589,04; 676,36)$	$65,86\%$
$[17.590; 20.410)$	$[676,36; 746,84)$	$72,30\%$
$[20.410; 23.153)$	$[746,84; 812,34)$	$77,58\%$
$[23.153; 25.806)$	$[812,34; 873,27)$	$81,92\%$
$[25.806; 30.557)$	$[873,27; 977,40)$	$88,05\%$
$[30.557; 34.238)$	$[977,40; 1.054,40)$	$91,44\%$
$[34.238; 37.973)$	$[1.054,40; 1.129,75)$	$93,56\%$
$[37.973; 41.931)$	$[1.129,75; 1.206,95)$	$95,02\%$
$[41.931; 45.606)$	$[1.206,95; 1.276,48)$	$96,07\%$
$[45.606; 53.057)$	$[1.276,48; 1.411,98)$	$97,42\%$
$[53.057; 58.775)$	$[1.411,98; 1.511,69)$	$98,21\%$
$[58.775; 63.082)$	$[1.511,69; 1.584,66)$	$98,68\%$
$[63.082; 72.612)$	$[1.584,66; 1.740,49)$	$99,19\%$
$[72.612; 78.120)$	$[1.740,49; 1.827,43)$	$99,44\%$
$[78.120; 84.941)$	$[1.827,43; 1.932,32)$	$99,59\%$
$[84.941; 92.544)$	$[1.932,32; 2.045,97)$	$99,68\%$
$[92.544; 98.582)$	$[2.045,97; 2.134,02)$	$99,74\%$
$[98.582; 103.872)$	$[2.134,02; 2.209,69)$	$99,78\%$
$[103.872; \infty)$	$[2.209,69; \infty)$	100%

VIII.1.4. Ajuste de la distribución log-normal

Calculamos un ajuste por linearización, aproximando los valores observados a una recta en la cual la variable independiente es logarítmica. La función de distribución podrá escribirse en función de las áreas de una distribución normal $N(0,1)$. Llamaremos z a cada abcisa de la $N(0,1)$ que delimita a su izquierda un área igual a $F(x)$.

Tendremos, entonces que

$$z_i = a + b \ln x_i. \tag{VIII.3}$$

Por otra parte sabemos que las abcisas de las probabilidades de una distribución normal $N(0,1)$ van a ser

$$z_i = \frac{\ln x_i - \mu}{\sigma}.$$

De donde

$$-\frac{\mu}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} \ln x_i = a + b \ln x_i.$$

De la ecuación anterior, obtenemos:

$$\mu = -\frac{a}{b} \text{ y } \sigma = \frac{1}{b}. \tag{VIII.4}$$

Con los valores para z_i y $\ln x_i$ de la tabla de la página siguiente, calculamos la recta de regresión (VIII.3):

$\ln x_i$	**Area** $N(0,1)$	**Abcisa** z_i
$\ln(166,79)$	$0,0649$	$-1,51489104$
$\ln(226,20)$	$0,1151$	$-1,19984383$
$\ln(266,93)$	$0,1652$	$-0,97330850$
$\ln(309,20)$	$0,2103$	$-0,80538074$
$\ln(358,26)$	$0,2577$	$-0,65045246$
$\ln(407,83)$	$0,3080$	$-0,50152740$
$\ln(464,93)$	$0,3712$	$-0,32867679$
$\ln(536,88)$	$0,4863$	$-0,03434756$
$\ln(589,04)$	$0,5808$	$0,20394049$
$\ln(676,36)$	$0,6586$	$0,40864527$
$\ln(746,84)$	$0,7230$	$0,59177689$
$\ln(812,34)$	$0,7758$	$0,75808517$
$\ln(873,27)$	$0,8192$	$0,91232055$
$\ln(977,40)$	$0,8805$	$1,17748997$
$\ln(1.054,40)$	$0,9144$	$1,36835814$
$\ln(1.129,75)$	$0,9356$	$1,51885102$
$\ln(1.206,95)$	$0,9502$	$1,64679592$
$\ln(1.276,48)$	$0,9607$	$1,75886760$
$\ln(1.411,98)$	$0,9742$	$1,94645590$
$\ln(1.511,69)$	$0,9821$	$2,09919176$
$\ln(1.584,66)$	$0,9868$	$2,22027656$
$\ln(1.740,49)$	$0,9919$	$2,40437828$
$\ln(1.827,43)$	$0,9944$	$2,53639601$
$\ln(1.932,32)$	$0,9959$	$2,64372189$
$\ln(2.045,97)$	$0,9968$	$2,72655132$
$\ln(2.134,02)$	$0,9974$	$2,79437587$
$\ln(2.209,69)$	$0,9978$	$2,84796329$
∞	1	∞

La recta de regresión obtenida es $z_i = -11,2936 + 1,82378 \ln x_i$ y el coeficiente de correlación de Pearson asociado, $r = 0,994$. Con estos datos y utilizando (VIII.4), resulta:

$$\mu = \frac{11,2936}{1,82378} = 6,192413559 \text{ y } \sigma = \frac{1}{1,82378} = 0,548311748.$$

VIII.1.5. La función de bienestar social

Para definir la función de bienestar social por tramos, consideramos que el 73% de las rentas salariales son inferiores a 20.800 €. La función queda definida por la expresión:

$$\Psi(V) = \begin{cases} V & \text{si } 0 \leq w < w_{73} \\ V_{73} + 0,6(V - V_{73}) & \text{si } w_{73} \leq w < \infty, \end{cases}$$

siendo V_{73} la utilidad indirecta correspondiente al centil 73.

VIII.1.6. Cálculo del valor de lambda

De la función de bienestar social y (VI.52) resulta:

$$\lambda = \frac{\int_0^\infty \Psi' dF(w)}{\int_0^\infty \frac{1}{U_Y} dF(w)} = 0,892.$$

VIII.1.7. Determinación de algunos tipos marginales

Calculamos los tipos marginales y medios para los niveles de productividad w_5, w_{25}, w_{50}, w_{75}, w_{90} y w_{99}. La ecuación (VI.46) queda expresada por

$$\frac{T'(Z^*)}{1 - T'(Z^*)} = \begin{cases} \frac{3}{wf}\left(\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\int_w^{w_{73}} dF + (1 - \frac{0,6}{\lambda})\int_{w_{73}}^\infty dF\right) & \text{si } 0 \leq w < w_{73} \\ \frac{3}{wf}(1 - \frac{0,6}{\lambda})\int_w^\infty dF & \text{si } w_{73} \leq w < \infty \end{cases} \tag{VIII.5}$$

De (VIII.5) resulta:

Nivel de productividad	Tipo marginal	Tipo medio
w_5	$8,81\%$	$7,90\%$
w_{25}	$13,55\%$	$9,66\%$
w_{50}	$19,98\%$	$12,49\%$
w_{75}	$29,76\%$	$17,63\%$
w_{90}	$23,48\%$	$21,20\%$
w_{99}	$16,81\%$	$20,10\%$

VIII.2. Rentas salariales con incertidumbre

Con las mismas hipótesis y planteamientos del apartado anterior y siguiendo las directrices analizadas en (VII.6), sobre incertidumbre en las rentas del factor trabajo, consideramos que a los individuos se les presenta un factor de aleatoriedad en sus rentas salariales representado por la variable aleatoria θ, continua y positiva, de función densidad:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{21}{20}\exp(-\frac{21x}{20}) \text{ si } x > 0 \\ 0 \quad \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{VIII.6}$$

En esta caso y en consonancia con el apartado VIII.1, la función de utilidad a utilizar en las utilidades esperadas queda expresada por

$$u(\chi,\zeta) = \chi - \frac{\zeta^3}{3}. \tag{VIII.7}$$

VIII.2.1. Intervalos de niveles de productividad y frecuencias acumuladas

Tomando la función de utilidad (VIII.7) y sustituyendo en la ecuación (VII.4), obtenemos que la oferta planificada óptima L_1^* de los individuos con nivel de productividad w, sin considerar impuestos directos, es

$$L_1^* = \sqrt{\frac{wE(\theta)}{E(\theta^3)}} = \sqrt{\frac{147w}{800}}. \qquad \text{(VIII.8)}$$

De (VIII.8) obtenemos los intervalos de productividad, que constan en la tabla de la página siguiente:

Intervalos renta salarial	Intervalos de productividad	Frecuencia acumulada $F(x)$
$[0; 2.154)$	$[0; 293,37)$	$6,49\%$
$[2.154; 3.402)$	$[293,37; 397,88)$	$11,51\%$
$[3.402; 4.361)$	$[397,88; 469,51)$	$16,52\%$
$[4.361; 5.437)$	$[469,51; 543,87)$	$21,03\%$
$[5.437; 6.781)$	$[543,87; 630,16)$	$25,77\%$
$[6.781; 8.236)$	$[630,16; 717,36)$	$30,80\%$
$[8.236; 10.025)$	$[717,36; 817,80)$	$37,12\%$
$[10.025; 12.440)$	$[817,80; 944,36)$	$48,63\%$
$[12.440; 14.296)$	$[944,36; 1.036,10)$	$58,08\%$
$[14.296; 17.590)$	$[1.036,10; 1.189,69)$	$65,86\%$
$[17.590; 20.410)$	$[1.189,69; 1.313,67)$	$72,30\%$
$[20.410; 23.153)$	$[1.313,67; 1.428,88)$	$77,58\%$
$[23.153; 25.806)$	$[1.428,88; 1.536,05)$	$81,92\%$
$[25.806; 30.557)$	$[1.536,05; 1.719,22)$	$88,05\%$
$[30.557; 34.238)$	$[1.719,22; 1.854,66)$	$91,44\%$
$[34.238; 37.973)$	$[1.854,66; 1.987,20)$	$93,56\%$
$[37.973; 41.931)$	$[1.987,20; 2.122,99)$	$95,02\%$
$[41.931; 45.606)$	$[2.122,99; 2.245,29)$	$96,07\%$
$[45.606; 53.057)$	$[2.245,29; 2.483,62)$	$97,42\%$
$[53.057; 58.775)$	$[2.483,62; 2.659,01)$	$98,21\%$
$[58.775; 63.082)$	$[2.659,01; 2.787,37)$	$98,68\%$
$[63.082; 72.612)$	$[2.787,37; 3.061,47)$	$99,19\%$
$[72.612; 78.120)$	$[3.061,47; 3.214,39)$	$99,44\%$
$[78.120; 84.941)$	$[3.214,39; 3.398,88)$	$99,59\%$
$[84.941; 92.544)$	$[3.398,88; 3.598,79)$	$99,68\%$
$[92.544; 98.582)$	$[3.598,79; 3.753,67)$	$99,74\%$
$[98.582; 103.872)$	$[3.753,67; 3.886,78)$	$99,78\%$
$[103.872; \infty)$	$[3.886,78; \infty)$	100%

VIII.2.2. Ajuste de la distribución log-normal

Con los valores para z_i y $\ln x_i$ de la tabla de la página siguiente, calculamos la recta de regresión como en el apartado VIII.1.4:

$\ln x_i$	**Area** $N(0,1)$	**Abcisa** z_i
$\ln(293,37)$	$0,0649$	$-1,51489104$
$\ln(397,88)$	$0,1151$	$-1,19984383$
$\ln(469,51)$	$0,1652$	$-0,97330850$
$\ln(543,87)$	$0,2103$	$-0,80538074$
$\ln(630,16)$	$0,2577$	$-0,65045246$
$\ln(717,36)$	$0,3080$	$-0,50152740$
$\ln(817,80)$	$0,3712$	$-0,32867679$
$\ln(944,36)$	$0,4863$	$-0,03434756$
$\ln(1.036,10)$	$0,5808$	$0,20394049$
$\ln(1.189,69)$	$0,6586$	$0,40864527$
$\ln(1.313,67)$	$0,7230$	$0,59177689$
$\ln(1.428,88)$	$0,7758$	$0,75808517$
$\ln(1.536,05)$	$0,8192$	$0,91232055$
$\ln(1.719,22)$	$0,8805$	$1,17748997$
$\ln(1.854,66)$	$0,9144$	$1,36835814$
$\ln(1.987,20)$	$0,9356$	$1,51885102$
$\ln(2.122,99)$	$0,9502$	$1,64679592$
$\ln(2.245,29)$	$0,9607$	$1,75886760$
$\ln(2.483,62)$	$0,9742$	$1,94645590$
$\ln(2.659,01)$	$0,9821$	$2,09919176$
$\ln(2.787,37)$	$0,9868$	$2,22027656$
$\ln(3.061,47)$	$0,9919$	$2,40437828$
$\ln(3.214,39)$	$0,9944$	$2,53639601$
$\ln(3.398,88)$	$0,9959$	$2,64372189$
$\ln(3.598,79)$	$0,9968$	$2,72655132$
$\ln(3.753,67)$	$0,9974$	$2,79437587$
$\ln(3.886,78)$	$0,9978$	$2,84796329$
∞	1	∞

La recta de regresión obtenida es $z_i = -12,3235 + 1,82377 \ln x_i$ y el coeficiente de correlación de Pearson asociado, $r = 0,994$. Con estos datos y utilizando (VIII.4), resulta:

$$\mu = \frac{12,3235}{1,82377} = 6,757156878 \text{ y } \sigma = \frac{1}{1,82377} = 0,548314754.$$

VIII.2.3. La función de bienestar social

Para definir la función de bienestar social por tramos, consideramos que el 73% de las rentas salariales son inferiores a 20.800 €. La función queda definida por la expresión:

$$\Psi(\widetilde{U}^*) = \begin{cases} \widetilde{U}^* & \text{si } 0 \leq w < w_{73} \\ \widetilde{U}^*_{73} + 0,6\left(\widetilde{U}^* - \widetilde{U}^*_{73}\right) & \text{si } w_{73} \leq w < \infty, \end{cases}$$

siendo $\widetilde{U}^*_{73}$ la utilidad esperada correspondiente al centil 73.

VIII.2.4. Cálculo del valor de lambda

De la función de bienestar social y (VII.48) resulta:

$$\lambda = \frac{\int_0^\infty \Psi'(\widetilde{U}^*) f(w)dw}{\int_0^\infty \frac{f(w)dw}{E(u_\chi(\chi^*,\zeta^*))}} = 0,892.$$

VIII.2.5. Determinación de algunos tipos marginales

Calculamos los tipos marginales y medios para los niveles de productividad w_5, w_{25}, w_{50}, w_{75}, w_{90} y w_{99}. La ecuación (VII.47) queda expresada por

$$\frac{21E\left(\frac{\partial\tau}{\partial Z^*}\right)}{20-21E(\frac{\partial\tau}{\partial Z^*})} \tag{VIII.9}$$

$$= \begin{cases} \frac{3}{wf}\left(\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\int_w^{w_{73}} dF + (1-\frac{0,6}{\lambda})\int_{w_{73}}^{\infty} dF\right) & \text{si } 0 \le w < w_{73} \\ \frac{3}{wf}(1-\frac{0,6}{\lambda})\int_w^{\infty} dF & \text{si } w_{73} \le w < \infty \end{cases}$$

De (VIII.9) resulta:

Nivel de productividad	Tipo marginal esperado	Tipo medio esperado
w_5	$8,39\%$	$7,59\%$
w_{25}	$12,90\%$	$9,66\%$
w_{50}	$19,02\%$	$11,93\%$
w_{75}	$28,34\%$	$16,84\%$
w_{90}	$22,36\%$	$20,20\%$
w_{99}	$16,01\%$	$19,15\%$

VIII.3. Tipos marginales y medios en el IRPF 2007

Consultando las tablas de las escalas de gravamen y los datos estadísticos del IRPF del año 2007, del Ministerio de Economía y Hacienda, vemos que los impuestos marginales y medios de los niveles de productividad w de la población considerados, anteriormente, son:

Nivel de productividad	Tipo marginal	Tipo medio
w_5	24%	$0,01\%$
w_{25}	24%	$2,58\%$
w_{50}	24%	$10,72\%$
w_{75}	28%	$15,44\%$
w_{90}	28%	$19,55\%$
w_{99}	43%	$25,30\%$

Hay diferencias significativas entre los tipos marginales reales y los calculados, tanto en el caso determinista como en el aleatorio. Los tipos medios resultan más homogéneos, sobre todo en los centiles superiores de los niveles de productividad w de la población.

VIII.4. Comentarios sobre los resultados obtenidos

La idea de partida ha consistido, fundamentalmente, en observar la redistribución impositiva efectiva obtenida con los datos del IRPF del año 2007 y compararla con la redistribución óptima calculada a partir de los desarrollos teóricos que han sido expuestos en algunos apartados de los capítulos VI y VII. Los parámetros exógenos necesarios (elasticidad de la oferta de trabajo, distribución de productividades y aversión a la desigualdad) han sido estimados a partir de datos estadísticos e hipótesis auxiliares.

El primer componente exógeno $\in= 0,5$, puede ser considerado como un valor medio en la literatura econométrica correspondiente, tal como se cita en Bourguignon y Spadaro (2000).

El segundo componente exógeno del cálculo de la imposición óptima es la función de bienestar social. Hemos utilizado una función lineal por tramos, que asigna un peso redistributivo constante al primer 73% de los individuos y un peso constante pero inferior al 27% restante.

El objetivo no ha sido estudiar en profundidad *los efectos normativos reales existentes versus efectos económicos positivos* en el segmento salarial del IRPF español, sólo mostrar como esto puede hacerse utilizando funciones de bienestar social por tramos lineales y funciones de utilidad cuasilineales en la renta disponible. Sin embargo, el objetivo principal es constatar que en situaciones de incertidumbre los tipos impositivos esperados resultan inferiores a los obtenidos con estados de la naturaleza ciertos, para los mismos niveles de productividad o renta salarial unitaria w de la población.

Al objeto de aplicar correctamente los contenidos teóricos estudiados a las rentas salariales declaradas en el IRPF español, deberíamos:

-Contabilizar y separar las rentas declaradas no procedentes del trabajo por cuenta ajena (pensiones de jubilación, invalidez, etc.).

-Hacer un estudio estadístico y econométrico en profundidad para determinar la elasticidad real $\in$ de la oferta de trabajo en España y los parámetros a,b de las funciones de utilidad: $U(Y,L) = aY - \frac{bL^{1+\frac{1}{\in}}}{1+\frac{1}{\in}}$ y $u(\chi,\zeta) = a\chi - \frac{b\zeta^{1+\frac{1}{\in}}}{1+\frac{1}{\in}}$ que contemplen, entre otros factores, las preferencias por el ocio de la población.

-Configurar una función de bienestar social por tramos lineales que refleje la política social y el nivel de aversión a la desigualdad en las rentas salariales del gobierno en el período a estudiar. En ella se deberían contemplar los principios y formalidades fiscales contenidos en la Ley de Presupuestos Generales del Estado del año correspondiente.

-Determinar una distribución continua de probabilidad que modelice el nivel de renta salarial unitaria w de la población. Las leyes de probabilidad: log-normal, exponencial y de Pareto aparecen como las más adecuadas, como se justifica en Garcia (2000).

Conclusiones

Síntesis de las contribuciones más importantes

En los capítulos anteriores se han ido construyendo distintos modelos de complejidad creciente sobre la imposición óptima directa aplicada a las rentas salariales obtenidas en función del tiempo de trabajo y la productividad individual y, también, sobre las expectativas formativas de la población planificadas en función de los impuestos a pagar en el futuro. En ambos casos se han desarrollado modelos deterministas y sus paralelos aleatorios, en el tiempo real de trabajo y formación, respectivamente. Seguidamente detallamos, resumidamente, las aportaciones principales de este trabajo a la teoría de la imposición personal directa:

1) En los modelos básicos de la imposición óptima no existe incertidumbre sobre ningún parámetro estructural. Esta ausencia supone una clara limitación en la toma de decisiones de los agentes económicos. Se han desarrollado los algoritmos e implementado las formas para la toma de decisiones fiscales por parte de los agentes económicos en los casos de aleatoriedad en el tiempo de trabajo y en él de planificación en la formación de los individuos, de la que dependerán en el futuro: las rentas individuales, la producción del país en bienes y servicios y la recaudación fiscal.

2) Se han caracterizado y formalizado las funciones de bienestar social utilitarista generalizadas y definido una medida de su grado de concavidad, que nos sirve para evaluar cuantitativamente el grado de aversión a las desigualdades sociales por parte de los gobiernos y las administraciones públicas.

3) Se ha definido y formalizado el concepto de función de bienestar social por tramos

lineales. Estas funciones facilitan enormemente la identificación del nexo entre el enfoque positivo y el enfoque normativo por la posibilidad de obtener funciones de bienestar social que se acerquen mucho a las características demográficas, sociales y de redistribución de renta deseada de la población. En la extensa literatura sobre la imposición óptima y debido a la enorme complejidad matemática derivada de la utilización de las funciones de bienestar social, casi todos los cálculos numéricos se realizan con la función utilitarista y la rawlsiana. Las funciones de bienestar social por tramos simplifican en gran medida los cálculos numéricos y simbólicos.

4) Demostramos, con modelos simplificados de la realidad, que si el gobierno pudiera identificar perfectamente la productividad de cada individuo, la recaudación del impuesto podría construirse en función de ésta y no de la renta salarial observada. Teniendo en cuenta que los individuos no pueden modificar su productividad, todo comportamiento estratégico dirigido a evitar la carga impositiva no tendría sentido. En un marco de información asimétrica donde el gobierno observa en exclusiva el resultado del esfuerzo o el esfuerzo esperado, si el impuesto crece demasiado rápidamente, los agentes más productivos pueden encontrar más conveniente, en términos de utilidad individual, actuar como si fueran menos productivos, así trabajar menos y formarse menos y pagar menores impuestos, manteniendo el bienestar inalterado debido al aumento de su tiempo libre.

5) Constatamos que la utilización de funciones de utilidad individual cuasilineales en la renta neta, representan un gran avance en la simplificación de los cálculos matemáticos y en la adaptación a los casos reales para la determinación de los tipos impositivos

óptimos.

Investigación futura

Con las ideas y desarrollos teóricos aplicados a la imposición óptima expuestos en este trabajo, creemos que las futuras líneas de investigación a seguir relacionadas serían:

1) Profundizar en los conceptos y contenidos expuestos para su mejor aplicación, en los casos reales que pueden presentarse, utilizando técnicas econométricas y de inferencia estadística para modelizar las funciones y determinar los valores de los parámetros que son necesarios en las ecuaciones a utilizar:

-La introducción correcta de la incertidumbre en el tiempo real trabajado y cobrado.

-La elasticidad real de la oferta de trabajo $\in$ de la población activa.

-La determinación de la función de utilidad individual cuasilineal en el consumo o renta disponible.

-La deducción de la función de densidad de probabilidad que mejor represente el nivel de habilidades de la población activa.

-La construcción de una función de bienestar social lineal por tramos que modelice realmente las expectativas fiscales y de eficiencia económica de las administraciones públicas, en cada momento o tiempo considerado.

2) Introducir incertidumbre en los modelos estudiados, no en el tiempo de trabajo o formación, sino considerando que los individuos no conocen con exactitud su

productividad. Las necesidades recaudatorias generan problemas de incentivos debido a la situación de información asimétrica acerca de las productividades de los individuos por ambas partes (población y gobierno). También, los individuos pueden actuar estratégicamente y reducir su oferta de esfuerzo, achacando la reducción de su renta a un menor nivel de sus habilidades.

Bibliografía

Agencia Tributaria (**2009**): *Recaudación y Estadísticas del Sistema Tributaria Español 1998-2008.* Dirección General de Tributos.S.G. Política Tributaria.

Atkinson, **A.B**. **y Stiglitz**, **J.E**. (**1980**): *Lectures on Public Economics*. London. McGraw-Hill.

Bardey, **D**. **Bonnet**, **H**. (**2006**): *Teoría del Control Óptimo.* Bogotá. Universidad del Rosario. Borradores de Investigación, 87: 1-21.

Bourguignon, **F**. **y Spadaro**, **A**. (**2000**): *Equidad y eficiencia en Francia y España: una aplicación simple de la teoría de la imposición óptima*. Hacienda Pública Española. Revista de Economía, 51 (3):473-487.

Edgeworth, **F.Y**. (**1897**): *The pure theory of taxation.* Economic Journal, 7: 46-70.

García, **M**. (**2000**): *Modelización del análisis de las desigualdades en la distribución de la renta.* Empiria. Revista de Metodología de Ciencias Sociales, 3: 73-99.

Guesnerie, **R**. (**1998**): *A Contribution to the Pure Theory of Taxation.* Cambridge. Cambridge University Press.

Leonard, **D y Van Long**, **N**. (**1992**): *Optimal control theory and static optimization in economics.* Cambridge. Cambridge University Press.

Mas-**Colell**, **A**, **Whinston**, **M.D**. **y Green**, **J.R**. (**1995**): *Microeconomic Theory.* Oxford. Oxford University Press.

Mill, **J.S**. (**1867**): *Principles of Political Economy.* London. Longman.

Mirrlees, **J.A**. (**1971**): *An exploration in the theory of optimum income taxation.* Review of Economic Studies, 38: 175-208.

Pigou, **C**. (**1947**): *A Study in Public Finance.* London. MacMillan.

Rios, **S**. (**1972**): *Análisis Estadístico Aplicado.* Madrid. Paraninfo.

Sáez, **E**. (**2001**): *Using elasticities to derive optimal income tax rates.* Rewiew of Economic Studies, 68: 205-229.

Sigwick, **H**. (**1883**): *Principles of Political Economic.* London. MacMillan.

Spadaro, **A**. (**2002**): *Redistribución e incentivos a la oferta de trabajo. Desarrollos recientes de la teoría de la imposición óptima sobre la renta.* Hacienda Pública Española. Revista de Economía, 160-(1/2002): 147-173.

Stern, **N**. (**1976**): *On the specification of models of optimum income taxation.* Journal of Public Economics, 6: 123-162.

Tuomala, **M**. (**1990**): *Optimal Income Tax and Redistribution.* Oxford. Oxford University Press.

Varian, **H.R**. (**1992**): *Análisis Microeconómico.* Barcelona. Antoni Bosch.