Francisco de Soto y Torres Linero.

...ciembre

23 Enero

Fran.co de Soto

ELEMENTOS

DE

ARITMÉTICA

ELEMENTOS

DE

ARITMÉTICA

POR M. BOURDON,

TRADUCIDOS DE LA VIGÉSIMA-NONA ECICION FRANCESA

POR DON LOPE GISBERT

Catedrático de Matemáticas en el Instituto de Murcia.

Franco de Soto y Torres-Linero.

MADRID Y SANTIAGO:
LIBRERÍAS DE D. ANGEL CALLEJA, EDITOR.

VALPARAISO Y LIMA:
CASA DE LOS SEÑORES CALLEJA Y COMPAÑÍA.

1856.

IMPRENTA DE D. CIPRIANO LOPEZ.
Cava-Baja, núm. 19, bajo.

ÍNDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTA ARITMÉTICA.

PRIMERA PARTE.

SEGUNDA PARTE.

Nota sobre las aproximaciones numéricas.

ELEMENTOS

DE ARITMÉTICA.

PARTE PRIMERA.

INTRODUCCION.

1. Se llama *cantidad* todo lo que es susceptible de aumento ó de disminucion. Así, las líneas, las superficies, el tiempo, el peso, son cantidades; y lo mismo toda coleccion ó conjunto de objetos de una misma naturaleza, como son los hombres, los árboles, las casas, etc., es una cantidad, en cuanto semejante conjunto es susceptible de aumento ó de disminucion. No es posible formarse idea exacta de una cantidad, sino refiriéndola á otra cantidad de la misma especie; y esta segunda cantidad destinada para servir de término, de comparacion ó de medida á todas las cantidades de la misma especie, toma el nombre de UNIDAD. Así, cuando decimos que una pared tiene *veinte metros*, suponemos adquirida la idea de la unidad de longitud llamada *metro*, y que habiendo colocado el metro veinte veces á lo largo de la pared, hemos llegado exactamente á su estremo.

Por consiguiente, en matemáticas se llama *unidad una cantidad de cualquiera especie, tomada ó arbitrariamente ó en la naturaleza, para servir de término de comparacion res-*

pecto de todas las demas cantidades de la misma especie.

La unidad es arbitraria cuando la especie de cantidad á que se refiere puede variar de una manera *contínua*, es decir, tan poco á poco como se quiera: tales son las líneas, el tiempo, etc.: por el contrario, la unidad se encuentra dada por la naturaleza misma de la cantidad, cuando esta varía de una manera discontínua, como sucede en toda clase de colecciones ó conjuntos; así, en un grupo de árboles tomado por cantidad, la unidad es necesariamente el *árbol*.

Se llama *número* el resultado de la comparacion de una cantidad cualquiera con su unidad.

El número se llama *entero* si es el conjunto de varias unidades de la misma especie. Así, son números enteros *veinte* duros, *treinta* libras, *ocho, doce, quince* unidades de cualquier especie.

Se llama *fraccion* ó *quebrado* una parte de la unidad.

Y con mas generalidad, se llama *número fraccionario* una parte de la unidad ó la reunion de varias unidades de una misma especie con alguna fraccion ó parte de unidad. —En este segundo caso se llama tambien *número misto*.

2. Se llama *número concreto* el que á la espresion de su magnitud añade la de su especie; como *cinco metros*, *quince horas, seis leguas*. La primera vez que se pronuncia un número, no es fácil formar de él exacta idea sino se representa á la vez una unidad de cierta especie con que compararlo: pero poco á poco el espíritu, que se acostumbra á las abstracciones, consigue representarse colecciones de varios objetos cualesquiera semejantes, que separadamente constituyen una unidad cada uno. Entonces, la coleccion se llama *número abstracto*, porque al enunciarle hacemos abstraccion de la especie de unidades á que se refiere. Bajo este punto de vista deben considerarse los números al esponer los procedimientos relativos á las diferentes operaciones que con ellos hayan de efectuarse, si se quieren fundar de modo que puedan aplicarse á todas las cuestiones y casos posibles.

De la numeracion.

3. El primer trabajo que los hombres hicieran con los números debió ser darles nombres fáciles de retener. Observarian que *hay una infinidad de números*, porque dado uno cualquiera, se le puede añadir siempre una unidad mas, resultando un nuevo número, susceptible de recibir el mismo aumento; y

verian que era necesario buscar el medio de *espresar todos los números posibles de un sistema de palabras combinadas entre sí de un modo conveniente:* tal es el objeto de la *numeracion hablada.*

Además, constando la nomenclatura de varios sonidos variables en los diferentes idiomas, debió inventarse para reemplazarla una escritura mas general y compendiosa, por cuyo medio pueda la imaginacion comprender con mas facilidad é independientemente de la palabra, los razonamientos que hace al investigar las propiedades de los números ó las leyes de sus varias combinaciones. Tal es el objeto de la numeracion *escrita*, que consiste en *espresar con pocas* CIFRAS Ó GUARISMOS *todos los números posibles.*

4. *Numeracion hablada.* Aunque la mayor parte de los jóvenes que han de ver estos elementos conocen la nomenclatura de los números enteros, creemos, sin embargo, necesario esponer su analísis, sucinto, pero razonado.

Los primeros números son: *Uno* (ó la unidad considerada como número), *dos* (ó una unidad mas otra unidad), *tres* (ó dos unidades mas otra unidad), *cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve.*

Añadiendo una unidad mas al número *nueve*, se forma el número *diez*, que se considera como una especie nueva de unidad, y se llama *decena* ó *unidad de segundo órden*, respecto de la unidad primitiva que se llama *unidad simple* ó unidad de primer órden. Se cuenta por decenas como se contó por unidades simples; y así se dice: una decena, dos decenas, cuatro, cinco, seis, siete, ocho y nueve decenas; ó bien, *diez, veinte, treinta, cuarenta, cincuenta, sesenta, setenta, ochenta,* y *noventa.* Entre diez y veinte hay nueve números, que son *diez y uno, diez y dos, diez y tres, diez y cuatro, diez y cinco, diez y seis, diez y siete, diez y ocho, diez y nueve;* pero en vez de las cinco primeras denominaciones ha sustituido el uso las palabras *once, doce, trece, catorce* y *quince.*

Entre veinte y treinta, hay tambien nueve números, que se enuncian así: *veinte y uno, veinte y dos, veinte y tres, veinte y cuatro,...., veinte y nueve.* Y del mismo modo pueden enunciarse todos los números hasta *noventa y nueve.*

Si á noventa y nueve añadimos *uno mas*, resultan *diez decenas* ó el número *ciento*, que se considera como una unidad nueva, llamada *centena*, ó *unidad de tercer órden;* y se cuenta por centenas como se contó por *decenas* y por *unidades* *simples*. Así, *ciento, doscientos, trescientos, cuatrocientos,...*, *ochocientos*, *novecientos*, espresan colecciones de una centena, dos, tres,...., ocho, nueve centenas. Colocando sucesivamente entre las palabras *ciento* y *doscientos*, entre *doscientos* y *trescientos*,...., entre *ochocientos* y *novecientos*, y detrás de *novecientos* los nombres de los números comprendidos desde *uno* hasta *noventa y nueve*, se forman los nombres de todos los números desde *ciento* hasta *novecientos noventa y nueve*.

Ya podemos aquí hacer observar que en los enunciados de todos estos números, solo se emplean las palabras primitivas *uno*, *dos*, *tres*, *cuatro*, *cinco*, *seis*, *siete*, *ocho*, *nueve*, *diez*, *veinte*, *treinta*, *cuarenta*, *cincuenta*, *sesenta*, *setenta*, *ochenta*, *noventa* y *ciento*. No mencionamos las otras palabras *once*, *doce*, *trece*, *catorce* y *quince*, porque en rigor podriamos pasar sin ellas.

Añadiendo *una* unidad *mas* al número *novecientos noventa* y *nueve* se forma una coleccion de *diez centenas*, ó el número *mil*, que constituye la *unidad de millar* ó *unidad de cuarto órden*. Para no multiplicar mucho las palabras, se ha convenido en considerar el *millar* como una nueva *unidad principal* delante de la cual se colocan los novecientos noventa y nueve nombres de todos los números anteriores. Así, se dice *un mil*, *dos mil*, *tres mil*,...., *nueve mil*, *diez mil*, *once mil*,...., *veinte mil*, *veinte y un mil*,...., *cien mil*, *doscientos mil*,...., *novecientos noventa y nueve mil*.

Una decena de miles ó millares forma la *unidad de quinto órden*; una centena de miles ó millares forma la *unidad de sesto órden*.

Añadiendo á un número cualquiera de miles los nombres de todos los números inferiores á *mil*, es claro que pueden enunciarse todos los números hasta *novecientos noventa y nueve mil novecientos noventa y nueve*.

Añadiendo *una* unidad *mas* á este último número, resultan *diez cientos de miles*, ó sea *mil miles* ó *mil veces mil*, conjunto de unidades que se ha designado con el nombre *millon*. El millon representa una nueva unidad principal ante la cual se colocan todos los números anteriores, contado *un millon*, *dos millones*,...., *cien millones*,...., *mil millones*,...., *cien mil millones*,...., *novecientos noventa y nueve mil novecientos noventa y nueve millones*.

Colocando detrás de un número cualquiera de millones cada uno de los números inferiores á *millon*, se enunciarán sucesivamente todos los números hasta *novecientos noventa y nueve mil novecientos noventa y nueve millones, novecientos noventa y nueve mil novecientos noventa y nueve.*

Añadiendo una unidad mas á este último número, resultan un *millon de millones*, á cuyo nuevo conjunto de unidades se ha dado el nombre de *billon*, que representa una nueva unidad principal. Ante ella se colocan todos los números desde *uno* hasta *novecientos noventa y nueve mil novecientos noventa y nueve* lo mismo que se hizo con la unidad *millon.*

Añadiendo una unidad mas al número novecientos noventa y nueve mil novecientos noventa y nueve billones, se tiene un número compuesto de *un millon de billones*, que toma el nombre de *trillon;* y así sucesivamente un *millon de trillones* se llama *cuatrillon*, etc., formándose de este modo todos los órdenes imaginables de nuevas unidades que bastarán á nombrar cualquier número entero por grande que sea.

Para concluir observaremos que el *millon* es la unidad de *séptimo* órden, la decena de millon es la *unidad de octavo* órden, la centena de millon la *unidad de noveno* órden.... etc.

5. *Numeracion escrita.* Por sencilla que sea la numeracion verbal, habria mucho trabajo en combinar dos ó mas números algo crecidos, sino se tuvieran medios de escribirlos abreviadamente. — Facilmente se conseguirá esa abreviacion si se reflexiona un poco sobre la nomenclatura espuesta. En efecto, observemos que entre las palabras empleadas para espresar los números, unas, como *uno, diez, ciento, mil, cien mil, diez millones*, espresan las unidades de los diferentes órdenes, mientras las palabras uno, dos, tres,...., nueve, espresan cuántas veces entra en un número cada una de estas unidades.

Esto supuesto, si se conviene primero en representar los nueve primeros números por los caractéres ó cifras siguientes,

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
uno,	*dos,*	*tres,*	*cuatro,*	*cinco,*	*seis,*	*siete,*	*ocho,*	*nueve,*

toda la dificultad consistirá en hallar el medio de que estas cifras espresen los diferentes órdenes de unidades que contenga el número propuesto. Para esto se ha establecido un principio de pura convencion que resuelve por completo la dificultad. Se ha admitido que *toda cifra colocada á la izquierda de otra, representará unidades del órden inmediatamente superior al de esta;* ó de otro modo, que, *cuando hay mu-*

chas cifras escritas en línea seguida, la primera de la derecha representa unidades simples, la inmediata á la izquierda representa unidades de decenas, ó sean simplemente decenas, la tercera en el mismo órden representa centenas, la cuarta unidades de millar, la quinta decenas de millar,... y así sucesivamente.

Supongamos, por ejemplo, que queremos espresar en cifras el número *trescientos setenta y nueve*, que se compone evidentemente de 9 unidades, mas 7 decenas, mas 3 centenas. Podremos, pues, espresarle con arreglo á lo dicho, escribiendo 379.

Del mismo modo, el número *veinte y ocho mil doscientos cuarenta y siete*, que consta de 7 unidades, 4 decenas, 2 centenas, 8 millares y 2 decenas de millar, deberá escribirse por medio de las cinco cifras 28247.

Cifra 0. Hay sin embargo números que no pueden escribirse haciendo solo uso de las nueve cifras indicadas.

Los números *diez, veinte, treinta,...., ochenta, noventa,...* que no tienen unidades simples, no pueden escribirse como se ha dicho de los demas, y ha sido necesario adoptar una cifra, que *no tenga en sí valor alguno*, pero que sirva para ocupar el lugar de los órdenes de unidades que falten en el enunciado del número. Tal es la cifra 0, que se llama *cero*, por cuyo medio los números diez, veinte, treinta, etc., se escriben 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90.

Por la misma razon los números *ciento, doscientos, trescientos,....* que no tienen ni decenas, ni unidades simples, se escriben 100, 200, 300, 400,.... 900.

En general, el *cero* es una cifra que no tiene por sí valor alguno, pero que sirve para llenar los huecos de las diferentes especies de unidades que pueden faltar en el enunciado de un número.

Las otras cifras se llaman *significativas* y tienen dos clases de valores; uno llamado *absoluto*, que es el de la cifra considerada enteramente sola; y otro llamado *relativo*, que es el que adquiere por el lugar que ocupa á la izquierda de otras cifras.

Si ahora observamos que todo número que se enuncia se compone de unidades simples, de decenas, de centenas, etc.; que la coleccion de unidades de cada órden llega á lo mas á *nueve*; que para el caso de faltar al número algunos órdenes de unidades hay una cifra que ocupa el lugar vacío, nos convenceremos de que no hay número entero que no pueda espresarse por una combinacion de las *diez cifras* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Sirva de nuevo ejemplo el número *doscientos ocho mil diez y nueve*, el cual contiene 9 *unidades simples*, 1 *decena*, 8 *unidades de millar*, y 2 *centenas de millar;* pero carece de *centenas simples* y de *decenas de millar*. Bastará, pues, escribir las cifras 9, 1, 0, 8, 0, 2, unas en pos de otras de derecha á izquierda, y el número estará representado por 208019.

Sea ahora el número *treinta y seis mil cien millones veinte mil cuatrocientos siete:* su enunciado consta de 7 *unidades simples*, 0 *decenas*, 4 *centenas;* 0 *unidades de millar*, 2 *decenas de millar*, 0 *centenas de millar;* 0 *unidades de millar*, 0 *decenas de millon*, 1 *centena de millon;* 6 *unidades de millar de millon*, y 3 *decenas de millar de millon:* luego su espresion en cifras deberá ser 36100020407.

El sistema de numeracion que acabamos de esponer ha recibido el nombre de *sistema decimal*, porque en él se necesitan diez unidades de cierto órden para formar una del inmediato superior, y por consiguiente se emplean *diez* cifras ó guarismos para espresar todos los números. El número *diez* se llama *base* del sistema.

6. Hagamos ahora una observacion importante: resulta de la nomenclatura que todo número escrito en cifras se divide en centenas, decenas y unidades simples; en centenas, decenas y unidades de millar; en centenas, decenas y unidades de millon, etc., es decir, en *secciones* de unidades simples, de millares, de millones, de millares de millones, etc., cada una de las cuales ha de constar de *tres* cifras, escepto la última á la derecha ó sea la de las unidades mas altas que puede tener *dos* cifras ó solo *una*. En estando, pues, familiarizados con el modo de escribir los números de tres cifras, basta escribir sucesivamente unas en pos de otras de derecha á izquierda las secciones de las varias especies de unidades, hasta llegar á las unidades mas altas que haya.

Tambien puede comenzarse *por la izquierda*, es decir, *escribir lo primero la seccion de unidades superiores, y á la derecha las demas secciones por el órden gradual de la magnitud* de sus *unidades*. Así es como debe hacerse al escribir en guarismos, un número dictado en palabras; pero debe cuidarse mucho de no olvidar los ceros destinados á llenar los huecos de las unidades que faltan, en lo cual nunca debe haber dificultad, porque se sabe ya que cada seccion, escepto la primera de la izquierda, debe precisamente tener tres cifras.

Sirva de ejemplo escribir el número *cuatrocientos seis mil veinte y ocho millones doscientos cincuenta mil cuarenta y ocho*.

Escríbanse unas á la derecha de otras las secciones de *millares de millon*, de *millones*, de *millares* y de *unidades simples*, y se tendrá 406,028,250,048.

7. En la observacion precedente se funda el medio de traducir en palabras un número escrito en cifras.

Divídase el número en secciones de á tres cifras empezando por la derecha, y léase sucesivamente cada seccion empezando por la de la izquierda y cuidando de dar á cada una la denominacion que le corresponda.

Sea, por ejemplo, el número 70345601.

Este número se distribuye así: 70.345,601, y se compone de *setenta* MILLONES, *trescientos cuarenta y cinco* MIL, *seiscientos uno*.

Del mismo modo se verá que 5302400056702, ó bien, 5.302,400.056,702, espresa el número *cinco* BILLONES, *trescientos dos* MIL, *cuatrocientos* MILLONES, *cincuenta y seis* MIL, *setecientos dos*.

8. Para completar la teoría de la numeracion nos falta indicar el medio de escribir en cifras los quebrados; pero antes es necesario dar una idea exacta de esta especie de números segun se consideran en Aritmética.

Supongamos que se trata de determinar *la longitud* ó *lo largo de una pieza de tela*. Tomando por unidad el *metro* y colocándola desde la punta una, dos, tres veces, ó tantas en fin cuantas se pueda, sucederá una de dos cosas: ó despues de colocar el metro un número cualquiera de veces, por ejemplo 15, á lo largo de la pieza, no queda nada; ó queda un pedazo sobrante menor que el metro. En el primer caso la pieza contiene un número entero, 15, de metros. En el segundo, para tener la longitud total, será necesario añadir á los 15 metros la fraccion ó parte de metro que restó.

Para valuar esta parte y compararla con la unidad podremos concebir el metro dividido en dos partes iguales ó *dos mitades*, y si el pedazo sobrante es igual á una de ellas, se dice que la pieza de tela tiene 15 metros y *medio* de larga.

Si el resíduo es menor ó mayor que la mitad del metro, se concebirá dicha mitad dividida en otras dos partes iguales, que se llaman *cuartos* ó *cuartas partes;* y si este cuarto puede colocarse *una* ó *tres veces* exactamente á lo largo del pedazo de tela sobrante, diremos que tiene de largo *un cuarto* ó *tres cuartos* de metro.

En vez de dividir la unidad en dos ó en cuatro partes, puede tambien concebirse dividida en *tres* partes iguales que se llaman *tercios*, en *cinco* partes iguales que se llaman *quintos*, en *seis* partes iguales que se llaman *sestos*, etc.—Admitamos para fijar las ideas que el metro se ha dividido en *doce* partes iguales llamadas *dozavos*, y que este dozavo cabe *siete* veces justas en el pedazo de tela sobrante, entonces se dirá que el resto es igual á *siete* veces la *dozava parte* del metro ó á *siete dozavos* de metro, y la pieza de tela tendria de larga 15 metros y *siete dozavos* de metro.

Donde se ve que para formarse idea exacta de una fraccion ó quebrado de una unidad de cualquier especie es necesario concebir la unidad dividida en un número cualquiera *entero* de partes iguales y suponer que se toman una, dos, tres, cuatro,...., de estas partes; y entonces se llama *fraccion* ó *quebrado* la reunion de dichas partes iguales. Por eso el enunciado de una fraccion comprende necesariamente dos números enteros; uno *que designa en cuántas partes se ha dividido la unidad, y se llama* DENOMINADOR; y otro *que indica cuántas de dichas partes contiene el quebrado, y se llama* NUMERADOR. Así, *cinco octavos* de metro, *trece veinte-avos* de libra, son quebrados: en el primero se indica que el metro está dividido en *ocho* partes iguales llamadas *octavos*, y que de las ocho se toman *cinco:* en el segundo se supone la libra dividida en *veinte* partes iguales llamadas *veinte-avos*, y que de las veinte se toman *trece; veinte* es, pues, el denominador, y *trece* el numerador.

De aquí tambien se infiere que un quebrado es una cantidad que se refiere á una parte de la unidad principal, como á una nueva unidad especial que puede considerarse como secundaria. Así, el quebrado *trece veinte-avos* de metro es un número compuesto de trece veces *un veinte-avo* de metro; luego el veinte-avo es una unidad particular que está contenida *trece* veces en la fraccion propuesta.

Esto supuesto, se dice que dos quebrados son de la misma especie cuando tienen un mismo denominador. Así, *cinco dozavos*, *siete dozavos*, *once dozavos*, son fracciones de la misma especie; pero *tres cuartos* y *dos tercios* son fracciones de especie diferente porque tienen diferente denominador.

Para espresar en cifras un quebrado se ha convenido en escribir el numerador sobre el denominador, separándolos con una raya. Así, el quebrado *tres cuartos* se escribe $\frac{3}{4}$; *siete doce-avos* se escribe $\frac{7}{12}$; *veinte y tres treinta y cinco-avos* se escribe $\frac{23}{35}$.

Recíprocamente $\frac{7}{8}$, $\frac{13}{15}$, $\frac{47}{72}$, representan los quebrados *siete octavos*, *trece quince-avos*, *cuarenta y siete setenta y dos-avos*. Para enunciar una fraccion, se enuncia primero el numerador y despues el denominador añadiéndole la terminacion *avos*, si pasa de diez; hasta diez en vez del número cardinal se nombra el ordinal correspondiente.

9. Las primeras necesidades del hombre en sociedad le conducen diariamente á resolver problemas ó cuestiones que le obligan á combinar dos ó mas números, ya de la misma, ya de distinta naturaleza. Estas combinaciones constituyen *las operaciones de Aritmética* ó *el cálculo numérico*. A fin de manifestar su origen y enlace vamos á proponer algunas cuestiones relativas al comercio.

CUESTION PRIMERA. *Un comerciante en telas ha vendido á uno 5 metros $\frac{2}{3}$ de cierto lienzo; á otro 7 metros y $\frac{1}{2}$ de lo mismo, y á otro 12 metros $\frac{3}{4}$ de lo mismo: quiere saber cuántos metros ha vendido.*

Para esto es necesario que reuna en un solo número los tres números de metros vendidos; es decir, que haga la ADICION ó SUMA de aquellos tres números compuestos de enteros y quebrados.

CUESTION SEGUNDA. *El comerciante cortó los susodichos tres números de metros de una pieza que tenia* 30 *metros y $\frac{2}{3}$, y quiere saber cuánto lienzo le queda.*

Buscará la diferencia entre el número 30 $\frac{2}{3}$ que espresa la longitud primitiva de la pieza y el número total de metros vendidos; es decir, deberá **SUSTRAER** *el segundo número del primero.*

CUESTION TERCERA. *Se han comprado 48 metros de lienzo á 25 reales el metro; ¿cuánto debe pagarse por todos?*

Es claro que para obtener el precio total buscado se deben tomar 48 veces 25 reales, ó hacer un total de 48 números iguales á 25 reales. Esta operacion se llama **MULTIPLICACION**, y es una especie de *suma* que consiste en reunir muchos números iguales.

Volvamos á la misma cuestion, pero mudemos los números, es decir, los *datos*.

A razon de $\frac{17}{20}$ *de real el metro, ¿cuánto cuestan* $\frac{7}{12}$ *de metro de un lienzo cualquiera?*

Bien se comprende que si un metro cuesta $\frac{17}{20}$ de real, $\frac{7}{12}$ de metro, que son una parte del metro, habrán de costar una parte de $\frac{17}{20}$ espresada por $\frac{7}{12}$: es decir, que para obtener la respuesta á la cuestion deberian tomarse los $\frac{7}{12}$ de $\frac{17}{20}$, y esta operacion se llama *multiplicacion de quebrados*. Se llama así porque la cuestion que á ella conduce tiene la misma forma que otra cualquiera que condujese á una multiplicacion de números enteros, diferenciándose solo en la forma de los *datos*.

Al pronto el nombre de *multiplicacion*, que ofrece generalmente idea de aumento, no parece propio para indicar una operacion que consiste en tomar de un número la parte espresada por una fraccion. Pero se ha encontrado el medio de enlazar la multiplicacion de números enteros á la de números fraccionarios, diciendo que *multiplicar un número cualquiera por otro es formar un tercer número que sea respecto del primero lo que el segundo es respecto de la unidad*. Si ambos números son enteros, es claro que segun esta definicion basta tomar el primero tantas veces como unidades tiene el segundo; y si son quebrados, es necesario tomar del primero la parte que indique el segundo.

CUESTION CUARTA. *Por 84 reales se han comprado 12 varas de lienzo; ¿á como sale la vara?*

Se comprende sin trabajo que si conociéramos el precio, tomándole 12 veces ó multiplicándole por 12, deberíamos tener un resultado igual á 84.—Luego la cuestion conduce á *buscar un número que multiplicado por el segundo*, 12, *reproduzca el primero*, 84; y esta operacion ha recibido el nombre de DIVISION.

Para esplicar este nombre, que dá idea de la distribucion de un número en varias partes iguales, supongamos que se tiene *que repartir con igualdad una suma de* 84 *reales entre* 12 *personas*. Es claro que si se conociera la parte de cada persona, multiplicándola por 12, deberia resultar 84.—Luego *dividir un número* 84 *en tantas partes iguales como unidades tiene otro* 12, *y buscar un número que multiplicado por el segundo* 12 *reproduzca el primero* 84, *son dos operaciones idénticas.*

Volvamos á esta misma cuestion, pero con datos fraccionarios. *Con* $\frac{19}{20}$ *de real, se han comprado* $\frac{5}{6}$ *de metro; se quiere saber el valor del metro.*

Tambien aquí se reduce la cuestion á buscar un número tal que multiplicado por $\frac{5}{6}$ reproduzca $\frac{19}{20}$; luego tambien en este caso hay una division que hacer en el sentido que se acaba de dar á esta palabra, y no en el sentido de una distribucion en partes iguales.

Fácil sería citar nuevas cuestiones que nos condujeran á cada una de las operaciones que acabamos de definir; y como á cada paso se presentan en la vida, se hace indispensable conocer los medios de ejecutarlas.

La ARITMÉTICA *tiene por objeto enseñar reglas fijas y ciertas para ejecutar con los números todas las operaciones posibles*. Comprende además tambien una multitud de propiedades de los números que se han ido encontrando en el transcurso de las investigaciones hechas para inventar y establecer aquellas reglas y para facilitar su aplicacion. Vamos á esponerlas sucesivamente recordando (n.º 2) que para esponer las reglas con total independencia de las diversas especies de cuestiones, conviene considerar los números como *abstractos*. Sin embargo, propondremos á veces cuestiones sobre *números concretos* en las aplicaciones que hagamos para familiarizar á los principiantes con los procedimientos.

Para pasar de lo simple á lo compuesto empezaremos esponiendo las reglas para las operaciones con los números enteros.

CAPITULO PRIMERO.

Operaciones con los números enteros.

SUMA Ó ADICION.

10. *Sumar muchos números entre sí es reunir todos los números dados en uno solo;* ó bien, *formar un número que tenga solo tantas unidades como todos los otros juntos.*

El resultado de esta operacion se llama *suma.*

La *adicion* de los números de una sola cifra no ofrece dificultad: los jóvenes y aun los niños mas tiernos aprenden á sumar contando por los dedos, y concluyen sabiendo al fin de memoria los resultados.

Así, pues, sea sumar los números 5, 7, 4, 8 y 6.

Se dice: 5 y 7 son 12 (*), y 4 son 16, y 8 son 24, y 6 son 30; luego 30 es la suma pedida.

Del mismo modo se hallaria que 42 es la suma de los números 7, 9, 6, 5, 8, 7.

Sea ahora buscar la suma de los números 7453 y 1534.

Despues de haberlos escrito como se ve al márgen y de haber tirado una raya por debajo, se dice, empezando por las unidades simples: 3 y 4 son 7, que se escribe debajo de las unidades.

$$\begin{array}{r} 7453 \\ 1534 \\ \hline 8987 \end{array}$$

Pasando á las decenas, 5 y 3 hacen 8, que se escribe en el órden de decenas.

Despues 4 y 5 son 9 que se escribe debajo de las centenas.

(*) El uso de los dedos para llegar á este 12 supone las adiciones sucesivas de la unidad. Así se dice 5 y 1 son 6; y 1 son 7, y 1 son 8....; y así sucesivamente hasta añadir al 5 todas las unidades del 7.

En general es dificil fijar qué operaciones del espíritu dan los resultados de estas adiciones elementales; y puede decirse que hasta cierto punto cada uno tiene un modo diferente de hacerlas.

En fin, 7 y 1 hacen 8 que se escribe debajo de los millares.

El número 8987 hallado por este medio, es la *suma* de los dos números propuestos, pues contiene todas las unidades, decenas, centenas y millares que hemos ido reuniendo sucesivamente.

Propongámonos ahora sumar los cuatro números 5047, 859, 3507, 846.

Se escriben como se ve al márgen, y se dice, empezando por las unidades: 7 y 9 son 16, y 7 son 23, y 6 son 29: se escriben las 9 unidades simples bajo la primera columna, y se reservan las *dos* decenas para juntarlas con las cifras de la columna siguiente que espresan tambien decenas.

$$\begin{array}{r} 5047 \\ 859 \\ 3507 \\ 846 \\ \hline 10259 \end{array}$$

Pasando á esta columna se dice: 2 que se han reservado y 4 son 6, y 5 son 11, y 0 son 11, y 4 son 15: se escribe 5 debajo de las decenas y la centena se reserva para llevarla á la columna de las centenas.

Procediendo con esta como con las precedentes, se hallarán 22 centenas ó 2 centenas que se escriben bajo las centenas y 2 millares que se llevan á la columna inmediata de millares.

Finalmente, 2 que llevo y 5 son 7, y 3 son 10; se escribe el 0 bajo los millares, y la cifra 1 bajo las decenas de millar: por consiguiente, 10259 es la suma pedida.

Regla general. *Para sumar varios números entre sí, se escriben unos bajo de otros, de modo que las unidades de un mismo órden se correspondan en columna vertical, tirando luego una línea por debajo. Despues se suman sucesivamente las cifras que componen cada columna, empezando por la de unidades simples y continuando hácia la izquierda: bajo la línea se escribe la suma de las unidades de cada órden si consta de solo una cifra; pero si pasa de* 9 *(en cuyo caso está espresada por mas de una cifra) se escribe solamente la cifra de las unidades y se guardan las demas, que representan decenas, para sumarlas con la columna siguiente inmediata. Hecho esto con todas las columnas, se tendrá debajo de la raya la* suma pedida, *pues segun la regla, procede el resultado de la reunion de todas las unidades, todas las decenas, todas las centenas, etc., de los números propuestos.*

11. *Advertencia.* Si la suma de las cifras que componen cada columna á lo mas sumára 9, sería indiferente empezar la operacion por las unidades simples ó por las de la especie su-

perior. Pero como sucede comunmente que la mayor parte de las sumas pasan de 9, si empezáramos por la izquierda nos veriamos precisados á volver atrás para rectificar la cifra precedente añadiéndole tantas unidades como decenas procedieran de la columna siguiente. Por eso es preferible empezar siempre por la derecha.

DE LA SUSTRACCION.

12. La sustraccion ó resta tiene por objeto *buscar la diferencia entre dos números*. El resultado se llama *resta, diferencia* ó *esceso*.

Tambien puede decirse que resta es una operacion que tiene por objeto, *dada la suma de dos números y uno de estos, hallar el otro;* y bajo este punto de vista, la sustraccion es la operacion inversa de la adicion.

La resta es fácil y puede hacerse de memoria, mientras los números propuestos tienen una sola cifra. Así, la diferencia entre 9 y 6 es 3: ó bien, si de 9 se quitan 6, quedan 3. Del mismo modo 7 menos 5 son dos.

Tambien es fácil restar un número de una cifra de otro cualquiera, cuando la resta ha de tener solo una cifra. Así, de 7 á 13 van 6; pues 7 y 6 hacen 13. Del mismo modo de 9 á 17 van 8; pues 8 y 9 hacen 17.

Estas operaciones sirven de base á la sustraccion de los números de mas de una cifra.

Sirva de primer ejemplo restar 5467 de 8789.

$$\begin{array}{r} 8789 \\ 5467 \\ \hline 3322 \end{array}$$

Colóquese el sustraendo debajo del minuendo, tírese una raya por debajo, y empiécese por las unidades simples diciendo, de 7 á 9 van 2, y se escribe bajo la columna correspondiente: pasando luego á las decenas, se dice: de 6 á 8 van 2, que se escribe en el lugar de las decenas: lo mismo se hará con las centenas y millares; de 4 á 7 van 3, y de 5 á 8 van 3: resultando por *resta* 3322.

En efecto, de la naturaleza de las operaciones hechas resulta que el minuendo tiene 2 unidades simples, 2 decenas, 3 centenas y 3 millares mas que el sustraendo, luego escede al sustraendo en 3322.

Sírvanos de segundo ejemplo hallar la diferencia entre los números 83456 y 28784.

Habiendo dispuesto los dos números como en el ejemplo precedente, se dirá lo primero, de 4 á 6 van 2, que se escriben bajo la columna de las unidades.

83456
28784
54672

Pero al pasar á la columna de las decenas, tropezamos con una dificultad: la cifra 8 del sustraendo es mayor que la del minuendo, y por consiguiente, no puede restarse. Para obviar esta dificultad, se toma con el pensamiento una centena de la cifra siguiente, que vale 10 decenas, y juntándolas con las 5, hacen 15; y despues se dice: de 8 á 15 van 7, que se escriben debajo de las decenas.

Pasando á la columna de las centenas, observamos que la cifra 4 del minuendo debe disminuirse en una unidad, que se le tomó en la resta precedente; y diremos de 7 á 3 no se puede restar, pero tomando como antes, un millar que vale 10 centenas y juntándolas con las otras 3, tendremos 13, y diremos, de 7 á 13 van 6, que escribiremos en la columna de las centenas.

Pasando á los millares, vemos que de 2 no pueden quitarse 8: pero diremos de 8 á 12 van 4, y pondremos esta cifra en el órden de los millares.

En fin, la cifra 8 de las decenas de millar ha perdido una unidad y se ha convertido en 7; diremos, pues, de 2 á 7 van 5, y habremos concluido.

De modo que la *resta pedida* será 54672.

Para comprender bien cómo se llega por este medio al fin deseado, basta observar que, atendidos los artificios empleados para efectuar las sustracciones parciales, pueden disponerse los dos números de la manera siguiente:

	Dec. de millar.	*Millares.*	*Centenas.*	*Decenas.*	*Unidades.*
Minuendo. .	7	12	13	15	6
Sustraendo..	2	8	7	8	4
Resta. . . .	5	4	6	7	2

Donde se ve que el minuendo contiene 2 unidades, 7 decenas, 6 centenas, 4 millares y 5 decenas de millar, mas que el sustraendo, y por consiguiente le escede en 54672 unidades.

Sirva de tercer ejemplo restar 158429 de 300405.

Como 9, cifra de unidades del sustraendo, es mayor que 5 su correspondiente en el minuendo, debe tomarse una decena á la cifra superior inmediata; pero como esta cifra es 0, tenemos que recurrir á la de centenas y tomar 1 que vale diez decenas, y

99 9
300405
158429
141976

como solo necesitamos 1, dejamos 9 encima del 0 y juntamos la otra con el 5; tendremos 15 y diremos, de 9 á 15 van 6, cuya cifra escribiremos en el lugar de las unidades simples.

Pasando á las decenas, diremos de 2 á 9 van 7.

Al llegar á las centenas, como la cifra del minuendo solo vale 3, por la que le hemos quitado, y como de 3 no se pueden quitar 4, recurriremos á la primera cifra de la izquierda; pero esta es 0 y la siguiente tambien; iremos, pues, á la de mas allá, que es el 3, y tomaremos una unidad. Esta vale 10 decenas de millar y 100 millares: solo necesitamos uno, dejaremos 99 sobre los dos ceros, y juntando 1 millar con 3 centenas, tendremos 13 y diremos, de 4 á 13 van 9, escribiendo esta cifra en la columna de las centenas.

Tenemos en las dos restas parciales siguientes un 9 en vez de cada 0, y diremos, de 8 á 9 va 1; y de 5 á 9 van 4.

Por último, llegando á la columna final de la izquierda, diremos, de 1 á 2 (porque hemos quitado al 3 una unidad) va 1: y por consiguiente, el resto pedido será 141976.

En efecto, pensando en la descomposicion que ha sufrido el minuendo, se verá que puede escribirse así la operacion:

	Cent. de millar.	*Dec. de millar.*	*Millares.*	*Centenas.*	*Decenas.*	*Unidades.*
Minuendo. .	2	9	9	13	9	15
Sustraendo..	1	5	8	4	2	9
	1	4	1	9	7	6

Luego el minuendo tiene 6 unidades, 7 decenas, 9 centenas, 1 millar, 4 decenas de millar y 1 centena de millar mas que el sustraendo, y por lo tanto le escede en 141976.

Regla general. *Para restar de un número entero otro número entero menor, escríbase el sustraendo debajo del minuendo, de modo que se correspondan en columna las unidades de cada órden, tirando despues una raya. En seguida se restan sucesivamente todas las cifras del sustraendo de sus correspondientes del minuendo, empezando por las de especie inferior y escribiendo las restas parciales unas en pos de otras de derecha á izquierda:* el número que resulta debajo de la raya es la *resta total* ó el *resultado pedido.*

Cuando una cifra del sustraendo es mayor que su correspondiente del minuendo, se aumentan á esta 10 unidades de su especie, y en la resta parcial siguiente se quita una unidad al minuendo de la especie inmediata superior.

Si la cifra ó cifras inmediatas á la izquierda de la del minuendo que es menor que su correspondiente del sustraendo fueran ceros, se aumentan sin embargo de memoria las 10 *unidades á la cifra que las necesita; pero en las restas parciales siguientes los ceros se consideran como nueves y se disminuye una unidad á la primer cifra significativa que haya á la izquierda de los ceros.*

Siguiendo esta regla se hallará que si de. .	603000401
se resta.	305724787
quedan.	297275614

13. *Observacion primera.* Si cada cifra del sustraendo fuera menor que su correspondiente del minuendo, sería indiferente empezar la operacion por la derecha ó por la izquierda. Pero como suele suceder que alguna de las cifras del sustraendo sea mayor que su correspondiente del minuendo, y entonces no se puede hacer la sustraccion parcial, sin recurrir á la inmediata superior, resulta que es preferible comenzar por la derecha para poder acudir cómodamente cuando sea necesario á las órdenes de unidades superiores.

14. *Observacion segunda.* Es claro que en vez de disminuir una unidad á la cifra del minuendo á que se haya recurrido, podríamos dejarla intacta y añadir una unidad á la correspondiente del sustraendo. Esta forma suele ser mas sencilla y cómoda en la práctica.

Es particularmente ventajosa cuando en el minuendo hay varios ceros entre dos cifras significativas; porque entonces nada hay que variar en las cifras superiores.

Así, en el último ejemplo, despues de haber dicho en las unidades simples de 7 á 11 van 4; en lugar de decir en las decenas de 8 á 9 va 1, diremos de 9 á 10 va 1; y en las centenas, en lugar de decir de 7 á 13 van 6, se dirá de 8 á 14 van 6: en los millares, de 5 á 10 van 5; despues de 3 á 10 van 7; y así sucesivamente.

Debe tenerse cuidado de no aumentar la unidad á una cifra del sustraendo mas que cuando no se haya podido efectuar inmediatamente la resta parcial anterior. En la division haremos mucho uso de esta modificacion.

Pruebas de la adicion y sustraccion.

15. Se llama *prueba* de una *operacion aritmética otra operacion, cuyo objeto es asegurarnos de la exactitud de la primera.*

La prueba de la adicion se hace repitiendo la suma empezando por la izquierda. *Hecha la suma de las cifras de la primer columna de la izquierda, se resta de la parte que le corresponde en la suma total; se escribe debajo el resto que se reduce de memoria á unidades del órden inferior siguiente para juntarlas con las que haya del mismo órden en la suma total. Lo mismo se hace la suma parcial de la segunda columna de la izquierda, y se resta de la parte que le corresponde en la suma total; continuando de este modo hasta la última columna, cuya suma restada de la parte correspondiente no debe dar resto alguno.*

Así, habiendo visto que los cuatro números

$$\begin{array}{r} 5047 \\ 859 \\ 3507 \\ 846 \\ \hline \end{array}$$

dan la suma. . . 10259,

para comprobar el resultado 10259, sumaremos los mismos números empezando por la izquierda, y diremos 5 y 3 hacen 8 millares, que quitados de 10 millares, dan 2 millares: estos dos millares unidos á la cifra 2 de las centenas dan 22 centenas: sumo la columna de las centenas diciendo 8 y 5 son 13 y 8 son 21, que restado de 22, da 1 centena de resta; unida esta centena con las 5 decenas de la suma, tengo 15 decenas: 4 decenas y 5 son 9 y 4 son 13; resto 13 de 15 y me quedan 2, que junto con el 9 forma 29; y concluyo diciendo 7 y 9 son 16, y 7 son 23, y 6 son 29; restando 29 de 29 queda 0: luego la operacion está bien hecha.

La prueba de la sustraccion se hace *sumando con el sustraendo la diferencia obtenida;* y es evidente que debe resultar el minuendo, pues la diferencia no es mas que el esceso de este sobre aquel.

Así, en el ejemplo adjunto, ... 83456
28784

despues de haber hallado que la resta es. 54672
la sumaremos con 28784, y obtendremos. . . . 83456
que es el mismo minuendo.

16. Nuevos ejemplos de sumas y restas con sus pruebas.

Sumas.

83054	700548
256870	897597
748759	6588
90874	69764
130909	407300
8746	987847
1319212	1207046
	4276690

Restas.

4073050062	20004001003
2803767086	8405128605
1269282976	11598872398
4073050062	20004001003

Problema. *Tenia en caja un banquero* 65750 *reales; pero ha hecho varios pagos. El primero de* 13259 *reales, el segundo de* 18704 *reales, el tercero de* 22050 *reales, y el cuarto de* 9850 *reales: quiere saber cuánto le queda en caja despues de los cuatro pagos.*

Solucion. Deberá el banquero sumar las cantidades de los cuatro pagos hechos y restar la suma de la cantidad que tenia en caja: el resultado de esta sustraccion le dirá el dinero que le queda.

31

Disposicion de la operacion.

13259	65750 cantidad que habia en caja.
18704	63863 suma de los pagos.
22050	1887 cantidad sobrante en caja.
9850	
63863	

Quedan, pues, al banquero 1887 reales.

Se observará que al hacer las operaciones hemos considerado como *abstractos* á las números dados á pesar de ser *concretos* segun el enunciado; pero obtenido el resultado 1887, le hemos considerado como de la especie correspondiente segun el problema. Así debe hacerse siempre en las aplicaciones; pues siendo los procedimientos de las operaciones completamente independientes de la naturaleza de los números, se consideran siempre estos como abstractos, dando al resultado final el nombre de la unidad que indica el enunciado de la cuestion.

DE LA MULTIPLICACION.

17. *Multiplicar un número por otro es* (n.º 9) *formar un tercer número que sea respecto del primero lo que el segundo es respecto de la unidad;* y cuando ambos números propuestos son enteros, su multiplicacion equivale á *tomar el primero tantas veces como unidades tiene el segundo.*

Se llama *multiplicando* el número que se multiplica, *multiplicador* aquel por quien se multiplica, ó sea el que dice cuántas veces se debe tomar el otro, y *producto* el resultado de la multiplicacion: el multiplicando y multiplicador juntos se llaman *factores del producto.*

Llevando las cosas al estremo de la precision, la multiplicacion es una suma; porque para obtener el producto bastaria escribir en columna tantos números iguales al multiplicando como unidades tiene el multiplicador, sumándolos en seguida. Pero como esta operacion sería larguísima, cuando el multiplicador fuera algo crecido, se ha procurado simplificarla por medio de otra operacion que ha tomado el nombre de *multiplicacion.*

18. Mientras cada factor solo consta de una cifra, se obtiene facilmente el producto por medio de sucesivas adiciones del

multiplicando: así, para multiplicar 7 por 5 diremos: 7 y 7 son 14, y 7 son 21, y 7 son 28, y 7 son 35: y como 35 es el resultado de la suma de 5 números iguales á 7, espresa el producto de 5 veces 7 que se pedia.

Los estudiantes deben al principio ejercitarse en esa forma de la multiplicacion para grabar en la memoria sus resultados y poder despues obtener facilmente los productos de los números de mas de una cifra. Sin embargo, mientras no se adquiera el hábito, bueno será tener á la vista la tabla adjunta llamada de *multiplicacion ó de Pitágoras*, por el nombre de su inventor, ó al menos del que mas estendió su uso.

Tabla de la multiplicacion.

Direccion horizontal.

Direccion vertical.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

La primera línea horizontal de números se forma sumando 1 sucesivamente consigo mismo, hasta llegar á 9.

La segunda sumando 2; la tercera sumando 3, y así sucesivamente hasta sumar 9 consigo mismo, que dá la última.

Tambien podria formarse la tabla por columnas verticales, porque constan respectivamente de los mismos números. Así, la sesta línea horizontal consta de los números 6, 12, 18, 24,.... 54; y la sesta columna vertical tiene exactamente los mismos 6, 12, 18, 24,.... 54.

Para buscar en esta tabla el producto de dos números de una sola cifra, se busca el multiplicando en la primera línea horizontal, y se baja *verticalmente* hasta encontrarnos en frente del *multiplicador* que se hallará en la primera columna vertical: el número que haya en la *casilla* correspondiente es el producto.

Por ejemplo, para hallar el producto de 8 por 5, se baja desde 8, tomado en la primer fila horizontal hasta enfrente de 5 tomado en la primer columna vertical; y el número 40 contenido en la casilla es el producto pedido.

Tambien podria tomarse el 8 en la primer columna vertical y seguir *horizontalmente* hasta llegar debajo del 5 tomado en la primera fila horizontal; resultando tambien así que es 40 el producto.

19. Supongamos ahora *que el multiplicando conste de mas de una cifra y el multiplicador de una sola.*—Por ejemplo, multiplicar 8459 por 7.

Podria (n.º 17) obtenerse el resultado escribiendo unos debajo de otros 7 números iguales á 8459, como se ve al márgen, y sumándolos en seguida, con lo cual resultaria 59213, que es el producto.

$$\begin{array}{r} 8459 \\ 8459 \\ 8459 \\ 8459 \\ 8459 \\ 8459 \\ 8459 \\ \hline 59213 \end{array}$$

Pero es evidente que esto equivale á tomar 7 veces las 9 unidades, 7 veces las 5 decenas, 7 veces las 4 centenas, etc., y á sumar todos estos productos.

A este fin se escribe el multiplicador debajo del multiplicando, como se ve al lado, se tira una raya y se dice: 7 veces 9 son 63 (*véase* la Tabla de Pitágoras), es decir, 6 decenas y 3 unidades· se escriben las 3 unidades bajo las unidades y se guardan las 6 decenas para añadirlas al producto de las decenas del multiplicando por el 7.

$$\begin{array}{r} 8459 \\ 7 \\ \hline 59213 \end{array}$$

Se dice despues: 7 por 5 son 35 y 6 que se llevan son 41 decena, ó 4 centenas y 1 decena: se escribe la 1 decena en su lugar y se llevan las 4 centenas.

7 por 4 son 28, y 4 que se llevan son 32 centenas, ó 3 millares y 2 centenas: se escriben las 2 centenas en su sitio y se llevan los 3 millares.

En fin, 7 por 8 son 56, y 3 que se llevan son 59, que se escribe á la izquierda de las centenas porque ya no hay mas cifras en el multiplicando.

Resulta, pues, el producto 59213.

Donde se ve que **PARA MULTIPLICAR UN NÚMERO DE VARIAS CIFRAS POR OTRO DE UNA SOLA**, *es necesario multiplicar sucesivamente las unidades, decenas, centenas, etc., del multiplicando por el multiplicador, escribiendo cada producto parcial en el sitio correspondiente, y guardando en cada multiplicacion parcial las decenas para juntarlas con las decenas, las centenas para juntarlas con las centenas, etc.*

SIRVA DE SEGUNDO EJEMPLO MULTIPLICAR 47008 POR 9.

Se dice lo primero: 9 por 8 son 72; se escribe el 2 en el órden de unidades y se guarda el 7.

Despues, 9 por 0 es 0; pero como llevábamos 7 decenas, se escriben estas en el órden de decenas.

$$\begin{array}{r} 47008 \\ 9 \\ \hline 423072 \end{array}$$

9 por 0 es 0; se escribe 0 en el órden de centenas, porque no las hay y se debe sin embargo llenar el sitio.

Despues, 9 por 7 son 63; escribo 3 y llevo 6.

Por último, 9 por 4 son 36 y 6 que llevo son 42, que escribo á la izquierda de la cifra anterior.

Luego el producto pedido es 423072.

20. Antes de pasar al caso en que el multiplicador consta de mas de una cifra, indicaremos el medio de hacer un número 10, 100, 1000,...., veces mayor, ó multiplicarle por 10, 100, 1000,....

Del principio fundamental de la numeracion (n.° 5) resulta evidentemente, que si se coloca un 0 á la derecha de un número ya escrito, cada una de sus cifras significativas retrocede un paso hácia la izquierda y espresa por lo tanto unidades diez veces mayores que antes. Del mismo modo si se escriben dos 0 á la derecha se hace 100 veces mayor, pues cada cifra significativa espresa unidades 100 veces mayores, y así sucesivamente.

Luego *para multiplicar un número entero cualquiera por* 10, 100, 1000,...., *basta escribir á su derecha* 1, 2, 3,.... *ceros.*

Así, los productos de 439 por 10, 100, 1000, 10000,.... son respectivamente 4390, 43900, 439000, 4390000,....

21. *Consideremos ahora el caso en que el multiplicando y el multiplicador constan de mas de una cifra.*

Nos proponemos multiplicar.	87468
por.	5847
	612276
	3498720
	69974400
	437340000
	511425396

Se empieza por escribir el multiplicador debajo del multiplicando, de modo que se correspondan en columna las unidades de cada órden, tirando una raya por debajo. Hecho esto, se observa que multiplicar 87468 por 5847, equivale á tomar el multiplicando 7 veces, mas 40 veces, mas 800 veces, mas 5000 veces, reuniendo despues los productos parciales.

Por la regla del n.º 19 encontraremos primero el producto de 87468 por 7, y tendremos el producto 612276.

Pero ¿cómo obtendremos el de 87468 por 40?

Concibamos por un momento que se han escrito en columna 40 números iguales á 87468: sumándolos todos se tendria el producto pedido. Pero es evidente que esos 40 números forman diez grupos de á 4 números iguales á 87468; y estos 4 números sumados equivalen al producto de 87468 por 4, que se puede formar por la regla del n.º 19, y es igual á 349872: luego multiplicando este número por 10, ó lo que es lo mismo poniendo un 0 á su derecha (n.º 20), se tendria 3498720, que sería el producto de 10 veces, 4 veces 87468, ó sea 40 veces 87468.

Se ve, pues, que esta operacion equivale á multiplicar el multiplicando por la cifra 4 considerada como de unidades simples, escribiendo despues un 0 á la derecha y colocando el resultado 3498720 en columna debajo del primer producto parcial.

Del mismo modo, para efectuar la multiplicacion de 87468 por 800, basta multiplicar 87468 por 8, lo cual dá 699744, y añadir luego dos ceros á su derecha; de este modo se obtiene el tercer producto parcial 69974400, que se escribe debajo de los dos productos precedentes. En efecto, 800 números iguales á 87468, colocados unos debajo de otros, forman evidentemente 100 grupos de á 8 números iguales á 87468, ó bien 100 números iguales al producto de 87468 por 8, es decir, á 6997400.

Por medio de un razonamiento semejante se probaria que para multiplicar 87468 por 5000, basta multiplicarle por 5, añadir tres ceros á la derecha del producto, y escribir el resultado 437340000 debajo de los tres productos precedentes.

Efectuando ahora la suma de los cuatro productos parciales, se halla por resultado ó *producto total* 511425396.

Advertencia. En la práctica se omiten por lo comun los ceros á la derecha de los productos parciales de decenas, centenas, millares, etc.; pero se escribe cada producto parcial debajo del producto precedente, corriéndole un lugar hácia la izquierda, es decir, *haciendo que su primera cifra ocupe el mismo lugar que el que ocupa la cifra correspondiente del multiplicador.*

Regla general. Para multiplicar un número de varias cifras por otro tambien de varias cifras, *se multiplica todo el multiplicando por la cifra de unidades del multiplicador* (segun la regla del n.º 19); *despues se multiplica sucesivamente todo el multiplicando por las cifras de decenas, de centenas, etc., consideradas como simples unidades, escribiendo unos debajo de otros los productos parciales de modo que se correspondan las cifras de igual órden, lo que se consigue corriendo á cada uno un lugar hácia la izquierda; por último, se suman los productos parciales, y se tiene el producto total pedido.*

22. Pueden ser ceros algunas de las cifras del multiplicador, y entonces debe modificarse al parecer la regla dada para la colocacion de los productos parciales.

Multipliquemos por ejemplo.	870497
por.	500407
	6093479
	3481988
	4352485
	435602792279

Se multiplica primero todo el multiplicando por 7; lo cual dá el producto 6093479.

Ahora como no hay decenas en el multiplicador, pasamos á multiplicar por 4, cifra de las centenas del multiplicador, lo cual dá el producto 3481988, y como debe espresar *centenas*, le colocamos bajo el primer producto, corriéndole *dos* lugares hácia la izquierda.

Del mismo modo, no habiendo en el multiplicador ni *millares* ni *decenas de millar*, pasamos á multiplicar por 5, cifra de las *centenas de millar;* y el producto 4352485 se escribe debajo del anterior, corriéndole otros tres lugares hácia la izquierda.

En general *cuando se encuentran uno ó mas ceros entre dos cifras significativas del multiplicador, se corre el producto correspondiente á la primera cifra significativa, que viene á la izquierda de los ceros, tantos lugares mas uno hácia la izquierda, respecto del producto precedente, como ceros hay intermedios.*

Para evitar cualquiera equivocacion puede comprobarse si la primera cifra de la derecha del producto parcial ocupa el mismo lugar que la correspondiente del multiplicador.

23. Si uno ó ambos factores terminan en ceros, puede abreviarse la multiplicacion, multiplicando como si los ceros no existiesen y escribiéndolos luego á la derecha del producto obtenido.

Multipliquemos por ejemplo.	47000
por.	2900
	423
	94
	136300000

Despues de haber multiplicado 47 por 29 por la regla ya sabida, se escriben los cinco ceros á la derecha del producto, y se obtiene 136300000.

En efecto, si tuviéramos que multiplicar 47000 por 29, es claro que despues de haber multiplicado 47 por 29, tendríamos que hacer que el producto representára millares, es decir, unidades de la misma especie que el multiplicando; para lo cual deberiamos añadir *tres ceros*. Pero multiplicar un número por 2900, equivale (n.º 21) á tomar cien veces su producto por 29; luego deben añadirse otros *dos ceros*. La misma reflexion se haria respecto de cualquier otro caso.

24. A poco que se reflexione sobre esta operacion, se comprende la necesidad de empezar la operacion por la derecha, *á lo menos en las multiplicaciones parciales, por cada una de las cifras del multiplicador,* á causa de las unidades de órden superior que generalmente se forman al multiplicar una cifra del multiplicando por otra del multiplicador. Pero nada estor-

ba invertir el órden de las multiplicaciones parciales por las diferentes cifras del multiplicador, como puede verse en el ejemplo siguiente.

Hemos empezado aquí la multiplicacion por las cifras de las centenas del multiplicador, y bajo la misma cifra se ha colocado la primera del producto parcial; pero en la operacion siguiente hemos cuidado de correr el producto un lugar *hácia la derecha*, es decir, hemos cuidado de colocarle de modo que su primera cifra corresponda en columna con las decenas de ambos factores. El tercer producto se ha corrido tambien un lugar hácia la derecha respecto del precedente. Pero ordinariamente se forman los productos de izquierda á derecha por ser mas natural y mas cómodo.

$$\begin{array}{r} 5704 \\ 487 \\ \hline 22816 \\ 45632 \\ 39928 \\ \hline 2777848 \end{array}$$

De algunas propiedades importantes de la multiplicacion.

En las aplicaciones ocurre con frecuencia haber de multiplicar sucesivamente varios números entre sí.

Sirvan de ejemplo los cinco números

23, 35, 72, 49, 156.

Formar el producto de estos números en el órden en que estan escritos es multiplicar primero 23 por 35, despues multiplicar este primer producto (805) por 72, despues multiplicar este segundo producto (57960) por 49, despues multiplicar este tercer producto (2840040) por 156, lo cual dá finalmente 443046240, que es el producto total pedido.

Con estos cinco factores se podria obtener el mismo producto de muchos modos diferentes: para esto bastaria invertir segun nuestra voluntad el órden de las multiplicaciones sucesivas, que es lo que se significa cuando se dice que *el producto de la multiplicacion de varios números entre sí no varía, cualquiera que sea el órden que se siga al efectuar las multiplicaciones.*

25. Para darnos cuenta de esta propiedad, que hace un gran papel en la ciencia de los números, consideremos primero el caso de dos factores, por ejemplo 459 y 237.

Si concebimos la unidad escrita 459 veces en una misma línea horizontal, y se forman 237 líneas iguales, es claro que la suma de las unidades contenidas en el cuadro es igual á tantas veces las 459 unidades de una línea horizontal como unidades hay en una columna vertical, es decir, en 237; de modo que dicha suma es igual al producto de 459 por 237. Pero tambien puede decirse que esta suma es igual á tantas veces las 237 unidades de una columna vertical, como unidades hay en una línea horizontal, es decir, en 459; de modo que es igual al producto de 237 por 459. Luego el producto de 459 por 237 es igual al producto de 237 por 459.

1+1+1+1+1. . . . .
1+1+1+1+1. . . .
1+1+1+1+1. . . . .
1+1+1+1+1. . . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Este mismo razonamiento puede aplicarse á otros dos números cualquiera: luego queda demostrado que el producto de dos números no varía, cualquiera que sea el órden en que se multipliquen (*).

Para dar á conocer una aplicacion de este principio, supongamos que la naturaleza de una cuestion nos ha conducido á multiplicar 75 por 5642. Mejor será multiplicar 5642 por 75, pues de este modo solo tendremos que formar dos productos parciales, mientras del otro tendríamos que formar cuatro.

26. Antes de pasar á la proposicion general, empezaremos por deducir del caso particular ya demostrado una propiedad que puede enunciarse así: *multiplicar un número cualquiera por un factor, y despues el producto resultante por otro factor, equivale á multiplicar el número propuesto por el segundo factor, y despues el producto resultante por el primer factor:* ó mas generalmente, *en toda multiplicacion de mas de dos números puede invertirse el órden de los dos primeros factores sin que se altere el producto.*

Así, por ejemplo, si se multiplica 48 por 15 y el producto resultante por 24, se obtendrá el mismo producto que si se multiplica 48 por 24 y el producto resultante por 15.

En efecto, resulta desde luego de lo probado en el número 25 que el producto 360 procedente de la multiplicacion de 15

(*) Podria deducirse esta proposicion de la Tabla de Pitágoras, observando la disposicion de los números (n.º 19): bastaria para esto concebir la Tabla prolongada convenientemente, por ejemplo hasta 10000 veces 10000, si se consideráran dos factores inferiores á este límite; pero la demostracion puesta arriba nos ha parecido mas sencilla.

por 24 es el mismo que se obtendria multiplicando 24 por 15; y si podemos demostrar que el producto de 48 por 360 resultaria lo mismo, bien multipliquemos 48 por 15 y el producto resultante por 24, bien multipliquemos 48 por 24 y el producto resultante por 15, la propiedad quedará demostrada.

Para formar, pues, el producto de 48 por 360 basta (n.º 17) colocar uno sobre otro 360 números iguales á 48, sumándolos todos luego. Pero estos 360 números forman evidentemente 24 grupos de á 15 números iguales á 48, ó 15 grupos de á 24 números iguales á 48 (*). Se obtendrá, pues, la suma de esos 360 números, ó bien multiplicando 48 por 24 y tomando 15 veces el producto resultante, ó bien multiplicando 48 por 15 y tomando 24 veces el producto resultante; y como estos dos modos de operar conducen evidentemente al mismo resultado, debemos concluir que puede invertirse el órden de las dos multiplicaciones sucesivas por 15 y 24.

27. *Advertencia.* La demostracion precedente dá lugar á una nueva proposicion que nos será muy útil en adelante.

Acabamos de ver que multiplicar 48 por 360, que es el producto de 24 por 15, equivale á multiplicar 48 por 24 y despues el resultado obtenido por 15. Pero como 24 es igual al producto de 6 por 4, puede tambien decirse que multiplicar 48 por 360, equivale á multiplicar primero 48 por 6, despues el resultado obtenido por 4, y el nuevo resultado por 15 ó bien por 5 y despues por 3 (puesto que 15 es igual al producto de 5 por 3). Luego finalmente, *multiplicar un número por el producto de dos ó mas factores, equivale á multiplicar sucesivamente este número por cada uno de los factores.*

28. Pasemos ya á la demostracion del principio general: *el producto de varios números es siempre el mismo, cualquiera que sea el órden de su multiplicacion.*

Volvamos á los cinco factores

23, 35, 72, 49, 156.

Resulta del principio establecido (n.º 26) que en las multi-

(*) Este razonamiento es análogo al que hemos hecho en el número 21 para dar cuenta de la multiplicacion por las decenas, centenas, etc., del multiplicador.

plicaciones sucesivas puede ponerse el factor 156 en el lugar del factor 49; pero tambien podria pasarse luego al lugar del 72, despues al del 35, y finalmente al del 23. Por la misma razon, el factor 49, que ya ha pasado al lugar del 156, podria pasar á la izquierda del 72, despues á la izquierda del 35, y así sucesivamente. Se ve, pues, que cada factor puede ocupar todos los sitios posibles en el órden de las multiplicaciones sucesivas, sin que el producto total varíe. Luego, etc.

DE LA DIVISION.

29. Dividir un número por otro, es (n.° 9) *hallar un tercer número que, multiplicado por el segundo, reproduzca el primero:* ó bien (n.° 25) *hallar un tercer número que, multiplicando por él el segundo, reproduzca el primero.*

Así, el objeto de la division es: *dado un producto de dos factores y uno de ellos, determinar el otro;* por consiguiente, es una operacion inversa de la multiplicacion.

Como en una multiplicacion de números enteros, el *producto* se compone de tantas veces el multiplicando como unidades tiene el multiplicador, puede tambien decirse que dividir un número entero por otro es *buscar cuántas veces el primero*, considerado como producto, *contiene al segundo*, considerado como multiplicando: el número de veces es entonces el multiplicador. En fin, tambien se ha visto (n.° 9) que dividir un número entero por otro *es hacer el primero tantas partes como unidades tiene el segundo.*

Estos dos últimos aspectos que se dan á la division no convienen rigorosamense sino á los números enteros, mientras la primera definicion conviene á todos los números enteros ó fraccionarios. Y sin embargo, de esas últimas definiciones se han deducido los nombres puestos á los términos de la division.

Así, el primer número se llama *dividendo* (número que ha de dividirse); el segundo *divisor,* y el tercero *cociente*, de la palabra latina *quoties*, porque dice cuántas veces el dividendo contiene al divisor.

Resulta evidentemente de estas definiciones, que cuando se haya obtenido el cociente, para *probar* la operacion *bastará multiplicar el divisor por el cociente*, ó recíprocamente; y *si la operacion está bien hecha, deberá resultar el dividendo.*

Recíprocamente, en la multiplicacion el producto puede considerarse como *dividendo,* el multiplicando como *divisor* ó como *cociente*, y el multiplicador como *cociente* ó como *divisor*: y se hará *la prueba* de la multiplicacion *dividiendo el producto por uno de los factores: si la operacion está bien hecha, habrá de resultar el otro factor.*

Esplicadas estas nociones, pasemos á esponer el procedimiento de la division.

30. Así como la multiplicacion puede hacerse por medio de la *adicion* de varios números iguales entre sí, así tambien podria hallarse el cociente de una division por una série de sustracciones.

En efecto, que se trate, por ejemplo, de *dividir* 60 por 12: cuantas veces podamos quitar 12 de 60, otras tantas estará 12 contenido en 60; por consiguiente, el cociente es igual al número de sustracciones que puedan efectuarse hasta destruir el dividendo.

En este ejemplo, como hay que hacer 5 sustracciones sucesivas, se deduce que es 5 el cociente.

60	
12	
48	1.ª resta.
12	
36	2.ª resta.
12	
24	3.ª resta.
12	
12	4.ª resta.
12	
0	5.ª resta.

Pero este modo de obtener el cociente sería larguísimo en la práctica, principalmente cuando el dividendo fuera muy grande respecto del divisor. Lo que constituye esencialmente la regla de la division es otro procedimiento especial y abreviado para obtener el resultado apetecido.

31. Sabiendo de memoria todos los productos de dos números de solo una cifra contenidos en la tabla de Pitágoras (n.º 18), se puede *determinar* facilmente *el cociente de la division de un número de una ó dos cifras, por otro número de una sola, con tal que el cociente no haya tampoco de tener mas de una.*

Por ejemplo, 35 dividido por 7 dá de cociente 5; ó bien se dice: 7 en 35, ó 35 entre 7, á 5 (porque se sabe que 5 veces 7 son 35); ó bien tambien la 7.ª parte de 35, son 5, porque 7 veces 5 son 35.

Dividir 68 *por* 9. Como 7 por 9 ó 63, y 8 por 9 ó 72, comprenden á 68, resulta que 68 dividido por 9, dará el cociente 7 y quedará un *resíduo* 5: lo cual se espresa diciendo la 9.ª parte de 68 es 7 y sobran 5.

Del mismo modo, ¿47 entre 8 á cómo les toca?—A 5; ó la 8.ª parte de 47 es 5 y sobran 7.

Mas adelante diremos lo que debe hacerse con el resíduo cuando el divisor no está exactamente contenido en el dividendo.

32. Pasemos al caso en que el *dividendo consta de mas de dos cifras, teniendo el divisor una sola.*

Atendido el íntimo enlace que existe entre la multiplicacion y la division, se ocurre naturalmente tratar de deducir el procedimiento para esta del seguido para aquella.

Con este fin, volvamos al ejemplo del n.º 19.

Resulta de esta multiplicacion que el producto 59213 consta de 7 veces las unidades, 7 veces las decenas, 7 veces las centenas, 7 veces los millares, del número 8459: luego el producto es la suma de los cuatro productos parciales correspondientes á las cuatro cifras del multiplicando.—Recíprocamente, dados el producto 59213 y uno de los factores, 7, para hallar el otro factor, hay que descomponer á lo menos con el pensamiento el número 59213 en los cuatro productos parciales de *millares*, *centenas*, *decenas* y *unidades* del factor buscado por el factor conocido: tomando entonces la 7.ª parte de cada producto parcial y reuniendo los cocientes parciales, se tendrá el cociente total ó segundo factor.

8459
7
59213

Hé aquí cómo se dispone la operacion.

Se escribe el divisor á la derecha del dividendo; se separan con una raya vertical, y se traza otra horizontal debajo del divisor.

Hecho esto, se toman á la izquierda del dividendo las dos primeras cifras que forman 59 *millares*, y se consideran como el *primer producto parcial;* se dice 59 entre 7, ó mejor, la 7.ª parte de 59 son 8: este cociente 8 espresa los millares del cociente total (*), y se escribe debajo del divisor como se ve en el ejemplo: se resta el producto 56 de 59, lo cual dá

59213	7
32	8459
41	
63	
0	

(*) Podria probarse, si fuera necesario, que la cifra 8 es la verdadera de millares del cociente, haciendo ver que ni es mayor ni menor de lo que debe. No es *mayor*, porque el producto de 7 por 8000, que es 56000, puede restarse del dividendo total; ni es *menor*, porque el producto de 7 por 9000, que es 63000, no puede ya restarse del dividendo.

un resíduo de 3 millares, procedentes de la multiplicacion parcial de las *centenas* del cociente por 7.

Se baja al lado del 3 la cifra 2 de las centenas del dividendo, y se tienen 32 *centenas* que se consideran como segundo producto parcial; y se dice: la 7.ª parte de 32 son 4; se escribe el 4, que debe espresar las *centenas* del cociente, á la derecha del 8: se resta en seguida el producto 28 del *dividendo parcial* 32, resultando un resíduo de 4 centenas procedentes de la multiplicacion parcial de las *decenas* del cociente por 7.

Al lado del nuevo resíduo 4, se baja la cifra 1 de las decenas del dividendo, lo que dá 41 decenas, y se dice: la 7.ª parte de 41 son 5: se escribe esta cifra á la derecha de las dos precedentes, espresando las *decenas* del cociente; se resta el producto 35 del dividendo parcial 41: el resíduo 6 espresa las *decenas* procedentes de la multiplicacion de las *unidades* del cociente por el divisor.

Finalmente, al lado de la cifra 6 se baja la cifra 3, y se dice: 63 entre 7 á 9 exactamente: se escribe la cifra 9 á la derecha de las tres precedentes, espresando las unidades del cociente: se resta el producto 63 del dividendo parcial 63, y como no queda resíduo alguno, se infiere que 8459 es el *cociente pedido*.

En efecto, resulta evidentemente de las operaciones anteriores, que se han ido restando sucesivamente del dividendo 59213, 7 veces 8 millares, 7 veces 4 centenas, 7 veces 5 decenas y 7 veces 9 unidades; y como nada queda, despues de practicadas esas operaciones, se deduce que 59213 es igual al producto de 8459 por 7, ó de 7 por 8459, y por consiguiente, este último número es el *cociente pedido*.

Sirva de segundo ejemplo dividir 754264 *por* 8.

La primera dificultad que aquí se presenta es conocer la naturaleza de las unidades superiores del cociente y determinar su número. Para conseguirlo observemos que si la primer cifra de la izquierda del dividendo fuera mayor que el divisor, ó por lo menos igual á él, el cociente total contendria unidades de la misma especie que las representadas por ella. Pero como en este ejemplo la primer cifra de la izquierda, 7, es menor que el divisor, debemos concluir que las unidades superiores del

754264	8
34	94283
22	
66	
24	
0	

cociente son de la especie de la segunda cifra de la izquierda del dividendo. Se toman, pues, las dos primeras cifras, que hacen 75 *decenas de millar*, y constituyen el primer dividendo parcial; se dice, la 8.ª parte de 75 son 9; luego el cociente total contiene 9 *decenas de millar* puesto que pueden restarse del dividendo 8 veces 9, ó sea 72 *decenas de millar*; se escribe el 9 bajo el divisor; se resta el producto 72 del dividendo 75, y queda un resíduo 3, procedente sin duda de la multiplicacion de los millares del cociente total por 8.

Al lado del resíduo 3 se baja la cifra siguiente 4 del dividendo, y se dice: la 8.ª parte de 34 *millares* es 4: se escribe el 4 bajo el divisor á la derecha del 9; se resta el producto 32 del dividendo parcial 34; y al lado del resíduo 2 se baja la cifra 2 siguiente del dividendo. Se procede con el nuevo dividendo parcial 22 lo mismo que con los anteriores, y se continúan estas operaciones hasta haber bajado el 4, última cifra del dividendo. Así se obtiene por cociente total 94283.

Prueba.

$$\begin{array}{r} 94283 \\ 8 \\ \hline 754264 \end{array}$$

En la práctica, siempre que el divisor consta de solo una cifra, se abrevia la operacion del modo siguiente:

Sirva de tercer ejemplo dividir 45237324 *por* 6.

$$\begin{array}{r|l} 45237324 & 6 \\ \hline 7539554 & \\ 6 & \text{prueba} \\ \hline 45237324 & \end{array}$$

Despues de haber subrayado el dividendo se dice: la 6.ª parte de 45 es 7, que se escribe debajo del 45, y el resíduo 3 se reune de memoria al 2 siguiente, lo cual dá 32: la 6.ª parte de 32 es 5, que se escribe á la derecha del 7, y quedan 2, que juntos al 3 siguiente del dividendo hacen 23: la 6.ª parte de 23 es 3, que se escribe á la derecha de las dos cifras anteriores, y el resto 5, junto con la cifra siguiente 7, dá 57: la 6.ª parte de 57 es 9 y quedan 3, que juntas con la siguiente cifra 3, hacen 33: la 6.ª parte de 33 son 5 y quedan 3, que juntas con la cifra siguiente 2, hacen 32: la 6.ª parte de 32 son 5 y quedan 2, que juntas con el 4, última cifra, hacen 24, cuya 6.ª parte es 4 exactamente.—Luego el cociente pedido es 7539554. En efecto, si se multiplica este número por 6, resulta el producto 45237324, que era el dividendo.

Del mismo modo, la 8.ª parte de. . 9725647 | 8
es. . . . . 1215705... 7
y quedan 7 de resíduo.

Prueba por la multiplicacion.

$$\begin{array}{r} 1215705 \\ 8 \\ \hline 9725640 \\ 7 \\ \hline 9725647 \end{array}$$

Advertencia. En este ejemplo, al llegar á la cifra 7 de las centenas del cociente no queda resíduo, y como la cifra siguiente 4 del dividendo es menor que el divisor 8, resulta no haber *decenas* en el cociente: se pone, pues, en su lugar un cero, y juntando luego el 4 con el 7, se dice: la 8.ª parte de 47 son 5, y sobran 7; el 5 se escribe á la derecha del cero, y el resíduo se apunta algo mas separado.

33. Vengamos al caso en que *dividendo y divisor constan de mas de una cifra.*

Para descubrir el procedimiento, propongámonos multiplicar los números 594 y 437, hecho lo cual comprobaremos el resultado por medio de la division.

$$\begin{array}{r} 594 \\ 437 \\ \hline 4158 \\ 1782 \\ 2376 \\ \hline 259578 \end{array}$$

De la multiplicacion resulta que el producto 259578 se compone de *los tres productos parciales* del multiplicando 594 por las *unidades*, las *decenas* y las *centenas* del multiplicador 437. Luego recíprocamente, *dados el producto* 259578 *y uno de los factores* 594 para hallar el otro factor, que será el cociente de la division del primero por el segundo, es menester separar en el producto 259578 los tres productos parciales que le componen. No parecerá fácil, atendidas las reducciones que ha habido entre las cifras al sumar los productos parciales; sin embargo, se consigue haciendo el siguiente razonamiento:

El producto parcial de 594 por las *centenas* del cociente no pudo dar unidades inferiores á centenas, y por tanto se halla necesariamente comprendido en las 2595 centenas del dividendo. Esto supuesto digo, que si se halla *el mayor número de* *veces* que 594 está contenido en 2595, ese número será la cifra de *centenas* del cociente total.

259578	594
2376	437
21978	
1782	
4158	
4158	
0000	

Por lo pronto, no puede ser dicho número mayor que la cifra buscada de centenas, puesto que siendo su producto por 594 menor que las 2595 *centenas*, el cociente total es al menos igual á tantas veces 100 como unidades tiene dicha cifra. Ni tampoco puede ser *menor* de lo que debe, es decir, menor que la cifra buscada de centenas; puesto que si se le añade *una unidad*, el producto de la nueva cifra por 594 daria á lo menos 2596 centenas, y no podria por consiguiente restarse del dividendo 259578; luego el número dicho debe ser la cifra de las *centenas* del cociente.

Segun esto, la dificultad de encontrar las centenas del cociente depende solo de averiguar cuántas veces contiene 2595 á 594; ó lo que es igual, de averiguar la cifra que multiplicada por 594 reproduce el mayor producto contenido en 2595. Podria desde luego obtenerse esa cifra restando sucesivamente cuántas veces fuera posible 594 de 2595; pero se simplificará la operacion observando, en virtud de la regla (n.º 19) de la multiplicacion de un número de varias cifras por otro de una sola, que 25, con algunas unidades de diferencia procedentes de las que se llevan, es el producto de la multiplicacion de la cifra 5 del 594 por la cifra buscada. Pero si se divide 25 por 5, resultan 5, número mayor de lo que debe, porque al multiplicar 594 por 5, el producto de 9 por 5 dá 45 decenas, de donde llevaremos 4 centenas que añadir al producto de 5 por 5 ó 25. Ensayemos, pues, el 4: el producto de 594 por 4 es 2376, número menor que 2595, y que se escribe debajo de este último: 4 es, pues, la verdadera cifra de las centenas del cociente, y por eso se escribe debajo del divisor, como se ve en el ejemplo. (Se ve tambien que 2376 es el tercer *producto parcial* que se obtuvo al multiplicar 594 por 437.)

Restando 2376 de 2595, y bajando al lado del resíduo 219 las restantes cifras del dividendo, tenemos 21978, número que se compone de la suma de los dos *productos parciales* de 594 por las *decenas* y por las *unidades* del cociente.

Para obtener las decenas haremos el mismo razonamiento que antes. No pudiendo dar el producto de 594 por las decenas ninguna unidad inferior á decenas, debe hallarse necesariamente en las 2197 decenas del nuevo dividendo; y si se encuentra la cifra que espresa el *mayor número de veces* que 594 está contenido en 2197, esa cifra será la de las decenas del cociente. No podrá resultar aquella mayor que esta, porque pudiéndose restar de 2197, su producto por 594, el cociente es al menos igual á tantas decenas como unidades tiene aquella cifra. Ni tampoco es *menor*, porque si le añadiéramos una sola unidad, el producto de la nueva cifra por 594 daria al menos 2198 decenas, y no podria ya restarse del dividendo 21978.

Veamos, pues, cuántas veces contiene 2197 á 594, ó mejor, segun la observacion arriba hecha, cuántas veces contiene 21 á 5. Resulta desde luego que le contiene 4: pero en la multiplicacion de 594 por 4, el producto de 9 por 4 es 36, de donde llevamos 3 centenas que añadir al producto de 4 por 5, ó 20: así, pues, 4 es mayor de lo que debe ser. Ensayemos el 3: el producto de 594 por 3 es 1782, número menor que 2197 (y que se escribe debajo de este): así, pues, 3 es la cifra de las decenas del cociente, y se escribe debajo del divisor al lado del 4. (El producto 1782 es el *segundo producto parcial* obtenido al multiplicar 594 por 437.)

Restando 1782 de 2197, y bajando al lado del resíduo 415 la cifra última 8 del dividendo, resulta 4158, número que representa el producto parcial de 594 por las unidades del cociente.

Averiguando finalmente cuántas veces contiene 4158 á 594, ó mas bien, cuántas veces contiene 41 á 5, resulta 8; pero 8 es mayor de lo que debe, como es fácil ver: ensayemos el 7: el producto de 594 por 7 es justamente 4158, que restado del último dividendo, dá *cero* de resíduo: luego 7 es la cifra de *unidades* del cociente, y 437 el *cociente pedido*.

En efecto, resulta evidentemente de las operaciones anteriores que hemos restado sucesivamente del dividendo 259578 los productos parciales de 594 por 4 *centenas*, 3 *decenas* y 7 *unidades;* y como concluidas las tres operaciones nada queda, resulta que 259578 equivale al producto de 594 por 437.

34. *Sean ahora dos números cualesquiera* 3844637 *y* 657, *y propongámonos dividir al primero por el segundo.*

La primera dificultad que presenta esta operacion consiste en determinar el *órden* y *número* de las unidades superiores del cociente. Desde luego es evidente que si tomando á la *izquierda* del dividendo tantas cifras como tiene el divisor, es decir, *tres*, el conjunto de ellas contuviera al divisor, el co–

ciente buscado tendria *decenas de millar;* pero como así no sucede en este caso, el cociente á lo mas contiene *millares:* contiene á lo menos *una* unidad de millar, porque el producto de 657 por 1000, ó 657000, es evidentemente menor que el dividendo: así, pues, estamos ciertos de que el cociente se compone de *millares*, *centenas*, *decenas* y *unidades.*

3844637	657
3285	5851
559637	
5256	
34037	
3285	
1187	
657	
530	

Para hallar los millares, observemos que el producto de 637 por *unidades de millar,* no puede dar unidades inferiores á millares, se halla por tanto comprendido en los 3844 millares del dividendo, y si se busca la cifra que espresa *el mayor número de veces* que 657 está contenido en 3844, este número será la cifra de *unidades de millar* del cociente. Dicho número no resultará *mayor* de lo que deba, porque siendo su producto por 657 menor que 3844 *millares*, puede restarse del dividendo, y así el cociente es al menos igual á tantas veces 1000 como unidades tiene el número. Ni tampoco es *menor*, porque con solo aumentarle *una* unidad, su producto por 657 daria al menos 3845 millares, y no podria restarse del dividendo.

Averigüemos, pues, cuántas veces contiene 3844 á 657, ó simplemente 38 á 6. Resulta 6; pero 6 es mayor de lo que debe, porque en la multiplicacion de 657 por 6 el producto de 5 por 6 es 30, y llevamos 3 centenas que añadir al producto de 6 por 6 ó 36. Ensayemos, pues, el 5: el producto de 657 por 5 es 3285 (que se escribe bajo 3844); y se coloca el 5 en el cociente, espresando los *millares* del cociente total.

Restando 3285 de 3844, y bajando al lado del resíduo 559 las demas cifras del dividendo, se obtiene 559637, número que consta de los productos parciales de 657 por las *centenas*, *decenas* y *unidades* del cociente, y con el cual por lo tanto debe razonarse y operarse como con el dividendo primitivo.

Para obtener las centenas se toman las 5596 centenas del nuevo dividendo, y se averigua cuántas veces contiene 5596 á 657, ó simplemente cuántas veces 55 contiene á 6. Resulta 9; pero 9 es evidentemente mayor de lo debido. Ensayemos el 8: el producto de 657 por 8 es 5256, número menor que 5596· luego 8 es la cifra de *centenas* del cociente; escribamos esta cifra al lado de la otra hallada, y escribamos el producto 5256 debajo de 5596 para restarle de este.

Efectuando esta nueva sustraccion y escribiendo al lado del resíduo 340 las otras dos cifras 37 del dividendo, resulta el número 34037, que consta todavía de los productos parciales de 657 por las *decenas* y *unidades* del cociente.

Dividiendo 3403 por 657, ó mas bien 34 por 6, resulta 5. El producto de 657 por 5 es 3282, número menor que 3403; así, pues, 5 es la cifra de las *decenas* y se escribe á la derecha de las dos anteriores, colocando el producto 3285 debajo de 3403 y efectuando esta nueva sustraccion.

Escribiendo al lado del resíduo 118 la última cifra 7 del dividendo, resulta el número 1187, que contiene evidentemente *una vez* al número 657: así, pues, 1 es la cifra de *unidades* del cociente, que se coloca á la derecha de las tres anteriores, con lo cual resulta de *cociente total* 5851.

Restando para terminar 657 de 1187, queda el resíduo final 530: lo cual significa que el dividendo se halla comprendido entre el producto de 657 por 5851 y el de 657 por 5852.

Puede además comprobarse la operacion, multiplicando 657 por 5851, ó 5851 por 657, y añadiendo al producto el resíduo 530.

Hé aquí ejecutada esa prueba:

$$\begin{array}{r}
5851 \\
657 \\
\hline
40957 \\
29255 \\
35106 \\
530 \\
\hline
3844637
\end{array}$$

Advertencia. Puede observarse que en el curso de la operacion basta bajar al lado de cada resíduo la cifra siguiente del dividendo, continuando de este modo hasta bajarlas todas.

35. La determinacion de cada cociente parcial en la forma indicada exige un tanteo mas ó menos largo, y aun así no siempre hay completa seguridad de exactitud hasta despues de haber restado del dividendo parcial el producto del divisor por la cifra ensayada.

Hay, sin embargo, un medio de asegurarse de que es buena la cifra que se tantea antes de efectuar la resta consabida. Consiste este medio en *dividir con el pensamiento el dividendo parcial por dicha cifra*, procediendo como en el tercer ejemplo del n.º 32, *prolongando la operacion mientras las cifras del cociente de esta division mental son iguales á las correspondientes del divisor, y terminando al momento que alguna de ellas resulte distinta*. Si la cifra obtenida es entonces *mayor* que la correspondiente del divisor, la cifra ensayada es *buena;* pero si resulta *menor*, la cifra ensayada es mayor de lo que debe: *se le quita entonces una unidad y se repite la misma comprobacion.*

Sirva de ejemplo dividir 137836 por 1583.

137836	1583
12664	87
11196	
11081	

Siendo 13783 el primer dividendo parcial, deberemos decir 13 entre 1, les toca á 13; pero como el primer cociente parcial no puede pasar de 9, ensayaremos el 9: para esto decimos: la 9.ª parte de 13 es 1 y sobran 4; la 9.ª parte de 47 es 5 y sobran 2; la 9.ª parte de 28 es 3, cifra menor que su correspondiente 8 del divisor: luego no cabe á 9, porque siendo 1583 mayor que la 9.ª parte de 13783, no puede restarse de este 9 veces. Ensayemos, pues, el 8: la 8.ª parte de 13 es 1, y sobran 5; la 8.ª parte de 57 es 7, cifra mayor que la correspondiente 5 del divisor; luego cabe á 8; porque siendo 1583 menor que la octava parte del dividendo parcial, 13783 podrá restarse de este ocho veces.

Multiplicando 1583 por 8 y restando el producto 12664 del dividendo parcial 13783, queda el resíduo 1119, y el segundo dividendo parcial 11196.

Se dice en seguida: 11 entre 1 á 11; pero es evidente que el segundo cociente no puede ser mayor que 8 á lo mas, porque el nuevo dividendo parcial es menor que el anterior. Ensayemos, pues, el 8: la 8.ª parte de 11 es 1 y sobran 3; la 8.ª parte de 31 es 3, cifra menor que 5, su correspondiente del divisor: luego no cabe á 8, porque no podria restarse 8 veces el divisor del dividendo parcial.—Ensayemos el 7: la 7.ª parte de 11 es 1 y sobran 4; la 7.ª parte de 41 es 5 y sobran 6; la 7.ª parte de 69 es 9, cifra mayor que 8, su correspondiente en el divisor propuesto: luego cabe á 7, porque siendo mayor que 1583 la 7.ª parte de 11196, podrá restarse de este 7 veces aquel.

Multiplicando 1583 por 7 y restando de 11196 el producto 11081, resulta el cociente total 87 y el resíduo final 115.

Advertencia. Cuando hay necesidad de prolongar el ensayo hasta la cifra de unidades de primer órden, se tiene la ventaja de tener hecha la sustraccion al mismo tiempo.

Así, para dividir 12670 por 1583, despues de haber probado que no cabe á 9, se ensaya el 8 y se dice: la 8.ª parte de 12 es 1 y sobran 4; la 8.ª parte de 46 son 5 y sobran 6; la 8.ª parte de 67 es 8 y sobran 3; la 8.ª parte de 30 es 3 y sobran 6.

Se averigua, pues, de un golpe que el cociente es 8 y que el resíduo es 6; es decir, que el dividendo contiene 8 veces al divisor y que sobran 6 unidades.

36. REGLA GENERAL. Para dividir un número entero por otro, *escríbase el divisor á la derecha del dividendo, separándolos por una línea vertical y tirando otra horizontal debajo del divisor.*

Hecho esto, *tómense á la izquierda del dividendo tantas cifras como tiene el divisor, ó* UNA *mas si el conjunto de aquellas es menor que el divisor:* así se obtiene un PRIMER DIVIDENDO PARCIAL, cuya primera cifra de la derecha espresa el órden superior de unidades que ha de resultar en el cociente. *Búsquese cuántas veces* (n.º 35) *contiene al divisor el primer dividendo parcial, y se tendrá la primera cifra del cociente, que se escribirá debajo del divisor: se multiplica este por dicha cifra, y el producto se resta del dividendo parcial.*

Al lado del resíduo se baja la cifra siguiente del dividendo, y se tendrá el SEGUNDO DIVIDENDO PARCIAL. *Se busca como antes cuántas veces contiene al divisor, y se tendrá la segunda cifra del cociente: escríbase esta cifra al lado de la anterior debajo del divisor, multiplíquese este por ella, y réstese el producto del segundo dividendo parcial.*

Al lado del segundo resíduo se baja la siguiente cifra del dividendo, y se tendrá el TERCER DIVIDENDO PARCIAL, *con el cual se opera como con los anteriores.*

De este modo se continúa hasta haber bajado la última cifra del dividendo, cuidando siempre de escribir cada cociente parcial á la derecha y junto á las precedentes, á fin de dar á estos su verdadero valor. Si terminadas estas operaciones *nada* resta, la division se llama *exacta;* y si queda un *resíduo*, se añade al producto del divisor por el cociente hallado al tiempo de hacer la prueba.

37. Cuando se tiene ya práctica bastante en todas las partes de este procedimiento, pueden abreviarse mucho las operaciones parciales, efectuando á la vez las multiplicaciones y las restas, como se verá en el ejemplo siguiente, uno de los mas difíciles que podemos proponer.

Dividir 9639475 *por* 2789.

Tomo primero las cuatro primeras cifras de la izquierda del dividendo, porque su conjunto contiene al divisor; y divido 9639 por 2789, ó simplemente 9 por 2; parece que toca á 4, pero es fácil ver (n.º 35) que no, y ensayando el 3, resulta ser el verdadero cociente, porque la 3.ª parte de 9 es 3, cifra mayor que la correspondiente del divisor.

Esto supuesto, en vez de multiplicar 2789 por 3 y escribir el producto bajo 9639, para hacer la resta opero como sigue: digo 3 por 9 son 27; resto 27 de 9, última cifra del dividendo parcial 9636, y como no se puede, supongo el 9 aumentado en 2 decenas, respesto 27 de 29, y me restan 2, que escribo debajo del 9. Observemos ahora que las 2 decenas se suponen quitadas al 3, que así queda reducido á 1; pero evidentemente se obtiene el mismo efecto (n.º 14) con mas comodidad, llevando las 2 decenas, añadiéndolas al producto del cociente 3 por las decenas del divisor, y restando el resultado de todas las decenas del dividendo 9639.

9639475	2789
12724	3456
15687	
17425	
691	

Sigo, pues, diciendo: 3 por 8 son 24 y 2 que llevo son 26; de 26 á 3 no puede ser; tomo 3 centenas de la cifra inmediata del dividendo; y el 3 se convierte en 33; resto 26 de 33 y me quedan 7, que escribo bajo el 3 del dividendo, llevando las 3 centenas.

3 por 7 son 21, y 3 que llevo son 24, que no puede restarse de 6, pero sí de 26, quedando 2, que escribo debajo del 6 del dividendo, y llevando 2 *millares*.

Finalmente, 3 por 2 son 6, y 2 que llevo son 8, que restado de 9, dá 1 de resíduo, el cual se escribe debajo del 9, quedando así terminada la operacion parcial.

Quedan, pues, 1272: al lado de este número bajo la siguiente cifra del dividendo, y tengo el *segundo dividendo parcial* 12724, con el cual opero de la misma manera.

12724 entre 2789, ó 12 entre 2, parece tocarles á 6; pero hecho el ensayo no les toca á 6, ni aun á 5 (n.º 35); pero sí les toca á 4: escribo 4 en el cociente á la derecha del 3, y digo

4 por 9 son 36; de 36 á 4 no puede restarse, pero sí puede de 44, y quedan 8, que escribo debajo del 4, llevando 4.

4 por 8 son 32 y 4 que llevo son 36, que no puede restar se de 2, pero sí de 42, quedando 6, que escribo debajo del 2, y llevo otra vez 4.

4 por 7 son 28 y 4 que llevo son 32; de 32 á 37 van 5, que escribo bajo el 7, y llevo 3.

Finalmente, 4 por 2 son 8, y 3 que llevo son 11; de 11 á 12 va 1, que escribo debajo del 2.

El resíduo de esta segunda operacion es 1568, á cuyo lado bajo la siguiente cifra del dividendo, obteniendo el *tercer dividendo parcial* 15687, con el cual procedo como con los dos anteriores; y así continúo hasta obtener el cociente 3456, con un resíduo de 691.

Al lado ponemos otro ejemplo. .

200658969	39837
147396	5037
278859	
00	

38. *Observacion primera* sobre la division.—El último ejemplo dá lugar á una observacion importante.

Despues de haber hallado el 5, primera cifra del cociente, y el primer resíduo 1473, se baja al lado de este la cifra siguiente del dividendo, resultando el segundo dividendo parcial 14739. Pero este dividendo parcial no contiene al divisor, luego el cociente total carece de centenas, porque si al menos hubiera una, su producto por 39837 deberia restarse de 14739, lo cual es imposible. Pero para conservar á la cifra 5 del cociente el valor correspondiente, se escribe un *cero* en el lugar de las *centenas*, y bajando en seguida al lado de 14739 la siguiente cifra 6 del dividendo, se continúa la operacion, obteniendo sucesivamente las cifras de *decenas* y *unidades*.

En general, siempre que al bajar al lado del resíduo la cifra siguiente del dividendo se obtiene un número menor que el divisor, es señal de que el cociente carece de unidades del órden de la cifra bajada; *entonces se pone cero en el cociente* para ocupar el lugar vacío y dar á las cifras significativas precedentes su valor relativo; *se baja despues otra cifra al lado del dividendo parcial, y se prosigue la operacion.*

39. *Observacion segunda.*—Cuando se ha hecho bien una operacion parcial, es decir, cuando se ha *determinado exactamente* la cifra del cociente relativa á aquel dividendo parcial,

en la operacion siguiente no pueden resultar mas de 9 en el cociente, porque suponer que pudieran resultar 10 ó mas, sería suponer que á la cifra precedente la faltaba al menos una unidad.

Hay además otra señal para conocer si se ha *determinado bien* una cifra del cociente, y es *obtener un resíduo* menor que el divisor al efectuar la resta correspondiente: si el resíduo fuera igual al divisor ó mayor, deberian añadirse una ó mas unidades á la cifra del cociente.

40. Como en las tres primeras operaciones de Aritmética se empiezan siempre los cálculos *por la derecha*, es natural preguntar por qué en la division se empiezan al contrario *por la izquierda*. Para responder á esta pregunta es necesario observar que siendo el dividendo la suma de los productos parciales del divisor por *las unidades, las decenas, las centenas, etc.*, del cociente, se confunden unos con otros todos esos productos parciales, y no es posible al pronto poner en evidencia el producto del divisor por las unidades, ó por las decenas, etc., mientras por el procedimiento seguido se determina al momento en qué parte del dividendo se halla *el producto del divisor por las unidades superiores.*

(Podria, sin embargo, empezarse la operacion por la derecha, efectuándola por medio de restas sucesivas, como se indicó en el n.º 30.) (*)

41. Espondremos ahora algunos usos de la multiplicacion y de la division.

PRIMER PROBLEMA. *Se quiere saber el precio de 2564 metros de cierta obra, suponiendo que cuesta el metro 47 reales.*

(*) Añadiremos además la observacion siguiente:

Por poco que se examine el procedimiento general de la division y los ejemplos empleados para esplicarle, se deducirá facilmente que: —*Cualesquiera que sean dividendo y divisor, el* NÚMERO TOTAL *de cifras del cociente es igual al número mas* UNO *de cifras del dividendo que quedan á la derecha del primer dividendo parcial:* porque el primer dividendo parcial dá *una* cifra en el cociente y *otra* cada una de las que se van bajando del dividendo.

En otras palabras: *el número total de cifras del cociente es igual á la diferencia entre el número de cifras del dividendo y el del divisor*, ó bien, *igual á dicha diferencia mas* UNO, segun que el primer dividendo parcial tiene *una cifra mas* ó el *mismo número* de ellas que el divisor.

Supuesto que cada metro cuesta 47 reales, repitiendo este valor 2564 veces, se tendrá claramente el valor de los 2564 metros. Así, pues, basta efectuar el producto de 47 por 2564, ó mejor (n.º 25) de 2564 por 47, para obtener el número de reales que se pide.

El producto es 120508;

luego los 2564 cuestan 120508 reales.

SEGUNDO PROBLEMA. *Costando* 39 *reales el metro de cierta obra, ¿cuántos podrán hacerse con* 8395 *reales?*

Es claro que cuantas veces esté el 39 contenido en 8395, otros tantos metros podrán construirse: bastará, pues, dividir 8395 por 39, y el cociente será el número pedido de metros.

$$\begin{array}{r|l} 8395 & 39 \\ \cline{2-2} 59 & \\ 205 & 215 \\ 10 & \end{array} \quad \text{metros } 10\frac{}{39}$$

Como se obtiene, además del cociente 215, un resíduo 10, debemos esplicar el uso que de él se hace.

Observemos para esto que si el dividendo tuviera 10 reales menos, sería el producto exacto de 39 por 215, y el número de metros pedido sería exactamente 215; pero como además hay 10 reales, se trata de determinar qué parte ó *fraccion* de metro podria construirse con los 10 reales.

Con *un* real se construiria evidentemente una 39.ª parte de metro ó $\frac{1}{39}$ de metro, puesto que se hace un metro con 39 reales; luego con 10 reales debe construirse 10 veces una 39.ª parte ó $\frac{1}{39}$ de metro, es decir, *diez* 39.ª partes de metro ó $\frac{10}{39}$ de metro (véase el n.º 8): luego 215 metros, mas $\frac{10}{39}$ de metro forman el resultado pedido.

Tal es *en general* el uso que debe hacerse del resíduo de una division, cuando al tiempo de efectuarla, se trata de resolver una cuestion relativa á números concretos.

Se concibe la unidad del cociente (cuya naturaleza se determina siempre por el enunciado del problema) *dividida en tantas partes iguales como unidades tiene el divisor; se toma una de estas partes tantas veces como unidades tiene el re-*

síduo, y la fraccion resultante *se junta al cociente entero obtenido*.

Tercer problema. *Con 21478 reales se han comprado 895 varas de cierta tela: se desea saber el precio de la vara.*

Si se conociera el precio de la vara, y le repitiéramos 895 veces, obtendríamos los 21478 reales: luego, no conociéndole, bastará para obtenerle el dividir 21478 por 895.

$$\begin{array}{r|l} 21478 & 895 \\ \cline{2-2} 3578 & \qquad ^{\text{reales}}\ 893 \\ 893 & 23 \qquad \overline{\ 895\ } \end{array}$$

Como el dividendo, á mas del producto de 895 por 23, contiene todavía 893 reales, resulta que el precio de la vara es 23 reales, mas *una fraccion* que se trata de determinar.

Para conseguirlo observemos que $\frac{1}{895}$ repetido 895 veces produce 1; y $\frac{893}{895}$ repetido 895 veces reproducirá 893; luego 23 mas $\frac{893}{895}$ es *un número que multiplicado por* 895 *reproduce* 21478: luego el precio pedido es 23 reales mas $\frac{893}{895}$ de real.

Este resultado es conforme á la regla deducida del ejemplo precedente.

Cuarto problema. *Supongamos que hay que repartir por partes iguales* 1348708 *reales entre* 498 *personas: ¿á cómo les tocará á cada una?*

$$\begin{array}{r|l} 1348708 & 498 \\ \cline{2-2} 3527 & \qquad\quad ^{\text{reales}}\ 124 \\ 4108 & 2708 \qquad \overline{\ 498\ } \\ 124 & \end{array}$$

Siendo 2708 el cociente de esta division y 124 el resíduo, puede inferirse que si la suma repartible disminuyera en 124 reales, cada persona recibiria 2708 reales. Pero como hay 124 reales mas, resulta que cada persona debe recibir 2708 reales, mas una parte de los 124. Para formarnos idea exacta de esa parte deficiente, se puede *considerar* primero *el número* 124 *como* UN TODO *que ha de dividirse en* 498 *partes iguales*, *siendo una de ellas la fraccion que ha de completar el cociente;* pero es mas fácil (n.º 8) concebir la *unidad*, que aquí es el real, *dividida en* 498 *partes iguales* llamadas 498.^{as} partes, y tomar *de ellas* 124, resultando de este modo ser $\frac{124}{498}$ la fraccion que ha de añadirse al cociente entero.

42. *Advertencia.* Este ejemplo nos sugiere una idea que usaremos mucho en adelante, y es que dividir el número 124 en 498 partes iguales, equivale á tomar 124 veces la 498.^{a} parte de una unidad. En efecto, si en vez de 124 hubiéramos solo de dividir 1 en 498 partes iguales, cada parte sería $\frac{1}{498}$; pero como el número 124 es 124 veces mayor, bien se ve que el resultado será 124 veces mayor, ó igual á 124 veces $\frac{1}{498}$, ó bien finalmente á $\frac{124}{498}$.

Del mismo modo, dividir 15 en 28 partes iguales, equivale á tomar 15 veces la 28.^{a} parte de la unidad. Porque si solo hubiéramos de dividir 1 en 28 partes iguales, sería cada parte igual á $\frac{1}{28}$; pero como hay que repartir 15, es decir, un número 15 veces mayor, el resultado ha de ser 15 veces mayor que $\frac{1}{28}$, ó bien igual á 15 veces $\frac{1}{28}$, ó á $\frac{15}{28}$.

En general, *dividir un número en tantas partes iguales como unidades tiene otro, equivale á dividir la unidad en tantas partes iguales como unidades tiene el segundo, y á tomar una de estas partes tantas veces como unidades tiene el primero.*

Otros principios sobre la multiplicacion y la division.

43. De las proposiciones demostradas en los n.^{os} 25.... 28, se deducen algunas consecuencias que es conveniente esponer por ser muy usadas en Aritmética.

Observemos ante todo que en virtud de las definiciones de la multiplicacion y division de números enteros, *se hace un nú-*

mero entero tantas veces mayor ó tantas veces menor como unidades tiene otro, multiplicando ó dividiendo el primero por el segundo.

Así, cuando se multiplica 24 por 6, el producto resultante 144 es 6 veces mayor que 24, porque procede de la suma de 6 números iguales á 24. Así tambien, si se divide 24 por 6, el cociente 4 es 6 veces menor que 24, porque aquel cociente 6 veces repetido reproduce el 24.

Esto supuesto, digo que si en una multiplicacion *se hace el multiplicando ó el multiplicador cierto número de veces mayor ó menor, el producto*, en virtud de tal variacion, *se hace el mismo número de veces mayor ó menor.*

Sirva de ejemplo multiplicar 47 por 6, y supongamos que en vez de efectuar esta operacion propuesta, se multiplica 47 por 24, que es 4 veces mayor que 6: como en virtud de lo dicho en el n.° 26, multiplicar 47 por 24 equivale á multiplicar 47 por 6 y el producto obtenido por 4, resulta que el producto de 47 por 24 es igual á 4 veces el producto de 47 por 6, ó á 4 veces mayor que el producto de 47 por 6.

Recíprocamente, siendo el producto de 47 por 6 (que es la *cuarta* parte de 24) 4 veces menor que el producto de 47 por 24, se infiere que si se hace el multiplicador 4 veces menor, ó se divide por 4, el producto, á consecuencia de este cambio, se hace 4 veces menor.

En otro lugar hemos visto (n.° 25) además que en una multiplicacion de dos factores puede invertirse el órden de estos: luego lo acabado de decir respecto del multiplicador puede tambien aplicarse al multiplicando; luego, etc....

De esto se infiere que *no se altera el valor de un producto haciendo el multiplicando cierto número de veces mayor, si se hace á la vez al multiplicador el mismo número de veces menor;* es decir, *multiplicando el primer factor por un número y dividiendo el segundo por el mismo número:* porque en virtud de lo dicho hay una compensacion evidente destruyendo la segunda operacion el efecto de la primera.

En esta última consecuencia se funda un medio empleado algunas veces para *comprobar la multiplicacion.*

Multipliquemos, por ejemplo, 347 *por* 72. Multiplicar 347 por 72 equivale á multiplicar 2 veces 347 ó 694 por la mitad de 72 ó 36. Así, despues de haber multiplicado 347 por 72, puede multiplicarse 694 por 36; y si estan bien hechas las operaciones debe resultar el mismo número.

Ahora, puesto que en la division es el dividendo un producto cuyos factores son el divisor y el cociente, resulta que si *se hace el dividendo cierto número de veces mayor ó menor*, es decir, *si se multiplica ó se divide por cualquier número entero*, *el cociente*, en virtud de este cambio, *queda multiplicado ó dividido por el mismo número*.

En efecto, como despues del cambio el cociente multiplicado por el divisor debe reproducir un dividendo cierto número de veces mayor ó menor que el primero, es indispensable que permaneciendo el mismo divisor, sea el cociente ese número de veces mayor ó menor.

Por el contrario, si subsistiendo el dividendo mismo *se hace el divisor cierto número de veces mayor ó menor, se hará el cociente el mismo número de veces menor ó mayor;* porque es el único medio de que al multiplicar resulte el mismo producto, ó sea el dividendo.

Luego, *multiplicando ó dividiendo el dividendo y el divisor por un mismo número no se altera el cociente;* porque si en virtud de la alteracion del dividendo debia resultar el cociente multiplicado ó dividido por aquel número, la alteracion del divisor viene á destruir el efecto, haciendo el cociente el mismo número de veces menor ó mayor, quedando asi ambas alteraciones compensadas.

CAPITULO II.

De los quebrados ó fracciones.

44. Se vió en los números 1 y 8 lo que es un quebrado, y qué idea debemos formarnos de él. —En un quebrado se distinguen siempre dos términos, *denominador* y *numerador*. El denominador indica *en cuántas partes iguales está dividida la unidad*, y el numerador *cuántas de esas partes se toman:* el conjunto de las partes que se toman constituye el quebrado.

Así pues, en el quebrado $\frac{3}{4}$, que se enuncia *tres cuartos*, 4 es el denominador, é indica que la unidad está dividida en 4 partes iguales; y 3 es el numerador, é indica que se han tomado tres de esas partes. Así tambien, $\frac{11}{12}$, que se enuncia *once dozavos*, espresa *once* partes de *doce* en que se supone dividida la unidad.

Se ha visto tambien (n.° 42) que un quebrado como $\frac{13}{15}$ equivale á 15.ª parte del *todo* espresado por 13; es decir, que *un quebrado puede tambien considerarse como el cociente de su numerador dividido por su denominador;* de modo que *trece veces la décima-quinta parte de la unidad*, ó *trece dividido por quince*, son espresiones idénticas.

45. De la definicion que acabamos de dar del numerador y denominador, se deducen evidentemente las consecuencias siguientes:

1.° *Si*, sin alterar el denominador de un quebrado, *se multiplica ó divide su numerador por un número entero cual-*

quiera, el nuevo quebrado será ese mismo número de veces mayor ó menor que el propuesto.

En efecto, cuando se multiplica el numerador por 2, 3, 4,... se toman 2, 3, 4,.... veces mas partes, y como estas son de la misma magnitud, resulta el nuevo quebrado 2, 3, 4,.... veces mayor. Sea la fraccion $\frac{6}{25}$: es claro que los quebrados $\frac{12}{25}$, $\frac{18}{25}$, $\frac{24}{25}$,.... son 2, 3, 4,.... veces mayores que el primero.

Al contrario, dividiendo el numerador por 2, 3, 4,.... se toman 2, 3, 4,.... veces menos partes; luego, etc.... Así, $\frac{3}{25}$, $\frac{2}{25}$,.... son quebrados respectivamente 2, 3,.... veces menores que el propuesto $\frac{6}{25}$.

2.° *Si*, sin alterar el numerador, *se multiplica ó divide el denominador por un número entero cualquiera, queda el quebrado dividido ó multiplicado por el mismo número.*

En efecto, cuando se multiplica el denominador por 2, 3, 4,.... se indica que la unidad está dividida en 2, 3, 4,.... veces mas partes, las cuales por consiguiente serán 2, 3, 4,.... veces mas pequeñas; y como se toman las mismas, el quebrado valdrá 2, 3, 4,.... veces menos.

Al contrario, si se divide el denominador por 2, 3, 4,... la unidad queda dividida en 2, 3, 4,.... veces menos partes iguales, que por lo tanto serán 2, 3, 4,.... veces mayores; y como se toman las mismas, el quebrado resultante debe ser 2, 3, 4,.... veces mayor que el propuesto.

3.° *El valor de un quebrado no se altera multiplicando ó dividiendo sus dos términos por un mismo número.*

En efecto, resulta de los dos primeros principios que el efecto de la alteracion del denominador queda destruido por el efecto de la alteracion del numerador, habiendo compensacion de este modo.

Por ejemplo, los quebrados $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{12}{16}$, $\frac{15}{25}$,.... son todos equivalentes al quebrado $\frac{3}{4}$, porque resultan de la multiplicacion de los dos términos de este, por 2, 3, 4, 5,.... Así, tambien el quebrado $\frac{24}{36}$ es igual á cada uno de los quebrados $\frac{12}{18}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{6}{9}$,.... porque resultan estos dividiendo por 2, 3, 4,.... los dos términos de aquel.

Estas proposiciones son análogas á los principios establecidos en el n.º 43 sobre la division de números enteros, y por consiguiente, deben considerarse como aplicacion de los mismos á los quebrados.

46. Como continuamente se está aplicando la tercera proposicion, creemos oportuno demostrarla directa é independientemente de las dos primeras.

Tomemos, por ejemplo, el quebrado $\frac{5}{8}$, y multipliquemos por 3 sus dos términos 5 y 8; tendremos $\frac{15}{24}$, y digo que este quebrado es equivalente al propuesto.

En efecto, teniendo antes la unidad dividida en *ocho* partes iguales, dividamos ahora cada *octava parte* en *tres* partes iguales, y tendremos la unidad dividida en *veinte y cuatro* partes iguales. Cada *octava* parte vale por tanto *tres veinticuatro-avos*, y *cinco* octavas partes valdrán *quince veinticuatro-avos*, de modo que los quebrados $\frac{5}{8}$ y $\frac{15}{24}$ valen exactamente lo mismo.

De la misma manera se demostraria que los quebrados $\frac{11}{12}$ y $\frac{55}{60}$ son iguales, porque el segundo resulta multiplicando por 5 los dos términos del primero.

Como recíprocamente se pasa del quebrado $\frac{15}{24}$ al quebrado $\frac{5}{8}$ tomando la *tercera* parte de cada uno de los términos de aquel, y tomando la *quinta* parte de los términos de $\frac{55}{60}$ se obtiene el quebrado $\frac{11}{12}$, puede concluirse que *un quebrado no* *muda de valor multiplicando ó dividiendo sus dos términos por un mismo número.*

Pasamos ahora á las diversas operaciones que pueden ejecutarse con los quebrados, al resolver cuestiones cuyos *datos* sean quebrados ó fraccionarios. Pero antes de esponer las cuatro operaciones fundamentales, debemos enseñar dos *transformaciones* de uso muy frecuente, particulares y propias del cálculo de quebrados.

Reduccion de los quebrados á un comun denominador.

47. El objeto de esta transformacion es *reducir á una misma especie ó á un mismo denominador, dos ó mas quebrados propuestos con denominadores diferentes.* A esto conduce de un modo muy sencillo el principio ya esplicado de que un quebrado no muda de valor aunque se multipliquen sus dos términos por un mismo número.

Sirvan de ejemplo los quebrados $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{7}$ *que tratamos de reducir á un comun denominador.*

Si multiplicamos los dos términos 3 y 4 del primero por 7 denominador del segundo, y los dos términos 5 y 7 del segundo por 4 denominador del primero, los quebrados propuestos se convierten respectivamente en $\frac{21}{28}$ y $\frac{20}{28}$.

Estos quebrados tienen el mismo valor que los propuestos, segun el principio del n.º 46; y además tienen iguales los denominadores, porque cada uno de ellos es el producto de los dos denominadores primitivos 4 y 7.

Sea ahora reducir á un comun denominador los quebrados $\frac{4}{7}, \frac{5}{8}, \frac{6}{11}$.

Multiplíquense los dos términos 4 y 7 del primero por 88, producto de los denominadores del segundo y tercero: despues multiplíquense los dos términos 5 y 8 del segundo por 77, producto de los denominadores del primero y tercero; y finalmente, los dos términos 6 y 11 del tercero por 56, producto de los denominadores del primero y segundo: con esto se obtendrán los nuevos quebrados $\frac{352}{616}, \frac{385}{616}, \frac{336}{616}$.

Estos quebrados tienen el mismo valor que los primitivos, y sus denominadores son iguales, porque cada uno de ellos es el producto de los tres denominadores 7, 8 y 11, con sola la diferencia de haberse multiplicado en diferente órden. (*Véanse* los n.os 25 y 28).

Regla general. *Para reducir un número cualquiera de quebrados á un comun denominador, multiplíquense sucesivamente los dos términos de cada uno por el producto efectuado de los denominadores de los demas.*

Hé aquí el modo de aplicar en la práctica la regla:

Sean los cinco quebrados $\frac{3}{8}, \frac{7}{11}, \frac{10}{13}, \frac{23}{25}$ y $\frac{29}{43}$.

Para mayor sencillez se dispone la operacion del modo siguiente:

$$\frac{3}{8},\quad \frac{7}{11},\quad \frac{10}{13},\quad \frac{23}{25},\quad \frac{29}{43},$$

$$153725,\quad 111800,\quad 94600,\quad 49192,\quad 28600,$$

$$\frac{461175}{1229800},\quad \frac{782600}{1229800},\quad \frac{946000}{1229800},\quad \frac{1131416}{1229800},\quad \frac{829400}{1229800}.$$

Despues de haber formado el producto de los cinco denominadores 8, 11, 13, 25 y 43, que dan 1229800, por denominador comun de los quebrados transformados, se divide dicho producto sucesivamente por cada uno de los denominadores particulares; y se obtienen los cinco *cocientes* 153725, 111800, 94600, 49192, 28600, que respectivamente se colocan debajo de los cinco quebrados propuestos: se multiplica despues el numerador de cada fraccion por el *cociente* que le corresponde, obteniéndose de este modo los numeradores de los nuevos quebrados, y quedando reducidos á un comun denominador.

Es fácil de comprender la razon de este procedimiento; pues siendo el número 1229800, el producto de los cinco denominadores, el cociente 153725 de su division por 8 espresa necesariamente el producto de los otros cuatro denominadores 11, 13, 25 y 43. Así tambien, siendo 111800 el cociente de la division de 1229800 por el segundo denominador 11, equivale al producto de los otros cuatro denominadores 8, 13, 25 y 43: lo mismo podria decirse respecto de los demas cocientes. Este medio además es sin contradiccion mas espedito que si para cada quebrado se efectuára el producto de los denominadores de los otros cuatro. Pero en realidad no es ventajoso sino cuando hay que reducir á un comun denominador mas de tres quebrados.

48. Hay un caso en que puede hacerse muy sencillamente la reduccion á un mismo denominador; y es *cuando el mayor de los denominadores puede dividirse exactamente por cada uno de los otros.*

Sirvan de ejemplo los quebrados

$$\frac{2}{3},\quad \frac{3}{4},\quad \frac{5}{6},\quad \frac{7}{12},\quad \frac{23}{36},$$
$$12,\quad 9,\quad 6,\quad 3,\quad 1,$$
$$\frac{24}{36},\quad \frac{27}{36},\quad \frac{30}{36},\quad \frac{21}{36},\quad \frac{23}{36}.$$

Es fácil ver que 36 puede dividirse exactamente por los otros cuatro denominadores 3, 4, 6 y 12. Se efectúan, pues, esas divisiones sucesivamente, y se escriben los cocientes 12, 9, 6 y 3 debajo de los cuatro primeros quebrados, y despues se multiplica el numerador de cada uno por el cociente que le corresponde, dejando intacto el quebrado $\frac{23}{36}$, y quedando así reducidos todos al comun denominador 36.

A veces, sin que el mayor denominador sea divisible exactamente por todos los demas, se advierte que *puede serlo su producto por* 2, 3, 4,....; en cuyo caso tambien hay simplificacion.

Sean los nuevos quebrados

$$\frac{3}{4},\quad \frac{7}{8},\quad \frac{11}{12},\quad \frac{13}{18},\quad \frac{17}{24},\quad \frac{25}{36},$$
$$18,\quad 9,\quad 6,\quad 4,\quad 3,\quad 2,$$
$$\frac{54}{72},\quad \frac{63}{72},\quad \frac{66}{72},\quad \frac{52}{72},\quad \frac{51}{72},\quad \frac{50}{72}.$$

El denominador 36 es divisible separadamente por 4, 12 y 18, y no lo es por 8 ni por 24: pero duplicándole, se obtiene

72, número evidentemente divisible por esos dos denominadores.

Esto supuesto, se forman los cocientes de la division de 72 por cada denominador, y se van colocando debajo de los quebrados respectivos: se multiplica luego el numerador de cada uno por el cociente que le corresponde, y todos resultan con el comun denominador 72.

Estas simplificaciones exigen cierto hábito; pero mas adelante (*cap.* 5.°) daremos el medio general de *reducir un número cualquiera de quebrados al mas simple denominador comun posible.*

Hé aquí algunas aplicaciones de la transformacion precedente:

49. Primera cuestion. *Se desea saber cuál es el mayor de los dos quebrados* $\frac{3}{5}$ *y* $\frac{7}{12}$.

Al pronto parece difícil responder, pues si por un lado está la unidad dividida en mas partes en el segundo quebrado, por otro toman en este mas partes su numerador 7, que en el primero su numerador 3. Desaparece la dificultad reduciéndolos á un comun denominador, pues es evidente que *de dos quebrados que tienen igual denominador es mayor el que tiene mayor numerador.*

Hecha la reduccion, resulta $\frac{36}{60}$ y $\frac{35}{60}$: luego el quebrado $\frac{3}{5}$ es el mayor y escede al otro únicamente en $\frac{1}{60}$.

Del mismo modo se conoceria que de los tres quebrados $\frac{4}{7}$, $\frac{6}{11}$, $\frac{8}{13}$, es el mayor $\frac{8}{13}$ y el menor $\frac{6}{11}$, porque reducidos á un comun denominador, se convierten en $\frac{572}{1001}$, $\frac{546}{1001}$, $\frac{616}{1001}$.

Tambien podrian reducirse los quebrados al mismo numerador (lo cual se haria, *multiplicando los dos términos de cada uno por el producto de los numeradores de los demas*); y entonces sería mayor el quebrado que tuviera menor denominador, porque tomándose el mismo número de partes, eran estas mas grandes. Pero el primer medio tiene la ventaja de dar á conocer al mismo tiempo las diferencias que existen entre cada dos quebrados.

SEGUNDA CUESTION. *¿Qué alteracion sufre un quebrado, añadiendo un mismo número á los dos términos?*

Sirva de ejemplo el quebrado $\frac{7}{12}$, á cuyos dos términos se añaden 6, resultando $\frac{13}{18}$.

Reduciendo ambos quebrados $\frac{7}{12}$ y $\frac{13}{18}$ á un comun denominador, se convierte el primero en $\frac{126}{216}$, y el segundo en $\frac{156}{216}$: luego el quebrado propuesto ha aumentado su valor; y el esceso está espresado por la diferencia $\frac{30}{216}$.

Para darnos cuenta de este *hecho* sin cálculo alguno, observemos que siendo la unidad igual á $\frac{12}{12}$, el esceso de la unidad sobre $\frac{7}{12}$ está espresado por $\frac{5}{12}$; y por igual razon el esceso de la unidad sobre $\frac{13}{18}$ está espresado por $\frac{5}{18}$. Los numeradores de estas dos diferencias son iguales; y así debia ser, porque habiéndose formado 18 y 13 por la adicion de 6 á los términos 12 y 7, ha de haber la misma diferencia entre los dos primeros que entre los dos segundos. Pero la diferencia $\frac{5}{18}$ es necesariamente menor que la diferencia $\frac{5}{12}$, porque el primer denominador es mas grande, siendo los numeradores iguales; luego el quebrado $\frac{13}{18}$ difiere menos de la unidad que el quebrado $\frac{7}{12}$, y es por consiguiente el primero mayor que el segundo.

Se concibe además que cuanto mayor sea el número añadido á los dos términos del quebrado $\frac{7}{12}$, tanto menor será la diferencia entre la unidad y el quebrado resultante, pues siendo siempre 5 el numerador de la diferencia, va creciendo el denominador; por consiguiente, cuanto mayor sea el número añadido á los dos términos de un quebrado, tanto mayor será el nuevo quebrado.

Pudiendo evidentemente aplicarse este mismo razonamiento á cualquier otro quebrado, puede concluirse que *si á los dos términos de un quebrado se añade un mismo número, el quebrado resultante es mayor que el propuesto, y es tanto mayor cuanto mayor es el número añadido.*

Por razon inversa, *un quebrado disminuye de valor cuando se quita un mismo número á sus dos términos.*

Hemos creido oportuno detenernos en pormenores sobre esta proposicion, á fin de impedir que los principiantes confundan esta circunstancia con el caso en que se *multiplican ó dividen por un mismo número los dos términos de un quebrado.* En este caso no se altera (n.° 46) el valor del quebrado, mientras que añadiendo ó quitando un mismo número, aumenta ó disminuye el quebrado.

Reduccion de un quebrado á menores términos.

50. Con frecuencia resultan del cálculo de los quebrados algunos cuyos términos son bastante grandes, y cuanto mayores son el numerador y el denominador, tanto mas trabajo cuesta formarse idea clara del valor del quebrado.

Por ejemplo, el quebrado $\frac{12}{15}$ indica que debe dividirse la unidad en 15 partes iguales, tomando 12 de ellas. Pero siendo 12 y 15 divisibles por 3, si estas divisiones se efectúan, resulta $\frac{4}{5}$, quebrado (n.° 46) equivalente al propuesto; y entonces ya para formarse idea del quebrado basta concebir la unidad dividida en 5 partes y tomar 4 de ellas; lo cual es mucho mas sencillo.

Luego cuando son de cierta magnitud los términos de una fraccion, es útil reducirla á otra cuyos términos sean menores.

El primer medio que se ocurre es dividir los dos términos por los números 2, 3, 4,.... mientras sea posible.

Sea, por ejemplo, *el quebrado* $\frac{108}{144}$ *el que se quiere reducir á términos menores.*

Es fácil ver que ambos términos son divisibles por 2: efectuando las divisiones, se obtiene por primer resultado $\frac{54}{72}$.

Aun son divisibles por 2 los términos de este nuevo quebrado; y dá por segundo resultado $\frac{27}{36}$.

Ensayando ahora la division por 3, se halla $\frac{9}{12}$, cuyos términos aun son divisibles por 3, y dan finalmente $\frac{3}{4}$, que es el valor del quebrado $\frac{108}{144}$ reducido á su menor espresion.

Este método es fácil y cómodo, pero no puede ahora generalizarse.

Hay otro medio de *reducir un quebrado á su espresion mas sencilla*, y consiste en determinar directamente el mayor número que á la vez divide á sus dos términos, ó en otras palabras, su *máximo comun divisor*.

51. Empecemos por establecer algunas nociones preliminares.

Un número se llama *múltiplo* de otro, cuando contiene á este un número entero de veces; es decir, cuando el primer número es exactamente divisible por el segundo.

Recíprocamente, el segundo número se llama *sub-múltiplo* ó *parte alicuota* ó *divisor* del primero.

Así, 24 es *múltiplo* de 6, porque 4 veces 6 son 24; recíprocamente 4 y 6 son *divisores* ó *sub-múltiplos* ó *partes alicuotas* de 24. Así, tambien 60 es *múltiplo* de 12, porque 5 veces 12 son 60; y recíprocamente 12 y 5 son *divisores* ó *sub-múltiplos* de 60.

Se llama número *primo* el que no es divisible sino por sí mismo y por la unidad (que es *divisor* de todo número). Así, 2, 3, 5, 7, 11, 13,...., son números *primos*; y no lo son 4, 6, 8, 9, 12,.... que admiten los divisores 2 ó 3, ó ambos.

Dos números se llaman *primos entre sí* cuando no tienen divisor alguno comun (fuera de la unidad); así, 4 y 9, 7 y 12, 12 y 25 son *primos entre sí;* 8 y 12 no son primos entre sí, porque á la vez son divisibles por 2 ó por 4.

Primer principio. *Todo número que divide exactamente* *á otro, divide exactamente á todo múltiplo de este segundo número.*

Por ejemplo, siendo 24 divisible por 8, y dando 3 de cociente, 5 veces 24 ó 120 dividido por 8, deberá dar (n.º 43) 5 veces 3 ó 15 de cociente. Así tambien, siendo 60 divisible por 12, y dando de cociente 5, 7 veces 60 ó 420, dividido por 12 debe dar de cociente 7 veces 5 ó 35.

SEGUNDO PRINCIPIO. *Si descompuesto un número en dos partes, son estas partes separadamente divisibles por otro número, el primero total será tambien divisible exactamente por el segundo.*

En efecto, debiendo ser el cociente del número total igual á la suma de los dos cocientes parciales, si estos son enteros, tambien lo será su suma, es decir, el cociente total.

TERCER PRINCIPIO. *Todo número que divide separadamente á* UNA SUMA *descompuesta en dos partes y á una de estas partes, divide tambien á la otra.*

Porque siendo el cociente total igual á la suma de los cocientes parciales, si uno de estos fuera entero y otro fraccionario, como el total es entero, resultaria que un *número entero* era igual á un *número misto* (n.º 1), lo cual es absurdo.

52. Esto supuesto, propongámonos determinar el MÁXIMO COMUN DIVISOR (n.º 50) *entre los números* 360 *y* 276.

Es por lo pronto evidente que el máximo comun divisor buscado no puede ser mayor que el menor número 276; y como 276 se divide á sí propio, resulta que si dividiera á 360, sería el máximo comun divisor de ambos.

Ensayando la division de 360 por 276, se halla el cociente 1 y el resíduo 84: luego 276 no es el máximo comun divisor. Pues ahora decimos que el máximo comun divisor entre 360 y 276 *es el mismo que existe entre el menor número* 276 *y* 84, *resíduo de la division.*

En efecto, debiendo dividir el comun divisor buscado al número 360 y á una de sus partes 276, debe dividir necesariamente á la otra parte 84 (n.º 51, *tercer principio*), de donde ya puede inferirse que el máximo comun divisor entre 360 y 276, no *puede ser mayor* que el de los números 276 y 84, puesto que debe dividirlos. En segundo lugar, puesto que el máximo comun divisor entre 276 y 84 divide á las dos partes del todo 360, debe dividir necesariamente á este último (n.º 51, *segundo principio*); y entonces, siendo divisor exacto de 360 y de 276, *no puede ser mayor que el máximo comun divisor* entre 360 y 276. Donde se ve que el máximo comun divisor entre 360 y 276, y el máximo comun divisor entre 276 y 84 no pueden ser uno mayor que otro; luego habrán de ser *iguales*.

Así, queda la cuestion reducida á buscar el máximo comun divisor entre 276 y 84, que forman un conjunto mas sencillo que 360 y 276.

Para esto razonemos con 276 y 84 como hicimos antes con los números primitivos; es decir, ensayemos la division de 276 por 84: si la division resulta exacta, será 84 el máximo comun divisor entre 276 y 84, y por consiguiente entre 360 y 276.

Efectuada la nueva division, resultan 3 de cociente y 24 de residuo: luego no es 84 el máximo comun divisor buscado. Pero por un razonamiento análogo al de arriba se probará que el máximo comun divisor entre 276 y 84 es el *número que existe entre el primer resíduo* 84 *y el segundo* 24.

Repitamos este razonamiento: debiendo el máximo comun divisor entre 276 y 84 dividir á 84, debe dividir necesariamente *á su múltiplo*, 3 veces 84 (n.° 51, *primer principio*); así, dividiendo *un todo* 276 y una de sus partes, 3 veces 84, debe dividir á la otra parte 24; luego el máximo comun divisor entre 276 y 84 *no puede ser mayor que el de* 84 *y* 24. Por otro lado, dividiendo el máximo comun divisor entre 84 y 24, ó 3 veces 84 y á 24, que son las partes de 276, divide necesariamente á 276: luego dividiendo á 84 y á 276 *no puede ser mayor que el máximo comun divisor de estos*. Luego el máximo comun divisor entre 276 y 84 y el máximo comun divisor entre 84 y 24 no pueden ser uno mayor que otro; luego son *iguales*.

Quedando ahora la cuestion reducida á buscar el máximo comun divisor entre 84 y 24, es menester dividir 84 por 24. Efectuada esta nueva division, se obtiene el cociente 3 y el resíduo 12: luego 24 no es el máximo comun divisor; pero como este máximo comun divisor es el mismo que existe entre 24 y 12, dividamos 24 por 12, lo cual nos dá el cociente exacto 2: luego 12 es el máximo comun divisor entre 24 y 12; y lo es por consiguiente tambien entre 84 y 24, entre 276 y 84, y entre 360 y 276. Luego finalmente 12 es *el máximo comun divisor pedido*.

En la práctica se dispone así la operacion:

	1	3	3	2
360	276	84	24	12
84	24	12	0	

Despues de haber dividido 360 por 276, obteniendo el cociente 1, que se coloca encima del divisor (y no debajo como de ordinario), y el resíduo 84, se escribe este resíduo á la derecha del número menor 276 y se divide 276 por 84; se obtiene un nuevo cociente 3, que se escribe encima del divisor 84, y un resíduo 24, que se coloca á la derecha del divisor; y así sucesivamente.

Regla general. *Para hallar el máximo comun divisor de dos números se divide el mayor por el menor, y si no queda resíduo, el menor es el máximo divisor buscado.*

Si queda resíduo se dividirá el número menor por el resíduo; y si la division es exacta, el primer resíduo será el máximo comun divisor.

Si de la segunda division queda resíduo, divídase el primer resíduo por el segundo; y continúese de este modo dividiendo por cada resíduo el resíduo precedente, hasta llegar á un cociente exacto; en cuyo caso el último divisor empleado será *el máximo comun de los números propuestos.*

Si el último divisor fuera la unidad, sería prueba de que los números dados eran *primos entre sí* (n.º 51), pues no tenian mas divisor comun que la *unidad.*

Recíprocamente, si dos números son *primos entre sí*, y se les aplica el procedimiento del máximo comun divisor, *se hallará necesariamente un resto final igual á* 1. Porque con arreglo á la naturaleza del procedimiento los resíduos van disminuyendo; y porque además no puede obtenerse un resíduo *cero* antes de obtenerle igual á la *unidad*, porque el divisor que diera el resíduo *cero* sería máximo comun divisor de los números dados, lo cual no puede ser siendo primos. Luego al cabo de cierto número de operaciones mas ó menos grande debe llegarse á un resíduo igual á la unidad.

53. Hé aquí nuevas aplicaciones del procedimiento.

Reducir el quebrado $\frac{592}{999}$ *á su espresion mas sencilla.*

Apliquemos á los dos números 592 y 999 el método que acabamos de esponer.

Despues de hallar el mayor número que los divida á los dos á un tiempo, efectuaremos las dos divisiones y obtendremos la fraccion pedida.

	1	1	2	5	999	37	592	37
999	592	407	185	37	259	27	222	16
407	185	37	0		00		00	

Resulta ser 37 el máximo comun divisor entre 999 y 592: dividiendo, pues, 999 y 592 por 37, se tiene $\frac{16}{27}$, que es equivalente á $\frac{592}{999}$, y está reducida á sus menores términos.

Sea, por segundo ejemplo, *el quebrado* $\frac{912}{3072}$.

	3	2	1	2	2
3072	912	336	240	96	48
336	240	96	48	0	

3072	48	912	48
192	64	432	19
00		00	

El máximo comun divisor es aquí 48; y dividiendo por 48 los dos términos del quebrado, resulta $\frac{19}{64}$, que es la espresion mas simple del quebrado propuesto.

54. *Sirva de último ejemplo el quebrado* $\frac{317}{873}$.

	2	1	3	15	1	1	2
873	317	239	78	5	3	2	1
239	78	5	28	2	1	0	
			3				

El método conduce en este ejemplo á un resíduo 1; lo cual prueba que 317 y 873 *son primos entre sí:* en este caso el quebrado se llama *irreducible*, porque no puede reducirse á una espresion mas sencilla dividiendo sus dos términos por un mismo número.

Advertencia. En la tercera operacion se obtuvo un resíduo 5 que es número *primo* (n.º 51); ahora bien, como 5 no divide al resíduo precedente 78, puede concluirse, sin ir mas lejos, que los dos términos del quebrado son *primos entre sí*. En efecto, se ha visto en la esposicion del método que el máximo comun divisor de dos números ha de dividir necesariamente al resíduo de cada division. Así, pues, siendo 5 número primo ha de suceder una de dos cosas; ó bien divide al resíduo precedente, y en ese caso es el máximo comun divisor, ó no le divide, y entonces ni 5 ni otro número, fuera de la unidad, puede ser divisor comun de los números propuestos.

En general, *cuando en el curso de las operaciones se llega á un resíduo que se conoce ser* NÚMERO PRIMO, *si este resíduo no divide al precedente, es señal cierta de que los números propuestos son primos entre sí; y es inútil seguir adelante.*

Volveremos otra vez (cap.º 5) á la investigacion del máximo comun divisor, que es una de las operaciones mas importantes de la Aritmética.

Pasemos ahora á las cuatro operaciones fundamentales con los quebrados.

SUMA DE QUEBRADOS.

55. La suma de quebrados tiene por objeto *hallar un número que valga él solo tanto como varios quebrados juntos.*

Pueden ocurrir dos casos: ó los quebrados que se ván á sumar son de la misma especie, es decir, tienen el mismo denominador, ó son de especies distintas. En el primer caso, *se suman los numeradores y se pone á la suma por denominador el denominador comun.* En el segundo, *se empieza por reducir los quebrados á un comun denominador* (n.º 47), y queda la cuestion reducida á la anterior.

Así, la suma de los quebrados $\frac{2}{11}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{4}{11}$, es igual á $\frac{9}{11}$.

La suma de los quebrados $\frac{5}{23}$, $\frac{2}{23}$, $\frac{7}{23}$, $\frac{4}{23}$, es igual á $\frac{18}{23}$.

Sea ahora sumar los tres quebrados $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$.

$$\begin{array}{ccc} 32 & 24 & 12 \\ \hline 64 & 72 & 84 \end{array}$$

$$\frac{64}{96},\ \frac{72}{96},\ \frac{84}{96}.$$

Despues de haberlos reducido á un comun denominador por la regla del n.° 47, se hace la suma de los numeradores, lo cual dá 220; se le pone el denominador 96, y resulta la suma $\frac{220}{96}$.

56. Este ejemplo último conduce á un resultado $\frac{220}{96}$ que necesita esplicarse.

Así como es necesario tomar dos *medios*, tres *tercios*, cuatro *cuartos* para formar una unidad, así tambien se necesitan para formarla noventa y seis *noventa y seis-avos:* luego cuantas veces contenga 220 á 96, otras tantas unidades habrá en $\frac{220}{96}$. Y como dividiendo 220 por 96 se obtiene 2 por cociente y 28 de resíduo, resulta que $\frac{220}{96}$ es un número fraccionario (n.° 1) compuesto de 2 unidades mas un quebrado $\frac{28}{96}$ ó $\frac{7}{24}$ (quitando el factor 4 á los dos términos).

En general, siempre que se llega á un resultado de forma fraccionaria, con el numerador mayor que el denominador, *para sacar los enteros en él contenidos, se dividirá el numerador por el denominador;* el cociente representa los *enteros* y el resíduo es el numerador de un *quebrado* que debe agregarse al entero.

Por este medio se verá que $\frac{17}{12}$ equivale á $1\frac{5}{12}$; $\frac{153}{15}$ á $10\frac{3}{15}$ ó á $10\frac{1}{5}$; $\frac{654}{89}$ á $7\frac{31}{89}$.

Recíprocamente, cuando se tiene un entero junto con un quebrado, es decir, un número *misto*, puede convertirse en fraccionario, segun muchas veces se necesita, *multiplicando* *el entero por el denominador, añadiendo al producto el numerador, y poniendo á la suma por denominador el del quebrado.*

Por ejemplo, $3\,\frac{2}{5}$ equivale á $\frac{3 \text{ veces } 5}{5}$ *mas* $\frac{2}{5}$, ó sean $\frac{17}{5}$; $11\,\frac{7}{12}$ equivale á $\frac{132}{12}$ *mas* $\frac{7}{12}$, ó sean $\frac{139}{12}$; $8\,\frac{17}{24}$ equivale á $\frac{209}{24}$.

RESTA DE QUEBRADOS.

57. La resta de quebrados tiene por objeto *hallar el esceso de un quebrado mayor sobre otro menor.*

Si los dos quebrados tienen el mismo denominador, *se resta el numerador menor del mayor, y á la diferencia se pone por denominador el denominador comun.* Si no tienen el mismo denominador, *se reducen á él y se procede despues como en el caso anterior.*

Así, sea por ejemplo restar $\frac{5}{12}$ de $\frac{11}{12}$: quedarán $\frac{6}{12}$ ó $\frac{1}{2}$: y restando $\frac{7}{24}$ de $\frac{17}{24}$, quedan $\frac{10}{24}$ ó $\frac{5}{12}$.

Tratemos ahora de restar $\frac{2}{3}$ de $\frac{7}{8}$.

Estos quebrados equivalen respectivamente á $\frac{16}{24}$ y $\frac{21}{24}$; y su diferencia es $\frac{5}{24}$. Del mismo modo se averigua que restando $\frac{13}{17}$ de $\frac{19}{20}$, quedan $\frac{63}{340}$.

Puede ocurrir restar un *misto* de otro.

$$\text{Por ejemplo, } \textit{del número fraccionario } 13\,\frac{3}{4}\ldots\frac{39}{52}\ldots\frac{91}{52}$$

$$\textit{nos proponemos restar el número } 5\,\frac{11}{13}\ldots\ldots\ldots\frac{44}{52}$$

$$7\,\frac{47}{52}.$$

Para efectuar esta operacion se empieza por reducir los dos quebrados á un comun denominador, resultando $\frac{39}{52}$ de la primera y $\frac{44}{52}$ de la segunda. Pero como no puede restarse $\frac{44}{52}$ de $\frac{39}{52}$, se añade (n.º 14) á este último quebrado *una unidad*, que se reduce á su especie, convirtiéndose entonces en $\frac{91}{52}$ (n.º 56, *reciproc.*), del cual se resta el $\frac{44}{52}$, obteniéndose la diferencia $\frac{47}{52}$. Pasando á la resta de los enteros, se aumenta *una unidad* al sustraendo, y se dice: de 6 á 13 van 7: por consiguiente el resultado pedido es $7\,\frac{47}{52}$.

58. Hé aquí un ejemplo en que se hallan reunidas la suma y la resta de los números mistos.

Un comerciante de paños ha vendido de una pieza que tenia 30 *metros y* $\frac{7}{8}$, *primero un pedazo de* $7^{\text{m.}}\,\frac{3}{4}$ *despues otro de* $9^{\text{m.}}\,\frac{2}{3}$, *y finalmente* $11^{\text{m.}}\,\frac{5}{12}$: *desea saber cuántos metros le quedan de la pieza.*

Hará primero la *suma* de las tres ventas, y luego restará esa suma de los $30^{\text{m.}}\,\frac{7}{8}$: el resultado de la resta le dirá los metros de paño que le quedan.

Para mayor sencillez se dispone la operacion del modo siguiente:

$$
\begin{array}{rlcr}
 & \quad 12 & & \\
 & \overline{} & & \\
7^{m.} & \dfrac{3}{4}\ldots 3\ldots 9 & & \\
9 & \dfrac{2}{3}\ldots 4\ldots 8 & & \\
11 & \dfrac{5}{12}\ldots 1\ldots 5 & & \\
 & \qquad\quad \overline{22} & & \\
\hline
 & 28\dfrac{10}{12} & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcr}
30^{m.} & \dfrac{7}{8}\ldots\ldots\ldots & \dfrac{21}{24} \\
28 & \dfrac{10}{12}\ldots\ldots\ldots & \dfrac{20}{24} \\
\hline
 & 2\,\dfrac{1}{24} &
\end{array}
$$

Despues de haber colocado unos sobre otros los tres sumandos, se observa que los quebrados no tienen el mismo denominador y pueden reducirse al denominador comun 12. Se escribe este número á la derecha, un poco mas alto que los quebrados, y se subraya. Despues se escriben debajo del 12 y respectivamente en la línea horizontal de cada quebrado los cocientes 3, 4 y 1 de la division de 12 por cada denominador: se multiplica cada numerador por su respectivo cociente, y se obtiene 9, 8 y 5: se suman estos tres nuevos numeradores, que dan 22, y por consiguiente la suma de los tres quebrados propuestos es $\frac{22}{12}$, ó $1\frac{10}{12}$. Se escribe el $\frac{10}{12}$ debajo de los tres quebrados y se lleva el 1 para sumarlo con los enteros del modo ordinario. Así, resulta $28\frac{10}{12}$, suma total de metros vendidos.

Escríbese esta suma debajo de $30\frac{7}{8}$, se hace la sustraccion como antes se ha visto, observando para simplificar que los quebrados pueden reducirse al comun denominador 2 veces 12 ó 24.

Así, se ve que quedan de la pieza 2 metros y $\frac{1}{24}$, lo que facilmente puede comprobar el comerciante midiendo el *retal* que le queda.

MULTIPLICACION DE QUEBRADOS.

59. La multiplicacion tiene en general por objeto (n.º 9) *dados dos números, hallar un tercero que sea respecto del primero lo que el segundo es respecto de la unidad.*

Esto supuesto, en la multiplicacion de quebrados se distinguen TRES casos principales. Á saber:

1.º MULTIPLICAR UN QUEBRADO POR UN ENTERO.

Sea, por ejemplo, multiplicar $\frac{7}{12}$ *por* 5.

Segun la definicion de arriba, conteniendo *cinco veces* á la unidad el multiplicador 5, deberá el producto equivaler á 5 veces $\frac{7}{12}$. Pero se vió (n.º 45) que un quebrado se hace 5 veces mayor multiplicando su numerador por 5; luego $\frac{5 \text{ veces } 7}{12}$ ó $\frac{35}{12}$ será el producto pedido.

Luego, *para multiplicar un quebrado por un entero se multiplica el numerador del quebrado por el entero, dejando el mismo denominador.*

El producto $\frac{35}{12}$ equivale á $2\,\frac{11}{12}$, como puede verse sacando los enteros que contiene el número fraccionario (n.º 56).

Del mismo modo se veria que el producto de $\frac{13}{24}$ por 29 es igual á $\frac{377}{24}$ ó á $15\,\frac{17}{24}$.

Sea ahora multiplicar $\frac{11}{18}$ *por* 9. Siguiendo la regla, resulta el producto $\frac{99}{18}$, ó sacando los enteros, $5\,\frac{9}{18}$, ó $5\,\frac{1}{2}$.

Este resultado pudiera haberse obtenido mas sencillamente; pues para multiplicar $\frac{11}{18}$ por 9, se puede (n.º 45) en lugar de multiplicar el numerador por 9, dividir el denominador por 9, lo cual dá $\frac{11}{2}$ ó $5\,\frac{1}{2}$.

Para que sea posible este segundo modo de operar es menester que el denominador sea divisible por el multiplicador; pero esto no siempre es posible, mientras la regla antes dada es aplicable en todos los casos: solo el uso puede hacer familiares estas simplificaciones.

2.° MULTIPLICAR UN ENTERO POR UN QUEBRADO.

Sea multiplicar 12 *por* $\frac{4}{7}$.

Siendo en este caso el multiplicador $\frac{4}{7}$ equivalente á 4 veces la *séptima parte* de la unidad, el producto habrá de equivaler á 4 veces la séptima parte de 12. Pero la séptima parte de 12 es (n.° 44) $\frac{12}{7}$, y para tomar este número 4 veces, ó tener un número 4 veces mayor que $\frac{12}{7}$, basta (n.° 45) multiplicar el numerador por 4; luego haciéndolo así tendremos $\frac{48}{7}$ ó $6\frac{6}{7}$, que será el producto pedido.

Luego, *para multiplicar un entero por un quebrado basta multiplicar el entero por el numerador y poner al producto por denominador el del quebrado:* en seguida pueden sacarse los enteros si los hay.

Así, el producto de 29 por $\frac{7}{8}$ es igual á $\frac{203}{8}$ ó á $25\frac{3}{8}$. El producto de 24 por $\frac{5}{6}$ es igual á $\frac{120}{6}$ ó á 20; resultado que tambien se hallaria dividiendo primero 24 por 6 y multiplicando por 5 el cociente 4. Pero repetimos que no siempre son posibles semejantes simplificaciones.

3.° MULTIPLICAR UN QUEBRADO POR OTRO.

Sea multiplicar $\frac{3}{4}$ *por* $\frac{5}{8}$.

El razonamiento es análogo al del caso precedente; puesto que el multiplicador $\frac{5}{8}$ equivale á 5 veces la *octava parte* de la unidad, el producto debe ser tambien 5 veces la octava parte del multiplicando $\frac{3}{4}$: para tomar la octava parte de $\frac{3}{4}$, es menester (n.º 45) multiplicar el denominador por 8, lo cual dá $\frac{3}{32}$; y para tomar 5 veces esta octava parte, es menester multiplicar por 5 su numerador, lo cual dá $\frac{15}{32}$, que es el producto pedido.

Luego, *para multiplicar un quebrado por otro, se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador, poniendo el segundo producto por denominador del primero.*

Así, el producto de $\frac{7}{12}$ por $\frac{5}{6}$ es $\frac{35}{72}$. El producto de $\frac{8}{15}$ por $\frac{3}{4}$ es igual á $\frac{24}{60}$, ó reduciendo, á $\frac{2}{5}$.

60. En los dos últimos casos *el producto es siempre menor que el multiplicando;* y así debia ser, porque la operacion se reduce á tomar del multiplicando la parte indicada por el *quebrado multiplicador.*

61. Finalmente, uno ó ambos factores pueden ser *mistos*, pero sus varios casos se reducen facilmente á alguno de los anteriores.

Sea, por ejemplo, multiplicar $7\frac{2}{3}$ *por* $5\frac{7}{8}$.

Estos números reducidos á fraccionarios (n.º 56) equivalen respectivamente á $\frac{23}{3}$ y $\frac{47}{8}$; efectuando la multiplicacion por la regla de arriba, se obtiene el producto $\frac{1081}{24}$, ó sacando los enteros, $45\frac{1}{24}$.

Tambien podria efectuarse por partes la multiplicacion; es decir, multiplicar primero 7 por 5, $\frac{2}{3}$ por 5, 7 por $\frac{7}{8}$ y $\frac{2}{3}$ por $\frac{7}{8}$, sumando despues los *cuatro* productos; pero sería mucho mas larga la operacion.

DIVISION DE QUEBRADOS.

62. La division tiene por objeto (n.º 29): *dado un producto de dos factores y uno de estos, determinar el otro.* De esta definicion resulta evidentemente como de la de la multiplicacion (n.º 59) que el primer número, llamado *dividendo*, es respecto del tercero, llamado *cociente*, como el segundo, llamado *divisor*, es respecto de la unidad.

Esto supuesto, en la division de quebrados ocurren TRES casos principales como en la multiplicacion. A saber:

1.º DIVIDIR UN QUEBRADO POR UN ENTERO.

Sea, por ejemplo, dividir $\frac{5}{7}$ *por* 6.

Siendo el divisor 6 igual á 6 veces la unidad, se infiere que el dividendo $\frac{5}{7}$ debe valer 6 veces el cociente buscado; ó recíprocamente, que este cociente equivale á la sesta parte del dividendo $\frac{5}{7}$. Pero la *sesta* parte de un quebrado se toma (n.º 45) multiplicando por 6 su denominador· multiplicando, pues, por 6 el denominador 7, se obtendrá $\frac{5}{42}$, que será el cociente pedido.

Luego, *para dividir un quebrado por un entero, se multiplica el denominador del quebrado por el entero, dejando el mismo numerador.*

Así, $\frac{11}{12}$ dividido por 8 dá $\frac{11}{96}$ por cociente: $\frac{23}{30}$ dividido por 12 dá $\frac{23}{360}$.

El cociente de $\frac{18}{25}$ por 6 es $\frac{18}{150}$; pero esta division puede tambien efectuarse tomando la sesta parte del numerador, lo cual dá $\frac{3}{25}$, resultado equivalente al primero simplificado por 6, factor comun á ambos términos.

2.º DIVIDIR UN ENTERO POR UN QUEBRADO.

Sea dividir 12 *por* $\frac{7}{9}$.

De ser el divisor $\frac{7}{9}$ igual á 7 veces la *novena parte* de la unidad, se infiere que el dividendo 12 ha de ser 7 veces la novena parte del cociente buscado. Luego tomando la séptima parte de 12, que es $\frac{12}{7}$, se tendrá la novena del cociente buscado; y para obtener el cociente total bastará tomar 9 veces $\frac{12}{7}$, lo cual se hace multiplicando por 9 su numerador: hecho así, resulta $\frac{9 \text{ veces } 12}{7}$ ó $\frac{108}{7}$, y sacando los enteros, $15\frac{3}{7}$, que es el cociente.

Luego, *para dividir un entero por un quebrado, se multiplica el entero por el denominador y se parte el producto por el numerador, sacando los enteros si los hay.*

Observemos que tomar la 7.ª parte de 12 y multiplicar el resultado por 9, equivale á multiplicar 12 por $\frac{9}{7}$: así podrá tambien decirse que *para dividir un entero por un quebrado, se multiplicará el entero por el quebrado invertido.* (Véase el n.º 59, 2.º)

3.º Dividir un quebrado por otro quebrado.

Sea, por ejemplo, dividir $\frac{3}{5}$ *por* $\frac{8}{11}$.

El razonamiento es parecido al anterior. Siendo el divisor $\frac{8}{11}$ igual á 8 veces la 11.ª parte de la unidad, el dividendo $\frac{3}{5}$ debe tambien ser igual á 8 veces la 11.ª parte del cociente; luego la 8.ª parte de $\frac{3}{5}$, ó $\frac{3}{40}$, es la 11.ª del cociente; y 11 veces $\frac{3}{40}$, ó $\frac{33}{40}$, es el cociente pedido.

Luego, *para dividir un quebrado por otro, se multiplica el numerador del quebrado dividendo por el denominador del quebrado divisor, y el denominador de aquel por el numerador de este, poniendo despues el primer producto por numerador y el segundo por denominador;* ó mas simplemente, *se multiplica el quebrado dividendo por el quebrado divisor invertido.* (Véase el n.º 59, 3.º)

Así, $\frac{3}{4}$ dividido por $\frac{5}{7}$ equivale á $\frac{3}{4}$ multiplicado por $\frac{7}{5}$, y dá por resultado $\frac{21}{20}$, ó $1\frac{1}{20}$.

Así tambien, $\frac{23}{30}$ dividido por $\frac{13}{15}$ equivale á $\frac{23}{30}$ multiplicado por $\frac{15}{13}$, y dá por resultado $\frac{345}{390}$, ó sea $\frac{23}{26}$ (porque 15 es factor comun á los dos términos).

En fin, *si hubiéramos de dividir un misto por otro misto*, se reducirian ambos á fraccionarios y se operaria como en la division de quebrado por quebrado.

Sirva de ejemplo dividir $12\frac{3}{4}$ *por* $6\frac{2}{3}$.

Equivalen estos mistos respectivamente á $\frac{51}{4}$ y $\frac{20}{3}$; y efectuando como antes la division, resulta el cociente $\frac{153}{80}$, ó $1\frac{73}{80}$.

Así tambien, $4\frac{7}{11}$ dividido por $15\frac{5}{8}$ dá por cociente $\frac{408}{1375}$.

63. *Advertencia.* Siempre que en la division *es el divisor un quebrado, el cociente es mayor que el dividendo;* porque el cociente procede entonces de la multiplicacion del dividendo por el *divisor invertido*, que viene á ser mayor que la unidad á consecuencia de la inversion.

64. Apliquemos á algunos problemas las reglas de la multiplicacion y division de los quebrados.

I. *Costando á* $47\frac{2}{5}$ *reales el metro de cierta tela, se desea saber el valor de* 12 *metros* $\frac{7}{8}$.

Puesto que un solo metro cuesta $47^{\text{rs.}}\frac{2}{5}$, es claro que $12^{\text{m.}}\frac{7}{8}$ deberán costar 12 veces los $47^{\text{rs.}}\frac{2}{5}$, mas $\frac{7}{8}$ de $47^{\text{rs.}}\frac{2}{5}$; es decir, que para averiguar el valor pedido es menester multiplicar $47\frac{2}{5}$ por $12\frac{7}{8}$; el producto será en francos el precio buscado.

Pero $47\frac{2}{5}$ multiplicado por $12\frac{7}{8}$ equivale á $\frac{237}{5}$ multiplicado por $\frac{103}{8}$, y dá por producto $\frac{24411}{40}$, ó sacando los enteros, $610\frac{11}{40}$. Luego el precio pedido es $610^{rs.}\frac{11}{40}$.

Para hacer la prueba se podria dividir $610\frac{11}{40}$ por $12\frac{7}{8}$, y deberia resultar $47\frac{2}{5}$; pero es mas fácil (n.º 43) duplicar el $47\frac{2}{5}$ y tomar la mitad de $12\frac{7}{8}$.

El duplo de $47\frac{2}{5}$ es $94\frac{4}{5}$; la mitad de $12\frac{7}{8}$ es $6\frac{7}{16}$.

Ahora bien, $94\frac{4}{5}$ multiplicado por $6\frac{7}{16}$ equivale á $\frac{474}{5}$ multiplicado por $\frac{103}{16}$, y dá por producto $\frac{48822}{80}$, ó sacando los enteros, $610\frac{22}{80}$, y simplificando, $610\frac{11}{40}$.

II. *Compra uno 23 metros y* $\frac{5}{12}$ *de una tela y le cuestan 745 reales* $\frac{13}{20}$; *se desea saber á cómo le cuesta el metro de la tela.*

Si siendo conocido el precio del metro le multiplicáramos por $23\frac{5}{12}$, deberíamos obtener $745^{rs.}\frac{13}{20}$: luego inversamente para obtener el precio pedido deberemos dividir $745\frac{13}{20}$ por $23\frac{5}{12}$.

Dividiendo, pues, $745\frac{13}{20}$ por $23\frac{5}{12}$, ó lo que es igual,

$\frac{14913}{20}$ por $\frac{281}{12}$, se obtiene por cociente $\frac{12 \text{ veces } 14913}{20 \text{ veces } 281}$ ó $\frac{178956}{5620}$; de donde sacando los enteros resulta 31 $\frac{4736}{5620}$.

Así, el precio del metro es 31 reales mas $\frac{4736}{5620}$ de real.

Para comprobarlo basta duplicar los dos términos de la division (n.º 43): el cociente debe ser el mismo.

El duplo de 745 $\frac{13}{20}$ es 1491 $\frac{13}{10}$; el duplo de 23 $\frac{5}{12}$ es 46 $\frac{5}{6}$.

Dividiendo 1491 $\frac{13}{10}$ por 46 $\frac{5}{6}$, ó $\frac{14913}{10}$ por $\frac{281}{6}$, resulta por cociente $\frac{89478}{2810}$, ó sacando los enteros, 31 $\frac{2368}{2810}$.

Esta fraccion es la misma $\frac{4736}{5620}$ que antes se obtuvo, despues de simplificar sus términos por el factor comun 2.

DE LOS QUEBRADOS DE QUEBRADOS.

65. A la multiplicacion de los quebrados va unida otra especie de operacion, conocida bajo el nombre de *regla de los quebrados de quebrados*.

Para dar idea clara de esta operacion, supongamos primero que de la fraccion $\frac{5}{7}$ haya de tomarse una parte indicada por $\frac{2}{3}$; ó en otras palabras, supongamos que *se quieren tomar los* $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{5}{7}$.

Como, para resolver esta cuestion, es menester tomar dos veces la tercera parte de $\frac{5}{7}$, resulta que bastará (n.º 57) multiplicar $\frac{5}{7}$ por $\frac{2}{3}$, lo cual se hace (n.º 59) *multiplicando numerador por numerador y denominador por denominador*: así, resultará que los $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{7}$ son $\frac{10}{21}$.

Supongamos ahora que del nuevo quebrado $\frac{10}{21}$ queramos tomar una parte indicada por $\frac{8}{13}$, en cuyo caso la cuestion tendrá realmente por objeto *tomar los* $\frac{8}{13}$ *de los* $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{5}{7}$.

Para obtener ahora los $\frac{8}{13}$ de $\frac{10}{21}$, es menester multiplicar entre sí los numeradores y denominadores respectivamente; luego los $\frac{8}{13}$ de los $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{7}$ son $\frac{80}{273}$.

Aun se puede si se quiere tomar los $\frac{3}{11}$ de $\frac{80}{273}$, es decir, multiplicar $\frac{80}{273}$ por $\frac{3}{11}$, y el nuevo resultado $\frac{240}{3003}$ representará los $\frac{3}{11}$ de los $\frac{8}{13}$ de los $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{7}$.

Propongámonos por segundo ejemplo *tomar los* $\frac{2}{3}$ *de los* $\frac{3}{4}$ *de los* $\frac{5}{8}$ *de los* $\frac{6}{7}$ *de* 12.

Para tomar primero los $\frac{6}{7}$ de 12, multiplicaremos 12 por $\frac{6}{7}$, lo cual equivale á $\frac{72}{7}$.

Para tomar despues los $\frac{5}{8}$ de los $\frac{6}{7}$ de 12, que es tomar los $\frac{5}{8}$ de $\frac{72}{7}$, multiplicaremos $\frac{72}{7}$ por $\frac{5}{8}$, y tendremos $\frac{360}{56}$.

Tomar los $\frac{3}{4}$ de los $\frac{5}{8}$ de los $\frac{6}{7}$ de 12, equivale á tomar los $\frac{3}{4}$ de $\frac{360}{56}$ ó á multiplicar $\frac{360}{56}$ por $\frac{3}{4}$, lo cual dá $\frac{1080}{224}$.

En fin, para tener los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{3}{4}$ de los $\frac{5}{8}$ de los $\frac{6}{7}$ de 12, basta tomar los $\frac{2}{3}$ de $\frac{1080}{224}$, ó multiplicar $\frac{1080}{224}$ por $\frac{2}{3}$; con lo cual se obtiene $\frac{2160}{672}$.

Sacando los enteros de este resultado se tiene $3\,\frac{144}{672}$, ó simplificando el quebrado, $3\,\frac{3}{14}$.

A poco que se examine la marcha seguida en ambos ejemplos, se ve que *para tomar quebrados de quebrados es menester multiplicar entre sí los numeradores y lo mismo los denominadores, poniendo el segundo producto por denominador al primero*. Si se han de tomar quebrados de quebrados de un entero, como en el ejemplo segundo, basta poner al entero en forma de quebrado con la unidad por denominador, y aplicar la regla acabada de fijar.

Problema. *Se preguntó á un aritmético qué hora era, y respondió: los $\frac{3}{4}$ de los $\frac{5}{6}$ de los $\frac{7}{12}$ de los $\frac{6}{7}$ de 24 horas.—¿Qué hora era?*

Para resolver esta cuestion escríbanse en una línea horizontal todos los numeradores, comprendiendo el entero, y en otra debajo todos los denominadores.

$$\begin{array}{ccccc} 3, & 5, & 7, & 6, & 24 \\ 4, & 6, & 12, & 7, & 1 \end{array}$$

Hecho esto, hágase el producto de los números de la primera línea y el de los de la segunda, y divídase el primero por el segundo: así, se obtiene $\frac{15120}{2016}$; sacando los enteros resulta $7\,\frac{1008}{2016}$, y simplificando el quebrado, $7\,\frac{1}{2}$. Luego eran las $7\,\frac{1}{2}$.

Se puede simplificar de antemano la operacion observando en las líneas de números que debiendo 7 ser factor comun al producto de los numeradores y al de los denominadores, nada impide *suprimirle antes de efectuar las multiplicaciones*; lo mismo sucede con el factor 6 por una parte y con el factor 12 por otra, que hallándose en el número de los denominadores, se encuentra tambien en el 24: finalmente, tambien se puede suprimir el factor 2, que siendo el cociente de 24 por 12, se halla en el denominador 4.

Hecha la supresion de todos esos factores, resulta $\frac{3 \text{ veces } 5}{2}$ ó $\frac{15}{2}$ ó $7\frac{1}{2}$ como antes.

Pero esta clase de simplificaciones exigen mucha práctica y cuidado, mientras que la regla ante-dicha es general y conduce al mismo resultado.

Otras aplicaciones. Los $\frac{2}{3}$ *de los* $\frac{3}{4}$ de un número son los $\frac{6}{12}$ ó sea la *mitad* del mismo. El *tercio del quinto* de un número es igual á $\frac{1}{15}$ de dicho número. La *mitad* de los $\frac{3}{4}$ son $\frac{3}{8}$, etc.

66. *Observacion general sobre los quebrados.* Resulta evidentemente de la naturaleza de los procedimientos seguidos en el cálculo de los quebrados, que las cuatro operaciones fundamentales efectuadas con ellos, á saber, suma, resta, multiplicacion y division, se reducen en último análisis á operaciones de la misma especie ejecutadas con números enteros.

Así, por ejemplo, la suma y la resta de quebrados, son la suma y la resta de sus numeradores, así que se les ha dado un denominador comun.

La multiplicacion se efectúa por la multiplicacion de los numeradores y denominadores entre sí respectivamente; y la division se refiere á la multiplicacion *despues de haber invertido el quebrado divisor.*

De esto puede concluirse que los principios establecidos en los n.^{os} 25.... 28, sobre la multiplicacion de los números enteros son igualmente aplicables á los quebrados, es decir, que 1.º *multiplicar un quebrado por el producto de otros muchos, equivale á multiplicar el primero sucesivamente por cada uno de los factores del producto;* 2.º *el producto de dos ó mas quebrados no varía, cualquiera que sea el órden en que se efectúe la multiplicacion.*

Finalmente pueden aplicarse á los quebrados todas las proposiciones establecidas en el n.º 43 sobre las variaciones que esperimenta el producto de una multiplicacion ó el cociente de una division, en virtud de las variaciones hechas en uno de los términos de la misma operacion.

CAPITULO III.

De los números complejos ó denominados.

67. Este capítulo y el siguiente no son en cierto modo mas que una continuacion ó estension del segundo, pues solo comprenden aplicaciones de la teoría general de los quebrados á cuestiones que consideran quebrados de una especie particular.

La teoría de los *números complejos*, que va á ocuparnos ahora, ha perdido mucho de su utilidad despues de establecido el sistema decimal de pesos y medidas (*). Sin embargo, hemos creido oportuno esponerla con toda la estension acostumbrada en las obras antiguas, porque la consideramos aptísima para acostumbrar á los jóvenes á la consideracion de las fracciones y darles el hábito importantísimo del cálculo (**). Además, la complicacion misma de las operaciones necesarias en esta teoría servirá para hacer resaltar mas las ventajas del nuevo sistema de pesos y medidas.

Ya se vió (n.º 8) que para valuar las cantidades menores que la *unidad principal*, se concibe esta unidad dividida en cierto número de partes iguales que se consideran como nuevas *unidades*. Pero á fin de hacer los cálculos mas cómodos, en vez de subdividir de pronto la unidad en muchas partes iguales,

---

(*) Así, dice el autor hablando de Francia, nosotros aun debemos hablar en futuro en este punto, pues aun no tenemos establecido el sistema decimal de pesos y medidas, á pesar de haberse reconocido su inmensa utilidad y decretado su enseñanza.

(**) Hay otra razon fundada en la consideracion de las medidas estrangeras, la division del tiempo, etc.

se divide solo al principio en unas cuantas, despues estas en otras, y estas en otras, y así sucesivamente segun los casos. Así es como en Francia la antigua *libra* se subdividia en 20 partes iguales llamadas *sueldos*, y cada sueldo en 12 partes iguales llamadas *dineros*.

Cada arte dividia á su modo la unidad principal que escogia (*). A continuacion ponemos las principales unidades y subdivisiones de nuestro pais.

68. Cuadro de las unidades, divisiones y subdivisiones de medidas, pesos y monedas españolas.

MONEDAS.

Monedas efectivas de cobre.

1 ochavo.	2 maravedís.
1 cuarto.	4 maravedís.
2 cuartos.	8 maravedís.

Monedas efectivas de plata.

1 real de vellon.	34 maravedís.
1 media peseta.	2 reales de vellon.
1 peseta.	4 reales de vellon.
1 medio duro.	10 id.
1 duro ó peso fuerte. . .	20 id.

Además de esta moneda hay la llamada *columnaria*, y consta de las piezas siguientes:

1 peseta columnaria.	5 reales vellon.
1 media peseta columnaria. .	2 id., 17 mrs.
1 real columnario.	1 id., $8^1/_2$ id.

Moneda de oro efectiva.

1 escudito.	20 rs. vn.

(*) Para saber la historia y el orígen de todas las medidas francesas véase la obra de M. Saigey, titulada *Tratado de Metrologia antigua y moderna*.

1 escudo.	40 rs. vn.
1 doblon de á 2 escudos.	80 rs. vn.
1 doblon de á 4 escudos ó media onza.	160 rs. vn.
1 doblon de á 8 escudos ú onza de oro.	320 rs. vn.

Además hay otras irregulares, y son las siguientes:

1 escudito de oro anterior al año 1785 vale.	21 rs., $8^1/_2$ mrs.
1 onza de oro anterior al año 1772. . . .	321 rs., 6 mrs.

Por real decreto de 15 de Abril de 1848 se ha mandado que la moneda que en adelante se acuñe se componga de las piezas siguientes:

DE ORO.	—El doblon Isabel.	5 duros ó 100 rs. vn.
DE PLATA.	—El duro.	20 rs. vn.
	El medio duro ó escudo.	10 rs. vn.
	La peseta.	4 rs. vn.
	La media peseta. . . .	2 rs. vn.
	El real.	10 décimas de real.
DE COBRE.	—El medio real.	5 décimas.
	La doble décima. . . .	2 id.
	La décima.	1 id.

Medidas de longitud.

1 vara.	3 piés.
1 pié.	12 pulgadas.
1 pulgada. . . .	12 líneas.
1 línea.	12 puntos.

De aqui se inferirá el número de pulgadas, líneas y puntos que tiene una vara: lo decimos aquí en esta sola clase de medidas para ejemplo de las demas.

La vara tiene 3 piés, y cada pié tiene 12 pulgadas; luego la vara tendrá 36 pulgadas, y como cada pulgada tiene 12 líneas, la vara tendrá 36 veces 12 líneas, es decir, 432 líneas, y así sucesivamente respecto de las demas unidades.

Medidas itinerarias.

El grado medio de la tierra. . . .	20 leguas.

La legua.	$6666^1/_3$ varas.
La vara.	3 piés.

En la marina se usan las siguientes:

La legua marina.	3 millas.
La milla.	10 cables.
El cable.	111 brazas.
La braza.	6 piés.

Medidas de superficie.

Para medir superficies se usan los cuadrados de las medidas longitudinales en la siguiente forma:

La legua cuadrada.	400000000 piés cuadrados.
La vara cuadrada.	9 piés cuadrados.
El pié cuadrado.	144 pulgadas cuadradas.
La pulgada cuadrada. . . .	144 líneas cuadradas.
La línea cuadrada.	144 puntos cuadrados.

Medidas agrarias.

La fanega de tierra de marco real.	12 celemines.
El celemin.	48 estadales cuadrados.
El cuartillo de celemin.	12 estadales cuadrados.
El estadal cuadrado.	144 piés cuadrados.
La aranzada.	400 estadales cuadrados.
La tahulla murciana.	1600 varas cuadradas.

Medidas de capacidad para áridos.

La fanega.	12 celemines.
El celemin.	2 medios celemines.
El medio celemin. . .	2 cuartillos.

La media fanega equivale á un volúmen de 2220 pulgadas cúbicas, y caben en ellas 60,25 libras de agua destilada.

Medidas de capacidad para líquidos.

La cántara.	8 azumbres.

La azumbre.	4 cuartillos.
El cuartillo.	4 copas.

Las medidas para el aceite estan arregladas al peso, y son:

La arroba.	4 cuartas ó cuarterones.
La cuarta.	$6^1/_4$ libras de aceite.
La libra. .	4 panillas, ó cuartas, ó cuarterones (segun el pais varía el nombre).

La arroba de aceite contiene 27,25 libras de agua.

Medidas de solidez.

Para medir la solidez se usan los cubos de las unidades lineales ó longitudinales en la forma siguiente·

La vara cúbica. . .	27 piés cúbicos.
El pié cúbico. . .	1728 pulgadas cúbicas.
La pulgada cúbica.	1728 líneas cúbicas.

En la marina:

La tonelada de arqueo. $69\frac{155}{937}$ piés cúbicos de agua del mar.

El pié cúbico de agua destilada pesa 46,8973 libras.

Pesos.

El quintal.	4 arrobas.
La arroba.	25 libras.
La libra.	16 onzas.
La onza.	16 adarmes.
El adarme.	36 granos.

Hay otras pesas especiales en la forma siguiente:

El marco.	8 onzas.
La libra de botica. .	12 onzas.
La onza.	8 dracmas.
La dracma.	3 escrúpulos.
El escrúpulo. . . .	24 granos.

El tiempo.

Un siglo.	100 años.
El año.	365 dias.
El dia.	24 horas.
La hora.	60 minutos.
El minuto.	60 segundos, etc.

El año bisiesto tiene 366 dias.

El año se divide tambien en 12 meses desiguales; pero para las cuestiones de interés de dinero y descuento se suelen considerar los meses de á 30 dias y el año de 360.

Se llama *número complejo* el número *concreto* (n.º 2) que consta de varias partes, referidas respectivamente á unidades diferentes; y por oposicion, se llama *incomplejo* el número que se refiere á una sola especie de unidades. Así, 12 d., 6 rs., 14 mrs.; 20 v., 2 p., 4 pulg.; 18 lb., 9 on., 7 ad., son números complejos; 6 duros, 18 varas, 10 libras, son números incomplejos.

69. Empezaremos la teoría de los números complejos esplicando dos operaciones que le son peculiares y que pueden considerarse como base de las cuatro operaciones principales. La primera tiene por objeto *dado un número complejo, reducirle á un solo número fraccionario de la unidad principal*: y la segunda recíprocamente, *dada una espresion fraccionaria de una unidad principal cualquiera, deducir de ella el número complejo que representa.*

1.º *Sea primero, reducir á un solo número fraccionario de vara* la espresion 18 v., 2 p., 9 pulg., 7 l.

Es claro que si conseguimos determinar el número de líneas que contiene la cantidad propuesta, bastará poner á este número por denominador la cantidad 432, puesto que segun la tabla (n.º 68) la línea vale $\frac{1}{432}$ de vara.

Reduzcamos, pues, á líneas la espresion propuesta.

Lo primero, valiendo la vara 3 piés, reduciremos á piés 18 v., 2 p., multiplicando 18 por 3, y añadiendo al producto 2 piés que ya tenemos; así se obtiene por resultado 56 piés.

Ahora, como el pié vale 12 pulgadas, se reducirán á pulgadas los 56 p., 9 pulg., multiplicando 56 por 12, y añadiendo 9 al producto, lo que dá 681 pulg.

Finalmente, como la pulgada vale 12 líneas, para reducir 681 pulg. 11 l. á líneas, basta multiplicar 681 por 12 y añadir 11 al producto; así resultan 8179, número total de líneas que contiene la cantidad 18 v., 2 p., 9 pulg., 7 l.

$$\begin{array}{r} 18 \text{ v., } 2 \text{ p., } 9 \text{ pulg., } 7 \text{ l.} \\ 3 \\ \hline 56 \\ 12 \\ \hline 681 \\ 12 \\ \hline 8179 \end{array}$$

Poniendo, pues, á 8179 su denominador 432, resulta que

$\dfrac{8179}{432}$ es el número pedido.

Advertencia. En esta operacion nos hemos visto obligados á multiplicar dos veces por el factor 12, cosa que ocurre con mucha frecuencia en la teoría de los números complejos; por eso es muy conveniente saber multiplicar un número por 12, con tanta rapidez como si el multiplicador no tuviera mas que una cifra. Para lo cual, suponiendo la memoria bastante ejercitada, se puede hacer uso de una *Tabla de multiplicacion* (n.º 18) que alcance hasta el número 12 inclusive.

El ejemplo precedente basta para comprender la marcha que debe seguirse al efectuar esta operacion.

Regla general. *Multiplíquese el número de unidades de especie superior del complejo por el número que espresa las veces que una de ellas contiene á la unidad de la especie inmediata inferior, y al producto añádase las que ya tenemos de esta especie.*

Multiplíquese el resultado así obtenido por el número que espresa las veces que su unidad contiene á la de la especie inmediata inferior, que es la de la segunda subdivision, y al producto añádase el número de su especie.

Multiplíquese el resultado por el número que espresa las veces que su unidad contiene á la unidad de la tercera subdivision, y al producto añádase el número de esta especie, y así sucesivamente hasta llegar á la última subdivision.

Entonces, *al resultado final se pone por denominador el número que espresa las veces que la unidad de especie superior contiene á la última especie;* cuyo número se deducirá de la tabla del número 68.

70. 2.° Sea ahora, *reducir á número complejo el fraccionario de vara* $\frac{615}{23}$.

Se comienza dividiendo 615 por 23 en la forma ordinaria, y se obtiene el cociente 26 y el resíduo 17, pudiendo decirse por consiguiente que el número propuesto equivale á 26 varas *mas* $\frac{17}{23}$ de vara. Pero como la vara tiene 3 piés, se infiere que $\frac{17}{23}$ de vara equivale á $\frac{17}{23}$ de 3 piés, es decir, á $\frac{3 \text{ veces } 17}{23}$ de pié (n.° 65), ó á $\frac{51}{23}$ de pié; y tantos piés habrá en el cociente, cuantas veces contenga 51 á 23.

$$
\begin{array}{r|l}
615 & 23 \\
\cline{2-2}
155 & 26 \text{ v., } 2 \text{ p., } 2 \text{ pulg., } 7 \text{ l. } \frac{7}{23} \\
17 & \\
\underline{3} & \\
51 & \\
5 & \\
\underline{12} & \\
60 & \\
14 & \\
\underline{12} & \\
168 & \\
07 &
\end{array}
$$

Se ve, pues, que obtenido un resíduo 17, para obtener los piés equivalentes, debe multiplicarse el 17 por 3 y dividir el producto por 23. Así se obtiene el cociente 2 piés, y queda un resíduo 5: por consiguiente el número propuesto es igual á 26 varas, 2 piés y $\frac{5}{23}$ de pié.

Razonando sobre esta fraccion nueva como sobre la anterior, se verá que para reducirla á pulgadas basta multiplicar el resíduo 5 por 12 y dividir el producto por 23; así resulta el cociente 2 pulgadas y queda un resíduo 14.

Multiplicando este nuevo resíduo por 12 para obtener las líneas, tendremos el producto 168, que dividido por 23, dá el cociente 7 líneas y un resíduo final 7.

Luego el número propuesto es igual á 26 varas, 2 piés, 2 pulgadas, 7 líneas $\frac{7}{23}$ de línea.

La fraccion final $\frac{7}{23}$ suele despreciarse por su pequeñez; pero algunas veces se valúa aproximadamente. Aquí se observaria, por ejemplo, que si en vez de ser $\frac{7}{23}$ fuera $\frac{7}{21}$, equivaldria á $\frac{1}{3}$; pero como el denominador 23 es mayor que 21, se infiere que el resíduo dado es *menor* que $\frac{1}{3}$: por un razonamiento análogo se veria que es *mayor* que $\frac{1}{4}$; con lo cual tenemos ya idea aproximada de su valor.

REGLA GENERAL. *Para reducir á complejo un número fraccionario, se divide el numerador por el denominador; el cociente espresa unidades de la especie superior del complejo que se busca.*

Si queda resíduo, se multiplica por el número que espresa las veces que su unidad contiene á la de la especie inmediata inferior, y el producto se divide por el mismo denominador; el cociente representa unidades de la segunda especie del complejo.

Si queda resíduo, se multiplica por el número que espresa las veces que su unidad contiene á la de la especie inmediata anterior, y el producto se divide por el denominador; así se continúa hasta obtener cociente exacto ó hasta llegar á la última subdivision.

71. Las dos operaciones que acabamos de esplicar se comprueban mutuamente, como desde luego puede conocerse.

Así, por ejemplo, para hallar el número complejo que ha producido (n.° 69) la fraccion $\frac{8179}{432}$, se aplicará á esta la regla del número inmediato anterior. Aquí nos reduciremos á indicar el cálculo que no ofrece dificultad alguna.

$$
\begin{array}{r|l}
8179 & 432 \\ \cline{2-2}
3859 & 18 \text{ v., } 2 \text{ p., } 9 \text{ pulg., } 7 \text{ l.} \\
403 & \\
3 & \\ \cline{1-1}
1209 & \\
345 & \\
12 & \\ \cline{1-1}
690 & \\
345 & \\ \cline{1-1}
4140 & \\
252 & \\
12 & \\ \cline{1-1}
3024 & \\
000 &
\end{array}
$$

La prueba de la segunda operacion necesita algunas aclaraciones.

Despues de aplicar al número complejo 26 v., 2 p., 2 pulg., 7 l., el procedimiento de la primera operacion, se halla por resultado 11551 l., ó sea $\frac{11551}{432}$ de vara. Pero como á 11551 l. se ha de añadir la fraccion $\frac{7}{23}$, hay que reducir aquel entero á la especie de este quebrado; para lo cual se multiplica el entero 11551 por el denominador 23, agregándole el numerador. Así se obtiene 265680, que será el numerador del quebrado que se busca: el de-

$$
\begin{array}{r}
26 \text{ v., } 2 \text{ p., } 2 \text{ pulg., } 7 \text{ l. } \frac{7}{23}. \\
3 \\ \hline
78 \\
2 \\ \hline
80 \\
12 \\ \hline
960 \\
2 \\ \hline
962 \\
12 \\ \hline
11544 \\
7 \\ \hline
11551 \\
23 \\ \hline
34653 \\
23102 \\
7 \\ \hline
265680
\end{array}
$$

nominador debe ser 23 veces 432, de modo que tendremos

$\frac{265680}{23 \text{ veces } 432}$, y como este número ha de ser igual á $\frac{615}{23}$, se infiere que 265680 debe ser divisible por 432; como lo es en efecto, y hecha la supresion de este factor comun, se obtiene el quebrado primitivo $\frac{615}{23}$ de vara.

A continuacion ponemos otro ejemplo de la segunda operacion y de su prueba.

Convertir en número complejo de arrobas, libras, onzas, adarmes y granos, la fraccion $\frac{37}{42}$ *de arroba.*

Aquí se observa que el numerador 37 no es divisible por el denominador 42: esto manifiesta que el complejo buscado carecerá de la unidad superior, es decir, no llegará á valer arrobas.

Procédase, pues, á valuarle en libras, etc.

Operacion.

```
 37
 25
----
185
74
----
925 | 42
085 |-----------------------------
 01 | 22 lb., 0 o., 6 ad. 4/42.
 16
----
 16
 16
----
 96
16
----
256
004
```

Prueba.

```
0 @., 22 lb., 0 o., 6 ad. 4/42
        22
        16
    ------
       132
       22
    ------
       352
        16
    ------
      2112
      352
         6
    ------
      5638
        42
    ------
     11276
    22552
         4
    ------
    236800
```

$\frac{236800}{42\times6400} = \frac{37}{42}$ @.

```
2368~~00~~ | 64~~00~~
 448       |------
  00       | 37
```

72. Por medio de estas dos operaciones preliminares pueden reducirse las cuatro principales de los números complejos á las de quebrados esplicadas en el capítulo precedente. En efecto, *los complejos dados para operar pueden siempre reducirse á números fraccionarios de la unidad principal* (por la regla del n.° 69), *efectuándose despues con los números así transformados las operaciones pedidas*, segun las reglas ordinarias del cálculo de quebrados, y obteniéndose por resultado un número fraccionario *que se convierte en complejo* por la regla del n.° 70.

Pero este método es en general menos espedito que el que vamos á esponer, sobre todo en las tres primeras operaciones.

SUMA DE NÚMEROS COMPLEJOS.

73. Esta operacion se verifica casi del mismo modo que la suma de enteros. *Se escriben los sumandos unos debajo de otros, de modo que se correspondan en columna los órdenes y las especies iguales; se empieza á sumar por la columna de especie inferior, y la suma se escribe debajo si no llega á valer una unidad del órden inmediato superior; pero si llega ó pasa del número necesario para valer una unidad de esa especie, se reduce á ella, el resíduo se escribe debajo de la columna, y el cociente se guarda para agregarlo á las de su especie. Se suman estas en seguida, procediéndose en ellas como con las anteriores, y así se continúa hasta llegar á la superior.*

PRIMER EJEMPLO.

Sumar los números

	765 d.	19 rs.	7 mrs.
	1279	17	6
	915	13	11
	2594	19	8
	589	8	6
Suma.	6145 d.	17 rs.	4 mrs.

Sumando primero los maravedises, hallo por suma 38, es decir, 1 *real* y 4 maravedises, escribo los 4 maravedises y guardo el real para sumarlo con las unidades de su especie.

Esta nueva suma me dá 37; escribo el 7 y guardo el 3 para sumarlo con la columna de las decenas de reales, lo que dá 7 decenas de reales; como son necesarias 2 decenas de reales para hacer un duro, tomo la mitad de 7, que es 3, con 1 por resíduo; escribo este resíduo, y llevo 3 duros para sumarlos con la columna de los duros, lo cual se verifica como ya sabemos.

La prueba se hace de la misma manera que en los enteros. (*Véase* n.º 15.)

SEGUNDO EJEMPLO.

Sumar	59 @.	10 lb.	6 onz.	12 ad.	
	47	6	5	14	42 | 16
	66	20	4	10	10 | 2
	70	7	2	6	
	243 @.	19 lb.	3 onz.	10 ad.	

Sumando los adarmes, hallo la suma 42, que escribo aparte como se ve en el ejemplo; divido 42 por 16, número de adarmes que contiene la onza, y obtengo el cociente 2 y el resíduo 10; escribo el 10 debajo de la columna de los adarmes y guardo el 2 para sumarlo con la de las onzas. Sumo estas y encuentro 19, que forman 1 libra y sobran 3 onzas; escribo las 3 debajo de su columna y llevo la 1 libra para sumarla con las de su especie. Del mismo modo continúo hasta llegar á la especie superior.

RESTA DE NÚMEROS COMPLEJOS.

74. *Se escribe el sustraendo debajo del minuendo* de modo que se correspondan las especies iguales; *se empieza la resta por las unidades de especie inferior, se resta cada especie del sustraendo de su correspondiente del minuendo, y debajo se van escribiendo los restos: si alguna especie del sustraendo fuera menor que su correspondiente del minuendo, no pudiendo hacerse la resta, se añadirá al minuendo una unidad de la especie inmediata superior, reducida á la especie de que se trata, con lo cual podrá hacerse la resta, y para que la operacion no se altere, se añade una unidad al sustraendo parcial siguiente.*

PRIMER EJEMPLO.

Del número.	327 d.	11 rs.	7 mrs.
hay que restar.	189	15	11
resíduo. . .	137 d.	15 rs.	30 mrs.
prueba. . .	327	11	7

Como no se pueden restar 11 maravedises de 7, se añade á estos últimos un real, ó 34 maravedises, lo que dá 41; y se dice: de 11 á 41 van 30, que se escribe debajo de los maravedises.

Pasando en seguida á los reales, se dice (*obser.* n.º 14): de 16 á 11 no puede ser, pero añadiendo á 11 reales un duro, ó 20 reales, se obtienen 31 reales, y se dice: de 16 á 31 van 15, resto que se escribe debajo de los reales.

Por último, se restan 190 de 327, y quedan 137.

Así, pues, el resto de la sustraccion es 137 duros, 15 reales, 30 maravedises, lo que se puede comprobar haciendo la suma del resíduo y el sustraendo.

SEGUNDO EJEMPLO.

De.	37 v.	2 p.	7 pulg.	5 l.
se quieren restar. . .	27	2	11	7
	11 v.	2 p.	7 pulg.	10 l.
	39	2	7	5

Como no se pueden restar 7 líneas de 5, se añade á este 1 pulgada, ó sea 12 líneas, lo que dá 17; y se dice: de 7 á 17 van 10. Despues se dice: de 12 á 7 no puede ser; pero de 12 á 7 mas 12, ó 19, van 7. Pasando á los *piés*, de 3 á 2 no puede ser, pero añadiendo 1 vara, que vale 3 piés, se tiene 3 mas 2, ó 5, y se dice: de 3 á 5 van 2. Restando, en fin, 28 varas de 39 resulta 11; luego el resto pedido es 11 varas, 2 piés, 7 pulgadas, 10 líneas.

TERCER EJEMPLO.

Un vaso lleno de líquido pesa.	17 lb.	5 onz.	4 ad.	17 gr.
El vaso vacío pesa.	4	7	7	29
Se pregunta el peso del líquido.	12 lb.	13 onz.	13 ad.	24 gr.
Prueba.	17	5	4	17

Es claro que si se resta del peso total del vaso lleno el peso del vaso vacío, el resto debe representar el peso del líquido.

Cómo no se puede restar 29 de 17, se añade á este número 1 adarme, que vale 36 granos, y se dice: de 29 á 17 mas 36, ó 53, van 24. Despues, de 7 á 4 mas 16, ó 20, van 13. Pasando á las onzas, de 8 á 5 no puede ser; pero como una libra vale 16 onzas, se dice: de 8 á 5 mas 16, ó 21, van 13. Finalmente, de 5 á 17 van 12.

Luego el peso del líquido es 12 libras, 13 onzas, 13 adarmes, 22 granos.

MULTIPLICACION DE NÚMEROS COMPLEJOS.

Esta operacion es mas dificil que las dos primeras, exige mucha atencion, y no puede esplicarse bien sino por medio de ejemplos.

Para mayor claridad distinguiremos dos casos principales: ó siendo el multiplicando complejo, es incomplejo el multiplicador; ó siendo el multiplicando complejo ó incomplejo, es el multiplicador complejo.

75. Consideremos primero el caso de *ser complejo el multiplicando é incomplejo el multiplicador.*

Sea multiplicar.	427 d.	17 rs.	11 mrs.
por.	9		
	3850 d.	15 rs.	31 mrs.

Se obtiene este producto *multiplicando por el multiplicador cada una de las partes del multiplicando, empezando por la especie inferior y teniendo cuidado de añadir á los productos de especies superiores las unidades de su especie deducidas de los productos inferiores.*

Así se dice: 9 veces 11 maravedises son 99 maravedises, que hacen 2 veces 34 maravedises, ó 2 reales, y quedan 31 maravedises; se escribe este sobrante y se guardan los 2 reales, para añadirlos al producto de los de su especie.

Ahora se sigue diciendo: 9 veces 17 reales hacen 153 reales, y 2 que llevaba son 155 reales, que hacen 7 duros, y sobran 15 reales: se escribe este resíduo, y se guardan los 7 duros para añadirlos al producto de su especie, que se obtiene como cualquier otro producto de números enteros.

Resulta de este modo que el producto total es 3850 duros, 15 reales, 31 mrs.

En este ejemplo, como el multiplicador solo tiene una cifra, se han podido determinar de memoria y muy facilmente los reales producidos por la multiplicacion de los maravedises, y los duros producidos por la multiplicacion de los reales.

Si el multiplicador consta de varias cifras, no podrán hacerse de memoria las reducciones; será preciso hacer aparte las multiplicaciones y divisiones parciales necesarias para reducir las especies inferiores á superiores, y por eso se prefiere en este caso el siguiente procedimiento.

Multiplicar el número. . .	49 d.	15 rs.	17 mrs.
por.	35		
	245		
	147		
parte correspondiente á 10 rs. .	17	10 rs.	
á 5 rs. .	8	15	
á 17 mrs.	»	17	17 mrs.
	1742	2	17

Despues de efectuar la multiplicacion de 49 por 35 en la forma ordinaria, pasamos á la multiplicacion de 15 por 35: para obtener en duros el producto desde luego, se observa que si hubiéramos de multiplicar 35 por 1 duro, el producto serian 35 duros; pero 15 reales ó $\frac{15}{20}$ de duro, son *tres cuartas* partes de duro; ó bien, 10 reales que son *medio* duro, y 5 reales que son *un cuarto* de duro: luego el producto pedido equivaldrá á la *mitad* mas *un cuarto* de 35 duros. Diremos pues: la parte correspondiente á 10 reales ó medio duro, son

17 duros, y sobra uno que vale 20 reales, cuya mitad son 10 reales: luego el producto de 35 por 10 reales es 17 duros y 10 reales.

Tomando ahora la mitad de 17 duros y 10 reales, tendremos 8 duros y 15 reales, que será el producto de 35 por 5 reales.

Pasando á los maravedises, observamos que 17 maravedises equivalen á *medio real*, ó á la *mitad de la quinta parte de* 5 *reales*, ó en fin, á la *décima parte* de 5 reales: luego el producto de 35 por 17 maravedises debe ser la décima parte del producto de 35 por 5 reales: tomemos pues la décima parte de 8 duros y 15 reales: 8 duros no es divisible por 10; pongo *cero* en los duros y los reduzco á reales: 8 duros son 160 reales, y 15 que hay además son 175: la décima parte de 175 son 17 reales y sobran 5 reales, los cuales reducidos á maravedises hacen 170 maravedises: la *décima* parte de 170 son 17 maravedises exactamente.

Tenemos ya obtenidos todos los productos parciales; tirando ahora una raya y sumando como complejos, tendremos el producto total 1742 duros, 2 reales, 17 maravedises.

Este modo de obtener los productos de las especies inferiores, se llama *método de partes alícuotas*, porque consiste en descomponer los números de unidades de dichas *especies en partes alícuotas ya de la unidad principal, ya de otras subdivisiones;* es decir, (n.° 51) en partes que esten respectivamente contenidas un número exacto de veces unas en otras; y entonces para formar el producto correspondiente á una de ellas, se toma de uno de los productos precedentes la parte indicada por el número de veces que la parte alícuota considerada está contenida en la parte que ya dió el producto de que nos servimos.

Sirva de nuevo ejemplo *multiplicar*. .	19 v.,	2 p.,	7 pulg.
por. .	45		
	95		
	76		
parte correspondiente á 1 pié. . . .	15		
id.	15		
parte correspondiente á 4 pulg. . .	5		
id. á 3 id.	3	2	3
	893 v.,	2 p.,	3 pulg.

Hecho el producto de 19 varas por 45 en la forma ordinaria, se procede á multiplicar por 45 los 2 piés, y se observa que 2 piés equivalen á $\frac{2}{3}$ de vara; de modo que tomando dos veces la tercera parte del producto que daria una vara, se tendria el producto pedido: una vara por 45 daria 45 varas; la tercera parte son 15 varas; escribo, pues, dos veces las 15 varas, y queda hecho el producto parcial.

Pasando á las pulgadas, vemos que 7 pulgadas son 4 pulgadas mas 3 pulgadas, es decir, la tercera parte mas la cuarta parte de un pié: luego el producto que han de dar las 7 pulgadas ha de ser la cuarta parte mas la tercera parte del producto que ha dado 1 pié, es decir, de 15 varas: la tercera parte de 15 varas son 5, que escribo: la cuarta parte de 15 son 3, que escribo; me sobran 3 varas que hacen 9 piés; la cuarta parte de 9 piés son 2 y sobra 1 pié, que hace 12 pulgadas; la cuarta parte de 12 pulgadas son 3 exactamente: escribo estos resultados, y tengo todos los productos parciales: los sumo, y obtengo el total 893 varas, 2 piés y 3 pulgadas.

76. Consideremos ahora el caso de *ser complejo el multiplicador*, poniendo primero un ejemplo no muy complicado.

Costando á 8 *duros*, 6 *reales y* 12 *maravedises la vara de una tela, se quiere saber cuánto costarán* 11 *varas y* 3 *palmos*.

	8 d.,	6 rs.,	12 mrs.
	11 v.,	3 palmos.	
	88		
Parte correspondiente á 5 rs.	2 d.,	15 rs.	
Parte correspondiente á 1 real. . . .	0	11	
á 12 mrs. . .	»	3	30
á 2 palmos. .	4	3	6
á 1 palmo. . .	2	1	20
	97 d.,	14 rs.,	22 mrs.

Como una vara cuesta 8 duros, 6 reales, 12 maravedises, es claro que 11 varas costarán 11 veces 8 duros, 6 reales y 12 maravedises.—Haremos, pues, la multiplicacion por 11 varas en la forma ya esplicada, advirtiendo únicamente que no siendo 12 maravedises parte alícuota de 1 real, hemos consignado directamente y por una sencilla multiplicacion que las 11 varas á los 12 maravedises dan 3 reales y 30 maravedís, como se ve en el ejemplo.

Pasemos ahora á la multiplicacion de los 3 palmos, y observemos que 3 palmos son *media vara* y la *mitad de media vara:* luego si *una* vara vale por hipótesis 8 duros, 6 reales, 12 maravedises, media vara valdrá la mitad, ó sea 4 duros, 3 reales y 6 maravedises, cuya cantidad se escribe debajo: y el palmo sobrante, que valdrá la mitad de lo que vale la media vara, valdrá evidentemente 2 duros, 1 real, 20 maravedises.— Sumando ahora los productos parciales, se obtendrá el producto total 97 duros, 14 reales, 22 maravedises.

Se ve, en virtud de este ejemplo, que, *cuando el multiplicador contiene partes ó subdivisiones de la unidad principal*, el artificio del método consiste *en descomponer las subdivisiones de este factor en* PARTES ALÍCUOTAS, *ya de la unidad principal, ya de otras inferiores, tomando despues del multiplicando ó de los productos parciales convenientes las partes indicadas por dichas partes alícuotas.*

Propongámonos, por segundo ejemplo, *determinar cuánto cuestan* 69 *varas*, 2 *piés y* 7 *pulgadas de una obra cualquiera, suponiendo que cada vara cuesta á* 5 *duros*, 11 *reales y* 23 *maravedises.*

5 d.,	11 rs.,	23 mrs.	
69 v.,	2 p.,	7 pulg.	
345			
34	10 rs.		
3	9		
1	14	17	
0	12	6	
1	17	7	$\frac{2}{3}$ .... $\frac{24}{36}$
1	17	7	$\frac{2}{3}$ .... $\frac{24}{36}$
0	18	20	$\frac{5}{6}$ .... $\frac{30}{36}$
	3	3	$\frac{17}{36}$ .... $\frac{17}{36}$
390 d.,	1 rs.,	32 mrs.	.... $\frac{23}{36}$

Supondremos aquí, como en el ejemplo precedente, que se ha efectuado el producto de 5 duros, 11 reales, 23 maravedises por 69, y pasaremos únicamente á esplicar el pormenor de la determinacion del valor de los 2 piés y 7 pulgadas.

Para esto observemos que costando la vara 5 duros, 11 reales y 23 maravedises, es claro que 2 piés, que son dos terceras partes de vara, valdrán dos terceras partes de esa misma cantidad, ó dos veces una tercera parte de ella, es decir, dos veces 1 un duro, 17 reales, 7 maravedises $\frac{2}{3}$, que por esa razon se escribe dos veces como producto parcial.

Ahora observamos que las 7 pulgadas se componen de 6 pulgadas mas 1 pulgada: 6 pulgadas son medio pié: un pié vale, segun acabamos de ver, 1 duro, 17 reales y 7 maravedises $\frac{2}{3}$; luego medio pié ó 6 pulgadas valdrán la mitad de ese valor, es decir, 18 reales, 20 maravedises $\frac{5}{6}$: escribo, pues, debajo de los anteriores este nuevo producto parcial. Réstanos hallar el valor de *una* pulgada, que siendo evidentemente la *sesta* parte del valor de 6 pulgadas, se hallará tomando la sesta parte de 18 reales, 20 $\frac{5}{6}$ maravedises. Hecho así, se obtiene el último producto parcial 3 reales, 3 $\frac{17}{36}$ maravedises, que se escribe debajo de los anteriores, sumándolos todos para obtener el producto total.

En esa suma se notará que todos los denominadores de los quebrados de los productos parciales son sub-múltiplos de 36, y por consiguiente pueden reducirse á un mismo denominador por la regla simplificada del n.º 48.

Hasta ahora el multiplicando ha representado unidades de monedas y el producto ha resultado de la misma naturaleza. Ahora vamos á resolver una cuestion en que el multiplicando y el producto representan varas, piés y pulgadas.

Con un duro se pagan 69 *varas*, 2 *piés y* 7 *pulgadas de un trabajo; se desea saber cuántas varas, piés y pulgadas podrán pagarse con* 5 *duros*, 11 *reales y* 23 *maravedises.*

Es evidente que para obtener el número de varas, etc., pedido, es necesario multiplicar las 69 varas, 2 piés, 7 pulgadas, por 5 duros y por las subdivisiones de duro que indica el enunciado; pues si con *un duro* se pagan 69 varas, 2 piés y 7 pulgadas, con 11 reales, que son $\frac{11}{20}$ de duro, se pagarán $\frac{11}{20}$ de 69 varas, 2 piés y 7 pulgadas, ó lo que es lo mismo $\frac{11}{20}$, que es la mitad, mas $\frac{1}{20}$, que es la décima parte de la mitad.

A continuacion ponemos el cálculo.

	69 v.,	2 p.,	7 pulg.	
	5 d.,	11 rs.,	23 mrs.	
	345 v.			
Parte corresp.te á 1 p. .	1	2 p.		
id.	1	2		
á 6 pulg.	0	2	6 pulg.	
á 1. . .	0	0	5	
á 10 rs.	34	2	9	6 l.
á 1. . .	3	1	5	9
á 17 mrs.	1	2	2	$10\frac{1}{2} \ldots \frac{17}{34}$
á 2. . .	0	0	7	$4\frac{13}{17} \ldots \frac{26}{34}$
á id. .	0	0	7	$4\frac{13}{17} \ldots \frac{26}{34}$
á id. . .	0	0	7	$4\frac{13}{17} \ldots \frac{26}{34}$
	390 v.,	0 p.,	3 pulg.	$3\frac{27}{34}$ l.

77. *Advertencia.* Obsérvese que en este último ejemplo son los factores los mismos del anterior, y sin embargo se han obtenido resultados que no difieren en el entero del producto, pero que se diferencian en la naturaleza de la unidad principal y en sus subdivisiones. Así, pues, el principio del n.º 25, que dice: *puede invertirse el órden de los factores, sin alterar el producto,* parece solo cierto respecto de los números abstractos. Para hacerle aplicable al caso de dos números comple-

jos, sería necesario concebir reducido cada uno de estos á número fraccionario (n.° 69) de su unidad principal respectiva; y los números que se obtuvieran invirtiendo el órden de los factores serían iguales, escepto en la naturaleza de su unidad principal, que sería diferente en cada producto. En efecto, segun la definicion de la multiplicacion, siempre que se consideran números concretos, *el producto y el multiplicando deben ser de la misma naturaleza;* mientras que el multiplicador, aunque puede al pronto representar un número concreto al tiempo de hacer la operacion, debe siempre considerarse como un número abstracto que dice cuántas veces se ha de tomar el multiplicando, ó qué parte se ha de tomar del mismo. Por consiguiente, antes de ejecutar cualquier multiplicacion debe determinarse cuál de los dos factores se ha de elegir por multiplicando, poniendo al efecto aquel factor que tenga la misma naturaleza que en el enunciado de la cuestion se asigne al producto.

78. La division es la prueba natural de la multiplicacion; pero en general es mas fácil, á causa de las fracciones complicadas que suele contener el producto, *duplicar el multiplicando y tomar la mitad del multiplicador,* ó recíprocamente. Encargamos á los principiantes que repitan las operaciones anteriores, probándolas por ese método: el producto debe resultar el mismo.

A continuacion ponemos nuevos ejemplos que servirán de ejercicio.

Multiplicar 254 @., 11 lb., 8 onz., por 35 rs., 17 mrs.

Producto: 9033 rs., 11 mrs., $\frac{11}{50}$ de maravedí.

Multiplicar 17 rs., 25 mrs., por 24 v., 2 palm., 1 pulg., $8\frac{252}{603}$ líneas.

Producto: 435 rs., 12 mrs.

En el capítulo VII encontraremos cuestiones que nos conducirán á esta clase de operaciones.

DIVISION DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS.

Tambien aquí distinguiremos dos casos principales: *ó el dividendo y el divisor son de distinta naturaleza, ó son de la misma naturaleza.*

79. Primer caso. El dividendo y divisor son de naturaleza diferente.

En este caso puede ocurrir que el divisor sea incomplejo, ó que sea complejo.

1.º Si el divisor es incomplejo, *considérese como número abstracto, y efectúese la division del dividendo por el divisor, reduciendo el cociente á unidades principales y subdivisiones correspondientes de la naturaleza del dividendo.*

2.º Si el divisor es complejo, *conviértase* (n.º 69) *en número fraccionario de su unidad principal, y queda la operacion reducida á dividir un entero por un quebrado, cuidando de reducir el cociente á unidades superiores y subdivisiones de la naturaleza del dividendo.*

PRIMER EJEMPLO.

Se desea saber el precio de la vara de una tela bajo el supuesto de haber comprado 123 *varas por* 458 *duros,* 3 *reales y* 17 *maravedises.*

Si fuera conocido el precio de la vara, obtendríamos el producto 458 duros, 3 reales y 17 maravedises, multiplicando las 123 varas por dicho precio: luego para obtener este, será preciso dividir por 123 el producto conocido.

458 d., 3 rs., 17 mrs.	123
089	3 d., 14 rs., 17 mrs.
20	
1780	
3	
1783	
553	
061	
34	
244	
183	
17	
2091	
0861	
000	

Colocamos, pues, el dividendo y divisor en la forma acostumbrada, y dividimos la especie superior, ó sea los 458 duros, por el 123, lo cual dá 3 duros de cociente, quedando 89 duros de resíduo: reducimos este resíduo á reales, que es la especie inmediata inferior, añadiendo al producto los 3 reales que tiene el dividendo: así obtenemos un nuevo dividendo 1783 reales, que dividido por 123, dá 14 reales de cociente, y quedan 61 de resíduo. Reducimos estos reales á maravedises, añadiendo al producto los 17 del dividendo, con lo cual obtenemos el nuevo dividendo 2091, que dividido por el 123, dá de cociente exacto 17 maravedises.

Luego el cociente total ó el precio de la vara son 3 duros, 14 reales y 17 maravedises.

SEGUNDO EJEMPLO.

Por 9033 reales, 11 $\frac{11}{50}$ maravedises, se han comprado 254 arrobas, 11 libras, 8 onzas, de un género cualquiera: se desea saber á cómo sale la arroba.

Si el precio de la arroba fuera conocido, multiplicándole por 254 arrobas, 11 libras, 8 onzas, deberia obtenerse 9033 reales, 11 $\frac{11}{50}$ maravedises; luego en el caso inverso habremos de dividir este número por el 254 arrobas, 11 libras, 8 onzas.

$$9033 \text{ rs.}, 11\tfrac{11}{50} \text{ mrs.} : \frac{101784}{400} \text{ @.}$$

$$\begin{array}{r} 254 \text{ @.}, 11 \text{ lb.}, 8 \text{ o.} \\ 25 \\ \hline 1270 \\ 508 \\ 11 \\ \hline 6361 \\ 16 \\ \hline 38166 \\ 6361 \\ 3 \\ \hline 101784 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 9033 \text{ rs.}, & 11\tfrac{11}{50} \text{ mrs.} \\ 400 & \\ \hline 3613200 & \\ 129 & 14 \\ 2 & 20 \\ \hline 3613332 & \\ 559812 & \\ 50892 & \\ 34 & \\ \hline 203568 & \\ 152676 & \\ \hline 1730328 & \\ 0712488 & \\ 000000 & \end{array} \quad \begin{array}{|l} 101784 \\ \hline 35 \text{ rs.}, 17 \text{ mrs.} \end{array}$$

Se reduce lo primero el divisor 254 arrobas, 11 libras, 8 onzas, á fraccionario de arroba, y se obtiene el número

$\frac{102784}{400}$ arrobas; ponemos el 400 por denominador, porque la onza, que es la última especie, está contenida 400 veces en la arroba. Tenemos, pues, que dividir 9033 reales, $11\frac{11}{50}$ maravedises, por $\frac{102784}{400}$, para lo cual (n.° 62) multiplicaremos el dividendo por 400, lo cual dá 3613332 reales, como se ve en el ejemplo, y este producto se partirá por 102784: así obtenemos el precio deseado, que son 35 reales, 17 maravedises.

Estos ejemplos bastan para enseñar la marcha que debe seguirse en otro cualquiera análogo.

80. SEGUNDO CASO. Si el dividendo y divisor son de la misma naturaleza, *redúzcanse ambos* (n.° 69) *á su ínfima especie, efectúese la division de un resultado por otro, y conviértase el cociente*, por la regla del n.° 70, *en número complejo de la naturaleza que indique el enunciado de la cuestion.*

Aclararemos la regla con ejemplos.

PRIMER EJEMPLO.

Costando 17 *reales y* 25 *maravedises la vara de una obra, se desea saber cuántas varas podrán hacerse con* 435 *reales*, 12 *maravedises.*

Si se supiera el número de varas, es evidente que multiplicándole por el precio 17 reales, 25 maravedises, se obtendria el producto 435 reales, 12 maravedises. Luego á la inversa, para obtener aquel número deberá dividirse este producto, que es conocido por el precio que lo es tambien: debemos, pues, dividir 435 reales, 12 maravedises, por 17 reales, 25 maravedises.

$$435 \text{ rs., } 12 \text{ mrs.} = \frac{14802}{34} \text{ rs.} \qquad 17 \text{ rs., } 25 \text{ mrs.} = \frac{603}{34} \text{ rs.}$$

$$\begin{array}{r} 435 \\ 34 \\ \hline 1740 \\ 1305 \\ 12 \\ \hline 14802 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 17 \\ 34 \\ \hline 68 \\ 51 \\ 25 \\ \hline 603 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 14802 & 603 \\ \cline{2-2} 2742 & 24 \text{ v., } 2 \text{ palm., } 1 \text{ pulg., } 8\frac{252}{603} \text{ l.} \\ 330 & \\ 4 & \\ \cline{1-1} 1320 & \\ 114 & \\ 9 & \\ \cline{1-1} 1026 & \\ 423 & \\ 12 & \\ \cline{1-1} 846 & \\ 423 & \\ \cline{1-1} 5076 & \\ 252 & \end{array}$$

Despues de reducir ambos números á maravedises, encontramos que el primero equivale á $\frac{14802}{34}$ de real y el segundo á $\frac{603}{34}$ de real. Para dividir el primer número por el segundo, se debe invertir la fraccion-divisor (n.° 62), lo cual dá $\frac{34}{603}$, y ahora se debe multiplicar $\frac{14802}{34}$ por $\frac{34}{603}$, y como el 34 entra por factor en el producto de los numeradores y en el de los denominadores, puede suprimirse, y resulta $\frac{14802}{603}$; luego queda la operacion reducida á dividir 14802 por 603, que es la regla dada arriba. No nos detendremos en esplicar esa division que se efectúa por la regla del n.° 70, como se ve en el ejemplo; observaremos solamente que segun el enunciado del problema el quebrado $\frac{14802}{603}$ debe valuarse en varas, palmos, etc.

Así resultan 24 varas, 2 palmos, 1 pulgada, 8 $\frac{252}{603}$ líneas.

SEGUNDO EJEMPLO.

Si 15 *varas y* 3 *palmos de cinta cuestan* 1 *duro, ¿cuánto costarán* 275 *varas,* 2 *palmos y* 7 *pulgadas?*

Si conociéramos la suma pedida, multiplicándola por 15 varas y 3 palmos, deberíamos obtener las 275 varas, 2 palmos y 7 pulgadas; ó bien tambien, las 275 varas, 2 palmos y 7 pulgadas contendrán á 15 varas y 3 palmos tantas veces como duros deban pagarse por ellas. Luego deberemos dividir el primer número por el segundo, y el cociente espresará la cantidad buscada.

$$
\begin{array}{r}
\text{275 v., 2 palm., 7 pulg.} \\
4 \\
\hline
1100 \\
2 \\
\hline
1102 \\
9 \\
\hline
9918 \\
7 \\
\hline
9925
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
\text{15 v., 3 palm.} \\
4 \\
\hline
60 \\
3 \\
\hline
63 \\
9 \\
\hline
567
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
9925 & 567 \\
\cline{2-2}
4255 & \\
286 & \text{17 d., 10 rs., 2 } \frac{566}{567} \text{ mrs.} \\
20 & \\
\cline{1-1}
5720 & \\
0050 & \\
34 & \\
\cline{1-1}
1700 & \\
566 &
\end{array}
$$

Despues de reducir ambos números complejos á pulgadas, que es la última de las subdivisiones que contienen, encontra–

mos que el primero equivale á $\frac{9925}{36}$ de vara y el segundo á $\frac{567}{36}$ de vara: multiplicando el primero por este invertido, resulta $\frac{9925}{567}$, y reduciendo á complejo este número fraccionario, se encuentra finalmente

$$17 \text{ duros, } 10 \text{ reales, } 2\,\frac{566}{567} \text{ maravedises.}$$

Advertencia. Aunque uno de los términos de la division fuera incomplejo, deberia, sin embargo, reducirse á fraccionario de la última especie del otro.

81. *Observacion.* Siempre que dividendo y divisor son de la misma naturaleza, *el enunciado de la cuestion es únicamente el que fija la especie de la unidad principal del cociente.* Pero cuando dividendo y divisor son de distinta naturaleza, *el cociente es de la misma que el dividendo,* porque siendo el dividendo un producto, debe ser (n.º 77) de la misma naturaleza que uno de sus factores.

82. La prueba de la division podria hacerse por multiplicacion; pero es mas cómodo duplicar ambos números, ó tomar la mitad de ambos, y hacer así una nueva division que deberá dar el mismo cociente (n.º 43) que la anterior.

Sin embargo, como ejercicios de division pueden hacerse las pruebas de las multiplicaciones arriba puestas.

CAPITULO IV.

De las fracciones decimales y del nuevo sistema de pesos y medidas.

§. I. De las fracciones decimales.

83. La manera mas cómoda y sencilla de subdividir la unidad principal en el sistema ordinario de numeracion es subdividirla en *partes que van disminuyendo de diez en diez sucesivamente*, y que por eso se llaman *fracciones decimales*. Este método tiene la gran ventaja de referir inmediatamente, ó por medio de transformaciones facilísimas, las operaciones de quebrados á operaciones de enteros, como tratamos de esplicar en este capítulo despues que hayamos espuesto la numeracion de las dichas *fracciones decimales*, es decir, su nomenclatura y el modo de escribirlas en cifras.

Su nomenclatura es muy fácil: así como duplicando la unidad sucesivamente se forman nuevas unidades que van tomando los nombres de *decenas*, *centenas*, *millares*, *decenas de millar*, *etc.*, así tambien de un modo análogo, aunque inverso, se ha concebido la unidad principal dividida en *diez* partes iguales que se han llamado *décimas;* cada décima en *diez* partes iguales que se han llamado *centésimas* (porque la unidad principal contiene *diez* veces *diez* partes ó *cien* partes de ellas); cada centésima en *diez* partes iguales que se han llamado *milésimas;* cada milésima en *diez* partes llamadas *diezmilésimas;* y así se han formado sucesivamente las *cienmilésimas*, *millonésimas*, *diezmillonésimas*,...., *etc.*, con lo cual tenemos ya la denominacion de todas las especies de unidades en que la unidad principal puede irse subdividiendo.

Respecto de la manera de escribir esas fracciones en cifras, resulta del principio fundamental de la numeracion escrita de los números enteros (n.º 51) que, contando de derecha á izquierda, tienen las cifras *valores relativos* que van creciendo de diez en diez; y por consiguiente contando á la inversa, de izquierda á derecha, van disminuyendo de diez en diez. Luego si á la derecha de un número entero ya escrito en cifras se escriben mas cifras, teniendo cuidado de separar estas de aquellas por medio de un signo cualquiera, por ejemplo una *coma*, tendremos con solo eso representadas las partes menores de la unidad en la disminucion progresiva de diez en diez, es decir, las *décimas*, *centésimas*, *milésimas*, *etc.*

Así, el conjunto de cifras 24,75 espresará 24 unidades, 7 décimas y 5 centésimas; 5,478 espresará 5 unidades, 4 décimas, 7 centésimas y 8 milésimas.

84. Propongámonos *enunciar en lenguaje ordinario el número....* 56,3506.

Este número puede desde luego enunciarse así: 56 *unidades*, 3 *décimas*, 5 *centésimas*, 0 *milésimas* y 6 *diezmilésimas;* pero observemos que 3 *décimas* valen 30 *centésimas*, ó 300 *milésimas*, ó 3000 *diezmilésimas;* de la misma manera, 5 *centésimas* valen 50 *milésimas*, ó 500 *diezmilésimas;* luego el número total se enunciará 56 *unidades*, 3506 *diezmilésimas;* de modo que para enunciar en lenguaje ordinario un número fraccionario decimal escrito en cifras, *es necesario enunciar separadamente la parte entera, es decir, la que está á la izquierda de la coma, enunciar en seguida la parte que está á la derecha como si espresára un número entero, y añadir al final del enunciado el nombre de la unidad de la última subdivision decimal.*

Así, 7,49305 representa 7 *unidades* y 49305 *cienmilésimas*. Del mismo modo, 249,007056 se enuncia 249 *unidades* y 7056 *millonésimas*.

Se puede tambien si se quiere comprender en un solo enunciado la parte entera y la parte decimal. En efecto, tomemos por ejemplo el número 56,3506; como una unidad vale 10 décimas, ó 100 centésimas, ó 1000 milésimas, ó 10000 diezmilésimas, se sigue que 56 unidades equivaldrán á 560000 *diezmilésimas;* y por consiguiente 56,3506 representa 563506 *diezmilésimas;* de la misma manera 7 unidades valen 700000 *cienmilésimas*, por consiguiente el número 7,49305 vale 749305 *cienmilésimas:* es decir, *que basta despues de ha-*

ber enunciado el número como si no hubiera coma, colocar al final del enunciado el nombre de la última subdivision. Sin embargo, está mas en uso enunciar la parte entera separadamente (*).

Recíprocamente, *propongámonos escribir en cifras una fraccion decimal enunciada en lenguaje ordinario.*

Sea la cantidad *veintinueve* unidades, *trescientas cincuenta y cuatro* milésimas. Se escribe desde luego la parte entera 29; despues, como 300 milésimas equivalen á 3 *décimas*, y 50 milésimas equivalen á 5 *centésimas*, se pone la coma á la derecha del 29 y se escriben en seguida sucesivamente las cifras 3, 5 y 4; resultará ser 29,354 la cantidad enunciada. Del mismo modo *ciento nueve* unidades, *dos mil tres* diezmilésimas, se escribirán 109,2003.

Propongámonos ahora escribir la cantidad 8 unidades, 37 milésimas.

Cómo 30 milésimas hacen 3 centésimas, y no hay décimas en el enunciado, se escribe 8,037; es decir, que se pone á la derecha de la coma un *cero* para ocupar el lugar de las décimas y dar á las cifras que siguen su verdadero valor.

Regla general. Para escribir en cifras una cantidad decimal enunciada en lenguaje vulgar, *se empieza por escribir la parte entera, y se pone una coma; despues se escriben á la derecha de esta coma sucesivamente las cifras que representan las décimas, las centésimas, etc., cuidando de reemplazar con ceros los órdenes que falten.*

Si no hay parte entera, es decir, si el número propuesto es una fraccion propia, *se escribe un* 0 para ocupar el lugar de la parte entera, y *se continúa despues, segun acabamos de de-*

(*) Para enunciar la parte decimal, propondremos tambien otro medio que en general suele ser mas cómodo en la práctica. Despues de enunciar la parte entera en la forma ordinaria, *divídase mentalmente la parte decimal en secciones de á tres cifras empezando desde la coma* (la última seccion podrá á veces tener solo *una* ó *dos* cifras); *enúnciese en seguida cada seccion separadamente, añadiendo al fin de cada enunciado parcial el nombre de la unidad* de la especie de su *última cifra.*

Ejemplos.—El número 2,74986329 se enuncia: 2 *unidades*, 749 *milésimas*, 863 *millonésimas*, 29 *cienmillonésimas.*

14,0230000764 se enuncia así: 14 *unidades*, 23 *milésimas*, 0 *millonésimas*, 76 *billonésimas*, 4 *diezbillonésimas.*

cir. Así, diez y siete *centésimas* se representan por 0,17; ciento veinticinco *diezmilésimas* por 0,0125; doce mil doscientas cuatro *millonésimas* por 0,012204.

Por último, puede suceder que en el enunciado no se distinga la parte entera de la parte decimal, en cuyo caso es mas fácil escribir el número en cifras, pues se *escribirá la cantidad como si espresára unidades enteras, y despues se colocará una coma de manera que la última cifra de la derecha esprese unidades de la especie que marca el enunciado.*

Por ejemplo, para escribir la espresion cuatro mil doscientas catorce *centésimas*, se escribe desde luego 4214; y como el último guarismo debe espresar centésimas, se pone la coma entre el 2 y el 1, lo que dá 42,14.

De la misma manera, doscientas cincuenta y tres mil veintinueve *diezmilésimas*, se representará por 25,3029; y así de los demas.

85. Ya pueden empezar á comprenderse ahora las ventajas que proporciona esta manera de escribir las fracciones decimales. Un quebrado comun se compone ordinariamente de dos números colocados uno sobre otro, que son el numerador y el denominador; pero en los decimales el sitio de la coma basta para indicar el denominador, *que es igual á la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales hay*, es decir, como guarismos hay á la derecha de la coma. El numerador consta de todas las cifras que hay á la derecha de la coma, y si se considera el entero reducido á la especie del quebrado, es dicho numerador el mismo número propuesto, suprimida la coma.

Así, la cantidad 23,5037 puesta en forma de quebrado ordinario será $23\frac{5037}{10000}$, ó $\frac{235037}{10000}$; la espresion 2,00409 es igual á $2\frac{409}{100000}$, ó á $\frac{200409}{100000}$; finalmente, 0,0002154 equivale á $\frac{2154}{10000000}$.

Recíprocamente, $2\frac{53}{1000}$, ó $\frac{2053}{1000}$, se transforma en 2,053; $\frac{172049}{10000}$ en 17,2049.

Estas transformaciones de fracciones decimales en quebrados comunes, y vice-versa, son de mucho uso en el cálculo.

86. De todo lo dicho resulta, que si se corre *la coma en una fraccion decimal uno ó mas lugares hácia la derecha, la cantidad se multiplica por* 10, 100, 1000, etc.; y que al contrario, *corriéndola uno ó mas lugares hácia la izquierda, la cantidad se divide por* 10, 100, 1000...

Sea, por ejemplo, *la espresion* 153,07295; *y supongamos que se corre la coma 3 lugares hácia la derecha,* lo que dá 153072,95: digo que la cantidad se ha hecho 1000 veces mayor. En efecto, la cantidad primitiva era igual á $\frac{15307295}{100000}$; cuando la coma ha variado de lugar, equivale á $\frac{15307295}{100}$, fraccion cuyo denominador es 1000 veces menor que el de la otra; luego (n.º 45) la segunda es 1000 veces mayor que la propuesta.

Por el contrario, si la coma se corre dos lugares hácia la izquierda, resulta 1,5307295, ó bien $\frac{15307295}{10000000}$, fraccion cuyo denominador es 100 veces mayor que el de la propuesta $\frac{15307295}{100000}$, luego la nueva fraccion es 100 veces menor que la otra.

Se puede tambien demostrar esto observando que al variar de lugar la coma, *el valor relativo* de cada guarismo se hace 10, 100, 1000, etc., veces mayor ó menor. Así, comparando 153072,95 con 153,07295, se ve que la cifra 3, que en estas espresaba unidades simples, espresa ahora *millares;* la cifra 5 á la izquierda del 3, que espresaba decenas, representa ahora *decenas de millar;* y así de los demas guarismos.

87. *Añadiendo un número cualquiera de ceros á la derecha de una fraccion decimal, no se altera su valor.*

Así, 2,415 es igual á 2,4150, ó á 2,41500, ó á 2,415000, etc....; en efecto, estas espresiones pueden (n.º 82) ponerse bajo la forma

$$\frac{2415}{1000},\ \frac{24150}{10000},\ \frac{241500}{100000},\ldots$$

y bien se ve que las dos últimas fracciones no son mas que la misma primera, cuyos dos términos se han multiplicado por 10, 100, 1000,...., lo cual no altera su valor (n.º 46).

Tambien puede observarse que los ceros colocados á la derecha de los guarismos decimales no alteran *su valor relativo;* y como los ceros no tienen por sí valor alguno, claramente resulta que la fraccion no se altera por su adicion.

Esta última proposicion sirve para *reducir las fracciones decimales á un comun denominador*. Por ejemplo, las fracciones

12,407 | 0,25 | 7,0456 | 23,4

equivalen á estas otras

12,4070 | 0,2500 | 7,0456 | 23,400;

y bajo esta forma, todas tienen á 10000 por denominador comun.

Establecidos estos principios, podemos pasar á esponer las operaciones con fracciones decimales.

88. *Suma y resta.* La suma de las fracciones decimales se efectúa lo mismo que la de números enteros, *despues de haberlas reducido todas á un comun denominador*, y teniendo cuidado *de separar en el resultado por medio de una coma tantas cifras decimales como hay en el sumando que mas tenga.*

Un solo ejemplo bastará para aclarar esta regla.

Propongámonos sumar las cantidades

32,4056 | 245,379 | 12,0476 | 9,38 | 459,2375.

Escribo lo primero *un* 0 á la derecha de la segunda cantidad, y *dos* á la derecha de la cuarta; despues coloco los números así preparados unos debajo de otros, de modo que las unidades del mismo órden se correspondan, y efectúo la suma como de ordinario.

Hallamos por resultado 7584497, ó bien, separando 4 cifras decimales á la derecha, 758,4497, porque todos los sumandos espresan unidades del órden de las *diezmilésimas*.

32,4056
245,3790
12,0476
9,3800
459,2375
758,4497
121 2210

En la práctica puede omitirse el escribir ceros á la derecha de las cantidades que tienen menor número de cifras decimales, teniendo únicamente cuidado *de colocar en columna las unidades de la misma especie.*

La resta de decimales se hace tambien del mismo modo que la de enteros, *despues de haberlas reducido á un comun denominador* (n.º 87).

Por ejemplo, *restar* 23,0784 *de* 62,09.

Se escriben dos ceros á la derecha del 62,09, lo que dá 62,0900; despues se efectúa la resta como de ordinario, teniendo cuidado de separar cuatro cifras decimales á la derecha del resultado.

Estos procedimientos estan fundados en que, teniendo entre sí las unidades de diversos órdenes en las fracciones decimales las mismas relaciones de magnitud que en los números enteros, debe verificarse con las unidades que se llevan de las inferiores ó con las que se toman de las superiores en las operaciones con aquellas, lo mismo que se verifica con las unidades que se llevan ó toman en las operaciones con estos.

$$\begin{array}{r} 62{,}0900 \\ 23{,}0784 \\ \hline 39{,}0116 \\ \hline 62{,}0900 \end{array} \ \textit{prueba.}$$

89. *Multiplicacion de las fracciones decimales. Para efectuar esta operacion, se multiplican los dos factores entre sí sin hacer caso de la coma;* y despues de obtenido el producto total, *se separan á la derecha, por medio de una coma, tantas cifras decimales como hay en ambos factores.*

Sea, por ejemplo, *multiplicar* 35,407 *por* 12,54.

Para darnos razon del procedimiento prescrito, observaremos que las dos cantidades propuestas pueden ponerse bajo la forma

$$\frac{35407}{1000} \text{ y } \frac{1254}{100}:$$

para multiplicar entre sí estos quebrados, es necesario (n.º 59) multiplicar *numerador por numerador y denominador por denominador;* pero como los numeradores son los mismos números propuestos, hecha abstraccion de la coma, deberemos multiplicar entre sí dichos números sin comas, y tendremos el producto 44400378 de los numeradores. El de los denominadores será 100000, es decir, la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales hay en ambos factores. Nos resta solo dividir el primer producto por el segundo, lo cual evidentemente equivale á separar *cinco* cifras decimales á la derecha de aquel: así obtenemos el resultado final 444,00378: luego, etc.

$$\begin{array}{r} 35{,}407 \\ 12{,}54 \\ \hline 141628 \\ 177035 \\ 70814 \\ 35407 \\ \hline 444{,}00378 \end{array}$$

:

De otro modo. Quitando la coma en el multiplicando, queda evidentemente multiplicado por 1000, pues antes espresaba milésimas y ahora espresa unidades principales; luego en virtud de los principios del n.º 43, el producto se ha hecho por esta razon 1000 veces mayor; del mismo modo, como quitando la coma en el multiplicando se le hace 100 veces mayor, se sigue que el producto se ha hecho tambien 100 veces mayor; por consiguiente, por la supresion de las dos comas se ha hecho este producto 100000 veces mayor; luego para darle su justo valor es necesario dividirle por 100000, ó separar 5 cifras decimales á la derecha.

Si hubiera un número mayor ó menor de cifras decimales en ambos factores, se haria un razonamiento análogo.

Puede suceder que solo uno de los dos factores tenga cifras decimales. En este caso *se separan á la derecha del producto tantas cifras decimales como hay en el otro factor.* La demostracion es demasiado fácil para que nos detengamos en ella.

Por estas reglas se hallará que

1.º el producto de 4,0567 por 9,503 es igual á 38,5508201;
2.º el producto de 4,0015 por 29 es igual á 116,0435;
3.º el producto de 0,03054 por 0,023 es 0,00070242.

Advertencia. Este último ejemplo merece fijar la atencion. Haciendo abstraccion de la coma en los dos factores, y efectuando la multiplicacion, se halla por producto 70242; pero como hay *cinco* cifras decimales en el multiplicando y *tres* en el multiplicador, necesita el producto tener *ocho*, y sin embargo no tiene mas que *cinco*. Para resolver esta dificultad, observemos que debiendo espresar el producto unidades del octavo órden decimal, basta escribir á la izquierda de 70242 un número de ceros tal, que si se coloca en seguida la coma, la última cifra de la derecha ocupe el octavo lugar decimal. En este ejemplo se deben escribir *cuatro,* incluso el que ocupa el lugar de los enteros; así se obtiene 0,00070242.

90. *Division de las fracciones decimales.* Esta operacion no ofrece dificultad alguna. *Se empieza por reducir las dos espresiones propuestas á un comun denominador* (n.º 87); *despues se efectúa la division sin hacer caso de la coma, y se obtiene el cociente pedido.*

Sirva de ejemplo dividir 43,047 *por* 2,53698.

Empezaremos por escribir dos ce-	4304700	253698
ros á la derecha de 43,047, lo que	1767720	16
dá 43,04700; despues dividiremos	245532	

4304700 por 253698, y obtendremos por verdadero cociente $16\frac{245532}{253698}$.

En efecto, despues de haber escrito dos ceros á la derecha del dividendo, lo cual no altera su valor, se pueden poner los dos números propuestos bajo la forma $\frac{4304700}{100000}$ y $\frac{253698}{100000}$. Para dividir ahora el primero por el segundo, se debe multiplicar (n.º 62) la fraccion dividendo por la fraccion divisor invertida. Por consiguiente, observando que 100000 es factor comun á los dos términos, tendremos $\frac{4304700}{253698}$, es decir, *que se debe verificar la division entre los dos números, despues de haber hecho que ambos tengan igual número de cifras decimales y de haber suprimido la coma.*

Se puede decir tambien que reducidas las dos fracciones á un comun denominador, al quitarles la coma, se hacen dividendo y divisor el mismo número de veces mayores, y que por tanto no se altera el cociente (n.º 43).

Por este procedimiento se hallará que el cociente de la division de 3,4703 por 0,027 es $128\frac{143}{270}$.

34703	270
770	128
2303	
143	

El cociente de 0,596 por 0,00201 es $296\frac{104}{201}$.

91. En los ejemplos precedentes se ha obtenido facilmente la parte entera del cociente de la division: pero teniendo los términos muy grandes los quebrados propios que completan el cociente, son difíciles de valuar. Se ocurre, pues, inmediatamente la idea de investigar el modo de espresar esta fraccion en partes mas sencillas de la unidad principal, por ejemplo, en *décimas, centésimas, milésimas, etc.*

Propongámonos, pues, esta nueva cuestion general:

Dada una fraccion cualquiera de la unidad principal de cualquier naturaleza, valuarla en decimales, ó bien *convertirla en fraccion decimal.*

Sea la fraccion $\frac{13}{47}$.

Estando el número propuesto referido á la unidad principal, espresa los $\frac{13}{47}$ de esta unidad; pero como una unidad simple vale 10 *décimas*, se sigue que $\frac{13}{47}$, valdrá $\frac{130}{47}$ de *décima;* así, pues, si se disponen los dos números 13 y 47 como en la division ordinaria, se escribe luego un *cero* en el cociente para ocupar el lugar de los enteros, se pone á su lado una coma, y se divide 130 por 47, el cociente 2 que se obtiene y que se escribe á la derecha de la coma, representa el número de *décimas* contenidas en $\frac{13}{47}$; es decir, que $\frac{13}{47}$ es igual á 2 *décimas*, mas $\frac{36}{47}$ de *décima*. Del mismo modo, como 1 décima vale 10 centésimas, se sigue que $\frac{36}{47}$ de *décima* es igual á $\frac{360}{47}$ de *centésima*, ó efectuando esta nueva division, á 7 *centésimas*, mas $\frac{31}{47}$ de *centésima*. Escribiendo de nuevo un 0 á la derecha de 31, y dividiendo 310 por 47, hallaremos por cociente 6 *milésimas*, que escribiremos á la derecha de las dos cifras precedentes, y por resíduo 28, al lado del cual se escribe otro 0 para hallar las *diezmilésimas;* y así se continúa. Prolongando la operacion hasta que se hayan obtenido 5 cifras decimales, se halla que $\frac{13}{47}$ equivale á 0,27659, mas $\frac{27}{47}$ de *cienmilésima*, fraccion que puede despreciarse; en este caso se dice que 0,27659 es el valor de $\frac{13}{47}$, *aproximado hasta cienmilésimas*, puesto que la fraccion despreciada es menor que una unidad de este órden.

$$\begin{array}{r|l} 130 & 47 \\ \cline{2-2} 360 & 0,27659 \\ 310 & \\ 280 & \\ 450 & \\ 27 & \end{array}$$

En general, para convertir un quebrado ordinario en fraccion decimal, *se colocan los dos números como en la division; se escribe un cero en el cociente, y á su derecha una coma. Se escribe un cero á la derecha del numerador, y el número resultante se divide por el denominador; así se obtiene un cociente que espresa las* DÉCIMAS *y un resíduo á cuya derecha se coloca otro cero, dividiendo tambien por el denominador la cantidad resultante; así se obtiene un* *cociente que espresa* CENTÉSIMAS *y un nuevo resíduo á cuya derecha se escribe otro cero, dividiendo por el denominador la cantidad resultante: así se obtiene un cociente que espresa* MILÉSIMAS *y un tercer resíduo con el cual se opera en la misma forma*. De este modo se continúa hasta obtener cuantas cifras decimales se quieran ó exija la cuestion. Si queda algun resíduo, la fraccion decimal obtenida solo difiere del quebrado propuesto en *menos de una unidad del órden decimal en que se ha detenido la operacion.*

Si el numerador del quebrado es mayor que el denominador, *se empieza por sacar las unidades enteras*, que se escriben en el cociente, poniendo detrás una coma para separarlas de la parte fraccionaria.

Es fácil observar la analogía que existe entre esta operacion y la que tiene por objeto convertir un número fraccionario de una unidad principal cualquiera en un número complejo, es decir, en unidades principales y subdivisiones de esta unidad (véase el n.º 70).

Vamos ahora á hacer aplicacion de esta regla á los ejemplos de division presentados en el número precedente:

Dividir 43,047 *por* 2,53698 *y valuar el cociente aproximándole hasta milésimas.*

4304700	253698
1767720	16,967
2455320	
1720380	
1981920	
206034	

Despues de haber hallado como antes el cociente 16 con el resíduo 245532, se considera este resíduo como el numerador de una fraccion cuyo denominador es 253698, y se escribe un 0 á la derecha de este resíduo; despues se continúa la division, lo que dá 9 *décimas* por cociente, y por resíduo 172038; á la derecha de este resíduo se escribe otro 0, y se divide por el mismo divisor, lo que dá por cociente 6 *centésimas* y por resíduo 198192; al lado de este nuevo resíduo se escribe un 0, y se vuelve á dividir por el mismo divisor, lo que dá por cociente 7 *milésimas* y un resto que se desprecia.

De este modo se halla 16,967 con *menos de* $\frac{1}{1000}$ *de error*, puesto que la cantidad despreciada es una fraccion de *milésima.*

Del mismo modo hallaríamos 128,5296 para cociente de la division de 3,4703 por 0,027, con *menos de* 0,0001 *de error.*

Tambien, dividiendo 0,596 por 0,00201, se halla por cociente 296,51, *aproximado hasta centésimas.*

Mas tarde *(cap. V)* insistiremos en la conversion de una fraccion ordinaria en fraccion decimal, porque esta operacion presenta algunas propiedades notables, que por ahora no podemos desarrollar completamente.

92. Cuando el divisor es un número entero ó contiene menos cifras decimales que el dividendo, en lugar de escribir ceros á la derecha para que tenga el mismo denominador que el dividendo, es mas sencillo operar como vamos á ver.

1.° *Sea dividir* 437,4825 *por* 56.

437,4825	56
45 4	7,8121
68	
122	
105	
49	

Pudiendo considerar en este caso la division como si tuviera por objeto tomar la 56.ª parte del dividendo, se toma desde luego la 56.ª parte de 437, ó se divide 437 por 56, lo que dá por cociente 7 unidades, y por resíduo 45, que seguido de las cuatro *décimas* del dividendo, forma 454 *décimas*, cuya 56.ª parte es necesario tomar ahora; para esto se divide 454 por 56, y se halla por cociente 8 *décimas*, que se escriben á la derecha del 7, despues de haber colocado la coma.

El resíduo 6, seguido de las 8 *centésimas* del dividendo, dá 68 *centésimas*, que divididas por 56, dan por cociente 1 *centésima*, y dejan un resto 12, que seguido de las 2 *milésimas* del dividendo, forma 122 *milésimas;* dividiendo 122 por 56 se halla por cociente 2 *milésimas* y por resíduo 10, á cuyo lado se baja la última cifra 5, y se tiene 105, que dividido por 56, dá por cociente 1 *diezmilésima:* luego finalmente, el cociente pedido es 7,8121.

Este cociente no es exacto mas que hasta diezmilésimas; pero si se quisiera obtener mayor grado de aproximacion, bastaria poner un 0 á la derecha del 49 y continuar la operacion aplicando la regla del n.° 91.

Es fácil conocer que esta manera de operar es mas sencilla que si desde luego se hubiesen escrito 4 ceros á la derecha del divisor para darle el mismo denominador que al dividendo.

Del mismo modo se hallaria que 14,37586, dividido por 219, dá por cociente 0,06564, aproximado hasta *cienmilésimas.*

2.° *Sea ahora dividir* 3,40567 *por* 0,039.

Observemos que en virtud de los principios demostrados en los números 43 y 66 se pueden multiplicar por un mismo número el dividendo y el divisor sin alterar el cociente de la division.

3405,67	39
285	87,32
126	
97	
19	

Esto supuesto, si se multiplica el divisor por 1000, lo que equivale (número 86) á suprimir la coma, y se multiplica el dividendo por 1000, lo que equivale (n.º 86) á correr la coma *tres* lugares hácia la derecha, la cuestion habrá quedado reducida á dividir 3405,67 por 39, operacion que está comprendida en el caso precedente.

Regla general. Siempre que el dividendo contiene *mas* cifras decimales que el divisor, *se suprime en este la coma,* y en el dividendo se corre *tantos lugares á la derecha como cifras decimales habia en el divisor;* despues se *efectúa la division* como en el caso en que el dividendo solo contiene guarismos decimales.

Por una razon análoga, si el divisor es un número entero terminado por *uno* ó *varios* ceros, se pueden suprimir estos, con tal que se corra la coma en el dividendo tantos lugares á la izquierda como ceros habia á la derecha del divisor.

Así, por ejemplo, dividir 234,15 por 8900, equivale á dividir 2,3415 por 89, puesto que no se ha hecho otra cosa que hacer 100 veces menores los dos términos de la division.

Hemos dado estas últimas reglas únicamente como medios mas sencillos de operar en la práctica, pues la regla establecida anteriormente (n.º 90) comprende todos los casos.

93. Hé aquí nuevas aplicaciones:

Determinar: 1.º *el cociente de* 21,234 *por* 59,37469, *aproximado hasta milésimas.*

Resultado 0,357.

2.º *El cociente de* 294 *por* 7,356, *aproximado hasta diezmilésimas.*

Resultado 39,9673.

3.º *El cociente de* 0,004736 *por* 0,034, *aproximado hasta cienmilésimas.*

Resultado 0,13929.

Es inútil decir que las pruebas de estas operaciones se hacen por la multiplicacion, y las pruebas de la multiplicacion por la division.

§. II. Nuevo sistema de pesos y medidas.

Ahora estamos ya en disposicion de apreciar la ventaja que lleva el cálculo de las fracciones decimales al de los quebrados de cualquier especie, y de juzgar cuán importante sería establecer un sistema de pesos y medidas que estuviese en relacion con el Sistema decimal. Así lo han conseguido los sabios á costa de muchos esfuerzos, venciendo los obstáculos que oponian la ignorancia y las preocupaciones. Empezaremos por dar á conocer la nomenclatura de este Sistema.

Medidas lineales ó de longitud.

94. La unidad de longitud, que lleva el nombre de **metro**, es la *diezmillonésima* parte de la distancia del polo al ecuador, contada en el meridiano que pasa por París.

En virtud de operaciones ejecutadas y comprobadas con la mayor precision, se ha visto que el *metro* valuado en piés, pulgadas y líneas, es igual á 3 piés, 7 pulgadas, 0,805 líneas; valor aproximado hasta milésimas de línea.

Para designar las medidas mayores y menores que el metro, se ha convenido en emplear las palabras (sacadas del griego y del latin):

MIRIA, KILO, HECTO, DECA, DECI, CENTI, MILI,

que significan:

diez mil, mil, ciento, diez, décima de, centésima de, milésima de,

y que acompañan á la palabra *metro*.

Así se ha formado el cuadro siguiente:

Miriámetro	ó medida de	diez mil metros.
Kilómetro	....	mil metros.
Hectómetro	....	cien metros.
Decámetro	....	diez metros.
Metro	....	*unidad* principal.
Decímetro	....	décima de metro.
Centímetro	....	centésima de metro.
Milímetro	....	milésima de metro.

Advertencia. El miriámetro y el kilómetro son las medidas itinerarias adoptadas actualmente; el miriámetro es un poco menos de *doble* de la legua ordinaria, y el kilómetro un poco menos de la *quinta parte*.

Medidas de superficie (*).

95. La unidad natural de las superficies es el *metro cuadrado;* pero cuando se trata de grandes superficies agrarias, se toma por unidad un *decámetro cuadrado*, es decir, un cuadrado que tiene por lado un decámetro, ó sea diez metros; esta unidad se llama *Area.*

Los múltiplos del área y sus subdivisiones se designan por medio de las palabras *miria*, *kilo, hecto...*, *deci*, *centi...* empleadas en el número 94.

Así *Miria-área* ó *miriárea*	significa	diez mil áreas.
Kilo-área ó *kiláreα*	....	mil áreas.
Hecto-área ó *hectárea*	....	cien áreas.
Deca-área ó *decárea*	....	diez áreas.
Area	....	*unidad* principal.
Deciárea	....	décimo de área.
Centiárea	....	centésimo de área.
Miliárea	....	milésimo de área.

Advertencia. La miriárea, hectárea, área y centiárea son las únicas medidas usadas; la *hectárea* vale poco mas ó menos fanega y media, y reemplaza á esta medida; la centiárea no es otra cosa que el *metro cuadrado.*

Medidas de volúmen.

96. La unidad de volúmen es el METRO CÚBICO; es decir, un cubo (ó dado) que tiene un metro de lado. Los múltiplos y submúltiplos del *metro cúbico* no han recibido en general denominaciones particulares; sin embargo, la 1000.ª parte del metro cúbico se llama *decímetro cúbico*, porque en efecto es un cubo que tiene un *decímetro* de lado: la 1000000.ª parte del metro cúbico se llama tambien *centímetro cúbico*, porque es un cubo que tiene un *centímetro* de lado, etc...

(*) Para la inteligencia completa de algunos términos y espresiones que usaremos en la nomenclatura de las nuevas medidas, se necesita recurrir á la GEOMETRÍA.

Algunas veces la unidad principal ó *metro cúbico* toma el nombre de ESTERIO (*).

Medidas de capacidad para los líquidos y los granos.

97. La unidad de capacidad es el *decímetro cúbico*, que se llama LITRO. Sus múltiplos y submúltiplos mas usados son los siguientes:

Hectólitro ó medida de	cien litros.
Decálitro...............	diez litros.
LITRO................	*unidad* principal.
Decílitro...............	décima de litro.
Centílitro...............	centésima de litro.

Advertencia. El litro reemplaza al cuartillo para los líquidos, y viene á valer el doble.

El *hectólitro* reemplaza la *fanega* para los áridos, y vale poco menos del doble.

El *kilólitro*, que tiene la capacidad de un metro cúbico, y el *miriálitro*, casi nunca se usan.

Pesos.

98. La unidad de peso es el de un *centímetro cúbico* de agua destilada y en su *maximum* de densidad, que toma el nombre de GRAMO.

Su equivalencia en adarmes es 0,556, es decir, poco mas de medio adarme.

Hé aquí el cuadro de sus múltiplos y submúltiplos decimales:

Miriágramo, que vale	diez mil gramos.
Kilógramo............	mil gramos.
Hectógramo...........	cien gramos.
Decágramo............	diez gramos.
GRAMO...............	*unidad* principal.
Decígramo............	décima de gramo.
Centígramo...........	centésima de gramo.
Milígramo............	milésima de gramo.

(*) En nuestro sistema métrico legal no se ha adoptado esa palabra del sistema primitivo (Nota del T.).

Advertencia. El kilógramo es la unidad usual de peso, y vale poco mas de dos libras (*).

Monedas.

99. La unidad decimal monetaria no se ha establecido en España, habiéndose limitado el gobierno á prescribir la nueva division del *real* que hemos notado en el capítulo precedente al tratar de nuestro sistema comun de pesos, medidas y monedas.

100. Conclusion. Tal es la esposicion de la nomenclatura de las nuevas medidas: con solo eso pueden ya conocerse las ventajas de este sistema sobre los antiguos.

1.° Es uniforme y sencillo, porque las unidades principales y sus subdivisiones siguen siempre entre sí la ley del Sistema decimal de numeracion; y ya se sabe cuán fácil es el cálculo de los quebrados decimales.

2.° Es fijo, invariable y susceptible de ser adoptado en todos los paises, porque no pertenece á ningun clima ni nacion en particular.

(*) Los sabios á quienes se debe el Sistema decimal de pesos y medidas, idearon al principio tomar por *unidad* de peso, el de un decímetro cúbico de agua destilada, porque este peso, que corresponde al *kilógramo* actual, era muy propio para reemplazar la unidad antigua, ó sea la *libra;* le habian dado el nombre de *grave*, pero no tardaron en reconocer los inconvenientes siguientes:

1.° Los múltiplos del grave eran el *decágrave*, el *hectógrave*, el *kilógrave* y el *miriágrave;* y siendo el peso de un decágrave igual á mas de 20 libras, los otros múltiplos eran muy superiores á los pesos empleados en las artes y en el comercio.

2.° Los submúltiplos eran el *decígrave*, el *centígrave* y el *milígrave*. Como este último peso no es otra cosa que el *gramo* actual, y equivale á 20 granos poco mas ó menos, es muy superior á los que se emplean en pesos un poco delicados; por consiguiente era necesario formar nuevas subdivisiones, tales como el *diezmilígrave*, *cienmilígrave* y *millonígrave*. Los sabios discurrieron dar un nombre particular al *milígrave*, y habian formado una unidad secundaria llamada en el idioma en que se formó la nomenclatura *gravet*, y de aquí dedujeron el *decigravet*, el *centigravet* y el *miligravet*. Sin embargo, la regularidad de la nomenclatura estaba destruida. La nueva no ofrece estos inconvenientes, y comprende todos los pesos de que nos servimos ordinariamente.

Todas las medidas proceden de una primitiva, el *metro*, que se ha tomado de las dimensiones del globo. En Francia hasta las monedas tienen su enlace con esa medida, porque el *franco*, que es la unidad monetaria, pesa *cinco gramos*, y el *gramo* es el peso del *centímetro cúbico* de agua destilada.

101. La aplicacion de las cuatro reglas de la Aritmética al nuevo Sistema de pesos y medidas no puede presentar dificultad alguna despues de lo esplicado sobre las fracciones decimales, y por consiguiente no nos detendremos en este punto. Pero lo haremos en esponer los medios de convertir unos pesos y medidas en otros, resolviendo al efecto dos problemas generales muy necesarios en la práctica mientras subsistan en uso los dos Sistemas; porque no basta sustituir el uno al otro, sino que es preciso además sostener la proporcion entre el precio y la cantidad de los objetos de comercio valuados en ambos.

El ejemplo siguiente hará mas comprensible lo acabado de decir.

Un comerciante vende la vara de paño á 45 reales, 17 maravedises; quiere saber á cómo debe vender el metro de la misma tela para guardar proporcion de valores.

Muy fácil será contestarle si acertamos á encontrar el valor del metro en varas, porque entonces el número hallado nos dirá la parte del valor de la vara en reales que hemos de tomar para tener el del metro.

Por consiguiente, tenemos que resolver dos problemas. 1.° *Espresar el valor de un número complejo del Sistema ordinario en unidades análogas y sus subdivisiones del Sistema decimal.* 2.° Recíprocamente. *Espresar un número dado de unidades principales y de sus subdivisiones respectivas del Sistema decimal en un número complejo de especie análoga del Sistema ordinario.*

Trataremos sucesivamente estas dos cuestiones respecto de las unidades mas usuales (*).

(*) Nos vemos en la precision de hacer leves alteraciones en el testo de este y otros puntos si hemos de acomodarle al uso de los jóvenes de nuestro pais: escusamos decir que nada variamos de lo sustancial. Aquí, sin embargo, por no alterar la numeracion del testo, ponemos el párrafo siguiente consagrado por el autor á la conversion de francos.... en libras tornesas, sueldos y dineros, que era la antigua moneda francesa (Nota del Trad.).

102. 1.° *Se propone el problema de averiguar en francos, décimos y céntimos, el valor de 245 libras tornesas, 19 sueldos y 7 dineros.* (La libra se dividia en 20 sueldos y este en 12 dineros.)

El franco vale, segun han calculado los autores del Sistema decimal, $\frac{1}{80}$ mas que la libra tornesa, y como $\frac{1}{80}$ de libra vale $\frac{20}{80}$ de sueldo, ó sea $\frac{1}{4}$ de sueldo, ó 3 dineros, resulta que el franco vale 1 *libra*, 0 *sueldos*, 3 *dineros*, ó 243 *dineros*.

Reduzcamos á dineros las 245 libras, 19 sueldos y 7 dineros: al márgen se ve la operacion que dá por resultado 59035 dineros: dividiendo ahora este número por los dineros que vale un franco, es decir, por 243, el cociente valuado en decimales (número 91) representará el número pedido de francos, décimos y céntimos. Hecho esto, se obtienen 242,942 francos, ó bien 242 francos, 9 décimos y 4 centésimos, á cuyo valor falta menos de *un centésimo de franco* para ser completamente exacto.

245 lb., 19 s., 7 d.	
20	
4900	
19	
4919	
12	
59035	243
1043	242 fr., 942
0715	
2290	
01030	
0580	
94	

Se ve, pues, por este ejemplo, que *para valuar en francos, décimos y céntimos un número dado de libras, sueldos y dineros, se debe reducir á dineros el número propuesto y dividir el resultado por* 243 (que son los dineros que vale un franco), *valuando el cociente en decimales,* y continuando la operacion hasta centésimas.

La prueba de esta operacion se hace por medio de la cuestion inversa, como vamos á ver.

2.° *Se desea saber en libras tornesas, sueldos y dineros, el valor de 242 francos y 94 céntimos, ó mejor de 242 fr., 942.* (Tomamos en cuenta aquí las milésimas de franco para hacer mas exacta la comprobacion.)

Como *un franco* vale 1 libra mas $\frac{1}{80}$ de libra, resulta que

242 fr., 942 valdrán 242 fr., 942 mas $\frac{1}{80}$ de esa misma cantidad: tomaremos, pues, la 80.ª parte del número dado y la sumaremos con el mismo número, con lo cual tendremos el valor de los francos y su fraccion en libras y decimales de libra, faltándonos solo valuar el decimal en sueldos y dineros.

Para tomar la 80.ª parte de 242,942 se tomará primero la 8.ª parte, que es 30,36775, y ahora se dividirá por 10, corriendo la coma un lugar hácia la izquierda (n.º 86): así se encuentra 3,036775, que sumado con 242,942, dá 245 lb., 978775. Para valuar la fraccion decimal en sueldos, se multiplica por 20, lo cual dá 19 s., 575500; y para valuar en dineros la fraccion 0,575500, se multiplica por 12, lo cual dá finalmente 6 d., 906, ó lo que es igual, 7 dineros, pues le falta menos de 1 décima: luego en resúmen,

242,	942
3,	036775
245 lb.,	978775
	20
19 s.,	575500
	12
6 d.,	906000
245 lb.,	19 s., 7 d.

242 fr., 942 equivalen á 245 libras, 19 sueldos, 7 dineros.

Regla general. *Para convertir en libras, sueldos y dineros un número dado de francos, décimos y céntimos, escríbase el número propuesto y debajo de él su* 80.ª *parte* (que se obtiene tomando la 8.ª parte y corriendo la coma un lugar hácia la izquierda); *súmense despues los dos números,* y se obtendrá el número propuesto espresado en *libras y fraccion decimal de libra.*

Multiplíquese por 20 *esa fraccion decimal* (no la parte entera que espresa *libras* segun se sabe), y se obtendrá un producto cuya parte entera representa los *sueldos*.

Finalmente, *multiplíquese por* 12 *la fraccion decimal de dicho producto*, y se obtendrá otro producto cuya parte entera espresa los *dineros*, despreciando la parte decimal, á no ser que la cifra de *décimas* sea 5 ó con un número mayor, en cuyo caso se añadirá *una unidad* al número de *dineros*.

Apliquemos las dos reglas al nuevo ejemplo siguiente:

Se quiere saber en francos, décimos y céntimos, el valor de 3179 *libras,* 17 *sueldos,* 8 *dineros.*

Primer problema.

```
3179 lb., 17 s., 8 d.
  20
------
63597
   12
------
763172 | 243
   341 |---------
   987 | 3140,625
   1520
    620
   1340
    125
```

Resultado: 3140 fr., 63 cent.

Segundo problema.

```
3140    ,625
  39    ,2578125
----------------
3179 lb.,8828125
              20
----------------
  17 s. ,6562500
              12
----------------
   7 d. ,8750000
```

Resultado: 3179 lb., 17 s., 8 d.

Advertencia. En la cuestion primera, como la cifra de las milésimas del cociente es 5, y va seguida de otras muchas, se ha tomado por resultado 3140 fr., 63 *céntimos*, pues así el error cometido *por esceso* es menor que el que se cometeria *por defecto* si se despreciáran la cifra 5 y las siguientes.

En la segunda cuestion ó problema, el entero del último resultado es 7 dineros, y sin embargo, hemos puesto 8 dineros, porque la cifra de las *décimas* es 8, número mayor que 5.

Del mismo modo se hallaria que 56275 francos, 97 céntimos, son el valor de 56979 libras, 8 sueldos, 5 dineros, y recíprocamente.

Medidas lineales.

103. Antes de pasar á resolver las dos cuestiones del número 101, es necesario fijar el valor de la vara en metros y del metro en varas, es decir, espresar *una unidad lineal ordinaria en medidas decimales*, y al contrario, *la nueva unidad lineal en medidas antiguas*.

Sabemos que el metro vale 3,5889221 piés de Burgos: luego si dividimos este número por 3, que son los piés que tiene la vara, hallaremos el valor del metro en varas. Hecho así, se obtiene que el metro vale 1,1963073 varas, es decir, á 1 vara, 1963073 diezmillonésimas de vara, valor que se diferencia del verdadero en menos de *una* diezmillonésima.

Recíprocamente, dividiendo 3, número de piés que tiene la vara, por 3,5889221, número de piés que contiene el metro, se halla 0,8359056, que es el valor del metro en varas, con la misma aproximacion.

Consecuencia. Siendo el *miriámetro* igual á 10000 metros, valdrá 10000 veces 1,1963073 varas, ó 11963 v., 073, lo cual prueba que el miriámetro, como dijimos (n.º 94), vale menos de *dos* leguas españolas de á $6000^{2}/_{3}$ varas.

Esto supuesto, 1.º se quiere saber en *metros*, *decímetros*, *centímetros*, *etc.*, *el valor de* 85 *varas*, 2 *piés*, 6 *pulgadas*.

Empiécese por reducir á pulgadas el complejo dado, lo cual dá 3090 pulgadas; *despues divídase este número por el número de pulgadas que contiene el metro*, que son 43,067; así se hallará 71 met., 748, valor aproximado hasta milímetros.

Luego 85 varas, 2 piés, 6 pulgadas, equivalen á 71 metros, 748 milímetros.

85 v., 2 p., 6 pulg.
3
257
12
3090000 | 43,067
075310 | 71,74867
322430
209610
373420
288840
304380
2911

2.º *Se quiere saber el valor de* 71 met., 74867 *en varas, piés y pulgadas.*

Como un metro vale 3 piés, 5889, multiplicaremos los 71 met., 74867 por ese valor, y tendremos los piés á que equivale el número de metros propuesto, valuando luego el resultado fraccionario de un modo conveniente.

Hé aquí la operacion:

Multiplicando 71 m., 74867 por 3,5889, como se ve al márgen, se obtienen 257 piés y una fraccion, es decir, 85 varas, 2 piés y una fraccion de pié. Despreciando los *cinco* últimos guarismos de esta, y multiplicando los demas por 12, se obtienen 5 pulgadas, 985 milésimas, es decir, 6 pulgadas: luego los 71 m., 74867 equivalen á 85 varas, 2 piés, 6 pulgadas, lo cual comprueba la operacion anterior.

71 m., 74867
3,5889
64573803
57398936
57398936
35874335
21524601
257,498801763
12
9976
4988
5,9856

Advertencia. En la valuacion en pulgadas se han despreciado las cinco últimas cifras decimales, porque se observa que tomando solo en cuenta las diezmilésimas, el producto obtenido solo se diferenciará del verdadero en $\frac{12}{10000}$, lo cual es una cantidad despreciable. Esta observacion abrevia mucho los cálculos.

104. *Tratándose de telas, valuar en metros, decímetros y centímetros* $29\frac{7}{12}$ varas (*).

Sabemos ya que la vara vale 0,8359056 metros; multiplicaremos, pues, esta cantidad por 29, y tendremos el producto que se ve al márgen: para tener ahora el valor de los $\frac{7}{12}$, observaremos que este quebrado equivale á $\frac{6}{12}$ ó $\frac{1}{2}$ mas $\frac{1}{12}$: tomaremos, pues, la mitad del multiplicando, y será su producto por $\frac{6}{12}$, y luego la sesta parte de este producto, y tendremos el producto del multiplicando por $\frac{1}{12}$: sumando, por último, todos los productos parciales, se obtiene el total 24 m., 72887, que es el valor de las $29\frac{7}{12}$ varas.

$$
\begin{array}{lr}
 & 0,8359056 \\
 & 29\,\frac{7}{12} \\
\hline
 & 75231504 \\
 & 16718112 \\
\hline
 & 24,2412624 \\
\frac{6}{12}\ldots\ldots & 0,4179528 \\
\frac{1}{12}\ldots\ldots & 0,0696584 \\
\hline
 & 24,7288736
\end{array}
$$

105. *Pesos.* La equivalencia legal entre el kilógramo y la arroba comun española es de 1 á 11,5023255, es decir, que la arroba vale 11 kil., 5023255. Luego la libra valdrá la 25.ª

(*) En el número anterior el autor habla de *toesas* y *metros*, aquí habla de *varas (aunes)* y *metros*: nosotros hemos creido deber usar la vara subdividida en piés, etc., en el primer caso, y subdividida en palmos en el segundo (Nota del T.).

parte de este número, ó 0 kil., 460093: recíprocamente, el kilógramo valdrá 2 lb., 1734, ó 0 @., 0869389: donde se ve que el kilógramo vale poco *mas* de *dos libras*, ó que la libra vale algo *menos* de *medio kilógramo*.

Se quiere saber el valor de 74 *libras,* 9 *onzas,* 13 *adarmes en kilógramos y sus subdivisiones.*

Para que se vea otro método de resolucion de esta clase de problemas á mas del usado en los ejemplos anteriores, resolveremos este del modo siguiente:

Tomando las 74 libras por parte entera, reduciremos las 9 onzas á fraccion decimal de libra, dividiendo 9 por 16, que son las onzas que tiene una libra, y tendremos 0,5625; reduciremos igualmente los 13 adarmes á fraccion decimal de libra, dividiendo 13 por 256, que son los adarmes que tiene una libra, y tendremos 0,050781: sumaremos estos números, y dividiremos la suma 74,613281 por 2,1734, que son las libras que vale un kilógramo: el cociente 34,3320 son los kilógramos á que equivale el número propuesto.

Hé aquí el cálculo:

```
90    | 16                1300      | 256
100   |--------           02000     |----------
 040  | 0,5625              2080    | 0,050781
  080                        0320
   00                         064
```

```
74, libras.
 0,5625
 0,050781
----------
74,613281 : 2,1734
```

```
74613281 | 21734
094112   |---------
 071768  | 34,3302
  065661
   0045900
     02432
```

Recíprocamente: *se desea saber en libras, onzas y adarmes, el valor de* 34 kil., 3302.

Multiplíquese el número dado por las libras que contiene un kilógramo, es decir, por 2,1734, y se tendrá el número pedido en libras y fraccion decimal de libra, que se valuará en onzas y adarmes.

$$\begin{array}{r} 34,3302 \\ 2,1734 \\ \hline 1373208 \\ 1029906 \\ 2403114 \\ 343302 \\ 686604 \\ \hline 74,61325668 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0,613256 \\ 16 \\ \hline 3679536 \\ 613256 \\ \hline 9,812096 \\ 16 \\ \hline 4872576 \\ 812096 \\ \hline 12,993536 \end{array}$$

Donde se ve que el número de kilógramos dado equivale á 74 libras, 9 onzas y 13 adarmes, pues solo faltan 7 milésimas de adarme para valer este número, que es el mismo dado en el problema directo.

106. Se han publicado tablas de comparacion de las medidas comunes con las nuevas, y vice-versa, por cuyo medio se hacen facilísimamente todas esas reducciones. Hé aquí el modo de usarlas.

Supongamos que se trata de construir la *tabla de comparacion entre las medidas lineales de uno y otro Sistema.*

Ya hemos determinado (n.º 103) el valor de las varas en metros, que es 0,8359056.

Multiplicando este número por 2, por 3, por 4,.... por 9, se tendrá el valor de 2, 3, 4,.... 9 varas en metros.

Adelantando la coma *uno*, *dos*, *tres*,.... lugares hácia la derecha, se irán obteniendo los valores de 10, 20, 30,.... 100, 200, 300,.... 1000, 2000, 3000,.... varas, y así sucesivamente.

Tomando despues la tercera parte del valor de la vara, se tendrá 0m.,2786352, que es el valor del pié en metros, y duplicándolo, se tendrá el valor de 2 piés.

Tomando la *duodécima* parte del valor de un pié, se tendrá el de la pulgada, que multiplicado por 2, 3,.... 11, nos dará el valor de 2, 3,.... 11 pulgadas.

La misma operacion se hace para valuar las líneas.

Esto supuesto, propongámonos *saber cuánto valen en metros* 365 *varas*, 2 *piés*, 6 *pulgadas*, 9 *líneas*.

Se toman sucesivamente en la tabla los valores de 300 varas, de 60 varas y de 5 varas; despues los de 2 piés, 6 pulgadas y 9 líneas; y puestos todos en columna, se suman, y se tendrá el número de metros pedido. Así, se obtienen siempre las reducciones por simples operaciones de sumar.

En la cuestion inversa se halla primero el valor de un número de metros y fracciones decimales de metro, espresado en varas y fracciones decimales de vara, que se valúan despues en piés, pulgadas y líneas.

Pero como las tablas pudieran estar equivocadas, y á veces no se tienen á la mano ó no dan el grado de aproximacion que se desea, es muy conveniente saber las operaciones directas de reduccion que hemos espuesto, teniendo bien presentes los valores de las unidades principales.

107. Volvamos ahora al problema del número 101, que habíamos suspendido para investigar los medios de resolverlo, los cuales nos han ocupado hasta aquí.

Un comerciante vende la vara de paño á 45 reales y 17 maravedises: se quiere saber á cómo debe vender proporcionalmente el metro.

Como el metro vale 1 vara, 1963, deberá valer 1,1963 veces lo que la vara valga: luego multiplicando por ese número el precio de la vara, se tendrá el del metro: hecho así, se obtiene 54 rs., 43165, es decir, 54 reales y una fraccion que se valuará en maravedises multiplicándola por 34.

Otro problema. *Costando á 19 reales, 26 maravedises la libra de un género, se quiere saber cuánto costarán* 15 kil., 25 *del mismo.*

Como cada kilógramo vale 2 lb., 1734, los 15 kil., 25 valdrán 33 lb., 144: multiplicando, pues, este número de libras por 19 rs. 26 mrs., valor de una, se tendrá 655 rs., 058, valor buscado de los kilógramos (*).

(*) Las primeras ediciones de esta obra hasta la 13.ª terminaban este capítulo con un método de abreviacion para las multiplicaciones y divisiones en que entran muchas cifras decimales, cuando solo se necesita cierto grado de aproximacion. Ahora se ha trasladado ese método al fin de la obra en una nota titulada *Nota sobre las aproximaciones numéricas.*

SEGUNDA PARTE.

CAPITULO V.

Propiedades generales de los números.

108. INTRODUCCION. Antes de pasar adelante en la ciencia de los números, y á fin de descubrir mas facilmente nuevas propiedades, es indispensable tomar del Algebra algunos materiales, como las letras y los signos, por cuyo medio se indican de una manera general y abreviada las operaciones y los razonamientos exigidos por la resolucion de un problema.

Diez son esos principales elementos que vamos á esplicar sucesivamente.

1.° Las *letras*, que se usan en vez de cifras para designar los números.

Su uso ofrece á la vez una escritura mas concisa y mas general que la de las cifras, y hace resaltar mejor la existencia de ciertas propiedades correspondientes á una ó muchas clases de números.

2.° El signo $+$, que sirve para indicar la adicion de dos cantidades, y se enuncia *mas*.

Así, $45 + 23$ se enuncia 45 *mas* 23, lo cual significa que se han de sumar 45 y 23: $a+b+c$ se enuncia a mas b mas c, es decir, que ha de sumarse el número espresado por a con el espresado por b y el espresado por c.

3.° El signo —, que se enuncia *menos*, y se coloca delante de un número que debe restarse de otro.

Así, $73 - 49$ se enuncia 73 *menos* 49; es decir, 73 *dis-*

minuido en 49, ó el esceso de 73 sobre 49: $a-b$, se enuncia a menos b.

4.° El signo de la multiplicacion, que es ×, ó un *punto* que se coloca entre los dos números, y se enuncia *multiplicado por*.

Así, 29×35, ó $29 \,.\, 35$, se enuncian 29 *multiplicado por* 35, es decir, el *producto de* 29 *por* 35: $a \times b$, ó $a \,.\, b$, se enuncian a multiplicado por b.

Advertencia. Cuando los números, cuya multiplicacion ha de indicarse, estan representados por letras, se ha convenido en escribirlos unos en pos de otros sin interposicion de signo alguno; así, ab significa tambien a multiplicado por b. Pero entiéndase bien que la notacion ab no puede usarse mas que cuando los números estan representados por letras; porque si se quisiera, por ejemplo, representar el producto de 5 por 6 y se escribiera 56, se confundiria esta notacion con el número *cincuenta y seis*. En este caso es, pues, indispensable emplear el signo × ó un *punto*, escribiendo 5×6, ó $5 \,.\, 6$.

5.° El signo de la division, compuesto de dos puntos (:), que colocan entre el dividendo y el divisor, ó una raya ——, sobre la cual se coloca el dividendo y debajo el divisor.

Así, $24 : 6$, ó $\frac{24}{6}$, se enuncia 24 *dividido por* 6, ó *el cociente de* 24 *por* 6. Así tambien $a : b$, ó $\frac{a}{b}$, se enuncian a dividido por b. La notacion $\frac{a}{b}$ es la mas usada.

6.° El *coeficiente*, signo que se emplea para indicar la adicion de varios números espresados por letras. Así, en vez de escribir $a+a+a+a+a$, para indicar la suma de 5 números iguales á a, se escribe $5a$. Así tambien $11a$ indica la adicion de 11 números iguales á a; $12ab$ es la adicion de 12 números iguales al producto de a por b.

Por consiguiente, *el coeficiente es un número particular* escrito á la izquierda de otro representado por una ó muchas letras, *que indica cuántas veces debe tomarse por sumando el número representado por aquella ó aquellas letras*.

7.° El *esponente*, que sirve para indicar las veces que entra por factor de un producto un número representado por una letra. Así, en lugar de escribir $a \times a \times a \times a \times a$, se escribe mas simplemente a^5, y se enuncia a elevada á 5, ó a elevada á la *quinta potencia*, ó *a cinco*, espresion abreviada.

Se llama *potencia* el resultado de la multiplicacion de varios números iguales; y *grado* de la potencia el número de factores que se multiplican.

El *esponente*, signo de este grado, *se escribe á la derecha y un poco mas alto que la letra, y designa cuántas veces entra como factor de un producto la cantidad espresada por aquella letra* (cuando el esponente es 1 no se escribe: así, a^1 es lo mismo que a).

Se llama *raiz segunda, tercera, cuarta,....* de un número, otro número que elevado á la *segunda, tercera, cuarta,....* potencia, reproduce el número primitivo. Así, 3 es la raiz segunda de 9, porque 3 veces 3 son 9; 7 es raiz segunda de 49, porque 7 multiplicado por 7 reproduce el 49; 4 es la raiz tercera de 64, porque 4 veces 4 son 16, y 4 veces 16 son 64.

Las *raices segunda y tercera* suelen tambien llamarse *raices cuadrada y cúbica*.

8.° El signo $\sqrt{}$, que se coloca delante de un número cuando se quiere indicar que se le ha de estraer la raiz de cierto grado. Así, $\sqrt[3]{a}$ se enuncia *raiz tercera* de a; $\sqrt[4]{b}$ se enuncia *raiz cuarta* de b.

Cuando se quiere indicar la estraccion de la raiz segunda ó cuadrada, se escribe el signo $\sqrt{}$ delante del número sin colocar entre sus brazos número alguno; así $\sqrt{a}$ significa *raiz cuadrada* ó *segunda* de a.

9.° El signo por cuyo medio se indica la igualdad de dos cantidades, que es el signo $=$, y se enuncia *es igual á*, ó *igual á*. Así, $a=b$, signifia a es igual á b, ó a igual b.

Para espresar brevemente que el esceso de 36 sobre 25 es igual á 11, se escribe $36-25=11$; es decir, 36 menos 25 es igual á 11.

Las espresiones $a=b$, $36-25=11$, se llaman *igualdades;* la cantidad escrita á la izquierda del signo $=$ se llama *primer miembro,* y la que está á la derecha *segundo miembro*.

10.° El signo de *desigualdad* $>$ ó $<$, que sirve para espresar que una cantidad es mayor ó menor que otra (observando que la abertura del signo se vuelve siempre hácia la cantidad mayor). Así, $a>b$ indica que a es *mayor* que b; $a<b$ significa que a es *menor* que b.

109. Para dar una idea del empleo de todos estos signos y

de la sencillez del lenguaje algébrico, hagamos algunas aplicaciones.

Supongamos primero que se quiere espresar que un número representado por a se ha de elevar á la *cuarta* potencia, que el producto resultante se ha de multiplicar *tres* veces seguidas por b, y que, en fin, el nuevo producto se ha de multiplicar *dos* veces por c, se escribirá simplemente $a^4b^3c^2$.

Si se quiere despues espresar que ha de hacerse la suma de 7 números iguales á ese producto, ó sea multiplicarle por 7, se escribirá $7a^4b^3c^2$.

Así tambien, $6a^5b^2$ es la espresion abreviada de 6 veces el producto de la 5.ª potencia de a por la 2.ª potencia de b.

$3a-5b$ es la espresion abreviada del esceso del triplo de a sobre el quíntuplo de b.

$2a^2-3ab+4b^2$ es la espresion abreviada del duplo del cuadrado de a, disminuido en el triplo del producto de a por b, y aumentado en el cuádruplo del cuadrado de b.

Se llama *monomio*, ó cantidad de un solo término, ó simplemente *término*, una cantidad algébrica cuyas partes no estan separadas unas de otras por los signos de adicion ó sustraccion; y *polinomio*, ó cantidad de varios términos, una espresion algébrica compuesta de varias partes enlazadas por los signos + ó —; así, $3a$, $5a^2$, $7a^8b^2$, son monomios; $3a-5b$, $2a^2-3ab+4b^2$, son polinomios; la primera de estas dos espresiones es un *binomio*, porque consta de *dos* términos solos; la segunda es un *trinomio*, porque consta de *tres* términos.... etc.

Veamos ahora cómo pueden efectuarse con cantidades espresadas algebráicamente las operaciones fundamentales del Aritmética, concretándonos á los casos mas simples, que son los necesarios para servir de base al resto de este *Tratado*.

110. *Adicion*. Para espresar que han de sumarse los dos números a y b, se escribe simplemente $a+b$. Así tambien, $a+b+c$, indica la suma de los números a, b, c, segun las notaciones convenidas: y la suma de las cantidades $a-b$ y $c+d-f$, es $a-b+c+d-f$.

Si se tuvieran que sumar $a-b$ y $b-c$, se escribiria $a-b+b-c$; pero como por un lado se quita b y por otro se añade, estas dos operaciones opuestas se compensan, reduciéndose la espresion á $a-c$. Esta simplificacion se designa en Algebra con el nombre de *reduccion de términos semejantes*.

111. *Sustraccion*. Para restar b de a, se escribirá $a-b$.

Así tambien, si de $a-b$ se hubiera de restar c, se escribiria $a-b-c$.

Sea ahora restar la espresion $c-d$ de la espresion $a-b$: podrá la sustraccion indicarse de este modo: $a-b-(c-d)$, *escribiendo entre parentésis la cantidad* c—d, *y poniendo delante de ella el signo* —. Pero cuando se quiere reducir el resultado á un solo polinomio, hé aquí cómo debe discurrirse:

Si de $a-b$ hubiéramos de restar entera la cantidad c, el resultado sería $a-b-c$; pero no es toda la cantidad c la que debemos restar, sino c disminuida en d; por consiguiente, al resultado $a-b-c$ le faltan tantas unidades como tiene d para ser el verdadero: añadiendo, pues, d á $a-b-c$, tendremos $a-b-c+d$, que será el verdadero resto.

De donde resulta que *para restar un polinomio de otro, es necesario escribir el primero detrás del segundo, cambiando los signos al sustraendo.*

En virtud de esta regla y por razonamientos análogos se harian las restas siguientes:

$$3a-(2b-3c)=3a-2b+3c.$$
$$5a-4b-(6d-f+g)=5a-4b-6d+f-g.$$

112. *Multiplicacion.* Sea multiplicar a^4 por b^3.

Escribiremos $a^4 \times b^3$, ó simplemente a^4b^3.

Pero si hubiéramos de multiplicar a^5 por a^3, observaremos que siendo el número a cinco veces factor en el multiplicando y tres veces factor en el multiplicador, debe ser $5+3$ veces, ú 8 veces factor en el producto: así tendremos $a^5 \times a^3 = a^8$; es decir, que *cuando la letra es la misma en ambos factores de la multiplicacion, se escribe una sola vez, dándole por esponente la suma de los esponentes de los factores.* Del mismo modo se haria $a^4b^3 \times a^2b^2 = a^6b^5$; $a^2b \times ab^3 = a^3b^4$; recordando (n.º 108, 7.º) que $b=b^1$, $a=a^1$, y fundándonos en el principio general del n.º 28.

Sea ahora multiplicar a—b *por* c.

Se puede indicar el producto de este modo: $(a-b)\,c$.

Pero si se quiere espresar el producto en solo un polinomio, se observará que multiplicar $a-b$ por c, equivale (n.º 25) á multiplicar c por $a-b$, es decir, á tomar c tantas veces como unidades tiene a disminuida en tantas como tiene b; luego si formamos el producto ca ó ac de c por toda a, resulta mayor de lo que debe ser en b veces c, ó sea bc: luego quitando bc de ac, se obtendrá el verdadero producto $ac-bc$.

De modo que $(a-b)\ c=ac-bc$.

Sea multiplicar (a—b) *por* (c—d).

El producto puede indicarse así: $(a-b)\ (c-d)$.

Para formar ahora un solo polinomio, se empieza por multiplicar $a-b$ por c, lo cual dá $ac-bc$; y se observa despues que no debia haberse multiplicado $a-b$ por toda c, sino por c disminuida en d. Así, el producto $ac-bc$, escede al verdadero en el producto de $(a-b)$ por d, ó sea en $ad-bd$. Luego para tener el producto verdadero, deberemos restar $ad-bd$ de $ac-bc$; lo cual, segun las reglas de la sustraccion, nos dará $ac-bc-ad+bd$.

Luego *para efectuar la multiplicacion de dos binomios, se multiplica separadamente cada término del multiplicando por cada término del multiplicador,* observando respecto de los signos de los productos parciales la regla siguiente: *Si los dos términos que se multiplican llevan el mismo signo, su producto debe llevar el signo +; y si tienen signos distintos, llevará su producto el signo —.*

Segun esta regla hallaremos

$$(a+b)\ (c-d)=ac+bc-ad-bd.$$
$$(a-b)\ (c+d)=ac-bc+ad-bd.$$

113. *Division.* Solo consideraremos un caso de esta operacion, que es el de dos monomios compuestos de una misma letra.

Sea dividir a⁷ *por* a³.

Se puede indicar el cociente de este modo: $\frac{a^7}{a^3}$, ó $a^7 : a^3$. Pero observemos que como a^7 es un producto cuyos factores son a^3 y el cociente, el esponente 7 del dividendo debe ser (n.º 112) igual á la suma del esponente 3 del divisor y el esponente desconocido del cociente; luego recíprocamente, el *esponente del cociente es igual al esceso del esponente del dividendo sobre el esponente del divisor;* es decir, en este caso, á 7—3, ó 4.

Así, pues, $\frac{a^7}{a^3}=a^4$; en efecto, $a^4\times a^3=a^7$.

Del mismo modo se hallará $\frac{b^9}{b^4}=b^5$; $\frac{c^4}{c^3}=c^1$, ó c.

$$\frac{a^3b^2}{a^2b}=a^1b^1\text{, ó }ab.$$

Por analogía se hallará $\frac{a^2}{a^2}=a^0$; $\frac{a^3}{a^3}=a^0$....; y como se ve que cada una de las espresiones $\frac{a^2}{a^2}$, $\frac{a^3}{a^3}$, $\frac{a^4}{a^4}$.... equivale á la *unidad*, se deducirá como consecuencia que $a^0=1$.

La notacion a^0 puesta en vez de la unidad tiene la ventaja de conservar la huella de una letra que, entrando al principio en el cálculo, ha desaparecido por efecto de una simplificacion.

Para nuestro objeto presente no es necesario esplicar ahora los demas casos de la division, quedando á esto reducidas las únicas nociones de Algebra que necesitamos en este capítulo y los siguientes.

114. Para hacer resaltar desde ahora las ventajas del uso de las letras en la representacion de los números, resolveremos las dos cuestiones siguientes:

1.ª *¿Qué variacion sufre un quebrado añadiendo un mismo número á sus dos términos?* (Ya se trató esta cuestion en el n.º 49.)

Designemos por $\frac{a}{b}$ el quebrado propuesto y por m el número que se añade á los dos términos a y b, lo cual dá el nuevo quebrado $\frac{a+m}{b+m}$.

Para comparar los dos quebrados $\frac{a}{b}$, $\frac{a+m}{b+m}$, es menester reducirlos á un comun denominador: así, el primero se convierte en $\frac{a\,(b+m)}{b\,(b+m)}$, y el segundo en $\frac{(a+m)\,b}{(b+m)\,b}$; ó efectuados los cálculos segun la regla del n.º 112, $\frac{ab+ma}{b^2+bm}$, $\frac{ab+mb}{b^2+bm}$.

Ahora bien, los dos numeradores $ab+am$ y $ab+bm$ tienen comun la parte ab; pero la parte bm del segundo numerador es mayor que la parte am del primero, porque tenemos $b>a$. Luego tambien el segundo quebrado es mayor que el primero. Luego, *crece el valor de un quebrado añadiendo un mismo número á sus dos términos.*

La verdad de la proposicion exige además, como se advierte en el razonamiento anterior, que sea propio el quebrado

$\frac{a}{b}$, es decir, que sea $a<b$: si fuera al contrario $a>b$, existiria la relacion en órden inverso, porque entonces sería $ab+bm<ab+am$.

Advertencia. Este medio de demostracion tan rigoroso y general mientras los números estan designados por letras, dejaria de serlo si se aplicára á números particulares. Por ejemplo, si se tiene el quebrado $\frac{12}{17}$ y se añaden 3 unidades á cada uno de sus términos, se tendrá $\frac{15}{20}$.

Reduciendo los dos quebrados á un comun denominador, se convierte el primero en $\frac{240}{340}$, y el segundo en $\frac{255}{340}$.

Bien se ve aquí que el segundo quebrado es mayor que el primero; pero nada prueba que lo que sucede en este caso particular se verificará en cualquiera otro.

La demostracion dada en el n.° 49, en virtud de la naturaleza de los razonamientos, es tan general como la última; pero esta, aunque menos elegante tal vez, tiene la ventaja de ser mas concisa: héla aquí reducida á sus menores términos:

Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{a+m}{b+m}$ los dos quebrados que se quieren comparar.

Reduzcámoslos al mismo denominador: resulta $\frac{ab+am}{b^2+bm}$ y $\frac{ab+bm}{b^2+bm}$; pero tenemos $a<b$ por el supuesto, de donde $am<bm$; luego $ab+am<ab+bm$; luego el segundo quebrado es mayor que el primero.

2.ª *Se desea saber el producto de la suma de dos números multiplicada por su diferencia.*

Sean a y b los dos números propuestos: su suma se espresará por $(a+b)$, y su diferencia por $(a-b)$.

Efectuando la multiplicacion de $a+b$ por $a-b$ con arreglo á lo dicho en el n.° 112, se obtiene el producto $a^2+ab-ab-b^2$, ó suprimiendo los términos $+ab$ y $-ab$, que se destruyen uno á otro, queda a^2-b^2; luego $(a+b)\,(a-b)=a^2-b^2$.

Lo cual prueba que *la suma de dos números cualesquiera multiplicada por su diferencia, dá siempre por producto la diferencia de sus cuadrados ó segundas potencias.*

Ejemplo. *Sean los dos números* 25 *y* 12; su suma es 37 y su diferencia 13: multiplicando 37 por 13 resulta 481.

De otro modo, 25×25 dá 625; 12×12 dá 144; de donde $(25)^2-(12)^2=625-144=481$.

Luego $(25+12)(25-12)=(25)^2-(12)^2$.

115. Esto último no es mas que una comprobacion de la propiedad, efectuada por medio de dos números particulares; mientras que la demostracion algébrica es rigorosa y general, porque los números estan designados por letras á las cuales pueden atribuirse todos los valores imaginables.

Las cuestiones precedentes bastan para poner á los principiantes en estado de comprender y apreciar las ventajas procedentes del uso de las letras para representar los números. Por su medio, no solo se hacen los razonamientos mas generales y á veces mas concisos, sino que tambien se conserva la huella de las operaciones efectuadas con los números que entran en el enunciado de la cuestion, y que así no pueden fundirse unos en otros como cuando se opera con números particulares.

Establecidas estas nociones, vamos á volver atrás; es decir, vamos á ocuparnos de nuevo en algunos de los objetos tratados en la primera parte para profundizarlos mas: así descubriremos nuevas propiedades y medios de modificar ó simplificar los procedimientos de las diversas operaciones de la Aritmética.

§. 1.º Teoría de los diversos sistemas de numeracion.

116. Hemos visto (n.º 5) cómo se consigue representar todos los números posibles con solo diez cifras ó caractéres, partiendo de este principio *convencional*, que toda cifra colocada á la izquierda de otra representa unidades diez veces mayores que las de esta. Ahora nos proponemos hacer ver que tambien pueden escribirse todos los números con un número cualquiera de caractéres, con tal que al menos haya *dos*, siendo uno de ellos el *cero*.

En general, se llama *base* de un sistema de numeracion el número de cifras de que consta. El sistema que consta de solo dos cifras se llama *binario*, el que de tres *ternario*, etc.

En todo sistema de numeracion análogo al sistema decimal se conviene en que *toda cifra, colocada á la izquierda de otra, espresa unidades tantas veces mayores, respecto de las de esta, como unidades hay en la* BASE, *es decir, en el número* *de cifras del sistema.* Así, en el sistema *binario*, las unidades de cada cifra adquieren valores de *dos* en *dos* veces mayores á medida que se avanza uno, dos, tres.... lugares hácia la izquierda; en el sistema *ternario*, los valores de las unidades van siendo cada vez *triples* del anterior; y en general, en el sistema cuya base es B, las unidades de cada cifra son B veces mayores que las unidades de la cifra anterior, á medida que se avanza de derecha á izquierda.

Cuando hay un número escrito en un sistema cuya base es B, la primer cifra de la derecha espresa unidades de *primer órden*, la cifra inmediata de la izquierda espresa unidades de *segundo órden*, la cifra que despues viene á la izquierda unidades de *tercer órden*, y así sucesivamente. Se necesitan por tanto B unidades de primer órden para formar una unidad de segundo órden, B unidades de segundo órden para formar una de tercer órden, etc.

117. Entendido esto, pasemos al modo de espresar en cifras un número entero, cualquiera que sea el sistema que se adopte. Para fijar las ideas, consideraremos el sistema *septenario*, es decir, el sistema en que se emplean *siete* cifras. Despues se podrán estender á otro cualquier sistema los mismos razonamientos.

Las cifras del sistema septenario son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6; las seis últimas espresan los seis primeros números.

Añadiendo la unidad á *seis*, se forma el número *siete*, ó la unidad de segundo órden, que en virtud del principio arriba enunciado debe escribirse 10.

Poniendo sucesivamente cada una de las cifras del sistema en el primer lugar y en el segundo, se irán evidentemente formando todos los números consecutivos comprendidos desde *siete*, ó sea 10, hasta el representado por 66.

Formado este número, si se le añade una unidad mas, resultarán 6 unidades de segundo órden mas *siete* de primero, ó bien, *siete* unidades del segundo que equivalen á *una* unidad del tercero, y que deberá escribirse 100.

Poniendo sucesivamente en el primero, en el segundo y en el tercer lugar todas las cifras del sistema, se formarán todos los números consecutivos comprendidos entre 100 y el número representado por 666.

Razonando respecto de este número como respecto del 66, se llegará á la unidad de *cuarto* órden, que se escribirá así: 1000; despues se obtendrán sucesivamente todos los números consecutivos comprendidos desde 1000 hasta el número representado por 6666; y así sucesivamente hasta el infinito.

De donde se infiere que pueden escribirse en este sistema todos los números enteros posibles.

Cualquiera que sea el sistema adoptado, las unidades de diferentes órdenes estan representadas por 1, 10, 100, 1000, como en el sistema decimal; pero los valores relativos de estas unidades son esencialmente diversos segun los sistemas.

118. *Advertencia.* Hemos dicho en el n.º 116 que era indispensable la cifra 0 en todo sistema análogo al decimal, es decir, en todo sistema en que el valor *relativo* de una cifra depende del lugar que ocupa á la izquierda de otras varias. En rigor podria pasarse sin él; pero sería el sistema menos regular, como vamos á ver.

Propongámonos, por ejemplo, establecer el sistema *ternario* adoptando las tres cifras significativas 1, 2, 3.

Los *tres* primeros números quedarian espresados por las tres dichas cifras.

Para representar *cuatro, cinco, seis*, bastaria escribir 11, 12, 13.

Para espresar	*siete*,	*ocho*,	*nueve*,	*diez*,	*once*,	*doce*,
se escribiria	21,	22,	23,	31,	32,	33.
Y para espresar	*trece*,	*catorce*,	*quince*,	*diezyseis*,	*diezysiete*,	*diezyocho*,
se escribiria	111,	112,	113,	121,	122,	123.

No es necesario pasar mas allá para tocar los inconvenientes de este sistema. Su principal defecto consiste en que se espresan de diverso modo unidades de un mismo órden. Así, en 13 y 23, la cifra 3 espresa una unidad de segundo órden, como las cifras 1 y 2 que estan á su izquierda. En 123 el conjunto de las cifras 23 espresa *nueve*, ó sea la unidad de tercer órden, lo mismo que la cifra 1 que está á la izquierda de las dos.

Haciendo uso de la cifra 0, basta determinar los números de unidades de diferentes órdenes que entran en el número propuesto, y escribir unas en pos de otras, de derecha á izquierda, las cifras que espresan esos números.

119. La concordancia que existe entre la nomenclatura actual de los números y la manera de representarlos en cifras en el sistema decimal, permite escribirlos facilmente y á medida que se dictan en el lenguaje ordinario, como tambien resolver la cuestion inversa de enunciar en el lenguaje ordinario un número cualquiera representado por un grupo de cifras dado. Lo mismo sería en todo sistema de numeracion para el cual se com-

pusiera una nomenclatura especial. Pero si se propusiera, por ejemplo, *escribir en el sistema septenario el número* TRESCIENTOS SESENTA Y NUEVE *referido al sistema decimal*, sería difícil reconocer *à priori* cuáles son las cifras que han de espresar las unidades de primero, segundo, tercero,.... órden del sistema septenario que el número dado contiene. Y como el número dicho, escrito segun el sistema decimal, es 369, resulta que la cuestion propuesta depende de la siguiente, que es mucho mas general: *Dado un número enunciado en el lenguaje ordinario ó escrito en el sistema decimal, traducirle en el sistema cuya base es* B.

Para resolver esta cuestion general observemos que formando B unidades de primer órden una unidad de segundo, cuantas veces contenga el número propuesto á la base B, otras tantas unidades contendrá del segundo órden del sistema B; es decir, que si el número dado se divide por B, el cociente espresará las unidades de primer órden del número escrito en el sistema cuya base es B.

Del mismo modo, puesto que B unidades de segundo órden en el sistema B forman una unidad de tercer órden en el mismo sistema, si se divide por B el cociente que espresa las unidades de segundo órden, el nuevo cociente espresará las unidades de tercer órden; y el resíduo, siempre menor que B, representará las unidades de segundo órden del número escrito en el sistema cuya base es B; y así sucesivamente.

Donde se ve que para pasar del sistema decimal al sistema cuya base es B, es necesario: 1.° *dividir el número propuesto por la base del nuevo sistema escrita en el sistema decimal, lo cual dá un resíduo que se escribe aparte, porque representa las unidades de primer órden en el nuevo sistema;* 2.° *dividir el cociente obtenido por la misma base, lo cual dá un segundo resíduo, que se escribe á la izquierda del primero, y espresa las unidades de segundo órden;* 3.° *dividir el segundo cociente por la misma base, y escribir el tercer resíduo, que así se obtiene, á la izquierda de los dos precedentes, porque espresa las unidades del tercer órden; continúese esta série de operaciones hasta llegar á un cociente menor que la base del nuevo sistema;* este último cociente espresa las unidades del órden mas elevado, *y se escribe entonces á la izquierda de todos los resíduos obtenidos sucesivamente.*

Apliquemos esta regla al número trescientos sesenta y nueve, ó 369, y tratemos de traducirlo al sistema *septenario.*

369 | 7	Resíduos.
52	5
7	3
1	0
0	1

Dividiendo 369 por 7, se tiene por cociente 52 y por resíduo 5, que se escribe aparte, y son las *unidades de primer órden* en el nuevo sistema.

Dividiendo 52 por 7, se halla de cociente 7 y de resíduo 3, que espresa las *unidades de segundo órden*, y se escribe á la izquierda de la cifra 5.

Dividiendo 7 por 7, se tiene el cociente 1 y el resíduo 0, lo cual indica que no hay *unidades de tercer órden;* se escribe, pues, 0 para ocupar su sitio.

Finalmente, como el cociente 1 es menor que 7, esprésa *unidades de cuarto órden;* y por consiguiente el número propuesto, traducido al sistema septenario, equivale á (1035).

Del mismo modo se vería que el número 5347, traducido al sistema de ocho cifras 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, equivale al conjunto de guarismos (12343).

5347 | 8	Resíduos.
668	3
83	4
10	3
1	2
0	1

Observacion. Puede suceder que la base del nuevo sistema sea mayor que *diez*, base del sistema decimal.

En este caso hay que hacer una observacion importante para la aplicacion de esta regla.

Sea, por ejemplo, traducir el número 8423 al sistema *duodecimal*, es decir, al sistema de *doce* cifras.

Conviniendo en emplear las dos letras griegas α, β, para designar los números *diez* y *once*, las cifras de este sistema serán 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, α, β.

8423 | 12	Resíduos.	
701	once ó 6	
58	5	(4α56)
4	diez ó α	
0	4	

Espresándose por 12 la base *doce* en el sistema decimal, debe dividirse 8423 por 12, lo cual dá el cociente 701 y el resíduo 11, que espresa las unidades de primer órden en el nuevo sistema. Pero 11 escrito en el sistema decimal significa *once*, y por consiguiente corresponde á la cifra 6 en el sistema duodecimal. Se escribirá, pues, aparte, no 11, sino 6, para designar las unidades de primer órden.

En la tercera division se obtiene el resíduo 10, ó sea *diez*, que en el sistema *duodecimal* se representa por α: se escribirá, pues, α á la derecha de las otras dos cifras halladas, y se continuará la operacion. El resultado es que el número propuesto se espresa en el sistema duodecimal por el conjunto de caractéres (4α56).

120. Recíprocamente, *dado un número escrito en un sistema cualquiera cuya base sea* B, se puede proponer el problema de *enunciarlo* en lenguaje ordinario, ó lo que es lo mismo, *traducirlo al sistema decimal.*

Sea en general.... *hgfdcba* un número escrito en el sistema de B cifras; designando a, b, c, d,.... las unidades de primero, segundo, tercero, cuarto,.... órden.

Resulta del principio fundamental establecido en el n.° 116, que la cifra b espresa unidades B veces mayores que si estuviera sola; luego su valor relativo es igual al producto de b por B, y puede representarse (n.° 108) así: $b \times B$, ó simplemente bB. Del mismo modo la cifra c espresa unidades B veces mayores que las de la cifra b; luego su valor relativo debe ser igual al producto de c por $B \times B$, ó B^2, y puede escribirse cB^2. Del mismo modo se iria viendo que los valores relativos de las demas cifras son dB^3, fB^4, gB^5, hB^6,....

Luego el número propuesto tiene por espresion

$$a + bB + cB^2 + dB^3 + fB^4 + gB^5 + hB^6 + \ldots.$$

Dando á la base B y á las cifras a, b, c, d,.... valores particulares, se efectuarán en el sistema decimal todas las operaciones aritméticas indicadas en esa espresion, y se obtendrá el número particular correspondiente traducido al sistema decimal.

[La espresion de arriba se llama en Algebra *fórmula*, porque encierra bajo una *forma* concisa el sistema de operaciones aritméticas que deben efectuarse con diferentes números para resolver una cuestion general; pudiéndose deducir de ella la respuesta á todas las cuestiones análogas cuyos enunciados se diferencian solo en el valor numérico de los datos.]

Traducida esta fórmula al lenguaje ordinario, dá lugar á la regla siguiente: *Fórmense lo primero las potencias sucesivas de la base* B *escrita en el sistema decimal; multiplíquense en seguida las cifras.................a, b, c, d, f, g,.....*
traducidas tambien al sistema decimal,
*respectivamente por los números...*1, B, B^2, B^3, B^4, B^5,....; *súmense en seguida los productos parciales, y se tendrá el número pedido.*

Sea, por ejemplo, el número (57436) escrito en el sistema de *ocho* cifras, el que se quiere traducir al sistema decimal.

Despues de haber hecho las cuatro primeras potencias de 8 por medio de la multiplicacion, y haber obtenido 8, 64, 512, 4096, pueden disponerse los cálculos así:

1.º	1×6=	6
2.º	8×3=	24
3.º	64×4=	256
4.º	512×7=	3584
5.º	4096×5=	20480
	(57436)=	24350

Comprobacion por la regla del n.º 119.

24350 | 8	Resíduos.	
3043	6	
380	3	
47	4	(57436)
5	7	
0	5	

121. Puede darse de la cuestion inversa una solucion mas sencilla y mas análoga á la de la cuestion directa.

Volvamos á tomar el mismo número (57436) que tratamos de trasladar del sistema de *ocho* cifras al sistema decimal.

En virtud del principio fundamental del n.° 116, la primera cifra de la izquierda, que es 5, representa unidades 8 veces mayores que las de la segunda cifra 7; luego multiplicando 5 por 8 y añadiendo 7 al producto (lo cual dá 47 ó *cuarenta y siete*), se tendrá el número total de unidades de cuarto órden (en el sistema de ocho cifras) que comprende el número propuesto. Por la misma razon, si se multiplica 47 por 8 y se añaden 4 al producto, lo cual dá 380 (*ó trescientos ochenta*), se tendrá el número total de unidades de tercer órden (en el sistema de ocho cifras) que comprende el número propuesto.

Multiplicando ahora 380 por 8 y añadiendo 3 al producto, se tiene 3043, que es el número total de unidades de segundo órden que comprende en su sistema el número propuesto. Y finalmente, multiplicando 3043 por 8 y añadiendo 6 al producto, se tendrá 24350, que será el número total de unidades de primer órden (espresadas en el sistema decimal) que en su sistema comprendia el número propuesto.

El cálculo puede disponerse así:

$$\begin{array}{rr} 5\times 8 = 40 & +7=47 \\ 47\times 8 = 376 & +4=380 \\ 380\times 8 = 3040 & +3=3043 \\ 3043\times 8 = 24344 & +6=24350 \end{array}$$

Regla general. *Multiplíquese la primer cifra de la izquierda del número propuesto por la base* B *escrita en el sistema decimal, y añádase al producto la segunda cifra* (partiendo de izquierda á derecha); *multiplíquese la suma así obtenida por la base* B, *y añádase al producto la tercera cifra;* y así sucesivamente.

Esta regla es precisamente la inversa de la establecida en el n.° 119, como puede reconocerse comparando la tabla de los cálculos que aquí acaban de ejecutarse y los ejecutados al fin del número precedente.

122. A las dos cuestiones de los números 119 y 120 se enlaza otra mas general que tiene por objeto *pasar de un sistema cuya base es* B *á otro sistema cuya base es* B′.

La regla que en este caso debe seguirse consiste en pasar el número propuesto del sistema B al sistema decimal (n.° 120), y despues pasarle de este sistema al B′ (n.° 119).

Propongámonos, por ejemplo, hacer pasar el número (23104) del sistema *quinario* (ó de *cinco* cifras) al sistema duodecimal.

Hé aquí la tabla de los cálculos:

$$\begin{array}{rlrl} 2\times 5= & 10 & +3= & 13 \\ 13\times 5= & 65 & +1= & 66 \\ 66\times 5= & 330 & +0= & 330 \\ 330\times 5= & 1650 & +4= & 1654 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 1654 & 12 \\ \quad 137 \;\ldots\ldots & \textit{diez}\ \text{ó}\ \alpha \\ \quad\ 11 \;\ldots\ldots & \qquad 5 \quad (65\alpha) \\ \quad\quad 0 \;\ldots\ldots & \textit{once}\ \text{ó}\ 6 \end{array}$$

Luego (23104, en el sist. *quin.*)=(65α, en el sist. *duodec.*)

Se comprobaria el cálculo repitiendo las transformaciones en órden inverso, es decir, pasando del sistema *duodecimal* al sistema *quinario*.

123. Los procedimientos para efectuar las cuatro operaciones fundamentales de la Aritmética con números escritos en un sistema cualquiera, no difieren esencialmente de los establecidos para el sistema decimal. Solo es necesario tener bien presente la ley que existe entre las unidades de varios órdenes, á fin de poder convertir, cuando sea necesario, unidades de un órden cualquiera en unidades de otro órden inmediatamente superior ó inferior.

Para familiarizar á los principiantes con los diferentes sistemas de numeracion, propondremos un ejemplo de cada una de las operaciones, ejecutada en el sistema *duodecimal*, cuyos guarismos son, segun se ha dicho, n.º 119,

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, α, 6.

1.º *Sumar los números*

3704α, 62956, 276α5, 48α6.

$$\begin{array}{r} 3704\alpha \\ 62956 \\ 276\alpha5 \\ 48\alpha6 \\ \hline 15\alpha678 \end{array}$$

Empezando por las unidades simples, diremos α y 6 son 14, y 5 son 19, y 6 son 28: pondremos 8 y llevamos 2 *docenas* para añadirlas á las unidades de segundo órden.

Diremos despues: 2 y 4 son 6 y 5 son 6, y α son 19, y α son 27: escribimos las 7 y llevamos 2 que añadir á la columna de tercer órden, con la cual operaríamos como con las dos anteriores; y así sucesivamente. De este modo se obtiene que la suma pedida es 15α678.

2.° *Restar del número. . . . .* 5α0046
el número. 47α686

121577

Como no se puede sustraer 6 de 6, se recurre al medio del n.° 14, y se dice: de 6 á 16 van 7. Pasando á la columna siguiente se aumenta al 8 una unidad, y se dice: de 9 á 14 van 7. Despues se dice: de 7 á 10 van 5; de 6 á 10 va 1; de 8 á α van 2; y de 4 á 5 va 1. Luego el resultado pedido es 121577.

3.° *Multiplicar. . . . .* 3407α
por. 5α68

228528
180360
294664
148332

177608828

[Se supone que se tiene á la vista una tabla de la multiplicacion que alcance hasta los productos por la cifra 6, que es la mayor del sistema.]

Multiplicando primero 3407α por 8, diremos: 8 veces α hacen 68; pongo 8 y llevo 6: 8 veces 7 son 48 y 6 que llevo son 52; pongo 2 y llevo 5: 8 veces 0 es 0 y 5 que llevo son 5, que escribo: 8 veces 4 son 28; pongo 8 y llevo 2: y finalmente, 8 veces 3 son 20 y 2 que llevo son 22; pongo el 22. Luego el primer *producto parcial* es 228528.

Respecto de los demas productos parciales del multiplicando por las otras cifras del multiplicador, se probaria por medio de razonamientos análogos á los hechos en el n.° 21 para el sistema decimal, que todo se reduce á multiplicar sucesivamente el multiplicando por cada una de dichas cifras consideradas como de unidades simples, y escribir cada producto debajo del precedente, corriéndole un lugar hácia la izquierda.

Sumando luego todos los productos parciales, se encuentra el resultado final 177608828.

4.° Comprobemos esta operacion por medio de la division, para lo cual basta dividir el producto obtenido por uno de los factores, por ejemplo, el 5α68.

Para obtener la cifra de las unidades superiores del cociente, basta tomar los cinco primeros guarismos de la izquierda del dividendo y dividir 17760 por 5α68. Para esto se ve cuántas veces contiene el 17 al 5; se ve que son 3,

$$
\begin{array}{r|l}
177608828 & 5\alpha68 \\ \cline{2-2}
1\beta\alpha08 & 3407\alpha \\
3\alpha082 & \\
4\alpha968 & \\
0000 &
\end{array}
$$

cuyo número se escribe en el cociente. Multiplicando el divisor por 3, y restando el producto del primer dividendo parcial, se obtiene el resto 1βα0, que seguido de la cifra 8, forma el segundo dividendo parcial 1βα08, con el cual se opera como con el anterior.

Dividiendo 1βα08 por 5α68, ó mas bien 1β por 5, se tiene por cociente 4, que se escribe á la derecha de la cifra anterior, y por resto de la nueva division parcial 3α0.

Como bajando la cifra siguiente 8, no contiene al divisor el nuevo dividendo parcial 3α08, pondremos 0 en el cociente, y bajaremos la otra cifra 2 del dividendo: con lo que tendremos el nuevo dividendo parcial 3α082.

Operando con este como con los anteriores, se encuentra el cociente 7 y el resíduo 4α96.

Bajando por fin la última cifra del dividendo, y dividiendo 4α968 por 5α68, se obtiene α por cociente y 0 de resíduo.

Luego, 3407α es el cociente pedido.

Encargamos á los estudiosos que se ejerciten en otros ejemplos y en varios sistemas, particularmente respecto de las dos últimas operaciones, por ser estos ejercicios muy propios para adquirir el hábito del cálculo.

124. La cuestion del n.° 122, que tiene por objeto pasar de un sistema cualquiera B á otro sistema B′, puede resolverse directamente, es decir, sin necesidad de pasar primero del sistema B al sistema decimal y luego de este al B′. Para esto bastaria *traducir la base* B′ *al sistema* B, *y aplicar la regla del n.°* 119, *haciendo las operaciones en el sistema* B; ó bien *traducir la base* B *al sistema* B′ *y aplicarle una de las reglas de los n.os* 120 y 121, *efectuando las operaciones en el sistema* B′.

No nos detendremos mas en estas operaciones, que no presentan dificultad alguna.

125. *Observacion general.* El sistema duodecimal ofrece algunas ventajas sobre el decimal, en razon á que su base *doce* comprende mayor número de factores que *diez*. En efec-

to, *doce* es divisible por 2, 3, 4, 6, mientras que *diez* no tiene mas factores que 2 y 5. Pero no se podria sustituir el sistema duodecimal ú otro cualquiera al decimal, sin modificar de antemano la nomenclatura, acomodándola al sistema adoptado de modo que pudieran enunciarse conforme al nuevo sistema los números escritos en cifras.

Tendremos en adelante mas de una ocasion de conocer que la mayor parte de las propiedades descubiertas en los números son independientes de todo sistema de numeracion que se adopte. Algunas parecen peculiares del sistema decimal, pero las tienen análogas los demas sistemas. El empleo de las letras del alfabeto para representar los números, es muy propio para hacer resaltar la generalidad de las propiedades, cuando son aplicables á todos los números cualquiera que sea el sistema de numeracion en que se enuncien ó escriban.

§. II. Divisibilidad de los números.

126. La propiedad que tienen algunos números de ser exactamente divisibles por otros y la investigacion de los divisores exactos de un número forman una de las teorías mas importantes del Aritmética. Apóyase esta teoría en una série de principios cuya esposicion exige mucho órden, y que vamos á desenvolver sucesivamente.

Definiciones preliminares. Se dice que un número entero es *exactamente divisible* por otro, cuando existe un tercer número entero que, multiplicado por el segundo, reproduce el primero.

Todo número entero, que divide exactamente á otro, se llama *factor, divisor* ó *submúltiplo* del segundo; y este se llama *múltiplo* del primero.

Todo número entero que no tiene mas *divisores* que á sí mismo y la unidad, se llama *número primero absoluto*, ó simplemente *número primo* ó *primero*.

Dos números enteros se llaman *primos entre sí* cuando no tienen mas *divisor comun* que la unidad (que es divisor de todo número).

De aquí resulta que si un número *primo* no divide exactamente á un número entero cualquiera, son *primos entre sí* los dos; pues entonces no pueden tener mas divisor comun que la unidad.

Ya se dieron estas definiciones en el n.° 51.

127. Ppimer principio. *Todo número entero* P *que divide exactamente á uno de los factores del producto* $A \times B$, *divide necesariamente á este producto;* ó lo que es igual, *todo número entero que divide exactamente á otro, divide tambien á todos los múltiplos de este.* (Véase el n.º 51.)

En efecto, sea Q el cociente supuesto exacto de la division de A por P; tendremos $A = P \times Q$, de donde multiplicando ambos miembros de esta igualdad por el mismo número B,

$$A \times B = P \times Q \times B = P \times QB \text{ (n.º 26)};$$

se ve, pues, que P divide exactamente al producto $A \times B$.

128. Segundo principio. *Todo número entero* P *que divide exactamente á un producto* AB, *y que es primo con uno de los dos factores, divide necesariamente al otro factor.*

Supongamos, por ejemplo, que P, divisor exacto del producto AB, es primo con A; digo que P debe dividir á B.

En efecto, puesto que A y P son números *primos entre sí*, resulta que si se les aplica el procedimiento del máximo comun divisor (n.º 52), al cabo de cierto número de operaciones se llegará á un resíduo final igual á 1.

Llamemos $R, R', R'', R''',\ldots. 1$ los resíduos consecutivos de la série de operaciones efectuadas en ese procedimiento (R', R'', R''',... se enuncian R primera, R segunda, R tercera,...).

Esto supuesto, si, en lugar de operar con A y P, aplicáramos el procedimiento á los productos $A \times B$, $P \times B$, es fácil ver que en esta nueva série de operaciones se obtendrian los mismos cocientes que en la primera; pero los restos serían respectivamente $R \times B$, $R' \times B$, $R'' \times B,\ldots. 1 \times B$. Por consiguiente, como el máximo comun divisor entre A y P es 1, el de los productos $A \times B$, $P \times B$, es necesariamente $1 \times B$, ó sea B.

Por otro lado, se infiere del tercer principio establecido en el n.º 51, que *todo número que divide á otros dos, divide á su máximo comun divisor*, puesto que en virtud de dicho principio debe dividir el resíduo de cada una de las divisiones del procedimiento del n.º 52. Ahora bien, P divide á $A \times B$ por hipótesis; divide tambien evidentemente á $P \times B$; luego debe dividir al máximo comun divisor de los dos, es decir, á $1 \times B$, ó sea B; lo cual debíamos demostrar.

Advertencia. Es necesario suponer que P es primo con uno de los factores; pues 56×15, ó 840, por ejemplo, es divisible por 40, y dá por cociente exacto 21, sin ser divisibles por 40 ninguno de los factores 56 y 15. Esto procede de que, siendo $40=8\times 5$, el primer factor, 8, se encuentra en el 56, que es igual á 7×8; y el segundo factor, 5, se encuentra en el 15, que es 5×3: luego 56×15, ó bien $7\times 8\times 3\times 5$, ó bien $7\times 3\times 8\times 5$, ó finalmente, 21×40, debe ser divisible por 40.

129. TERCER PRINCIPIO. *Todo número primo absoluto* P *que divide exactamente á un producto* $A\times B$, *debe dividir necesariamente á uno de los factores.*

En efecto, si P no divide á A, por ejemplo, será *primo* con él (n.° 126); luego debe dividir á B (n.° 128).

De aquí resultan las consecuencias siguientes:

130. 1.ª *Todo número primo absoluto que divide á* A^2, *y en general á una potencia cualquiera* A^m *de* A, *debe dividir á* A.

En efecto, A^2, es lo mismo que $A\times A$; y todo número primo que divida á este producto, ha de dividir á uno de sus factores (n.° 129). Del mismo modo, todo número primo que divida á A^3, ha de dividir á uno de los factores del producto $A^2\times A$; y como para dividir á A^2, es menester dividir á A, resulta que para dividir á A^3, es menester dividir á A; y así sucesivamente.

131. 2.ª *Todo número* P, *primo con cada uno de los factores de un producto* $A\times B$, *es tambien primo con este producto.*

En efecto, un número primo absoluto que dividiera á AB, deberia dividir á A ó á B; y entonces P no sería primo ó con A ó con B; lo cual sería contra el supuesto.

132. 3.ª *Cuando se ha formado un número* N *por la multiplicacion de otros muchos* A, B, C, D,.... *no puede tener mas factores* PRIMOS *que los existentes en* A, B, C, D,....

En efecto, todo número primo que divida al producto ABCD, si no divide á D, debe dividir á ABC (n.° 129); igualmente todo número primo que divida á ABC, si no divide á C, debe dividir á AB, ó por consiguiente á A ó á B.

Así, en otros términos, *resultando un número de la multiplicacion de otros varios, no puede obtenerse de nuevo multiplicando números que comprendieran factores distintos de los que comprendian los primeros que se multiplicaron.*

133. CUARTO Y ÚLTIMO PRINCIPIO. *Todo número* N *divisible por dos ó mas números a, b, c,.... primos entre sí, es divisible por el producto de los mismos.*

En efecto, como a divide á N, tendremos $N=aq$, siendo q un número entero; pero por hipótesis b divide á N, luego debe dividir á aq; pero a y b son *primos entre sí* por el supuesto; luego no pudiendo b dividir á a, deberá dividir á q (n.º 128); tendremos, pues, $q=bq'$; de donde se deduce $N=a\times bq'=ab\times q'$. Así, pues, N es divisible por ab.

Del mismo modo, dividiendo c á N, debe dividir á $ab\times q'$; pero c es primero con a y b y por consiguiente con ab (n.º 131); luego c debe dividir á q', y se tendrá $q'=cq''$; de donde sale $N=ab\times cq''=abc\times q''$: luego N es divisible por abc, y así sucesivamente.

134. *Consecuencia.* Si a, b, c,.... son números *primos entre sí*, y cada uno entra como factor de N cierto número de veces espresado por n, p, q,.... el número N es exactamente divisible por a^n, b^p, c^q,.... y por todos los otros números que pueden obtenerse multiplicando de dos en dos, de tres en tres, etc...., las diversas potencias de a, b, c,.... comprendidas desde la primera hasta la del grado designado por n respecto de a, por p respecto de b, por q respecto de c, y así de las demas.

En efecto, siendo a, b, c,.... números primos entre sí, lo son tambien a^n, b^p, c^q,....; luego (n.º 133) sus productos de dos en dos, de tres en tres, etc., deben ser tambien divisores de N.

Este principio sirve de base á *la investigacion de los divisores de un número, tanto simples como compuestos,* cuestion de que nos ocuparemos bien pronto.

135. *Caractéres de divisibilidad de un número por otros.*

Existen ciertas señales por las cuales se puede conocer si un número es ó no divisible por otros, lo cual es muy útil en la práctica.

Los razonamientos que nos veremos precisados á hacer para establecer estos caractéres se apoyan en el principio siguiente:

Sea un número A descompuesto en dos partes B y C, de modo que se tenga $A=B+C$.... (1).

1.º *Si otro número* D *divide al mismo tiempo á las dos partes* B *y* C, *divide tambien á su suma* A.

2.º *Si el número* D *divide á una de las partes* B *y no divide á la otra* C, *tampoco dividirá á* A; *y el residuo de la division de* A *por* D *será igual al que resulta de dividir* C *por* D.

La primera parte de este principio es fácil de demostrar. En efecto, dividamos por D los dos miembros de la igualdad (1), y tendremos

$$\frac{A}{D}=\frac{B}{D}+\frac{C}{D}\dots\ (2).$$

Los dos términos del segundo miembro son números enteros, porque B y C son por hipótesis divisibles por D; luego el primer miembro tambien debe ser número entero, de lo contrario tendríamos un número fraccionario igual á un número entero, lo cual es absurdo. Luego A es divisible por D.

Pasando á la segunda parte, es claro, en virtud de la igualdad (2), que si siendo B divisible por D, no lo fuera por C, tampoco lo sería A; pues de lo contrario resultaria tambien un número entero igual á un número fraccionario. Pero ahora se trata de probar que el *resíduo de la division de* A *por* D *es igual al de la division de* C *por* D.

Para esto observemos que, siendo B divisible por D, tenemos $B=DQ$ (Q es un número entero); no siendo C divisible por D, tenemos $C=DQ'+R$.

Luego $B+C=DQ+DQ'+R=D\ (Q+Q')+R$ (n.º 112).

Donde se ve que A dividido por D dá por cociente $Q+Q'$, y por resíduo R, que es el mismo resíduo de la division de C por D; lo cual debíamos demostrar (*).

Pasemos ahora á esponer los varios caractéres de la divisibilidad.

136. **Propiedades de los números 2 y 5, 4 y 25, 8 y 125...**

1.º *Todo número terminado en una de las cifras* 0, 2, 4, 6, 8, *es divisible por* 2.

En efecto, dicho número puede descomponerse en dos partes; una á la izquierda de las unidades simples, considerada con su valor relativo, y otra la cifra sola de unidades simples. (Por ejemplo, 38576 equivale á 38570 + 6.) Como la parte primera acaba en 0, es divisible por 10; pero 10 es divisible por 2, porque equivale á 2×5; luego tambien la primera parte es divisible por 2. La segunda parte, que es una de las cifras 0, 2, 4, 6, 8, es precisamente divisible por 2; luego (número 135) el número total es divisible por 2.

(*) Todas las proposiciones demostradas desde el n.º 127 al n.º 135 inclusive son verdaderas en todos los sistemas de numeracion.

Si el número termina en una de las cifras 1, 3, 5, 7, 9, no es divisible por 2, porque no lo es una de sus partes.

Advertencia. Todo número divisible por 2, ó acabado en una de las cifras 0, 2, 4, 6, 8, se llama *número par*. Los demas se llaman *impares*.

Todos los números *pares* estan comprendidos en la fórmula $2n$, siendo n un número entero cualquiera, y los números *impares* en la fórmula $(2n+1)$.

2.° *Todo número terminado en* 0 *ó* 5 *es divisible por* 5. —La demostracion es análoga á la que acabamos de dar respecto del divisor 2.

Si la última cifra es diferente de 0 ó de 5, el número no será divisible por 5; y el resíduo de la division de dicho número por 5 es igual al resíduo de la division de su última cifra por 5 (n.° 135); de modo que el resíduo es la misma cifra si es menor que 5; y en el caso contrario es su esceso sobre 5.

Así, 1327 dividido por 5 dá de resíduo 2, que es igual al resíduo de la division de 7 por 5, ó al esceso de 7 sobre 5.

Así tambien, 34789 y 71436, dan respectivamente los resíduos 4 y 1.

3.° *Todo número es divisible por* 4 *ó* 25 *si el número que forman sus dos últimas cifras es divisible por* 4 *ó* 25 *respectivamente; y no lo es en el caso contrario.*

En efecto, dicho número puede descomponerse en dos partes; una á la izquierda de las decenas, considerada con su valor relativo, y otra formada por las cifras de decenas y unidades. (Por ejemplo, 3548 y 27875, equivalen á $3500+48$ y $27800+75$.) Terminando en dos ceros la parte primera, es divisible por 100; 100 es divisible por 4 y por 25, pues es $100=4\times 25$; luego la primera parte es divisible por 4 ó por 25; y como la segunda parte es tambien divisible por 4 ó 25, se infiere que el número total será divisible por 4 ó 25 respectivamente.

Así, 3548 es divisible por 4, porque 48 es múltiplo de 4; 27875 es divisible por 25, porque 75 es múltiplo de 25.

Pero 13758 no es divisible por 4, y dá el resíduo 2, que daria la division de 58 por 4.

25659 no es divisible por 25, y dá el resíduo 9, que daria la division de 59 por 25.

Advertencia. Solo los números acabados en 00, 25 y 75, son divisibles por 25.

4.° *Todo número es divisible por* 8 *ó por* 125, *si el nú-*

mero que forman sus tres últimas cifras es divisible por 8 *ó* 125 *respectivamente; y no lo es en el caso contrario.*

La demostracion es análoga á las precedentes, por lo cual no la desarrollaremos; contentándonos con observar que 1000 es igual á 125×8; pero esta propiedad casi nunca se usa.

137. PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS 3 y 9. *Todo número es divisible por* 3 *ó por* 9, *si la suma de los valores absolutos de sus cifras es divisible respectivamente por* 3 *ó por* 9; *y no lo será en el caso contrario.*

Observemos primero que si de una potencia cualquiera de 10 ó de la unidad seguida de uno ó mas ceros se quita 1, el resultado es divisible por 9, porque se compone de tantas cifras 9, escritas unas en pos de otras, como ceros habia; y como el valor absoluto de cada cifra 9 es divisible por 9 y por 3, tambien lo será su valor relativo, que es múltiplo del valor absoluto. Luego el resultado es divisible por 3 ó por 9.

Esto supuesto, para generalizar mas nuestros razonamientos, llamaremos N al número propuesto, y designaremos por a, b, c, d,.... las cifras de sus *unidades*, *decenas*, *centenas*, *millares*,....; de modo que tendremos $N = \ldots.\ gfdcba$, ó mas bien, en virtud del principio fundamental de la numeracion decimal,

$$N = a + 10b + 100c + 1000d + 10000f + \ldots. \text{ ó}$$
$$N = a + 10b + (10)^2c + (10)^3d + (10)^4f + \ldots.$$

Esta igualdad puede escribirse de este otro modo:

$$N = \begin{cases} + (10-1)b + (10^2-1)c + (10^3-1)d + (10^4-1)f + \ldots \\ +a + b + c + d + f + \ldots \end{cases}$$

(Porque, por ejemplo, $10^3d = 10^3d - d + d = (10^3-1)\,d + d$.)

Ahora bien, con arreglo á lo dicho antes, $10-1$, 10^2-1, 10^3-1,.... son divisibles por 3 ó por 9; luego la primera línea horizontal consta de números múltiplos de 3 ó de 9; luego esta primera parte del número N es divisible por 3 ó por 9. Por consiguiente, si la segunda parte, que es la segunda línea horizontal, y, segun se ve, es la *suma de los valores absolutos de las cifras del número*, es divisible por 3 ó por 9, todo el número dado será tambien divisible por 3 ó por 9.—Lo cual debíamos demostrar.

138. Para obtener el resíduo de la division de un número

cualquiera por 3 ó por 9, basta *sumar los valores absolutos de sus cifras y dividir la suma por* 3 *ó por* 9. Si la division es exacta, el número dado será divisible por 3 ó 9 respectivamente; pero si queda resíduo, el que se obtenga será el que daria la division del número total por 3 ó por 9.

Esta propiedad es una consecuencia de lo demostrado en el n.º 135.

139. **Propiedad del número 11.** *Todo número es didisible por* 11 *si la diferencia entre la suma de los valores absolutos de sus cifras de lugar impar, contando desde la derecha, y la suma de los valores absolutos de sus cifras de lugar par, es cero ó múltiplo de* 11.

Antes de demostrar esta propiedad, debemos observar:

1.º Que *toda potencia de grado par, de* 10, *disminuida en una unidad, dá un resultado divisible por* 11.

En efecto, dicho resultado se compone necesariamente de un número par de cifras 9, escritas en hilera, y como cada dos cifras de estas, consideradas de por sí, forma 99 ó 9×11, y por tanto es divisible por 11, se infiere que tambien lo será cuando se considere con su valor relativo, por ser este valor múltiplo del absoluto. Luego en general, $10^{2n}-1$ es divisible por 11 (espresando $2n$ un número par entero cualquiera, segun se ha dicho).

2.º *Que toda potencia de grado impar de* 10, *aumentada en una unidad, dá un resultado divisible por* 11.

En efecto, una potencia cualquiera de grado impar de 10, puede representarse por 10^{2n+1} (n.º 136); pero tenemos

$$10^{2n+1}=10^{2n}\times10 \text{ (véase el n.º 112)},$$

ó bien tambien,

$$10^{2n+1}=10^{2n}\times10-10+10=(10^{2n}-1)\,10+10;$$

añadiendo 1 á los dos miembros, se deduce

$$10^{2n+1}+1=(10^{2n}-1)\,10+11.$$

Pero $10^{2n}-1$ es divisible por 11, segun la observacion primera; y 11 es tambien divisible por sí mismo; luego $10^{2n+1}+1$ es divisible por 11.

Esto supuesto, sea $N=hgfdcba$ el número propuesto. En virtud del principio fundamental de la numeracion decimal, tenemos

$$N=a+10b+10^2c+10^3d+10^4f+10^5g....,$$

igualdad que puede ponerse bajo la forma

$$N=\begin{cases} \quad +(10+1)b+(10^2-1)c+(10^3+1)d+(10^4-1)f+.... \\ +a \qquad -b \qquad +c \qquad -d \qquad +f+.... \end{cases}$$

En virtud de las dos observaciones precedentes, la primera línea se compone de números esencialmente divisibles por 11, y forma por consiguiente una parte divisible por 11. Luego el número total será divisible por 11, si es divisible por 11 la segunda parte que se ve escrita en la segunda línea, y que es *la diferencia* entre la suma $a+c+f....$ de los valores absolutos de las cifras de lugar impar, y la suma $b+d+g....$ de los valores absolutos de las cifras de lugar par. Lo cual debíamos demostrar.

140. Cuando la diferencia entre la suma de los valores absolutos de las cifras de lugar impar y la suma de los valores absolutos de las cifras de lugar par no es 0 ó múltiplo de 11, el número total tampoco es divisible por 11, porque una de sus partes es divisible por 11 y la otra no: entonces hay dos casos que considerar para obtener el resíduo de la division.

1.° *Si la suma de las cifras de lugar impar es mayor que la suma de las cifras de lugar par,* deberá añadirse la diferencia á la primera línea horizontal del valor de N.—Designando, pues, por B esta primera línea y por C la diferencia que debe añadirse, se tendrá $N=B+C$; y si C no es divisible por 11, *el resíduo de la division de* N *por* 11 *es el mismo que se obtendría de dividir* C *por* 11 (n.° 135).

2.° *Si*, al contrario, *la suma de las cifras de lugar par es mayor que la de las cifras de lugar impar,* la diferencia deberá restarse de la primera línea, y se tendrá $N=B-C$, designando siempre C el valor numérico de la diferencia.

Siendo, pues, B múltiplo de 11, y conteniendo C en general un múltiplo de 11 mas un resíduo R, menor que 11, se infiere que N ó $B-C$ puede ponerse bajo la forma

$$N=11\times m-R,$$

ó bien
$$N=11\,(m-1)+11-R.$$

Donde se ve que en este caso *el resíduo de la division de*

N *por* 11 *es igual al resultado que se obtiene restando* R *de* 11.

Sea, para fijar las ideas, el número 47356708. Sumando las cifras de lugar impar, empezando por la derecha, resulta 27; sumando las cifras de lugar par, resulta 13: la suma primera es mayor que la segunda; si se toma la diferencia entre ambas, que es 14, el resíduo 3 de la division de este número por 11 es el mismo que daria la division del número total por 11, como puede comprobarse facilmente.

Pero si se tuviera el número 370546345, como la suma de las cifras de lugar impar es 15 y la de las cifras de lugar par es 22, número mayor que 15, resulta que tomando la diferencia 7 de las dos sumas, el resíduo de la division del número total por 11 no es 7, sino 11—7, ó 4, como puede comprobarse facilmente.

141. *Pruebas por* 9 *y por* 11 *de la multiplicacion y division.*—No podemos pasar en silencio un medio muy cómodo y sencillo de comprobar la multiplicacion y la division de números enteros, cuyo enunciado es el siguiente:

Súmense separadamente los valores absolutos de las cifras del multiplicando y multiplicador, cuidando de quitar los 9 *que contengan dichas sumas:* así se obtienen dos *resíduos* que (n.º 138) no son mas que los resíduos de la division de cada uno de los factores por 9.

Multiplíquense entre sí los dos resíduos, y búsquese del mismo modo el resíduo de la division por 9 *del producto obtenido.*

Por último, *súmense las cifras del producto que se habia sacado, y quítense los* 9; así se obtiene *un nuevo resíduo, que debe ser igual al precedente* para que la operacion esté bien hecha.

Sea, por ejemplo, multiplicar entre sí los números 5786 y 475; efectuada la multiplicacion en la forma sabida, se suman los valores absolutos de las cifras del multiplicando, quitando los 9, ó como se dice vulgarmente, *fuera de los* 9, en la forma siguiente: empezando por la izquierda, 5 y 7 son 12, fuera de los nueves, 3; 3 y 8 son 11, fuera de los nueves, son 2; 2 y 6 son 8, que es el resíduo de la division del multiplicando por 9, y se escribe aparte.

$$\begin{array}{r} 5786 \\ 475 \\ \hline 28930 \\ 40502 \\ 23144 \\ \hline 2748350 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 8 & 2 \\ \hline 7 & 2 \end{array}$$

Del mismo modo se procede con el multiplicador, y se obtiene el resíduo 7, que se escribe debajo del 8, como se ve en el ejemplo.

Se multiplica 8 por 7; resulta 56; y se dice: 5 y 6 son 11; fuera de los nueves, son 2, que se escribe á la derecha del 8. Por último, se ejecuta con el producto total la misma operacion que hemos ejecutado con cada uno de los factores, y se obtiene un resíduo 2, que, siendo igual al anterior, prueba que la operacion está bien hecha.

Para dar razon de la prueba por 9 de un modo general, designemos por A y por B los dos factores propuestos, por Q, Q′, R y R′, los cocientes y los resíduos de la division del multiplicando y multiplicador por 9; hechos estos supuestos, tendremos las igualdades

$$A = 9 \times Q + R,$$
$$B = 9 \times Q' + R'.$$

Multiplicando miembro á miembro estas dos igualdades, se obtiene (n.° 112)

$$AB = 9^2 \times QQ' + 9 \times Q'R + 9 \times QR' + RR'.$$

Los tres primeros términos del segundo miembro de esta igualdad son evidentemente *múltiplos* de 9; luego (n.° 135) el resíduo de la division del producto AB por 9 debe ser igual al que dá el producto RR′ dividido por 9, lo cual debíamos demostrar.

Si uno de los dos factores de la multiplicacion es divisible por 9, el producto tambien debe serlo; entonces, ó R, ó R′, debe ser 0; y tambien será por consiguiente *cero* el producto RR′. Lo mismo sucede si el producto RR′ es divisible por 9.

En la *prueba de la division* pueden ocurrir dos casos: ser la division *exacta*, ó ser *inexacta*, es decir, *no quedar* ó *quedar* resíduo.

1.° Si no queda resíduo, es el dividendo igual al producto del divisor por el cociente obtenido, y se le puede aplicar la regla anterior, considerando el divisor y el cociente como factores y al dividendo como producto.

2.° Si queda resíduo, llamando N al dividendo total, D al divisor, Q al cociente, y R al resíduo, se tiene la igualdad

$$N = DQ + R;$$

de aquí puede ahora inferirse que el resíduo de la division de N por 9 debe ser igual á la suma del resíduo de la division da DQ por 9 y el resíduo de la division de R por 9 (cuya suma deberá disponerse, fuera de nueves, caso necesario).

Advertencia. Siempre que se aplica la prueba por 9 y el resíduo del producto total no es igual al otro, puede concluirse que la multiplicacion está mal hecha: si dichos resíduos son iguales, es de presumir que está bien hecha, pero, sin embargo, no se puede asegurar que lo es por dos razones principales: *primera*, porque han podido escribirse, ó en los productos parciales, ó en el producto total, *ceros* en lugar de *nueves*, y este error no podria conocerse por la especial naturaleza de la prueba: *segunda*, porque dos cifras, ó de los productos parciales, ó del producto total, pueden tener la una *de mas* y la otra *de menos el mismo número de unidades*, en cuyo caso, compensándose los errores en la suma de los valores absolutos, quedaria desapercibido el error.

Por consiguiente, la prueba esplicada, aunque muy cómoda en la práctica, no es rigorosa, y cuando sale bien, solo puede considerarse como una *semi-prueba*, que se emplea únicamente cuando falta tiempo: cuando no sale la prueba, es seguro que está mal hecha la operacion.

La prueba por 11, que no difiere de la prueba por 9 mas que en la manera de obtener los resíduos (*véase* el n.° 140), es preferible, aunque sujeta á algunos errores, porque estos ocurren muy rara vez.

Las dos pruebas que acabamos de esponer pueden aplicarse tambien á la multiplicacion y á la division de las fracciones decimales, porque son operaciones iguales en un todo al procedimiento de los enteros.

142. Hay tambien caractéres que revelan si un número es ó no divisible por los números primos 7, 13, 17,....; pero las reglas para ello necesarias son en la práctica mucho mas complicadas que el ensayo directo de la division. Para estudiarlas por mera curiosidad, se necesitan mas conocimientos de Algebra que los espuestos aquí hasta ahora.

Solo encargaremos á los estudiosos que se ejerciten en la cuestion siguiente: *Cuáles son en un sistema cualquiera de numeracion, cuya base sea* B, *los números que gozan de propiedades análogas á las del* 9 *y del* 11 *en el sistema decimal;* facilmente se conseguirá, recordando que en todo sistema de numeracion una potencia cualquiera de la base está espresada por la unidad seguida de tantos *ceros* como unidades tiene el grado de la potencia, es decir, por 10^n, siendo n el grado de la potencia.

143. Los *caractéres de divisibilidad* de un número por los múltiplos 6, 12, 15, 18, 36, 45 de los números primos 2, 3 y 5, son bastante sencillos para poder esplicarlos sin esfuerzo.

1.° *Un número es divisible por* 6 *ó por* 18, cuando siendo *par, es divisible por* 3 *ó por* 9 la suma de los valores absolutos de sus cifras.

Porque entonces el número es á la vez divisible por 2 y por 3, ó por 2 y por 9; pero 2 y 3, ó 2 y 9, son primos entre sí; luego (n.° 133) el número dado debe ser divisible por sus productos 6 ó 18.

2.° *Un número es divisible por* 12 *ó por* 36, cuando sus dos últimas cifras, consideradas con su valor relativo, forman un *múltiplo* de 4, y además la suma de los valores absolutos de sus cifras es *divisible* por 3 ó por 9, porque entonces, siendo el número divisible á la vez por 4 y por 3, ó por 4 y por 9, debe ser divisible por 3×4, ó 9×4, es decir, por 12 ó por 36.

3.° En fin, *un número es divisible por* 15 *ó por* 45, cuando su última cifra es 0 ó 5, y la suma de los valores absolutos de sus cifras es divisible por 3 ó por 9, porque entonces, el número es á la vez divisible por 5 y por 3, ó por 5 y por 9, y por consiguiente por 5×3, ó por 5×9, es decir, por 15 ó por 45.

Pasemos ahora á investigar todos los divisores de un número, tanto simples como compuestos; y como esta cuestion es tan importante, vamos á esponerla del modo mas completo y general.

144. Sea N el número cuyos divisores simples y compuestos queremos averiguar.

Designemos por a el *menor número primo*, empezando por 2, que divide á N, y efectuemos la division de N por a cuantas veces sucesivas se pueda: sea n el número de divisiones que hayan podido hacerse; tendremos $N=a^n\times N'$, no comprendiendo ya N' al factor a. Puesto que todo número primo diferente de a, que divide á N, debe dividir (n.° 129) á N', resulta que la investigacion de los factores primos de N, diferentes de a, se reduce á la investigacion de los factores primos de N', número mas simple que N.

Designemos, pues, por b el *menor número primo* que divide á N', y por p el número de veces que entra en él: tendremos

$$N' = b^p \times N'';$$

de donde

$$N = a^n \times b^p \times N'',$$

no conteniendo ya N'' á los factores a y b.

Designemos por c el *menor número primo* que divide á N'', y por q el número de veces que entra en él: tendremos

$$N'' = c^q \times N''';$$

de donde

$$N = a^n \times b^p \times c^q \times N'''.$$

Continuando esta série de operaciones, se llegará á un cociente que será número primo, ó potencia de número primo (circunstancia que se reconoce en que tomando á dicho número por divisor y efectuando la division cuantas veces se pueda, *se llega á obtener un cociente igual á la unidad*).

Supongamos, para fijar las ideas, que N''' es igual á d^r, siendo d un número primo: tendremos

$$N = a^n b^p c^q d^r,$$

representando a, b, c, d, (n.º 132) los únicos factores primos de N.

Entonces se dice que el número N está *descompuesto en sus factores simples*.

Si ahora se quieren formar los compuestos, deberán formarse todos los productos que puedan obtenerse multiplicando de dos en dos, de tres en tres.... las diversas potencias de los diferentes factores primos, desde la primera hasta la del grado n para a, del grado p para b, del grado q para c, y del grado r para d, etc.

Para tener seguridad de que se han formado todos los productos, conviene fijar y seguir un órden; para lo cual se forman las tablas siguientes.

Sea el número 5880.

TABLA PRIMERA. Investigacion de los divisores simples.

5880	2
2940	2
1470	2
735	3
245	5
49	7
7	7
1	

Despues de tirar á la derecha del 5880 una raya vertical, se escribe el 2, que es el menor divisor primo de 5880, al lado de dicha raya y en la misma línea del número dado: despues se efectúa la division, y se coloca el cociente 2940 debajo de 5880.

Siendo 2940 todavía divisible por 2, se escribe otra vez este divisor á la derecha debajo del anterior, y se repite la division, escribiendo el cociente 1470 debajo del dividendo.

Tambien 1470 es divisible por 2: escríbese, pues, otra vez este divisor á la derecha debajo de los anteriores, y el nuevo cociente 735 se escribe debajo de 1470.

Ya no es divisible por 2 el último cociente 735, pero lo es por 3, que es el número primo mas simple despues de 2. Se escribe 3 debajo del último divisor 2; se efectúa la division de 735 por 3, y el cociente 245 se escribe debajo del 735.

245 no es divisible por 3, pero lo es por 5, que se escribe debajo del divisor 3; se efectúa la division de 245 por 5, y el cociente 49 se escribe debajo del 245.

49 no es divisible por 5, pero lo es por 7, que se escribe debajo del divisor 5: el cociente de 49 por 7 es 7, que se escribe debajo del 49.

Finalmente, siendo 7 número primo, se escribe de nuevo como divisor en la columna de la derecha, y como ya se obtiene 1 por cociente, está terminada la operacion.

Luego el resultado es

$$5880=2^3\times3\times5\times7^2,$$

quedando el número *descompuesto en sus factores simples.*

SEGUNDA TABLA. Formacion de todos los divisores simples y compuestos de un número.

Sea el mismo número 5880.

1...	2...	4...	$8=2^3$
3...	6...	12...	$24=2^3\times3$
5...	10...	20...	40
15...	30...	60...	$120=2^3\times3\times5$
7...	14...	28...	56
21...	42...	84...	168
35...	70...	140...	280
105...	210...	420...	$840=2^3\times3\times5\times7$
49...	98...	196...	392
147...	294...	588...	1176
245...	490...	980...	1960
735...	1470...	2940...	$5880=2^3\times3\times5\times7^2$.

Se escriben primero en línea horizontal, como se ve en el ejemplo, los números 1, 2, 4, 8, que son evidentemente divisores de 5880, pues 1 es divisor de todo número, y en virtud de la descomposicion ya operada, son factores del número dado los números 2, 2^2, 2^3.

Esto supuesto, se multiplican todos los términos de esta primera línea por el factor 3, y se obtiene otra línea de divisores 3, 6, 12, 24, que se colocan respectivamente debajo de los precedentes.

Pasando al factor 5, se multiplican todos los términos de las dos líneas precedentes por ese factor, y se obtienen *dos* líneas mas de factores, que se escriben debajo de los anteriores, y son.... 5, 10.... 15, 30....

Como el factor 7 entra *dos* veces en el número propuesto, se multiplican primero por él las cuatro líneas precedentes, y se obtienen otras *cuatro*, y luego estas últimas cuatro líneas se vuelven á multiplicar por el mismo factor 7, obteniéndose tambien otras cuatro líneas de divisores.

Por consiguiente, en total se obtienen *doce* líneas de á *cuatro* divisores cada una, que hacen 48 divisores del número 5880.

Es además fácil ver: 1.° que todos los números contenidos en la tabla son divisores del número propuesto (lo cual se deduce de la espresion $5880=2^3\times3\times5\times7^2$): 2.° que el número propuesto no puede tener mas divisores que los allí obtenidos (véase el n.° 132).

Advertencia. En la práctica conviene, para la formacion de la segunda tabla, escribir en la primera línea horizontal las potencias del factor primo que entra *mas veces* en el número propuesto, siendo despues enteramente indiferente el órden de los demas factores.

Propondremos por ejercicio hallar todos los divisores de los números

$$1764, \quad 1665, \quad 5670, \quad 30527,$$

los cuales resultarán respectivamente iguales á

$$2^2.3^2.7^2; \; 3^2.5.37; \; 2.3^4.5.7; \; 7^3.89.$$

145. Obtenida la descomposicion de un número en sus factores simples, puede obtenerse facilmente la espresion del *número total de sus divisores*, sin necesidad de formar la tabla segunda.

Volvamos para esto á la espresion general

$$N = a^n.b^p.c^q.d^r,$$

y consideremos la primera línea de divisores

$$1, a^1, a^2, a^3, \ldots a^n,$$

cuyo número total está espresado por $(n+1)$.

Multiplicando todos los números de esta primera línea sucesivamente por los términos b^1, b^2, b^3,.... b^p, que son tantos como unidades tiene p, se forman p líneas de divisores, que cada una tiene tantos como la primera, es decir, cada una tiene $(n+1)$, luego habrá $(n+1)\times p$ divisores en las nuevas líneas, á los cuales deberán añadirse los $(n+1)$ de la línea primera: tendremos, pues $(n+1)\,p+(n+1)$ ó $(n+1)\,(p+1)$, divisores.

[Todos ellos son potencias de a ó de b tomadas de por sí ó combinadas de dos en dos.]

Multiplicando ahora todos los términos de esas diferentes líneas de divisores sucesivamente por c^1, c^2, c^3,.... c^q, que son tantos como unidades tiene q, tendremos un número de nuevas líneas de divisores, espresado por $(n+1)\,(p+1)\times q$, al cual será necesario añadir los $(n+1)\,(p+1)$ divisores que antes teníamos.

Así, el número total de divisores que tendremos estará espresado por

$$(n+1)(p+1)\times q+(n+1)(p+1), \quad ó$$

$$\text{bien} \quad (n+1)(p+1)(q+1);$$

y así sucesivamente.

De donde se deduce esta regla: *añádase una unidad á cada uno de los esponentes* n, p, q,.... *de los diferentes factores primos que entran en* N, *y multiplíquense despues entre sí; el producto espresa* EL NÚMERO TOTAL *de divisores de* N, *contando con la unidad y el mismo número dado*, que realmente son tambien divisores de este.

En el ejemplo primero, habiendo hallado

$$5880=2^3\times3^1\times5^1\times7^2,$$

debemos tener

$$(3+1)(1+1)(1+1)(2+1),$$

ó

$$4\times2\times2\times3=48,$$

que será el número total de divisores, y en efecto lo es, pues tantos han resultado de la formacion de la segunda tabla.

146. *Observacion.* Sucede algunas veces que ensayando la division del número dado N por los factores primos 2, 3, 5, 7,.... no se encuentra ninguno que le divida exactamente. En este caso, *cuando se haya prolongado el ensayo hasta la parte entera de la raiz cuadrada de* N (véase el n.° 108, 7.°), sin encontrar ningun divisor exacto, *es inútil ensayar nuevos divisores, y puede asegurarse que* N *es número primo.*

Así, 73 es número primo, porque su raiz cuadrada está entre 8 y 9, y ningun número entero hasta 8 inclusive divide exactamente á 73.

Para demostrar esta proposicion sean dos números A y B, cuyo producto sea igual á N; y designemos por R la raiz cuadrada de N.

Tendremos $\quad A\times B=R\times R.$

Para que esta igualdad subsista, es evidentemente necesario que si es $A>R$, sea por compensacion $B<R$; lo cual prueba que no puede existir un divisor de N que sea mayor que R, por solo el hecho de no haber ninguno que sea menor que R. Luego el número en que se verifique esa circunstancia es *primo.*

Los jóvenes que sepan ya estraer la raiz cuadrada conocerán, en virtud de la observacion precedente, que 113, 719, 977, 3329, 8123,.... son números primeros (*).

147. *Formacion de una tabla de números primos.*

Propongámonos, por ejemplo, formar una tabla de todos los números primos desde 1 hasta 1000.

Concibiendo escritos unos en pos de otros los 1000 números primeros, se empieza por tachar: 1.° todos los números pares, escepto 2; 2.° todos los múltiplos de 3, escepto 3 (número 137); 3.° todos los números terminados en 5, escepto 5 (número 136).

Hechas estas primeras supresiones, ya se puede asegurar que todos los números desde 1 hasta 7×7, ó 49, que no se hayan borrado, son números primos (porque el menor múltiplo de 7 solo puede ser 7×7).

Se conocerán, pues, así todos los números primos desde 1 hasta 47 inclusive.

Borrando ahora todos los múltiplos de 7 contando desde 49, se puede asegurar que son primos todos los números que queden sin borrar desde 1 hasta 11×11, ó 121 exclusive (porque deben haberse borrado todos los múltiplos de 11 inferiores á 11×11).

Luego, ya conocemos todos los números primos desde 1 hasta 113 inclusive.

Borrando en seguida todos los múltiplos de 11, desde 11×11, podrá concluirse que son primos todos los números no borrados, comprendidos desde 113 hasta 167, número primo inmediatamente inferior á 169, ó 13×13; y así sucesivamente. Con esto se ve cuán prontamente puede formarse una tabla bastante estensa de números primos (**).

148. *Reduccion de los quebrados á un comun denominador.* La regla general esplicada en el n.° 47 para reducir

---

(*) Los que no conozcan la estraccion de la raiz cuadrada, pueden seguir la regla siguiente:

Cuando *despues de haber ensayado sucesivamente en balde los números primos* 2, 3, 5, 7,.... *se llega á un cociente menor que el último número ensayado, se puede asegurar que el número dado es* PRIMO.

(**) Este procedimiento se conoce con el nombre de *Criba de Eratóstenes*.

varios quebrados á un comun denominador, conduce generalmente á quebrados de términos muy grandes. Sin embargo, cuando los denominadores primitivos comprenden factores comunes, es posible obtener un número mucho menor que su producto que sirva de denominador comun á todos los quebrados. Es por consiguiente cuestion muy importante para simplificar los cálculos, el *determinar el menor múltiplo comun de los denominadores de varios quebrados.*

Para esto se sigue la siguiente regla: *descompónganse,* segun la regla del n.º 144, *todos los denominadores en sus factores primos; fórmese luego el producto de las mayores potencias de cada uno de los diferentes factores primos que resulten*, y ese producto será el *número pedido.*

En efecto, ese número es sin duda alguna *múltiplo* de cada denominador, porque contiene todos los factores primos elevados al menos á una potencia igual á la que entra en el denominador respectivo: y además es el *menor múltiplo posible comun á todos,* porque para que sea divisible exactamente por todos, á lo menos ha de tener cada factor simple elevado á una potencia igual á la que entra respectivamente en cada uno.

Sirva de ejemplo reducir á un comun denominador los seis quebrados

$$\frac{13}{60},\ \frac{17}{28},\ \frac{23}{240},\ \frac{103}{225},\ \frac{319}{490},\ \frac{523}{720}.$$

Los seis denominadores, descompuestos en sus factores simples por la regla esplicada, equivalen á

$$2^2\times3\times5;\ 2^2.7;\ 2^4.3.5;\ 3^2.5^2;\ 2.5.7^2;\ 2^4.3^2.5.$$

Los únicos factores primos que entran en estos denominadores son 2, 3, 5, 7; y las potencias mas altas á que se hallan elevados son 2^4, 3^2, 5^2, 7^2. Formando, pues, el producto de estas potencias, se encuentra 176400, que es el múltiplo mas simple de los denominadores, y el denominador comun á que han de reducirse todos los quebrados.

Para ejecutar esta operacion, se divide aparte el denominador comun por cada uno de los denominadores, y el cociente se multiplica por el numerador respectivo.

Así, en este ejemplo, consideremos primero el primer quebrado $\frac{13}{60}$.

Dividiendo 176400 por 60, resulta 2940, que multiplicado por el numerador 13, dá 38220: luego la fraccion transformada será $\frac{38220}{176400}$.

Pasando al segundo quebrado $\frac{17}{28}$, y dividiendo el denominador comun 176400 por 28, se obtiene el cociente 6300, que, multiplicado por el numerador 17, dá 107100; luego el segundo nuevo quebrado será $\frac{107100}{176400}$.

Del mismo modo se hallaria que los otros cuatro quebrados se transforman en estos

$$\frac{16905}{176400}, \frac{135632}{176400}, \frac{114840}{176400}, \frac{128135}{176400}.$$

Estas operaciones son bastante complicadas; pero sin embargo lo serían mucho mas y se llegaria á un denominador mucho mayor, si se siguiera la regla del n.º 47. (El denominador sería 32006016000000.)

Muchas veces la descomposicion de los denominadores en sus factores primos se hace á la simple vista, sobre todo cuando solo contienen á los divisores 2, 3, 5, que tan facilmente se conocen, lo mismo que sus múltiplos 4, 6, 8, 9, 12, 15, 18, 24, 25, 36, 75,....

Propondremos para ejercicio los quebrados siguientes:

$$\frac{13}{20}, \frac{17}{48}, \frac{113}{280}, \frac{527}{960}, \frac{1211}{1800}, \frac{3613}{5040}, \frac{5237}{6860}.$$

[El múltiplo mas simple de los denominadores es $2^6.3^2.5^2.7^3 = 4939200$.]

149. *Observacion sobre el máximo comun divisor.* En el n.º 52 esplicamos un método para obtener el número mayor que puede á la vez dividir á dos números propuestos: el método era sencillo y la demostracion que dimos rigorosa y completa. Sin embargo, ahora vamos á esplicar algunas propiedades importantes del máximo divisor comun, por cuyo medio conseguiremos simplificar la práctica.

Supuesto que un número entero cualquiera no puede tener mas divisores (n.º 132) que los obtenidos en su tabla de factores simples y compuestos, se infiere que dos números enteros no tendrán mas divisores comunes que los factores primos ó las combinaciones de ellos que tengan comunes.

Luego *el máximo comun divisor de dos ó mas números es el producto de los factores primos que tengan comunes con el menor esponente á que entre todos se encuentren elevados.*

Consecuencia. Todo divisor comun á varios números divide á su máximo comun divisor: esta proposicion se anunció ya en el n.º 52, respecto de dos números solos.

150. La proposicion esplicada suministra otro medio de determinar el máximo comun divisor de dos números A y B: *averígüense todos los divisores de* A *por el método del n.º* 144, *y luego todos los de* B; *véase entre unos y otros cuál es el mayor comun á ambos, y ese será el máximo comun divisor pedido.*

Ó bien tambien, lo que es mas breve, *despues de haber descompuesto los números en sus factores simples, fórmese un producto de los factores simples comunes á los números dados, elevados respectivamente á la menor potencia que haya resultado.*

Sea, por ejemplo, *averiguar el máximo comun divisor de los números* 2150 y 3612.

2150	2	3612	2	
1075	5	1806	2	
215	5	903	3	$2 \times 43 = 86$.
43	43	301	7	
1		43	43	
		1		

Se ve que los divisores simples de 2150 son $2.5^2.43$, y los de 3612.... $2^2.3.7.43$.

Luego los únicos factores comunes que tienen son 2 y 43: luego 2×43, ó 86, es el máximo comun divisor pedido. (Los demas factores 5.5 y 2.3.7, representan los cocientes respectivos de la division de cada número por 86).

151. Este procedimiento es en general menos simple que el ordinario, principalmente si en la práctica de este se hacen las modificaciones siguientes:

Como el máximo comun divisor de dos números solo se compone de los factores primos comunes á ambos, *se pue-*

de suprimir sin inconveniente *en uno de ellos cualquier factor primo que evidentemente no exista en el otro.*

Tambien *se puede, si se quiere, suprimir un factor comun á ambos, con tal que hallado despues el máximo divisor comun, se cuide de multiplicarle por el factor suprimido.*

Observemos además, que siendo el máximo comun divisor de dos números el mismo que existe entre el menor y el resíduo de su division (n.º 52), ó entre el primer resíduo y el segundo...., pueden hacerse esas supresiones en cualquiera de las operaciones que exige el procedimiento.

Volvamos ahora á los números 2150 y 3612.

Vemos que 2150 contiene al factor 5 y á mas al factor 25, que no entra en el 3612; le suprimo, pues, y me queda 86.

Vemos igualmente que 3612 tiene el factor 3, que no entra en 2150: le suprimo, y me queda 1204.

Los dos números 86 y 1204 tienen evidentemente comun el factor 2, que conservo aparte, quitándoselo á ellos; y la cuestion me queda reducida á hallar el máximo comun divisor entre 43 y 602.

Dividiendo 602 por 43, encuentro el cociente exacto 14: luego 43 es el divisor mayor comun entre 43 y 602: añadiendo el 2 que suprimí, resulta ser 43×2 el máximo comun divisor de 86 y 1204, y por consiguiente de los dos números dados.

Propongámonos ahora los números 377 *y* 249.

Empiezo por suprimir el factor 3, que entra en 249 y no en el 377, quedando con esto la cuestion reducida á hallar el máximo comun divisor entre 377 y 83.

Apliquemos el procedimiento: dividiendo 377 por 83, obtenemos el cociente 4 y por resíduo 45: en lugar de dividir ahora 83 por 45, observo que 45 es igual á $3^2.5$, y como ni el 3 ni el 5 son factores del 83, puedo suprimirlos, y como obtengo de cociente la *unidad*, deduzco que los números 377 y 249 son primos entre sí.

Cuando se adquiere un poco de costumbre abrevian muchísimo los cálculos esas simplificaciones. Aquí las hemos espuesto además, porque son luego indispensables en la *investigacion del máximo comun divisor algébrico* (*).

(*) MM. Lamé y Binet, miembros de la Academia de las Cien-

152. Si hubiera necesidad de determinar el máximo comun divisor de mas de dos números, se seguirá la regla siguiente:

(Para abreviar, designaremos las tres palabras *máximo comun divisor* por sus iniciales *m. c. d.*)

Para hallar el *m. c. d.* de varios números se halla primero el de los dos menores; despues se halla el *m. c. d.* entre el hallado y otro número; despues se vuelve á hallar el *m. c. d.* entre el último hallado y el cuarto número....; y así hasta llegar al último número.

Sean A, B, C, E, F,.... los números propuestos: llamemos D al *m. c. d.* entre A y B, y D′ el *m. c. d.* entre D y C: digo que por el pronto D′ es el *m. c. d.* entre A, B y C. En efecto, el *m. c. d.* entre A, B y C, como debe dividir á A y á B, dividirá tambien á D, que es su *m. c. d.* (véase el n.º 52); y como divide además á C, dividirá tambien á D′, que por hipótesis es el *m. c. d.* entre D y C. Por otro lado, como D′ divide á D, dividirá á A y á B; luego D′ divide á A, á B y á C, y por consiguiente divide á su *m. c. d.*: donde se ve que D′ divide al *m. c. d.* entre A, B y C; y que este *m. c. d.* divide á D′: luego son iguales.

Del mismo modo, como el *m. c. d.* entre A, B, C y E debe dividir á A, B y C, debe tambien dividir á D′, que es su *m. c. d.*; pero además divide á E, luego dividirá á D″, *m. c. d.* entre D′ y E. Por otro lado, como D″ divide á D′, dividirá á A, á B y á C: luego D″ divide á A, B, C y E, y por consiguiente á su *m. c. d.* Siendo, pues, este *m. c. d.* y D″ recíprocamente divisibles uno por otro, son precisamente iguales.

Y así iríamos diciendo sucesivamente.

Advertencia. Es claro que lo mejor es comenzar por los números menores, porque el máximo comun divisor buscado no puede ser mayor que el que exista entre ellos.

Por este medio se verá que es 42 el máximo comun divisor entre los números 504, 756, 1260 y 2058.

Tambien podrian descomponerse los números en sus facto-

---

cias, han presentado á esta corporacion, cada uno por su parte, una Nota que tiene por objeto determinar el *límite* del número de operaciones que pueden necesitarse en cada investigacion de máximo comun divisor. (Véase *Les Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*. Tomo XIX, páginas 867 y 937, sesiones de 28 de Octubre y 4 de Noviembre de 1844.)

res simples y proceder como se hizo con dos solos en el n.º 150.

153. *Observaciones sobre las fracciones irreducibles.* Llámase fraccion *irreducible* (n.º 54) *la fraccion que no puede simplificarse.*

De esta definicion se infiere evidentemente que *los dos términos de una fraccion irreducible son primos entre sí;* porque si tuvieran un factor comun distinto de la unidad, se podria, suprimiéndolo, simplificar la fraccion, lo cual es contrario á la definicion.

Recíprocamente, toda fraccion *cuyos términos son primos entre sí es irreducible.*

En efecto, designemos por $\frac{a}{b}$ el quebrado propuesto, cuyos términos son, por hipótesis, primos entre sí; y sea otro quebrado $\frac{c}{d}$ igual al primero.

Tendremos $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, de donde se deduce $c=\frac{ad}{b}$.

Pero c es un número entero: luego $\frac{ad}{b}$ debe tambien ser número entero; pero por hipótesis a y b son primos, luego (número 128) b debe dividir á d, y se tendrá $d=bq$.

Sustituyendo este valor de d en la espresion de c, se obtiene $c=\frac{abq}{b}=aq$.

Esto prueba evidentemente que para que una fraccion $\frac{c}{d}$ sea equivalente á otra $\frac{a}{b}$ cuyos términos sean primos entre sí, es preciso que *los términos de aquella sean equimúltiplos de los de esta.*

Luego la fraccion $\frac{a}{b}$ no puede ser equivalente á ninguna otra fraccion mas simple.

De esto resulta que cuando se han dividido los dos términos de un quebrado por su máximo comun divisor, *el quebrado resultante es irreducible;* proposicion que enunciamos sin demostracion en el n.º 54.

154. Tambien puede concluirse de lo últimamente dicho,

que *dos fracciones irreducibles no pueden ser iguales, á no ser que sean idénticos los numeradores entre sí y tambien los denominadores entre sí.*

En efecto, siendo irreducible el primer quebrado, debe tener sus términos *primos entre sí;* luego para que el segundo le sea igual, será necesario que sus términos sean *equimúltiplos* de los del otro; lo cual los reduce á serles iguales, porque tambien ellos son primos entre sí, por el supuesto.

§. III. De las fracciones decimales periódicas.

155. La valuacion de un quebrado comun en fraccion decimal, es decir, en *décimas*, *centésimas*,.... de la unidad principal, dá lugar á circunstancias que merecen particular exámen; pero antes de ocuparnos de ellas, debemos detenernos un poco en el procedimiento que sirve para convertir un quebrado ordinario en fraccion decimal.

Vimos en el n.º 91, que para hacer esa conversion se coloca un *cero* en el cociente con una coma á su lado, y luego: 1.º *se coloca un cero á la derecha del numerador, y el número resultante se divide por el denominador*, con lo que se obtiene la cifra de *décimas* del cociente y un resíduo: 2.º *se escribe un cero á la derecha de este resíduo y se divide por el denominador el número resultante*, con lo cual se obtiene la cifra de *centésimas* del cociente y un nuevo resíduo: 3.º *se escribe á su derecha otro cero y se divide por el denominador el número resultante*, continuando esta série de operaciones hasta obtener el grado de aproximacion que se desea.

Ahora bien, es evidente que el ir escribiendo sucesivamente *ceros* á la derecha de los resíduos, equivale á escribir al principio á la derecha del numerador el mismo número de ceros, es decir, *á multiplicarle por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales se quieren sacar, dividiendo el producto por el denominador, y separando á la derecha del cociente el número de cifras decimales pedido:* porque en virtud del procedimiento ordinario de la division de números enteros, se van bajando sucesivamente á la derecha de los resíduos los ceros que se han escrito de una vez á la derecha del dividendo.

Esta observacion nos sirve para demostrar las dos propiedades siguientes:

156. 1.° *Todo quebrado comun cuyo denominador no contiene mas* FACTORES PRIMOS *que* 2 *y* 5, *es exactamente reducible á fraccion decimal de un número* LIMITADO *de cifras;* es decir, que al cabo de un número determinado de operaciones se llega á un resíduo cero, y entonces la fraccion decimal obtenida espresa exactamente el valor del quebrado comun propuesto.

Además, si el quebrado comun es irreducible (como siempre podemos suponerle), *el número total de operaciones necesarias para llegar al resíduo cero es igual al mayor de los esponentes de* 2 *y* 5 *que entran en el denominador.*

Así, los quebrados $\frac{7}{8}, \frac{13}{25}, \frac{11}{40}, \frac{317}{1250}$, que pueden evidentemente ponerse bajo la forma

$$\frac{7}{2^3}, \frac{13}{5^2}, \frac{11}{2^3.5}, \frac{317}{2.5^4},$$

son reducibles á fracciones decimales de *limitado número* de cifras.

La primera y la tercera exigen tres operaciones parciales, la segunda dos y la cuarta cuatro.

Hechas las necesarias, se encuentra exactamente

$$0{,}875;\quad 0{,}52;\quad 0{,}275;\quad 0{,}2536;$$

lo que facilmente puede comprobarse.

Para esplicar esta propiedad, observemos que 10, 100, 1000,.... son iguales respectivamente á 2.5, $2^2.5^2$, $2^3.5^3$,.... y como para hacer la reduccion en fracciones decimales se multiplica el numerador (n.° 155) por 10, 100, 1000,.... es claro que el producto resultante será divisible por 2.5, $2^2.5^2$, $2^3.5^3$,....; luego si se multiplica el numerador por la unidad seguida de tantos ceros como unidades tiene el mayor de los esponentes de 2 ó 5 que contiene el denominador, el producto resultante será necesariamente múltiplo del mismo denominador.

Luego el número de divisiones parciales será *limitado* é igual al mayor de los esponentes del 2 ó el 5, que entran en el denominador.

157. *Todo quebrado ordinario cuyo denominador contiene uno ó mas* FACTORES PRIMOS *diferentes de* 2 *y* 5, *que*

no entran al mismo tiempo en el numerador, dá, cuando se convierte en decimales, una fraccion de un número ILIMITADO *ó* INFINITO *de cifras;* y que además es PERIÓDICA, es decir, que en ella se repiten constantemente y en el mismo órden las mismas cifras al cabo de cierto número de divisiones parciales.

En efecto, en este caso la multiplicacion del numerador por 10, 100, 1000,.... no hace mas que introducir los factores 2 y 5 elevados á cierta potencia; por consiguiente, el *factor primo* que se supone existir en el denominador sin entrar en el numerador, tampoco entrará en este (n.º 129) despues de multiplicado por una potencia cualquiera de 10. Luego cualquiera que sea el número de ceros que se añada al numerador, no se podrá obtener un producto exactamente divisible por el denominador; por consiguiente las operaciones se continuarán al *infinito*.

Digo además que la fraccion será *periódica*. En efecto, como, segun el procedimiento del n.º 155, cada resíduo es menor que el divisor, que es siempre *el mismo*, resulta que cuando se hayan hecho *á lo mas* tantas divisiones parciales como unidades tiene el divisor *menos una*, se volverá á obtener precisamente alguno de los resíduos anteriores ya obtenidos. Entonces escribiendo un cero á su derecha, se tendrá un dividendo parcial *igual* á uno de los anteriores; y como el divisor es el mismo, el cociente y el resíduo resultarán tambien *iguales* á los que procedieron del dividendo análogo anterior. Escribiendo ahora un cero al lado del nuevo resíduo, se tendrá otro dividendo parcial igual, que seguia inmediatamente detrás del primero que se renovó; y por consiguiente se repetirá la cifra análoga del cociente y el correspondiente resíduo; continuándose de este modo al infinito.

Luego *algunas ó todas las cifras del cociente deben reproducirse periódicamente y en el mismo órden*.

Hagamos algunas aplicaciones.

158. *Primer ejemplo.* Propongámonos reducir á decimales el quebrado comun $\frac{6}{7}$.

Basta para esto aplicar la regla del n.° 91. El período comienza aquí despues de la sesta division parcial, es decir, al cabo de tantas divisiones parciales como unidades, menos una, tiene el divisor.

60	7
40	0,857142|857142....
50	
50	
30	
20	
6	

Segundo ejemplo. Sea el quebrado $\frac{13}{37}$.

En este ejemplo el período se manifiesta al cabo de tres divisiones, es decir, mucho antes de lo indicado por el divisor 37.

130	37
130	0,351|351....
50	
13	

Tercer ejemplo. $\frac{147}{875}$.

Aquí la fraccion decimal es exacta aunque el denominador contiene el factor 7, siendo $875=7\times125$, porque el mismo factor entra tambien en el numerador 147: suprimiéndole en ambos términos, resulta el quebrado $\frac{21}{125}$, ó $\frac{21}{5^3}$, el cual (n.° 156) puede convertirse exactamente en decimal.

1470	875
5950	0,168
7000	
0000	

Cuarto ejemplo. $\frac{29}{84}$.

En este caso el período aparece despues de la octava operacion. Pero es de notar que no forman parte del período las dos primeras cifras decimales, cuando en los dos ejemplos primeros empieza el período en la primera cifra decimal.

290	84
380	0,34523809|523809
440	
200	
320	
680	
800	
44	

Las fracciones decimales periódicas cuyo período principia desde la primera cifra decimal, se llaman *fracciones periódi-*

cas simples ó puras; y *periódicas mistas* aquellas cuyo período no principia desde la primera cifra decimal.

159. Acabamos de ver que algunos quebrados comunes reducidos á fraccion decimal producen fracciones decimales periódicas.

Recíprocamente, *toda fraccion decimal periódica, simple ó mista, procede de un quebrado comun, que facilmente puede volver á encontrarse.*

Esta cuestion comprende dos casos distintos: ó la fraccion periódica *es simple* ó *es mista*.

Consideremos el primer caso, y supongamos, para fijar las ideas, una fraccion periódica simple cuyo período tenga *cinco* cifras.

Sea $0,abcde\ abcde\ abcde....$ la fraccion propuesta, y designemos por x su valor incógnito. Tendremos

$$x=0,abcde\ abcde\ abcde.... \quad (1)$$

Multipliquemos los dos miembros de esta ecuacion por 10^5, ó por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene el período, lo cual se hace (n.° 86) corriendo la coma *cinco* lugares hácia la derecha: así resulta,

$$100000\,x=abcde,\ abcde,\ abcde....$$

ó $$100000\times x=abcde+0,abcde\ abcde.... \quad (2)$$

Si ahora se resta la ecuacion (1) de la (2), observando que

$$100000\,x-x=99999\,x,$$

tendremos $$99999\,x=abcde;$$

luego $$x=\frac{abcde}{99999}.$$

Lo cual prueba que *una fraccion decimal periódica pura es equivalente á un quebrado comun cuyo numerador es el conjunto de cifras del período, y por denominador un número compuesto de tantas cifras 9 como guarismos tiene el período.*

Así, la fraccion $0,351351351....$, en virtud de esta regla, es equivalente al quebrado comun $\frac{351}{999}$: el cual puede ahora simplificarse observando que sus dos términos son divisibles por 9. Suprimido este factor, resulta el quebrado $\frac{39}{111}$, que aun es divisible por 3, y dá, suprimido este factor, $\frac{13}{37}$, que ya no puede simplificarse. Este quebrado es el que se redujo á decimal en el n.º 158.

Sea ahora la fraccion 0,03960396....

El período es aquí 0396: luego la fraccion equivale al quebrado comun $\frac{0396}{9999}$, ó $\frac{396}{9999}$ (se suprime como inútil el *cero* del numerador, pero se le ha tenido en cuenta para saber cuántas cifras tiene el período, y por consiguiente cuántos 9 ha de tener el denominador).

Siendo comun el factor 9 á los dos términos de este resultado, se suprimirá y se obtendrá $\frac{44}{1111}$, quebrado cuyos términos son aun divisibles por 11, obteniéndose finalmente $\frac{4}{101}$, que ya no tiene simplificacion.

Citaremos como notables los ejemplos siguientes:

$$0,9999.... = \frac{9}{9} = 1.$$

$$0,012345679012345679.... = \frac{1}{81}.$$

$$0,987654320987654320.... = \frac{80}{81}.$$

Advertencia. Si la fraccion periódica tiene enteros, se prescindirá de ellos por el pronto; pero se añadirán al quebrado comun eqnivalente despues de reducido á sus menores términos.

Propongámonos hallar el valor de 4,162162....

Tenemos primero $$0,162162.... = \frac{162}{999} = \frac{18}{111} = \frac{6}{37};$$

luego $$4,162162.... = 4 + \frac{6}{37} = \frac{154}{37}.$$

160. Pasemos al caso de las *fracciones decimales periódicas mistas*.

Para fijar aquí las ideas, supondremos que hay *cuatro* cifras delante del período y *cinco* en el período; pero no por eso será menos general la forma del razonamiento.

Sea, pues, 0,*pqrs abcde abcde*.... la fraccion propuesta.

Observemos que multiplicándola y dividiéndola al mismo tiempo por 10000, puede ponerse bajo la forma

$$\frac{1}{10000}(pqrs,\ abcde\ abcde....)$$

La cantidad comprendida en el paréntesis equivale, en virtud de la regla precedente, á

$$pqrs+\frac{abcde}{99999};$$

ó bien reduciendo el entero á la especie del quebrado

$$\frac{pqrs\times 99999+abcde}{99999}.$$

Luego si se designa por x el quebrado que se busca tendremos

$$10000\,x=\frac{pqrs\times 99999+abcde}{99999};$$

y por consiguiente

$$x=\frac{pqrs\times 99999+abcde}{999990000}.$$

Pero este resultado es susceptible de una modificacion que le hace mas cómodo para las aplicaciones.

Como tenemos

$$99999=100000-1,$$

resulta

$$pqrs\times 99999=pqrs00000-pqrs;$$

de donde

$$pqrs\times 99999+abcde=pqrsabcde-pqrs;$$

luego finalmente la fraccion propuesta equivale á

$$x = \frac{pqrsabcde - pqrs}{999990000}.$$

Lo cual prueba que para hallar el quebrado comun equivalente á una *fraccion periódica mista se pone por* **NUMERADOR** *el conjunto de cifras de la parte no periódica seguida del periodo; de esto se resta la parte no periódica, y por* **DENOMINADOR** *se pone un número compuesto de tantos* 9 *como cifras tiene el periodo seguidos de tantos ceros como cifras tiene la parte no periódica.*

Sirva de ejemplo la fraccion

$$x = 0{,}3193069306....$$

Aplicando la fórmula precedente, tendremos

$$x = \frac{319306 - 31}{999900} = \frac{319275}{999900},$$

ó, dividiendo sucesivamente ambos términos por 9, 25 y 11, factores que les son comunes (*véanse* los caractéres de divisibilidad arriba puestos para estos números),

$$x = \frac{129}{404}.$$

Proponemos para ejercicio las fracciones siguientes: 16,285714285714...; 4,9428571428571...; 5,52027027... En la aplicacion de las reglas precedentes se cuidará de hacer al pronto abstraccion de la parte entera, que se añadirá despues á cada resultado reducido á su menor espresion.

161. La fórmula

$$x = \frac{pqrsabcde - pqrs}{999990000},$$

conduce á resultados muy dignos de estudiarse.

Desde luego es evidente que, hechos los cálculos que indica el numerador, no puede el resultado terminar en uno ó mas ceros; porque para ser así, era preciso que alguna de las últimas cifras de $pqrs$ fueran idénticas á las últimas de $abcde$, y en este caso el período no comenzaria en la 5.ª cifra decimal, como se ha supuesto. (Por ejemplo, si tuviéramos $s=e$, $r=d$, la fraccion primitiva sería $0,pqdeabcdeabcde....$, y el período comenzaria en la 3.ª cifra y sería $deabc$.) Se ve pues que hecha la reduccion de la espresion de x á sus menores términos, debe el resultado ser un quebrado, cuyo denominador contenga los factores 2 y 5 ó al menos uno de los dos elevado á la 4.ª potencia, es decir, elevado á una potencia cuyo grado marca el número de cifras decimales de la parte no periódica.

De aquí podemos concluir las dos proposiciones siguientes:

1.ª *Todo quebrado comun cuyo denominador no contiene al factor 2, ni al factor 5, reducido á decimales, dá una fraccion periódica pura.*

En efecto, si se pudiera llegar á una fraccion periódica mista, el quebrado ordinario equivalente que se obtuviera por la regla del n.º 160, sería necesariamente igual al quebrado propuesto. Pero esto es imposible, porque hemos visto (n.º 153) que un quebrado cuyos términos sean primos entre sí, no puede ser igual á otro quebrado, sino cuando los términos de este son *equimúltiplos* de los de aquel; y entonces resultaria que el denominador de la fraccion propuesta tendria los factores 2 ó 5, lo cual es contra el supuesto.

2.ª *Todo quebrado* IRREDUCIBLE *cuyo denominador contiene al factor 2 ó al factor 5, ó á ambos, y además algun otro factor primo diferente, reducida á decimal, dá una fraccion periódica mista, siendo el número de cifras de la parte no periódica igual al mayor de los esponentes de 2 ó 5 que contenga el denominador.*

Por el pronto, la fraccion decimal periódica no puede ser *pura*, pues siendo $\frac{abcde...}{9999...}$ la fórmula de esta clase de fracciones, es imposible (n.º 154) que esta fraccion que no contiene en su denominador ni al factor 2, ni al factor 5, sea igual despues de simplificada, á la fraccion propuesta cuyo denominador contiene á esos factores.

En segundo lugar, si n designa el mayor de los esponentes de 2 ó 5, que entran en el denominador, el período debe comenzar despues de n cifras: porque supongamos, por ejemplo, que empiece despues de $(n-1)$ cifras: el quebrado comun equivalente á la fraccion periódica tendria un denominador que solo contendria los factores 2 y 5 ó uno de ellos elevado á la potencia del grado $(n-1)$, y no podria ser igual al quebrado propuesto, que, como el obtenido, se supone irreducible.

Por ejemplo, los quebrados $\frac{6}{7}$, $\frac{13}{37}$ (n.° 158) han producido fracciones periódicas *puras*, porque 7 y 37 no contienen ni al factor 2, ni al factor 5; pero el quebrado $\frac{29}{84}$ ha producido una fraccion periódica mista, cuyo período empieza en la *tercera* cifra, porque 84 es igual á $2^2 \times 21$.

El quebrado $\frac{145}{176}$, que puede ponerse bajo la forma $\frac{145}{2^4.11}$, produciria una fraccion decimal periódica mista, cuyo período empezaria despues de la *cuarta* cifra.

En efecto, hecha la operacion, se obtiene

$$0{,}8238636363....$$

162. Aquí terminaremos el exámen de las propiedades de las fracciones decimales periódicas. Observaremos únicamente que en un sistema cualquiera de numeracion, cuya base fuera B, se verificarian propiedades análogas á las precedentes.

Así, para reducir un quebrado comun de un sistema á otro cuyas subdivisiones fueran de B en B veces menores que la unidad, se deberia, segun la regla del n.° 91, *multiplicar el numerador por* B ó 10; *es decir, escribir un* 0 *á su derecha, y dividir el producto por el denominador,* lo cual daria en el cociente unidades B veces menores que la unidad principal, y dejaria además un resíduo; *escribir á la derecha de este resíduo otro cero y dividir la cantidad resultante por el mismo denominador*, lo cual daria en el cociente unidades B veces menores que las precedentes, ó B^2 veces menores que la unidad principal; y así sucesivamente. Esto supuesto:

Todo quebrado comun cuyo denominador no contenga mas factores primos que los contenidos en la base B, *reducido á otra fraccion de subdivisiones que vayan menguando de* B *en* B, *producirá una fraccion de número limitado de cifras. Pero todo quebrado* IRREDUCIBLE *cuyo denominador contenga factores primos distintos de los contenidos en la* *base, produce una fraccion de un número* INDEFINIDO *de cifras, y* PERIÓDICA *además*; etc.

Lo mismo diriamos de las otras propiedades; pero dejamos á los estudiosos el cuidado de buscar sus enunciados y sus demostraciones.

§. IV. De las fracciones contínuas.

163. Las fracciones contínuas deben su orígen á la valuacion aproximada de quebrados cuyos términos son crecidos y primos entre sí.

Para esplicarnos mejor, nos propondremos el quebrado $\frac{159}{493}$, cuyos dos términos son primos entre sí, como es fácil comprobar, y que por consiguiente (n.º 153) es irreducible.

Dejando al quebrado como está, nos formaríamos dificilmente de él una idea clara; pero si en virtud de un principio muy conocido, se dividen sus dos términos por el numerador 159, lo cual no altera su valor, tendremos $\frac{1}{\left(\frac{493}{159}\right)}$, ó efectuando la division indicada en el denominador, $\frac{1}{3+\frac{16}{159}}$....

Esto supuesto, despreciemos por un instante el quebrado $\frac{16}{159}$: el quebrado $\frac{1}{3}$ que así resulta, es mayor que el propuesto, porque se ha disminuido el denominador.

Por otro lado, si en vez de despreciar el quebrado $\frac{16}{159}$, añadimos en su lugar *una* unidad al denominador 3, se convierte el quebrado en $\frac{1}{3+1}$ ó $\frac{1}{4}$, que á su vez es menor que el propuesto, porque se ha aumentado su denominador.

Ya con esto podemos conocer que el quebrado $\frac{159}{493}$ está comprendido entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$; lo cual nos dá ya de él una idea bastante aqroximada.

Si queremos aun mayor grado de aproximacion, operaremos con $\frac{16}{159}$ del mismo modo que con $\frac{159}{493}$.

Hecho así, hallaremos

$$\frac{16}{159}=\frac{1}{\left(\frac{159}{16}\right)}=\frac{1}{9+\frac{15}{16}};$$

y sustituido este valor en el quebrado propuesto, tendremos

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{15}{16}}}.$$

Despreciando el $\frac{15}{16}$, tenemos $\frac{1}{9}$, que es mayor que $\frac{16}{159}$; de donde se infiere que $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9}}$ es menor que $\frac{159}{493}$. Pero $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9}}$ equivale á $\frac{1}{\left(\frac{28}{9}\right)}$ ó $\frac{9}{28}$; luego el quebrado propuesto está entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{9}{28}$.

La diferencia entre estos dos últimos quebrados es $\frac{28-27}{3\times 28}$ ó $\frac{1}{84}$. Luego el error cometido en tomar $\frac{1}{3}$ por valor del quebrado propuesto es menor que $\frac{1}{84}$.

Procediendo con $\frac{15}{16}$, como con los quebrados anteriores, tendremos $\frac{15}{16}=\frac{1}{\left(\frac{16}{15}\right)}=\frac{1}{1+\frac{1}{15}}$; y el quebrado propuesto se convierte en

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{15}}}}$$

Despreciando el $\frac{1}{15}$, el número $\frac{1}{1}$, ó 1, es mayor que $\frac{15}{16}$;

luego $\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{1}}$ ó $\frac{1}{10}$ es menor que $\frac{16}{159}$.

Luego $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{1}}}$ ó $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{10}}$, ó $\cfrac{1}{\left(\cfrac{31}{10}\right)}$ ó $\frac{10}{31}$ es mayor que $\frac{159}{493}$.

Donde se ve que $\frac{159}{493}$ está comprendido entre $\frac{9}{28}$ y $\frac{10}{31}$, siendo mayor que el primero y menor que el segundo: la diferencia entre estos dos es $\frac{10}{31}-\frac{9}{28}=\frac{1}{868}$; luego el error cometido en tomar cualquiera de ellos por valor del quebrado propuesto es menor que $\frac{1}{868}$.

Con esto se ve ya, como por medio de una série análoga de operaciones se pueden obtener valores mas y mas aproximados de un quebrado de términos demasiado grandes para estimar su valor á primera vista.

La espresion

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{15}}}}$$

es lo que se llama una *fraccion continua*.

En general, se entiende por *fraccion contínua un quebrado que tiene por numerador la unidad, y por denominador un* *entero mas otro quebrado, que á su vez tiene por numerador la unidad y por denominador un entero mas otro quebrado*; y *así sucesivamente*.

A veces el número dado es un quebrado impropio, es decir, mayor que la unidad. Por eso, á fin de generalizar mas la definicion, diremos, que *fraccion contínua es una espresion compuesta de un entero mas un quebrado que tiene por numerador la unidad y por denominador*, etc.

Tal es la espresion $$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\dots}}}$$

siendo $a, b, c, d, \dots$ números enteros.

164. Reflexionando sobre la marcha que acabamos de seguir para reducir el quebrado $\frac{159}{493}$ á fraccion contínua, vemos que lo primero hemos dividido 493 por 159, y hemos obtenido el cociente 3 y el resíduo 16. Despues hemos dividido 159 por 16, y hemos obtenido el cociente 9 y el resíduo 15. En seguida hemos dividido 16 por 15 y hemos obtenido el cociente 1 y el resíduo 1. De aquí se deduce facilmente el siguiente procedimiento para reducir un número cualquiera fraccionario á fraccion contínua.

Opérese con los dos términos de la fraccion propuesta como si se tratara de buscar su máximo divisor comun (véase el n.° 52). *Prolónguese la operacion hasta obtener un resíduo igual á cero. Los cocientes que se hayan ido obteniendo serán por su órden los denominadores de los quebrados propios que constituyen la fraccion contínua.*

En el supuesto de ser el número dado mayor que la unidad, el primer cociente representa la parte entera que precede á la fraccion contínua.

Por esta regla, pueden reducirse á fraccion contínua los números $\frac{65}{149}$ y $\frac{829}{347}$.

Hé aquí las operaciones:

1.°							
		2	3	2	2	1	2;
	149	65	19	8	3	2	1
	19	8	3	2	1	0	

Luego $\dfrac{65}{149}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}}$.

2.º

	2	2	1	1	3	19
829	347	135	77	58	19	1
135	77	58	19	1	0	

Luego $\dfrac{829}{347}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{19}}}}}$.

Las fracciones contínuas gozan de una porcion de propiedades cuya investigacion ha ocupado á los mas célebres geómetras. Aquí solo espondremos las propiedades mas elementales y mas usadas, cuyas demostraciones se fundan en las primeras nociones de Álgebra. Podrán verse mas estensamente en las *Adiciones de Lagrange al Álgebra de Euler*.

DEFINICIONES.

165. Volvamos á la fraccion contínua general

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\ldots,}}}}$$

que supondremos representar el valor de un número fraccionario designado por x.

Se llaman *fracciones integrantes* las fracciones $\frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}\ldots,$