

TALLER Y LABORATORIO

Experimento casero

El experimento de la masa oscilante y sus complicaciones

INTRODUCCIÓN

Hay un experimento casero muy sencillo de realizar pero que presenta un cierto grado de complicación cuando se quieren interpretar con precisión los resultados experimentales. Se trata de la masa puntual M suspendida de un resorte de constante elástica k . En la Figura 1 se puede ver la fotografía de un dispositivo para este estudio. Consiste en un listón de madera de un metro de longitud, con una escala graduada en milímetros y de cuya parte superior se suspende un muelle de masa m que tiene en su extremo inferior una bola de plomo de masa M .

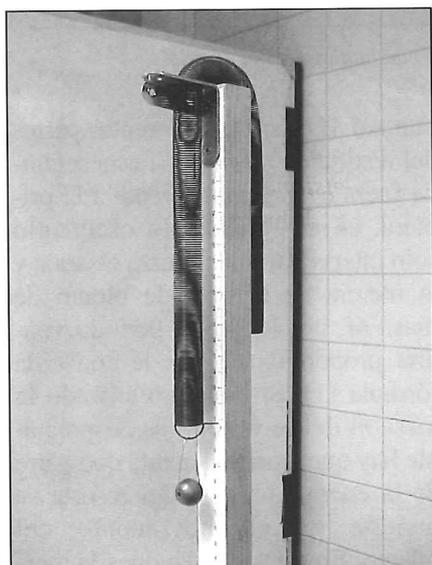


Figura 1. Dispositivo experimental.

Supongamos que cuando el resorte tiene una longitud z_M el sistema está en equilibrio. Si lo estiramos ligeramente hacia abajo desplazando la masa M una longitud Δz_M y después lo dejamos libre, la

masa M se pone a oscilar en torno a su posición de equilibrio con un periodo T . Éste es el movimiento más sencillo que se puede producir en el sistema, en el que todas sus partes (la masa M y los diferentes puntos del resorte) oscilan a la misma frecuencia. Es el movimiento que estudiaremos en este trabajo, que puede ser interpretado como un movimiento armónico simple en la aproximación de las pequeñas oscilaciones. Su periodo T vendría dado por la conocida expresión:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}} \quad (1)$$

Ahora bien, se trata solamente de una primera aproximación. Por ejemplo, en un caso real en el que la constante elástica del resorte es $k = 1,68 \text{ N/m}$, su masa $m = 45,7 \text{ g}$, y la masa oscilante $M = 54,5 \text{ g}$, el periodo obtenido en la medida es:

$$T_{\text{exp}} = 1,302 \text{ s} \pm 0,001 \text{ s}$$

mientras que la fórmula (1) nos proporciona el siguiente valor:

$$T_{\text{teor}} = 1,132 \text{ s} \pm 0,004 \text{ s}$$

Es decir: la diferencia entre los dos periodos, teórico y experimental, representa el 13% del valor obtenido en el experimento. Como el error con que ha sido medido dicho periodo es inferior al 0,1% y el relativo al periodo calculado es inferior al 0,4%, la discrepancia entre la teoría y el experimento resulta ser veinticinco veces superior al error esperado. En este artículo nos proponemos averiguar de dónde proviene esta discrepancia y cómo se puede mejorar la interpretación del fenómeno.

Antes de proseguir es conveniente hacer una puntualización relativa al fundamento físico del fenómeno: cuando se hace oscilar

la masa M se comprara la inercia de la misma con las fuerzas elásticas del resorte, que son de origen electromagnético. En estas condiciones, el periodo (o la frecuencia) de vibración dependen de la masa inercial M . No sucede lo mismo cuando se hace oscilar un péndulo simple de longitud l y masa M , en cuyo movimiento se comparan inercia y gravitación. Según la Teoría General de la Relatividad, estas dos manifestaciones de la materia son idénticas: la masa inerte es igual a la masa gravitatoria. Por esta razón el periodo del péndulo simple no depende de la masa. Esta comparación entre el péndulo y la masa oscilante suspendida de un resorte es un ejemplo magnífico de un propiedad cosmológica fundamental: la universalidad de la caída libre, descubierta (o puesta de manifiesto) por Galileo.

CONSTANTE ELÁSTICA Y NÚMERO DE ESPIRAS

El estudio de la elasticidad de un resorte a partir de las propiedades elásticas del hilo de que está hecho es complejo. Sin embargo, para los propósitos de nuestro experimento se puede simplificar mediante la introducción de la constante elástica k del mismo. Ésta se define como el cociente entre la fuerza ΔF que se aplica a lo largo de su eje y el alargamiento Δz_M que produce:

$$k = \frac{\Delta F}{\Delta z_M}$$

Para un mismo alambre y un mismo radio de las espiras, la constante k depende del número n de éstas. En la Tabla I se indican los resultados para un caso particular¹.

¹ Resultados obtenidos con porciones diferentes de un mismo resorte.

Tabla I. Constante elástica k en función del número n de espiras

n	k (N/m)
276	1,68
248	1,87
221	2,10
193	2,37
166	2,74
138	3,31
110	4,11
83	5,41

Como puede verse, la constante k disminuye al aumentar el número de espiras, verificando una relación del tipo:

$$k = \frac{k_0}{n} \quad (2)$$

con $k_0 = 456$ N/m.

Esto se interpreta fácilmente de la siguiente manera: la fuerza ΔF aplicada al extremo inferior del resorte se transmite por igual a todas las espiras, provocando en cada una de ellas el mismo alargamiento Δz . Esto conduce a la siguiente expresión:

$$\Delta F = k_0 \Delta z$$

Como, por otra parte, el alargamiento total Δz_M es igual a la suma de los alargamientos de las n espiras: $\Delta z_M = n \Delta z$ podemos establecer fácilmente la relación (2):

$$k = \frac{\Delta F}{\Delta z_M} = \frac{k_0 \Delta z}{n \Delta z} = \frac{k_0}{n}$$

PERIODO DE OSCILACIÓN Y MASA DEL RESORTE

Conocida la constante k en función de n , podemos hacer ahora el siguiente experimento: tomemos un trozo de resorte de número n de espiras y de masa m determinados; suspendamos en su extremo inferior una bola de plomo de masa M y hagamos oscilar el sistema hacia arriba y hacia abajo, determinando el periodo T de oscilación. En la Tabla II se indican los resultados obtenidos con el mismo resorte que el utilizado para el estudio preliminar de k frente a n .

Tabla II. Periodo de oscilación en función de la masa del resorte

n	m (g)	k (N/m)	T (s)
276	45,7	1,68	1,302
248	41,1	1,87	1,226
221	36,6	2,10	1,142
193	32,0	2,37	1,058
166	27,4	2,74	0,966
138	22,9	3,31	0,873
110	18,3	4,11	0,771
83	13,7	5,41	0,660

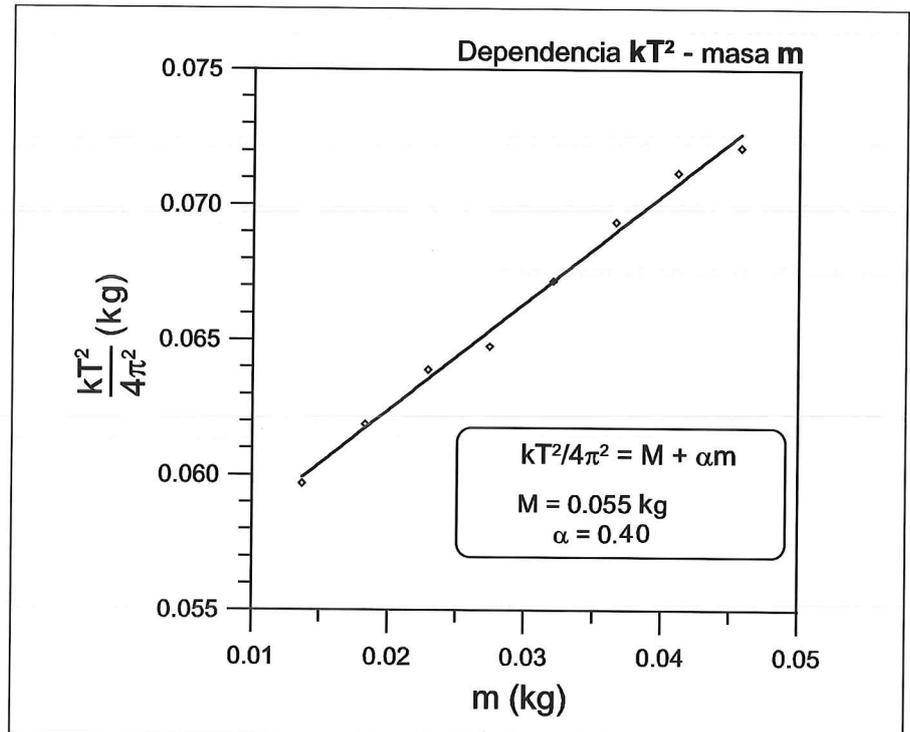


Figura 2. Variación del periodo T con la masa m del muelle.

Estos resultados se ajustan perfectamente a una relación del tipo:

$$\frac{kT^2}{4\pi^2} = M + \alpha m \quad (3)$$

donde α es una constante. En la Figura 2 se indica la gráfica correspondiente que, como puede verse, es una línea recta de pendiente $\alpha = 0,40$ y de ordenada en el origen $M = 54,5$ g.

INTERPRETACIÓN TEÓRICA

La influencia de la masa del resorte sobre el periodo T proviene del siguiente hecho: la energía potencial elástica que acumula el resorte cuando está alargado o comprimido se transforma en energía cinética, haciendo que oscilen tanto la masa

puntual M como las diferentes partes del resorte de masa m . Si ésta segunda fuera despreciable frente a la primera, en el movimiento oscilatorio solo intervendrían la fuerza elástica y la inercia de la bola de plomo de masa M , por lo que el periodo vendría proporcionado por la conocida fórmula (1). Si embargo, cuando la masa m del resorte no es despreciable hay que tener en cuenta que parte de la energía elástica del resorte se invierte en el movimiento del mismo. En estas condiciones la inercia no será solamente debida a la bola de plomo de masa M , sino que en ella también participará el muelle con su movimiento. En consecuencia, en la fórmula del periodo T intervendrán tanto M como m . La cuestión que se plantea es de qué manera interviene cada una de ellas.

Para abordar el estudio teórico vamos a suponer que el movimiento se realiza a lo largo del eje vertical Z , y que el origen de coordenadas se encuentra en punto del que está suspendido el extremo superior del resorte (ver Figura 3).

Supongamos que las coordenadas de los puntos de equilibrio alrededor de los que oscilan el elemento de masa dm del resorte y la bola de plomo de masa M son, respectivamente, z y z_M . Supongamos, además, que el movimiento que están ejecutando dm y M es armónico simple, del mismo período T pero de distinta amplitud máxima; es decir, que los movimientos de M y dm pueden expresarse de la siguiente manera:

$$\left. \begin{aligned} \Delta z_M &= A \cos \omega t \\ \Delta z &= a \cos \omega t \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

donde A es la amplitud máxima de la masa M y a la del elemento dm del resorte.

Cuando el movimiento se hace al unísono, estas amplitudes máximas son proporcionales a las coordenadas de los respectivos centros de oscilación:

$$\frac{A}{z_M} = \frac{a}{z} \quad (5)$$

Esto es debido a que al desplazamiento propio que le correspondería al elemento de resorte dm hay que sumarle los desplazamientos propios que han sufrido los elementos de resorte que están por encima de

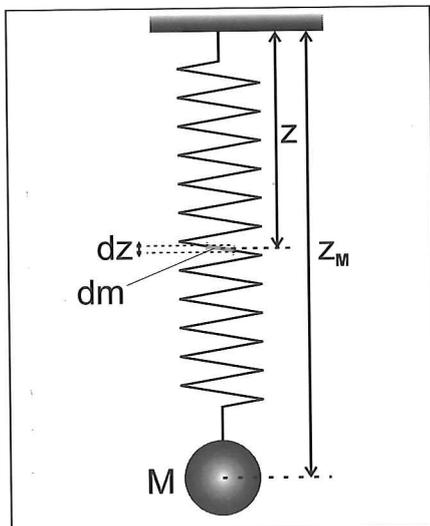


Figura 3. Variables que intervienen en el experimento.

él, que son todos iguales y cuya suma es, justamente, la coordenada z de aquél.

Con el fin de determinar la energía cinética del sistema en un instante dado t , vamos a relacionar la velocidad v que lleva cada elemento dm en dicho instante con la velocidad v_M que lleva la masa M .

Derivando respecto al tiempo en las expresiones (4) obtenemos para dichas velocidades:

$$v_M = -\omega A \operatorname{sen} \omega t$$

$$v = -\omega a \operatorname{sen} \omega t$$

Dividiendo entre sí éstas últimas y utilizando la relación (5), obtenemos la siguiente expresión de v en función de v_M , para todo instante de tiempo t :

$$v = \frac{z}{z_M} v_M$$

Por lo tanto, la energía cinética E_C del sistema constituido por la bola de masa M y el resorte de masa m , oscilando al unísono, se puede escribir de la siguiente manera:

$$E_C = \frac{1}{2} M v_M^2 + \frac{1}{2} \int_0^m (z / z_M)^2 v_M^2 dm$$

donde el primer término del segundo miembro corresponde a la energía cinética de la masa puntual M y el segundo, a la energía cinética del muelle.

Para poder determinar ésta última es necesario encontrar una relación entre el elemento de masa dm y su coordenada z . Veamos cómo puede hacerse: la fuerza ejercida sobre cada una de las espiras del muelle a lo largo del eje Z no es la misma, sino que es tanto mayor cuanto más cerca del punto de suspensión del resorte se encuentra la espira. Por ejemplo, la espira que se encuentra en lo alto soporta el peso del resorte más el de la bola de plomo, mientras que la que se encuentra en la parte inferior solo soporta el peso de la bola de plomo. Esto hace que las espiras de la parte alta del resorte se abran más que las de la parte baja. Sin embargo, podemos admitir que existe una apertura media para las espiras, y de esa manera establecer una relación proporcional entre el

elemento dm y el elemento dz que ocupa:

$$dm = B dz$$

Esto quiere decir que la masa total m del resorte es proporcional a la coordenada z_M del punto de equilibrio de la masa M :

$$m = \int_0^{z_M} B dz = B z_M$$

Con esta hipótesis podemos calcular la energía cinética del resorte en el instante t :

$$\begin{aligned} E_C(\text{res}) &= \frac{v_M^2}{2z_M^2} B \int_0^{z_M} z^2 dz = \\ &= \frac{B z_M^3}{6 z_M^2} v_M^2 = \frac{1}{2} \frac{m}{3} v_M^2 \end{aligned}$$

Finalmente, la energía cinética del sistema en el instante t se puede escribir de la siguiente manera:

$$E_C = \frac{1}{2} \left(M + \frac{1}{3} m \right) v_M^2$$

La energía mecánica total E , que es la suma de la energía potencial elástica del resorte de constante k cuando se le somete a un alargamiento (o acortamiento) Δz_M desde su posición de equilibrio y de la energía cinética, resulta ser:

$$\begin{aligned} E = E_C + E_k &= \frac{1}{2} \left(M + \frac{1}{3} m \right) \\ &v_M^2 + \frac{1}{2} k (\Delta z_M)^2 \end{aligned}$$

Esta energía debe conservarse en el tiempo, por lo que su derivada temporal ha de ser nula:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = 0 &= \left(M + \frac{1}{3} m \right) v_M \frac{dv_M}{dt} + \\ &+ k (\Delta z_M) \frac{d(\Delta z_M)}{dt} \end{aligned}$$

Dividiendo por v_M y recordando que $\frac{d\Delta z_M}{dt} = v_M$, queda:

$$\left(M + \frac{1}{3}m\right) \frac{d^2(\Delta z_M)}{dt^2} + k(\Delta z_M) = 0$$

De donde se deduce la ecuación diferencial del movimiento de la masa M :

$$\frac{d^2(\Delta z_M)}{dt^2} = -\omega^2 \Delta z_M;$$

$$\text{con } \omega^2 = \frac{k}{M + m/3}$$

Se trata de la conocida ecuación del movimiento armónico simple de periodo:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{M + m/3}{k}}$$

Tabla III. Comparación entre los valores del periodo teórico y experimental

k (N/m)	m (g)	T_{exp} (s)	$T_{\text{teórico}}$ (s)	Error (%)
1.68	45.7	1.302	1.280	-1.7
1.87	41.1	1.226	1.200	-2.1
2.10	36.6	1.142	1.120	-1.9
2.37	32.0	1.058	1.042	-1.5
2.74	27.4	0.966	0.958	-0.9
3.31	22.9	0.873	0.861	-1.4
4.11	18.3	0.771	0.763	-1.0
5.41	13.7	0.660	0.657	-0.5

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M + m/3}{k}}; \quad M = 54,5 \text{ g}$$

CONCLUSIÓN

El experimento que acabamos de examinar pone en evidencia una de las características más interesantes de los experimentos caseros: la de poder estudiar diferentes aproxima-

ciones teóricas a un fenómeno real con una economía grande de medios experimentales.

Manuel Yuste Llandres
y Carmen Carreras Béjar
Dpto. de Física de los Materiales

Es decir, este periodo verifica la ecuación (3):

$$\frac{kT^2}{4\pi^2} = M + m/3$$

aunque hay que hacer notar que la pendiente α de la representación gráfica que correspondería a la de la Figura 2 resulta ser 1/3 en lugar de 0,40. La diferencia que se aprecia entre teoría y experimento es debida, sin duda, a la hipótesis que hemos hecho sobre la igualdad de la fuerza ejercida sobre cada una de las espiras del resorte. No obstante, el modelo propuesto se ajusta bastante bien al experimento ya que el acuerdo entre el periodo obtenido con la fórmula teórica y el determinado experimentalmente coinciden, con un error inferior al 2% (ver Tabla III).

de los láseres de colorantes. Se discuten los fundamentos fisicoquímicos en que se basan estas aplicaciones, dedicando especial atención a los estudios experimentales de interés histórico que precisaron la naturaleza de las bandas de absorción electrónicas que son responsables del color que presentan los colorantes en disolución. En relación con estos problemas básicos, se comenta la posibilidad de realización de experimentos prácticos de laboratorio adecuados para los alumnos.

ANTECEDENTES HISTÓRICOS

El índigo, un colorante azul, fue uno de los primeros colorantes que conoció el hombre. Se usa desde hace 4.000 años, y su preparación se ha encontrado descrita en escritura sánscrita. Fue utilizado también en el antiguo Egipto para colorear las telas en las que las momias eran envueltas, y aún se sigue utilizando, aunque obtenido de forma sintética, para teñir los vaqueros.

El primer colorante artificial fue preparado por el químico inglés Perkin en 1855 de forma casual, al experimentar con un residuo aparentemente inservible del alquitrán de hulla, un subproducto de la Revolución Industrial que entonces se generaba en grandes cantidades. La sustancia que obtuvo recibió el nombre de mauveína por su bello color malva, y estimuló el interés de los químicos por sintetizar colorantes que rivalizaran con los colorantes naturales utilizados en exclusiva hasta entonces, que eran principalmente el índigo, de color azul, y la alizarina, de color rojo. Los nuevos colorantes artificiales revolucionaron la industria textil y despertaron la mayor admiración en la Exposición Universal de Londres celebrada en 1862. Su fabricación se convirtió en la base de la industria química de Alemania, que deseaba liberarse de la dependencia económica de los países que ejercían el monopolio de los colorantes naturales, especialmente Gran Bretaña y Francia.

Experimento histórico

Colorantes: de la microscopía a los láseres

RESUMEN

Se presenta un estudio acerca de la importancia de los colorantes químicos, desde su utilización tradicio-

nal en microscopía para la tinción de tejidos biológicos, hasta desarrollos recientes relacionados con el estudio de sistemas microheterogéneos y con las aplicaciones técnicas