

longitud de onda no concordaban completamente con los experimentos. Lo que sí, sin embargo, estaba claro es que la densidad total de energía es proporcional a la cuarta potencia de la temperatura. Este resultado, encontrado experimentalmente por J. Stefan (1879), se denomina la ley de Stefan-Boltzmann, al haberla, este último, deducido teóricamente a partir del segundo principio de la termodinámica. También, consideraciones termodinámicas llevaron a Wien (1893) a establecer que la distribución de energía radiante debía variar con la longitud de onda de la siguiente forma:

$$du = u_\lambda d\lambda = C_1 \lambda^{-5} f(\lambda T) d\lambda =$$

$$C_1 T^5 \frac{f(\lambda T)}{(\lambda T)^5} d\lambda$$

La función  $u_\lambda$  debe tener un máximo en un valor  $\lambda_m$ , de forma que se cumpla la ley universal. Esta ley está totalmente confirmada por los experimentos. Sin embargo, la forma de la función  $f(\lambda T)$  no era susceptible de ser obtenida a partir de argumentos generales. El propio Wien pudo establecer, partiendo de consideraciones sobre un gas en equilibrio con la radiación térmica, una distribución de energía que resultó en consonancia con los experimentos en el rango de bajas longitudes de onda, pero que discrepaba totalmente en el de altas. Más tarde, Rayleigh empleó un argumento mucho más incidente. Partiendo del cálculo del número  $n_\nu$  de modos electromagnéticos de radiación por unidad de frecuencia en una cavidad resonante, supuso que el teorema de equipartición de la energía le permitía repartir ésta de forma igual entre todos los modos obtenidos. Siendo este número, por unidad de frecuencia, proporcional al cuadrado de ésta, y dado que  $\lambda = c/\nu$  ( $\nu^2 d\nu$  es proporcional a  $\lambda^{-4} d\lambda$ ), el resultado para la distribución buscada es  $du = CT\lambda^{-4} d\lambda$ , con  $C$  constante. Esta expresión es consistente con la forma general dada por Wien haciendo  $f(\lambda T) = \lambda T$ , aunque sólo concuerda con los experimentos para longitudes de onda largas.

Planck cuestionó la equiparación de energía. Al contrario, un modo de frecuencia  $\nu$  debía tener una energía media dada por un múltiplo entero de una cantidad, siendo  $h$  una constante a determinar experimentalmente. También, los intercambios sólo podían hacerse en consonancia: por múltiplos enteros de esa cantidad. La energía media por modo se convierte en  $h\nu/(e^{h\nu/kT}-1)$  y la ley de radiación obtenida es la famosa distribución de Planck:

$$u_\lambda = \frac{8\pi ch\lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$

### HACE 75 AÑOS

Siguiendo una sugerencia de W. Pauli, a principios de 1925, sobre la necesidad de un cuarto número cuántico que describiese una característica no clásica, cual es el doble valor de las propiedades del estado de un electrón, G. Uhlenbeck y S. Goudsmit propusieron ese mismo año la adscripción al electrón de un momento angular intrínseco, el espín, de magnitud  $h/4\pi$ . Este vector vendría caracterizado por su alineación en los dos sentidos de una determinada dirección, dando así lugar al doble valor que se pretendía justificar. Al serle asociado un momento magnético, se podían explicar la estructura fina del espectro del hidrógeno y el llamado efecto Zeeman anómalo.

Bohr, en su cuarto postulado, había introducido un primer número cuántico, conocido como número cuántico principal. En 1915, Sommerfeld hizo notar que la asignación de un número cuántico podía extenderse a cualquier variable que, clásicamente, sufría un movimiento periódico. En su tratamiento de los efectos relativistas en órbitas elípticas define un segundo número cuántico, asociado esta vez al momento angular. Un tercero será necesario para dar cuenta de la frecuencia de precesión de los planos orbitales cuando el átomo está en presencia de un campo magnético. El electrón, en su órbita, queda asimilado así a un imán que interaccio-



Sello danés en homenaje a Niels Bohr.

na con dicho campo, permitiéndose con ello explicar la división en tres de las líneas espectrales bajo la influencia de un campo magnético (efecto Zeeman). Sin embargo, aún con estas extensiones, la teoría de Bohr era incapaz de dar cuenta del efecto Zeeman anómalo, en el cual son más de tres las rayas del espectro en las que degenera una sola cuando hay un campo magnético. Esta dificultad indujo a W. Pauli a sugerir la necesidad de un cuarto número cuántico y a Uhlenbeck y Goudsmit a definirlo propiamente.

Víctor Fairén Le Lay

Depto. de Física Matemática y Fluidos

## En Matemáticas

### HACE 100 AÑOS

Han pasado ya cien años desde el día en que David Hilbert impartía, en el 2.º Congreso Internacional de Matemáticos que tuvo lugar en París (1900), la conferencia titulada "The Problems of Mathematics". Probablemente él no sabía hasta qué punto los problemas abiertos que en ella había presentado marcarían el desarrollo de las matemáticas del siglo XX (véase el número cero de esta revista, pág. 51).

Es razonable la hipótesis de que no sólo fuera a dar un paso más en sus investigaciones sino también la atmósfera científica que se vivía en su universidad lo que motivara el sistemático planteamiento de lo que él intuía que eran los problemas sin resolver que conformarían el futuro de la investigación. En efecto, Hil-

bert era Profesor Ordinario en la Universidad de Göttingen y director del famoso Instituto de Matemáticas del cual habían formado parte Carl Friedrich Gauss, P.G.L. Dirichlet y Bernhard Riemann.

La ciudad-universidad de **Göttingen**, que contaba a principios del siglo xx con 30.000 habitantes, era muy peculiar: se parecía, ciertamente, a otras ciudades-universidad pero poseía rasgos únicos. Es preciso conocerlos para comprender cómo fue posible que de ella salieran los fundamentos de la nueva física, matemática y filosofía, que definirían todo el hacer científico de un siglo.

“¡Querida ciudad de Göttingen!... Creo que solamente quien haya estudiado allí en 1905 y 1914 en el corto tiempo de esplendor de la escuela fenomenológica, puede comprender lo que nos hace vibrar este nombre”. Esta expresión escrita por Edith Stein, con nostalgia del tiempo pasado, podía muy bien haber sido pronunciada, sustituyendo la alusión a la fenomenología, por Hermann Weyl, Richard Courant, Emmy Noether, Werner Heisenberg, Max Born, Max von Laue y un largo etcétera (más de 150) de matemáticos y físicos que abarcan desde Gauss a Einstein. No deja de ser un dato significativo que en ella hayan estudiado o impartido clases más de cuarenta y dos Premios Nobel.

En la pequeña historia de la ciudad en torno a 1900, las relaciones entre los representantes de los diferentes mundos académicos, a veces muy distantes, se enriquecían en las relaciones personales cotidianas. Un ejemplo anecdótico: Edith Stein Courant era pariente próximo del matemático Richar Courant –discípulo y continuador de la obra de su maestro David Hilbert–; el hijo de Hilbert, a su vez, era condiscípulo del de Edmund Husserl; por otra parte Felix Klein (casado con una nieta del filósofo Hegel) cuya obra al frente del famoso instituto de matemáticas fue continuada por Hilbert, tenía una hija amiga de Edith Stein. Es normal que una ciudad tan pequeña con contacto humanos tan



*Dos matemáticos que hicieron contribuciones esenciales a la Mecánica Cuántica: David Hilbert (1862-1943), a la izquierda, y Hermann Weyl (1885-1955), en Göttingen en 1920.*

intensos y diversos propiciaría una atmósfera que contribuyera de forma significativa al desarrollo de la ciencia del siglo xx.

### David Hilbert (1862-1943)

Nació el 23 de enero de 1862 en Königsberg, Prusia, en cuya Universidad estudió matemáticas y en donde realizó el doctorado bajo la dirección de Lindermann. La tesis, leída en 1885, tenía por título: *Über invariante Eigenschaften spezieller binärer Formen, insbesondere der Kugelfunctionen*. En esa época entabló amistad con Hermann Minkowski, relación que se tradujo a lo largo de los años en un apoyo continuo, mutuo, a su labor matemática.

Ayudado por su amigo Hurwitz, empezó la carrera académica en la Universidad de Königsberg en la que llegó a ser catedrático en 1893. En 1895 es nombrado catedrático de la universidad de Göttingen; dicha plaza le había sido ofrecida por Klein tres años antes, pero él, por diversas razones personales y académicas, no la había podido ocupar. En dicho puesto pasará el resto de su vida.

El primer trabajo de Hilbert trató sobre la teoría de invariantes –entidades que no son alteradas por transformaciones geométricas, tales como rotaciones, reflexiones y dilataciones– probando en 1888 su famoso teorema de las bases finitas que, enunciado de forma coloquial, dice que todo invariante se puede expresar mediante una base finita de los mismos. Su formulación en lenguaje matemático moderno es la siguiente: si  $A$  es un anillo conmutativo Noetheriano y  $A[X_1, \dots, X_n]$  es el anillo de los polinomios en  $X_1, \dots, X_n$  con coeficientes en  $A$ , entonces  $A[X_1, \dots, X_n]$  es también un anillo Noetheriano.

En 1897 publica el trabajo *Zahlberich* sobre la teoría de números algebraicos; se trata de una síntesis brillante de los trabajos de Kummer, Kronecker y Dedekind que Hilbert completa con nuevas ideas.

En 1899 Hilbert ve la luz la primera edición de *Grundlanger der Geometric*. Dicha obra contiene la lista definitiva de los axiomas para la Geometría de Euclides y un análisis de su significado. Con ella se produciría un cambio decisivo en el tratamiento axiomático de las cuestiones geométricas.

En 1900, con ocasión del 2.º Congreso Internacional de Matemáticas, celebrado en París, Hilbert enunció una lista de 23 problemas que abarcaban todas las ramas de las matemáticas y que resumía muy bien el estado en que se encontraba la investigación en esa época. Muchos de estos problemas planteados están resueltos y en cada caso ha significado un acontecimiento notable en el mundo matemático.

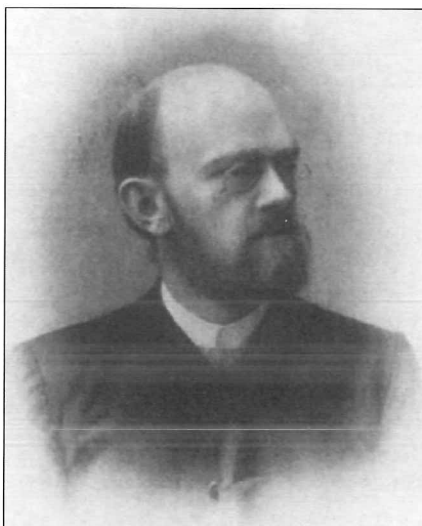
Los trabajos de Hilbert sobre ecuaciones integrales, junto a su discípulo Schmidt, marcaron las directrices de la investigación en dicho campo en todo el siglo xx. El estudio de las ecuaciones integrales, a partir de la teoría de Fredholm, lo llevaron a la teoría de los espacios de dimensión infinita (espacios de Hilbert); en particular, sus trabajos sobre el concepto que generaliza, en los espacios vectoriales topológicos, el de forma cuadrática, condujo

a Hilbert a sentar las bases de la teoría espectral de los operadores hermiticos que ha sido de importancia capital en el análisis funcional y en la Mecánica Cuántica.

En 1910, Hilbert resolvió el problema planteado por Waring 150 años antes y que se puede enunciar de forma simple así: para todo entero  $k$  mayor o igual a 2, existe un número  $n(k)$  tal que cualquier entero se expresa como adición de, a lo sumo,  $n(k)$  potencias  $k$ -ésimas de enteros; resultado que llevó a Hardy, Littlewood y, más tarde, a Vinogradov a probar que todo número impar suficientemente grande es suma de tres números primos.

A partir de 1905 se ocupa Hilbert de la fundamentación de la matemática, es decir, de dar a la matemática una estructura axiomática utilizando las ideas de la teoría de conjuntos. Hilbert propuso que un sistema satisfactorio de axiomas, para cualquier parte de las matemáticas, será aquel que sea consistente, completo y decidible; pretendiendo que cualquier esquema de este tipo tenía que estar libre de contradicción. Sin embargo las esperanzas de Hilbert quedaron truncadas cuando en 1931 el matemático austriaco-americano Kurt Gödel demostró un teorema en el que se obtenía que cualquier sistema formal (como el que proponía Hilbert) de axiomas y reglas de inferencia, siempre que fuera lo bastante amplio para contener descripciones de proposiciones aritméticas simples y siempre que estuviera libre de contradicción, contenía necesariamente algunos enunciados que no eran demostrables ni indemostrables con los medios permitidos dentro del sistema. La verdad de dichos enunciados es indecible mediante los procedimientos aceptados.

En 1915 Einstein visitó la universidad de Göttingen y expuso en un seminario su versión (no acabada) de la Relatividad General. Entre los asistentes se encontraban Hilbert y Klein. Las discusiones con ambos y la correspondencia posterior con Hilbert, ayudaron a Einstein a aclarar



David Hilbert en 1900.

sus ideas sobre la índole del problema que tenía que resolver. Como consecuencia, el 25 de noviembre de 1915 mandó al editor de una revista un artículo titulado *The field equation of gravitation*, en el que aparecían las ecuaciones correctas de la relatividad general. Pero paralela y simultáneamente Hilbert había mandado otro artículo, *The foundation of Physics*, donde obtenía las ecuaciones de campo correctas, por procedimientos distintos a los de Einstein; en dicho artículo aparecían algunos resultados importantes para la relatividad general que no se encontraban en el trabajo de Einstein.

La ciudad de Königsberg le nombró en 1930, año de su retirada de la Universidad de Göttingen, ciudadano honorario. Cuatro años después recibe el Premio Mittag-Leffler de la Academia Sueca.

La última década de la vida de Hilbert se ve ensombrecida por la tragedia que supuso para él, sus colegas y discípulos el régimen nazi. Hilbert (junto con Poincaré) marcó toda una época en las matemáticas del siglo xx y su influencia se extendió, con el éxito de sus discípulos durante la segunda guerra mundial, a las universidades e institutos de matemáticas de América, por ejemplo, Princeton y Nueva York.

José Antonio Bujalance García  
Depto. de Matemáticas Fundamentales

## En Química

### HACE 200 AÑOS

- JEAN BAPTISTE DUMAS (1800-1884): Químico francés que fue el primero en expresar las reacciones químicas mediante ecuaciones.

- FRIEDRICH WÖHLER (1800-1882): Químico alemán que realizó la primera síntesis de química orgánica al sintetizar la urea.

- CHARLES GOODYEAR (1800-1860): Americano que descubrió la vulcanización (tratamiento de calor del caucho con azufre) operación que sirve para mejorar las propiedades físicas del caucho.

### HACE 150 AÑOS

- GRANGE: En 1850 leyó en la Academia de Ciencias de París un documento acerca de una terrible enfermedad de los valles suizos llamada *bocio*. La atribuyó a la presencia de magnesio en las aguas; puede remediarse mediante pequeñas dosis de sales de yodo.

- QUÍMICA ESTELAR: Se demostró la imposibilidad de que el sistema de vida animal y vegetal de nuestro planeta pueda existir en otros planetas y cuerpos celestes. La superficie de la Luna, sin mar ni atmósfera, la variable calidad de meteoritos y eolitos, cuyas sustancias constitutivas se han descubierto mediante análisis, se cuentan entre los datos en los que se cimienta el argumento de que las estrellas no son *telúricas* y, por tanto, que la vida en esos orbes debe sustentarse de modo diferente.

### HACE 100 AÑOS

- JEAN FREDERIC JOLIOT-CURIE (1900-1958): Físico francés, ingeniero en la Escuela de Física y Química de París, trabajando con su mujer, Irene Curie, en 1934 descubrió que nuevos elementos radioactivos podían obte-