Trabajo de Fin de Máster

Propiedades de los espacios de sucesiones: l_p, C_0 y l_∞.

escrito por

RAÚL MONTES PAJUELO.

Tutor: Beatriz Hernando.

Facultad de Ciencias.
UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA.

Trabajo presentado para la obtención del título de
Máster Universitario en Matemáticas Avanzadas de la UNED.
Especialidad Análisis matemático.

FEBRERO 2021.

Abstract

Entre los espacios de Banach de dimensión infinita unos de los más estudiados son los espacios de sucesiones l_p, C_0 y l_∞. Gracias a ello se conocen muchas propiedades de estos espacios que han marcado a lo largo de la historia las líneas de investigación a seguir. Han estado tan presentes en la historia del Análisis Funcional que incluso se llegó a pensar que todo espacio de Banach necesariamente debía contener una copia isomorfa de un l_p o de C_0, pero Tsirelson en 1974 encontró un espacio que no satisface esta hipótesis. [10] [13]

A lo largo de este proyecto se realizará una breve introducción histórica sobre los matemáticos que han hecho grandes aportaciones al conocimiento de estos espacios. En el primer capítulo, se describirán y demostrarán sus propiedades mas relevantes. El segundo capítulo esta dedicado a lo relacionado con operadores y dual de estos espacios. En el tercer capítulo estudiaremos la trasposición de operadores y la reflexividad de ellos. En el cuarto capítulo veremos los conceptos de topologías débil y débil estrella, operadores compactos y algunos resultados relacionados con esto. El quinto capítulo, se ocupa de bases de Schauder y sucesiones básicas; en él se encontrarán también algunos de los resultados más importantes de este proyecto: el teorema de Pitt, la demostración de que los espacios l_p y C_0 son espacios de Banach primos y la demostración de que l_1 posee la propiedad de Schur. El sexto y último capítulo está dedicado a demostrar otro de los resultados más importantes del proyecto: el teorema de Rosenthal sobre l_1.

Dedicatoria y agradecimientos

Este proyecto va dedicado, por supuesto, a mis padres, Mª Ángeles Pajuelo González y Camilo Montes Cota, que mucho han luchado por mí... Ellos han sido un engranaje fundamental, sin el cual, este proyecto (y mucho más) no habría sido posible.
También se lo dedico a mi novia, Maricé Cruzado Gil, la cual ha tenido que hacer un esfuerzo, al tener menos tiempo para estar conmigo.
Finalmente, también va dedicado a todos mis compañeros y amigos.

Me gustaría dar mi más profundo agradecimiento a la profesora Beatriz Hernando Boto, que ha sido la tutora de este proyecto. No sólo eso, también fue mi tutora en el proyecto fin de grado y mi profesora en la asignatura del máster: Operadores en espacios de Banach. Me ayudó muchísimo en estos años atrás. Por todo ello: muchísimas gracias.

Tabla de Contenidos

Página

INTRODUCCIÓN HISTÓRICA

El estudio de los espacios de sucesiones ha venido siendo una constante, o, mejor dicho, una función creciente, desde los albores del Análisis Funcional. Ya en 1906 D. Hilbert establece las principales propiedades del espacio l_2 como herramientas básicas para su generalización de los métodos de V. Volterra e I. Fredholm para resolver una ecuación integral con núcleo simétrico. Ese mismo año es publicada la tesis de M. Fréchet [1] en la que se introducen los espacios métricos y algunas nociones topológicas asociadas: compacidad, completitud y separabilidad. Más de la mitad de dicha tesis está dedicada al estudio de espacios métricos concretos, entre los que figuran el espacio de todas las sucesiones numéricas y el espacio de las funciones holomorfas en el interior del círculo unidad del plano complejo.

Destaquemos, entre los trabajos de esa época, los de E. Schmidt, E. Fisher y F. Riesz sobre los espacios l_2 y $L_2(I)$. Dichos trabajos abren las puertas al estudio de los espacios l_p y $L_p(I)$ realizado por F. Riesz, en los que se muestran por vez primera, espacios que en nuestra terminología, no coinciden con su dual.

El trabajo de O. Toeplitz [2] sobre las matrices infinitas que conservan la convergencia de sucesiones, en 1911, y el trabajo de E. Helly [3] sobre espacios de sucesiones normados, en 1923, prefiguran respectivamente, los teoremas de Banach-Steinhaus y de Hahn-Banach en su forma geométrica. Señalemos, de paso, que E. Helly muestra por vez primera , aunque la idea ya estaba implícita en el trabajo de F. Riesz sobre el dual de $\xi(I)$, un espacio normado no reflexivo: el espacio de las sucesiones sumables. Muchos de los ejemplos de la monografía de S. Banach [4], en 1932, son espacios de sucesiones escalares.

Se suele fechar en 1934, con la publicación del trabajo de G. Köthe y O. Toeplitz [5], el comienzo del reinado de los espacios de sucesiones escalares como donantes de ejemplos y contraejemplos a la teoría general. En dicho trabajo se estudia la dualidad entre un espacio de sucesiones y su α-dual. Gracias a las propiedades previamente conocidas sobre el espacio l_1, en especial el teorema de I. Schur sobre la convergencia débil y la convergencia en norma, G. Köthe y O. Toeplitz, prueban que los acotados son los mismos para las topologías débil y fuerte del par α-dual. Dicho trabajo motiva posteriormente a G. Mackey a definir los conceptos de par dual y topologías polares que encajan como anillo al dedo con la definición de espacio localmente convexo dada por J. Von Neumann en 1935.

Los espacios escalonados introducidos por G. Köthe, los estudios sobre la clasificación de los espacios de Banach de acuerdo con su comportamiento frente a espacios escalares como C_0 o l_p $(1 \leq p \leq +\infty)$, la teoría de Zeller de los FK-espacios y la utilización de espacios de sucesiones para representar de una manera cómoda espacios de funciones holomorfas, indefinidamente diferenciables y espacios de distribuciones son, por citar algunos, ejemplos de cómo los espacios de sucesiones escalares mantienen hoy día su alto índice de aceptación entre los analistas funcionales.

Paralelamente, el desarrollo de la teoría general va ligado, sucesivamente al estudio de las propiedades de convergencia de sucesiones con valores en espacios de funciones, normados generales y espacios vectoriales topológicos. El teorema clásico de Ascoli-Arzelá, el estudio de las convergencias débil y fuerte de sucesiones de espacios de Hilbert y en los espacios l_p y $L_p(I)$, el teorema de Féjer sobre convergencia de las series de Fourier en el sentido de Césaro, la tesis de Banach [4] sobre límites de sucesiones de operadores lineales y continuos entre espacios normados, etc... son ejemplos importantes de estudios de sucesiones con valores no numéricos previos a la introducción, por J. Schauder en 1927-1928, del concepto de base en un espacio normado como generalización de la correspondiente noción en espacios vectoriales de dimensión finita. En 1950 V. Ya. Kozlov y B. R. Gelbaum extienden el concepto de base de Schauder a base de Toeplitz reemplazando la convergencia ordinaria por convergencia en el sentido de una matriz de Toeplitz.

Volviendo al desarrollo de la teoría general en los años inmediatamente posteriores a la aparición de la monografía de Banach, señalemos, en lo que a sucesiones vectoriales respecta, los teoremas de Orlicz-Pettis y Banach-Saks. El problema de determinar si existen espacios de Banach de dimensión infinita en los que se mantenga el teorema de Riemann sobre la equivalencia de la convergencia incondicional y la convergencia absoluta, es resuelto de manera negativa por Dvoretzky y Rogers en 1950. A. Grothendieck, en su memoria [6] de 1955, estudia aquellos espacios localmente convexos en los que dicha equivalencia sí se da, los llamados espacios nucleares. En dicha memoria se introducen, asímismo, varias topologías sobre el producto tensorial de espacios localmente convexos. Cuando uno de dichos espacios es un espacio de sucesiones como l_1, es posible representar el producto tensorial proyectivo como un espacio de sucesiones vectoriales. Esta representación es generalizada por A. Pietsch en 1963.

Finalmente, cabe destacar que, con un trabajo de A. Robinson, en 1950, se introduce la teoría de matrices infinitas de operadores entre espacios de sucesiones con valores en espacios de Banach. Dicha teoría se ha desarrollado siguiendo las lineas de la correspondiente teoría para sucesiones escalares desarrollada a lo largo de los setenta años anteriores por Silverman, O. Toeplitz, I. Schur, Kojima, G. H. Hardy, K. Knopp, G. G. Lorentz, S. Mazur y W. Orlicz.

CAPÍTULO 1

DEFINICIONES Y PRIMERAS PROPIEDADES

En este capítulo veremos las definiciones de los espacios l_p, $(1 \leq p < \infty)$, C_0 y l_∞ y algunas propiedades fundamentales de estos.

1.1. Los espacios $\mathbf{l_p}$ $(1 \leq p < \infty)$

Definición 1.1. Fijado $1 \leq p < \infty$, denotaremos por $\mathbf{l_p}$ al conjunto de sucesiones $x = \{x_n\} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ (donde $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) tales que la serie $\sum_{n\geq 1} |x_n|^p$ es convergente. Es decir,

$$l_p = \left\{ x = \{x_n\} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\} \quad (1 \leq p < \infty)$$

Es fácil deducir, usando la desigualdad de Minkowsky [7], que l_p es subespacio vectorial de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ y que definiendo

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} \qquad \left(x \in l_p\right)$$

se obtiene una norma en l_p.

Proposición 1.1. *l_p, $1 \leq p < \infty$, es espacio de Banach.*

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en l_p y fijemos $k \in \mathbb{N}$. Consideremos la sucesión de escalares $\{x_{nk}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$, es claro que $|x_{nk} - x_{mk}| \leq \left(\sum_{q=1}^{\infty} \left|x_{nq} - x_{mq}\right|^p\right)^{1/p} = \|x_n - x_m\|_p$, con lo que $\{x_{nk}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{K}$, luego convergente. Definimos, para cada $k \in \mathbb{N}$, $x_k = \lim_{n\to\infty} x_{nk}$ y obtenemos la sucesión $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Sea $\epsilon > 0$ y dado que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en l_p, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq n_0$, entonces $\|x_n - x_m\|_p < \epsilon$. Por tanto, para cada $N \in \mathbb{N}$, tendremos

$$\sum_{k=1}^{N} |x_{nk} - x_{mk}|^p \leq \left(\|x_n - x_m\|_p\right)^p < \epsilon^p.$$

Fijamos un natural $n \geq n_0$ y tomando límite para $m \longrightarrow \infty$ en la desigualdad anterior, obtenemos

$$\sum_{k=1}^{N} |x_{nk} - x_k|^p \leq \epsilon^p$$

y, puesto que $N \in \mathbb{N}$ era arbitrario, obtenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_{nk} - x_k|^p \leq \epsilon^p$$

con lo que $x_n - x \in l_p$, luego también $x = x_n - (x_n - x) \in l_p$, pero además, la última desigualdad implica que $\|x_n - x\|_p \leq \epsilon$, para $n \geq n_0$. Así pues $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x \in l_p$ y, en consecuencia, l_p es completo. Es decir, l_p es un espacio de Banach. □

Proposición 1.2. *Si $p \leq q$ entonces $l_p \subseteq l_q$.*

Demostración. Sea $x = \{x_n\} \in l_p$. Para n suficientemente grande, se tendrá $|x_n| < 1$ y, por tanto, $|x_n|^q < |x_n|^p$. Así pues, por el criterio de comparación de series de términos positivos, concluimos que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q < \infty$, con lo que $x \in l_q$. □

Observemos que además, si $p < q$, entonces $l_p \subsetneq l_q$, ya que el elemento $x = \left\{\frac{1}{n^{1/p}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ está en l_q y no está en l_p, pues

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{q/p}} < \infty \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Definición 1.2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos por e_n a la sucesión cuyo n-ésimo término es 1 y los demás se anulan, es decir, $e_{nn} = 1$ y $e_{nk} = 0$ para $k \neq n$. Fijado $1 \leq p < \infty$, es obvio que $e_n \in l_p$, de hecho con $\|e_n\|_p = 1$ y decimos que e_n es el n-ésimo **vector unidad** en l_p.

Así pues, tenemos en l_p la sucesión $\{e_n\}$ de vectores unidad que claramente son linealmente independientes, lo que prueba que l_p tiene dimensión infinita. Vamos ahora a observar con detenimiento el subespacio engendrado por los vectores unidad.

A partir de ahora utilizaremos la siguiente notación: dado un subconjunto E de un espacio vectorial X, denotaremos por $\langle E \rangle$ al subespacio vectorial de X engendrado por E, es decir, el conjunto de todas las combinaciones lineales de elementos de E.

Definición 1.3. Se define $\mathbf{K^{(N)}}$ como el subespacio de l_p engendrado por todos los vectores unidad, es decir,

$$\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} = \left\langle \{e_n : n \in \mathbb{N}\} \right\rangle$$

o para más comodidad en la notación

$$\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} = \left\langle e_n : n \in \mathbb{N} \right\rangle.$$

Este subespacio de l_p tiene dimensión infinita numerable, es, además, subespacio de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ y obviamente es el mismo para todos los valores de p. Definimos el **soporte** de una sucesión $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ como el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq 0\}$, es claro que $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ es el conjunto de todas las sucesiones de **soporte finito**.

Proposición 1.3. $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ *es denso en* l_p $\left(1 \le p < \infty\right)$.

Demostración. Sea $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l_p$ y consideremos la serie $\sum_{n\ge1} x_n e_n$. Es claro que cada una de las sumas parciales de dicha serie es una sucesión con soporte finito, es decir, es un elemento de $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$. Por otro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\|^p = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p,$$

y como el resto de una serie convergente tiende a 0, deducimos que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n.$$

Así pues, la sucesión de sumas parciales es una sucesión en $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ que converge a x, con lo que $\overline{\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}} = l_p$ como queríamos. □

Recordemos que una serie $\sum_{n\ge1} x_n$ en un espacio normado X es incondicionalmente convergente si la serie

$$\sum_{n\ge1} x_{\sigma(n)}$$

converge (en la topología de la norma) para cualquier permutación σ del conjunto de los números naturales.

Se puede comprobar sin dificultad que la convergencia de la sucesión de sumas parciales de la demostración anterior es incondicional, es decir, para cualquier $x \in l_p$ $(1 \le p < \infty)$, la serie $\sum_{n\ge1} x_n e_n$ converge incondicionalmente a x. Por otra parte, es claro que $\|x_n e_n\|_p = |x_n|$, con lo que, la convergencia será absoluta si, y solo si, $x \in l_1$. Así pues, tomando $1 < p < \infty$ y $x \in l_p \setminus l_1$, la serie $\sum_{n\ge1} x_n e_n$ converge incondicionalmente a x en l_p, pero no lo hace absolutamente. Esto no debe extrañar, ya que en un espacio de Banach, la relación entre los distintos tipos de convergencia es la siguiente:

$$\text{convergencia absoluta} \Longrightarrow \text{convergencia incondicional} \Longrightarrow \text{convergencia}.$$

De modo que, por ejemplo, una serie incondicionalmente convergente que no es absolutamente convergente en l_p es $\sum_{n\ge1} e_n / n$.

Corolario 1.1. *Si* $p < q$ *entonces* l_p *dotado de la norma* $\|\cdot\|_q$ *es denso en* l_q.

Demostración. Es consecuencia inmediata de la proposición anterior y de la proposición 1.2 ya que $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \subset l_p \subset l_q$ y $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ es denso en l_q. □

Así pues, tanto $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ como l_p son subespacios densos en l_q $(p < q)$ que no son totales. Dicho de otra manera, si consideramos en $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ y en l_p la norma que heredan de l_q, tenemos dos ejemplos de espacios normados no completos, cuya completación es precisamente l_q.

Corolario 1.2. *En l_p las normas $\|\cdot\|_p$ y $\|\cdot\|_q$ $(p<q)$, no son equivalentes.*

Demostración. Veamos que l_p dotado de la norma $\|\cdot\|_q$ no es completo. Consideremos el elemento $x=\left\{\frac{1}{n^{1/p}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$. Este elemento está en l_q y no está en l_p, ya que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{q/p}}<\infty \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty.$$

Por ello, como l_p es denso en l_q (corolario anterior), podemos encontrar una sucesión $\{x_n\}$ en l_p convergiendo a x en l_q y, en consecuencia, esta sucesión es de Cauchy considerando la norma $\|\cdot\|_q$. Pero como $x\notin l_p$, la sucesión $\{x_n\}$ no puede converger en l_p dotado de la norma $\|\cdot\|_q$ (nótese que si lo hiciese, debería ser a un elemento y de l_p, pero entonces, considerándolo como elemento de l_q y por la unicidad del límite, tendríamos $x=y$, lo cual no es posible). Así pues, hemos encontrado una sucesión de Cauchy no convergente, con lo que l_p dotado de la norma $\|\cdot\|_q$ no es completo. Finalmente, las normas $\|\cdot\|_p$ y $\|\cdot\|_q$ no son equivalentes, puesto que una es completa y la otra no. □

Volvamos a la sucesión $\{e_n\}$ de vectores unidad en l_p. Se trata, como ya hemos dicho, de un conjunto de vectores linealmente independiente, pero no forman una base algebraica de l_p, el subespacio que engendran es $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, que es denso en l_p, pero no es total. Sin embargo, cada vector $x\in l_p$ se expresa como una especie de combinación lineal infinita de los términos de nuestra sucesión, más concretamente,

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}x_n e_n,$$

serie que converge (incluso incondicionalmente) en la topología de la norma del espacio l_p. Además es obvio, que dicha expresión es única. Podríamos decir que la sucesión $\{e_n : n\in\mathbb{N}\}$ se comporta como una especie de base de l_p, siempre que no nos limitemos a hacer combinaciones lineales finitas. Ello motiva la siguiente definición:

Definición 1.4. Se dice que una sucesión $\{u_n\}$ en un espacio de Banach X es una **base de Schauder** de X si para cada $x\in X$ existe una única sucesión de escalares $\{\lambda_n\}$ tal que

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n u_n,$$

y la serie converge a x en la topología de la norma.

Además, si la convergencia de la serie anterior es incondicional, se dice que la base de Schauder es **incondicional**.

Así pues, nuestras consideraciones anteriores se resumen diciendo que $\{e_n\}$ es una base de Schauder incondicional de l_p para $1\le p<\infty$. Se dice que $\{e_n\}$ es la **base de vectores unidad o base canónica** de l_p.

Proposición 1.4. *Los vectores de una base de Schauder de un espacio de Banach X son linealmente independientes.*

Demostración. Es consecuencia inmediata de que el elemento nulo tiene una única representación, y, por tanto, todos sus escalares λ_n deben ser 0. □

De modo que, el subespacio Y engendrado por una base de Schauder de un espacio de Banach X tiene dimensión infinita numerable y, claramente, por la definición de base de Schauder, Y es denso en X. Además, se comprueba sin dificultad que no puede coincidir con X (es su clausura la que coincide con X). Por ello, todo espacio de Banach que admita una base de Schauder, contiene un subconjunto denso y de dimensión numerable.

Proposición 1.5. *Si X es un espacio de Banach que admite una base de Schauder, entonces es separable.*

Demostración. Sea Δ un conjunto numerable y denso en $\mathbb{K}$ (Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ basta tomar $\Delta = \mathbb{Q}$ y si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ basta tomar $\Delta = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$) y supongamos que $\{u_n\}$ es la base de Schauder de X. Sea E el conjunto de las combinaciones lineales de elementos de la base de Schauder con coeficientes en Δ, es decir,

$$E = \left\{ \sum_{k=1}^{N} \delta_k u_k : N \in \mathbb{N}; \delta_1, \ldots, \delta_N \in \Delta \right\}.$$

Sea Y el subespacio engendrado por la base de Schauder, como hemos dicho antes del enunciado de la proposición, Y es denso en X y de dimensión numerable. Es obvio que E es subconjunto numerable de Y; además, usando que Δ es denso en $\mathbb{K}$, se obtiene que E es denso en Y, y como Y es denso en X, se deduce que E es denso en X. Por tanto, tenemos que E es un subconjunto denso y numerable de X, y, por ello, X es separable. □

Corolario 1.3. *l_p $(1 \le p < \infty)$ es separable.*

Demostración. Se sigue de que l_p admite la base de Schauder $\{e_n\}$ de vectores unidad y de la proposición anterior. □

1.2. Los espacios $\mathbf{l}_\infty$ y $\mathbf{C_0}$

Definición 1.5. Se define $\mathbf{l}_\infty$ al subconjunto de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ formado por todas las sucesiones acotadas de escalares, es decir,

$$l_\infty = \left\{ x = \{x_n\} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sup\left\{ |x_n| : n \in \mathbb{N} \right\} < \infty \right\}.$$

Es obvio que l_∞ es subespacio vectorial de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ y que definiendo

$$\|x\|_\infty = \sup\left\{ |x_n| : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \left(x \in l_\infty \right)$$

se obtiene una norma en l_∞.

Proposición 1.6. *l_∞ es espacio de Banach.*

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en l_∞. Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, dado $\epsilon > 0$ existirá $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq n_0$, entonces $\|x_n - x_m\|_\infty < \epsilon$, o lo que es lo mismo,

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |x_{nk} - x_{mk}| < \epsilon.$$

Por lo que, fijado $k \in \mathbb{N}$, la sucesión $\{x_{nk}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{K}$ y, por tanto, convergente. Definimos, para cada $k \in \mathbb{N}$, $x_k = \lim_{n\to\infty} x_{nk}$ y obtenemos una sucesión $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Sea $\epsilon > 0$, dado que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, existirá $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq n_0$, entonces $\|x_n - x_m\|_\infty < \epsilon$, o equivalentemente,

$$|x_{nk} - x_{mk}| < \epsilon, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Sea $n \geq n_0$ y tomando límite para $m \to \infty$ en la desigualdad anterior, obtenemos

$$|x_{nk} - x_k| \leq \epsilon, \ \forall k \in \mathbb{N},$$

es decir, $\|x_n - x\|_\infty \leq \epsilon$. Así pues, $x_n - x \in l_\infty$, y también, $x = x_n - (x_n - x) \in l_\infty$ y se tiene que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x en l_∞ como queríamos, con lo que l_∞ es espacio de Banach. □

Definición 1.6. Se define $\mathbf{C_0}$ como el conjunto de sucesiones convergentes a 0. Es claro que C_0 es subespacio vectorial de l_∞. Además, dotado de la norma $\|\cdot\|_\infty$, es espacio normado.

Proposición 1.7. *C_0 es cerrado en l_∞.*

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en C_0 convergente a un elemento $x \in l_\infty$ y sea $\epsilon > 0$. Como la sucesión converge a x, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces, $\|x - x_n\|_\infty < \frac{\epsilon}{2}$, o lo que es lo mismo,

$$|x_k - x_{nk}| < \frac{\epsilon}{2}, \ \forall k \in \mathbb{N}, \ n \geq n_0.$$

Por otro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in C_0$, luego existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq k_0$, entonces $|x_{nk}| < \frac{\epsilon}{2}$. Observemos que k_0 depende de n.
Sean pues, $n \geq n_0$ y $k \geq k_0$ (k_0 depende de n), entonces

$$|x_k| - |x_{nk}| \leq |x_k - x_{nk}| < \frac{\epsilon}{2} \implies |x_k| < \frac{\epsilon}{2} + |x_{nk}| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

con lo que x converge a 0 y es, por tanto, un elemento de C_0. Por tanto, C_0 es cerrado en l_∞. □

Corolario 1.4. *C_0 dotado de la norma $\|\cdot\|_\infty$, es espacio de Banach.*

Demostración. Es consecuencia inmediata de la proposición anterior, al ser cerrado en un espacio de Banach. □

Definición 1.7. Consideremos la sucesión $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ de vectores unidad introducida en la definición 1.2, que están todos en C_0. El subespacio que engendran (que como espacio vectorial sigue siendo $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$), visto ahora como subespacio de C_0, suele denotarse por $\mathbf{C_{00}}$.

Proposición 1.8. *C_{00} es denso en C_0.*

Demostración. Sea $x = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in C_0$ y consideremos la sucesión de sumas parciales $\sum_{k=1}^n x_k e_k$. Como

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\|_\infty = \sup\left\{ |x_k|,\ n+1 \le k < \infty \right\},$$

y x es una sucesión que converge a 0, se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\|_\infty = 0.$$

De modo que la sucesión de sumas parciales es una sucesión en C_{00} que converge a $x \in C_0$. Así pues, tenemos que $\overline{C_{00}} = C_0$ y, por tanto, C_{00} es denso en C_0. □

Como hemos podido ver en la demostración anterior, dado $x \in C_0$, se verifica que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n,$$

converge a x. Además, es fácil comprobar que la serie converge incondicionalmente (pero no siempre absolutamente) y que se tiene la unicidad del desarrollo. Por ello, la sucesión $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ de vectores unidad es una base de Schauder incondicional de C_0.

Corolario 1.5. *C_0 es separable.*

Demostración. Es consecuencia de las consideraciones anteriores y de la proposición 1.5. □

Hasta ahora, hemos visto que los espacios C_0 y l_p para $1 \le p < \infty$ son separables. Sin embargo, con l_∞ ocurre algo diferente. La siguiente proposición será utilizada para probar que este espacio no es separable:

Proposición 1.9. *Sea X un espacio normado que contiene un subconjunto A no numerable y que verifica que existe $\delta > 0$ tal que si $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$; entonces $\|a_1 - a_2\| > \delta$. En estas condiciones, X es no separable.*

Demostración. Sea B un subconjunto denso en X. Entonces $A \subset \overline{B}$ y, por tanto, dado $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $\|a - b\| < \frac{\delta}{2}$. Veremos además, que no hay otro $a' \in A$, $a' \neq a$ que verifique $\|a' - b\| < \frac{\delta}{2}$. En efecto, sean $a, a' \in A$, $a' \neq a$ y sea $b \in B$ tal que $\|a - b\| < \frac{\delta}{2}$, entonces

$$\|a' - b\| = \|a' - a - (b - a)\| \ge \|a' - a\| - \|b - a\| > \delta - \|b - a\| > \frac{\delta}{2}.$$

Así pues, la distancia entre b y cualquier otro $a' \neq a$, $a' \in A$; es superior a $\frac{\delta}{2}$, con lo que a es único. Consideremos la aplicación $f : A \to B$ tal que a cada $a \in A$ le asigna un elemento $b \in B$ que cumple $\|a - b\| < \frac{\delta}{2}$. Esta aplicación está bien definida y es inyectiva por las consideraciones anteriores. Pero A es no numerable y la inyectividad de f implica que B es también no numerable. De modo que cualquier subconjunto denso de X es no numerable y, por tanto, X no puede ser separable. □

Ahora ya podemos probar que:

Proposición 1.10. *l_∞ no es separable.*

Demostración. Sea $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ el conjunto de todas las partes de $\mathbb{N}$ que, como sabemos, es no numerable. Para cada elemento E de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ sea χ_E la función característica de E (es decir, $\chi_E(n) = 1$ si $n \in E$ y $\chi_E(n) = 0$ si $n \notin E$), construimos la sucesión $u_E = \left\{\chi_E(n) : n \in \mathbb{N}\right\}$. Es claro que $u_E \in l_\infty$, $\forall E \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ y que, además, si $E, F \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$, $E \neq F$, entonces $\|u_E - u_F\|_\infty = 1 > \frac{1}{2}$. Finalmente, sea $A = \{u_E : E \in \mathscr{P}(\mathbb{N})\}$. A es un conjunto no numerable de l_∞ (pues tiene el mismo cardinal que $\mathscr{P}(\mathbb{N})$) y cualesquiera dos elementos suyos están a distancia superior a $\frac{1}{2}$, con lo que, por la proposición anterior, l_∞ no es separable. □

Finalmente, para acabar el capítulo, merece la pena observar las relaciones de inclusión entre todos los espacios de sucesiones que han aparecido. Para $1 < p < q < \infty$, como espacios vectoriales (prescindiendo de normas), tenemos:

$$C_{00} \subset l_1 \subset l_p \subset l_q \subset C_0 \subset l_\infty,$$

inclusiones todas estrictas.

CAPÍTULO 2

Operadores lineales continuos entre espacios de sucesiones

A lo largo de este capítulo veremos una serie de resultados que enunciaremos sin demostración, ya que son conocidos y su demostración no es tema de este proyecto (consultar el libro de referencia [7] si se desea profundizar en las demostraciones). Finalmente, aplicaremos estos resultados para estudiar el dual de los espacios l_p, $(1 \le p < \infty)$, C_0 y l_∞.

2.1. Operadores lineales continuos

Definición 2.1. Un **operador lineal** es, simplemente, una aplicación lineal de un espacio vectorial en otro, lógicamente ambos sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. En el caso particular en que el espacio de llegada sea simplemente $\mathbb{K}$, a la aplicación lineal se le suele denominar **funcional lineal**.

Resultado 2.1. *Sean X e Y dos espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal. Entonces T es continuo si, y sólo si,*

$$\exists M > 0 : \ \|Tx\| \le M\|x\|, \ \forall x \in X. \tag{2.1}$$

Obsérvese que escribimos simplemente Tx en lugar de T(x) y que denotamos con el mismo símbolo las normas de X e Y, lo que no debe causar confusión.

Resultado 2.2. *Sean X e Y dos espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal. La propiedad* (2.1) *vista en el resultado anterior es equivalente a cada una de los siguientes propiedades, y, por tanto, todas son equivalentes entre sí:*

• *T es continua en todos los puntos.*
• *T es continua en algún punto.*
• *T es continua en el origen.*
• *T transforma la bola unidad de X, B_X, en un conjunto acotado.*
• *T transforma conjuntos acotados en conjuntos acotados.*
• *T es uniformemente continua.*

Como puede verse en el resultado anterior, un operador lineal continuo transforma conjuntos acotados en conjuntos acotados. Por esta razón se les suele llamar también **operadores lineales acotados**.

2.2. Norma de operadores

Definición 2.2. Dados dos espacios normados X e Y, denotaremos por **L(X,Y)** al conjunto de todos los operadores lineales continuos (que a partir de ahora llamaremos simplemente operadores) de X en Y, que es claramente un espacio vectorial con las operaciones:

$$(T+S)x = Tx + Sx, \quad (\lambda T)x = \lambda Tx \qquad (T,S \in L(X,Y), \lambda \in \mathbb{K}, x \in X).$$

Sea $T \in L(X,Y)$, se define la **norma** de T como:

$$\begin{aligned} \|T\| &= \min\left\{M \geq 0 : \|Tx\| \leq M\|x\|,\ \forall x \in X\right\} \\ &= \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in X,\, x \neq 0\right\} \\ &= \sup\left\{\|Tx\| : x \in X,\ \|x\| = 1\right\} \\ &= \sup\left\{\|Tx\| : x \in X,\ \|x\| \leq 1\right\} \\ &= \sup\left\{\|Tx\| : x \in X,\ \|x\| < 1\right\}. \end{aligned}$$

Es fácil comprobar todas las igualdades anteriores, así como que $T \mapsto \|T\|$ es efectivamente una norma en $L(X,Y)$, que recibe el nombre genérico de **norma de operadores** y al espacio normado $L(X,Y)$ se le llama **espacio de operadores**.

Resultado 2.3. *Sea $\{T_n\}$ una sucesión de operadores en $L(X,Y)$, entonces $\{T_n\}$ converge en $L(X,Y)$ si, y sólo si, converge uniformemente en la bola unidad de X, equivalentemente, converge uniformemente en cada subconjunto acotado de X.*

En los siguientes resultados, veremos que, al estudiar un espacio de operadores $L(X,Y)$, no se pierde mucha generalidad suponiendo que X e Y son espacios de Banach, pues siempre podemos sustituirlos por sus respectivas completaciones:

Resultado 2.4. *Si Y es un espacio de Banach, entonces también $L(X,Y)$ es un espacio de Banach.*

El resultado anterior tiene una aplicación inmediata: cualquier operador lineal y continuo $T \in L(X,Y)$ puede verse como un operador lineal y continuo de X en la completación $\widehat{Y}$ del espacio normado Y, es decir como un elemento del espacio de Banach $L(X,\widehat{Y})$. Además tenemos el siguiente resultado:

Resultado 2.5. *Si M es un subespacio denso de un espacio normado X, Y es un espacio de Banach y $T \in L(M,Y)$, existe un único operador $\tilde{T} \in L(X,Y)$ cuya restricción a M coincide con T. Además es fácil comprobar que $\|\tilde{T}\| = \|T\|$, con lo cual, la aplicación $T \mapsto \tilde{T}$ identifica totalmente $L(M,Y)$ con $L(X,Y)$, es una biyección lineal que conserva la norma.*

2.3. Funcionales lineales continuos

Por supuesto, todos los resultados y consideraciones anteriores siguen siendo ciertos cuando el espacio de llegada es el cuerpo $\mathbb{K}$.

Definición 2.3. Sea X un espacio normado. El espacio de todos los funcionales lineales continuos en X se denota por $\mathbf{X}^*$ (en vez de $L(X,\mathbb{K})$). Como $\mathbb{K}$ es completo, por el resultado 2.4, sabemos que X^* siempre será completo, o sea, un espacio de Banach. Este espacio de Banach recibe el nombre de **dual topológico** de X, para diferenciarlo del dual algebraico, que estaría formado por todos los funcionales lineales de X (no necesariamente continuos). Generalmente, no hay lugar a confusión y decimos que X^* es el **espacio dual** o simplemente el **dual** de X y también decimos que la norma de X^* es la **norma dual** de la norma de X.

El dual del espacio X^* se denota por $\mathbf{X}^{**}$ y obviamente también es un espacio de Banach que recibe el nombre de **bidual topológico** de X, o, por lo que hemos dicho antes, simplemente **bidual** de X.

Notemos que un funcional lineal f en un espacio vectorial X, está determinado por su núcleo $ker f = \{x \in X : f(x) = 0\}$, salvo un factor de proporcionalidad: si f, g son funcionales lineales en un mismo espacio vectorial X y $ker f = ker g$, entonces $f = \lambda g$ para algún $\lambda \in \mathbb{K}$. No es de extrañar, por tanto, que la continuidad de un funcional lineal en un espacio normado pueda caracterizarse en términos de su núcleo:

Resultado 2.6. *Un funcional lineal en un espacio normado es continuo si, y sólo si, su núcleo es cerrado.*

Otra propiedad importante a destacar es la totalidad de X y X^*:

Resultado 2.7. *Si $f(x) = 0$ para todo $f \in X^*$, entonces $x = 0$. Análogamente, si $f(x) = 0$ para todo $x \in X$, entonces $f = 0$.*

Por último recordemos el teorema de extensión equinórmica, consecuencia del Teorema de Hahn-Banach en su forma analítica (ver libro de referencia [7] para consultar su demostración):

Teorema 2.1. *(de extensión equinórmica). Sea X un espacio normado, M un subespacio de X y $g \in M^*$. Entonces existe $f \in X^*$ tal que f extiende a g y $\|f\| = \|g\|$.*

2.4. Duales de los espacios de sucesiones

Vamos a describir con detalle los espacios duales de los espacios de sucesiones presentados en el capítulo anterior. Veremos que el dual de un espacio de sucesiones se identifica frecuentemente con otro espacio de sucesiones. Debe quedar claro desde el principio lo que entendemos por "identificar":

Definición 2.4. Dos espacios normados X e Y deben considerarse idénticos cuando existe una biyección lineal S de X sobre Y que conserva la norma, es decir, $\|Sx\| = \|x\|$ para todo $x \in X$. En vista de la linealidad, esto es lo mismo que decir que S es isometría: $\|Su - Sv\| = \|u - v\|$ para cualesquiera $u, v \in X$; por lo que decimos que S es un **isomorfismo isométrico** de X sobre Y. Cuando existe un isomorfismo isométrico entre dos espacios normados X e Y, decimos lógicamente que X e Y son **isométricamente isomorfos** y escribimos $X \equiv Y$.

Definición 2.5. Dado un espacio de Banach X se denota por $\mathbf{J_X}$ a la **inclusión canónica** del espacio en su bidual, $J_X : X \to X^{**}$; esto es la aplicación que a cada $x \in X$ le asigna el funcional $J_X(x)$ de X^{**} dado por

$$J_X(x) : X^* \longrightarrow \mathbb{K}; \quad J_X(x)(x^*) = x^*(x).$$

Proposición 2.1. *J_X es lineal, continua, inyectiva y verifica que $\|J_X(x)\| = \|x\|$.*

Demostración. Sean $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces,

$$J_X(x+y)(x^*) = x^*(x+y) = x^*(x) + x^*(y) = J_X(x)(x^*) + J_X(y)(x^*) = \big(J_X(x) + J_X(y)\big)(x^*), \quad \forall x^* \in X^*;$$
$$J_X(\lambda x)(x^*) = x^*(\lambda x) = \lambda x^*(x) = \big(\lambda J_X(x)\big)(x^*), \quad \forall x^* \in X^*;$$

por lo que J_X es lineal.
Supongamos ahora que $J_X(x) = J_X(y)$, entonces se tendrá,

$$x^*(x) = x^*(y), \quad \forall x^* \in X^*;$$

por lo que, por la totalidad (resultado 2.7), se deduce $x = y$, y J_X es, por tanto, inyectiva.
Además, dado $x^* \in X^*$, tenemos

$$\big|J_X(x)(x^*)\big| = |x^*(x)| \le \|x\| \|x^*\|,$$

con lo que $\|J_X(x)\| \le \|x\|$. Por tanto, J_X está acotada y, por ello, es continua.

Finalmente, sea $x \in X$, $x \neq 0$ (si X fuese el espacio trivial es claro que tendríamos $\|J_X(x)\| = 0 = \|x\|$) y consideremos el subespacio vectorial de X engendrado por x,$\langle x \rangle$. Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} f : \langle x \rangle &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \lambda x \quad &\quad \lambda \|x\| \qquad (\lambda \in \mathbb{K}). \end{aligned}$$

Es claro que esta aplicación es lineal y además $|f(\lambda x)| = \|\lambda x\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, de donde se deduce $\|f\| = 1$, con lo que f es un funcional lineal continuo que verifica, obviamente, $f(x) = \|x\|$. Por el teorema 2.1 de extensión equinórmica, existe $x^* \in X^*$ que extiende a f y que cumple $\|f\| = \|x^*\|$. Por tanto, $\|x^*\| = 1$ y $J_X(x)(x^*) = x^*(x) = \|x\|$. De aquí se deduce $\|J_X(x)\| \geq \|x\|$. En consecuencia, $\|J_X(x)\| = \|x\|$, como queríamos probar. □

Como hemos visto, J_X es lineal, continua, inyectiva y verifica que $\|J_X(x)\| = \|x\|$, pero en general no será sobreyectiva.

Definición 2.6. Se dice que un espacio de Banach X es **reflexivo** si verifica que la inclusión canónica en su bidual es sobreyectiva; es decir, que $J_X(X) = X^{**}$.

2.4.1. Dual y bidual del espacio l_p, $(1 \leq p < \infty)$

Empecemos, por ahora, con $1 < p < \infty$. Dados $x \in l_p$ e $y \in l_{p^*}$, donde p^* es el "exponente conjugado" o "exponente dual" de p, es decir, el único número $p^* > 1$ que verifica $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$; la desigualdad de Hölder [7] nos da:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \|y\|_{p^*} \|x\|_p.$$

Manteniendo fija la sucesión $y \in l_{p^*}$, deducimos que escribiendo

$$Sy(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \quad (x \in l_p),$$

Sy está bien definido y es un funcional lineal continuo en l_p, que verifica $\|Sy\| \leq \|y\|_{p^*}$.

Por otro lado, para cada $k \in \mathbb{N}$ escribimos $y_k = \lambda_k |y_k|$, donde $\lambda_k = \frac{y_k}{|y_k|}$ si $y_k \neq 0$ y $\lambda_k = 1$ si $y_k = 0$; y definimos $x_k = \overline{\lambda_k} |y_k|^{p^*-1}$. Por una parte tenemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p = \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^{(p^*-1)p} = \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^{p^*} < \infty,$$

luego $x \in l_p$ y, por otra parte,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^{p^*} = \left| \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^{p^*} \right| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \right| = \left| Sy(x) \right| \leq \|Sy\| \|x\|_p = \|Sy\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^{p^*} \right)^{1/p},$$

de donde, despejando, $\|y\|_{p^*} \leq \|Sy\|$. Así pues, $\|Sy\| = \|y\|_{p^*}$.

Podemos ya hacer variar la sucesión $y \in l_{p^*}$, para obtener un operador lineal e isométrico $S : l_{p^*} \to l_p^*$. Como S es isometría lineal entre espacios normados, para identificar ambos espacios basta comprobar que S es sobreyectiva. Sea pues $f \in l_p^*$, buscamos $y \in l_{p^*}$ tal que $Sy = f$. Pero como,

$$Sy(e_i) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n y_n = y_i \quad (i \in \mathbb{N}),$$

donde e_i denota el i-ésimo vector unidad, es claro que debe ser $y_i = f(e_i)\ \forall i \in \mathbb{N}$. Así que tomamos la sucesión $y = \{f(e_i)\}$.

Veamos en primer lugar que $y \in l_{p^*}$. Para ello, escribimos otra vez $y_k = \lambda_k |y_k|$, donde $\lambda_k = \frac{y_k}{|y_k|}$ si $y_k \neq 0$ y $\lambda_k = 1$ si $y_k = 0$, $k \in \mathbb{N}$. Sea $N \in \mathbb{N}$, y consideremos la sucesión de soporte finito dada por

$$x_N = \sum_{k=1}^{N} \overline{\lambda_k} |y_k|^{p^*-1} e_k,$$

es decir, $x_{Nk} = \overline{\lambda_k} |y_k|^{p^*-1}$ si $k \le N$ y $x_{Nk} = 0$ si $k > N$. Tenemos entonces

$$\sum_{k=1}^{N} |y_k|^{p^*} = \sum_{k=1}^{N} \overline{\lambda_k} |y_k|^{p^*-1} \lambda_k |y_k| = \sum_{k=1}^{N} x_{Nk}\, y_k = \sum_{k=1}^{N} x_{Nk}\, f(e_k) = f\left(\sum_{k=1}^{N} x_{Nk}\, e_k\right) = f(x_N),$$

pero $f(x_N) \le \|f\| \|x_N\|_p = \|f\| \left(\sum_{k=1}^{N} |y_k|^{p^*}\right)^{1/p}$, de donde

$$\sum_{k=1}^{N} |y_k|^{p^*} \le \|f\| \left(\sum_{k=1}^{N} |y_k|^{p^*}\right)^{1/p},$$

con lo que despejando y tomando límite para $N \to \infty$, obtenemos finalmente

$$\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^{p^*} \le \|f\|^{p^*}.$$

Así pues, $y \in l_{p^*}$ como queríamos demostrar.

Sólo queda comprobar que $Sy = f$, pero esto es inmediato. Por la definición de y tenemos que $Sy(e_n) = y_n = f(e_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$; por linealidad, Sy ha de coincidir con f en el subespacio engendrado por los vectores unidad, pero sabemos que dicho subespacio es denso en l_p luego, por continuidad, ambos funcionales han de coincidir en todo el espacio l_p.

Queda pues probado que el operador S con el que hemos venido trabajando es un isomorfismo isométrico y podemos escribir:

$$l_p^* \equiv l_{p^*} \quad (1 < p < \infty).$$

Es muy interesante observar el caso $p = 2 : l_2^* \equiv l_2$.

Resumiendo:

El dual de l_p para $1 < p < \infty$ es isométricamente isomorfo a l_{p^*} siendo p^* el "exponente conjugado" o "exponente dual" de p, es decir, el único número $p^* > 1$ que verifica $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$.

Observemos que si repetimos todo el proceso anterior a l_{p^*}, obtendríamos, de la misma manera, que:

$$l_{p^*}^* \equiv l_p \quad (1 < p < \infty).$$

Proposición 2.2. *Sean X e Y espacios normados no triviales tales que existe un isomorfismo isométrico $S : Y \to X$. Entonces los espacios duales X^* e Y^* son isométricamente isomorfos.*

Demostración. Sea $f \in X^*$, definimos la aplicación $H : X^* \to Y^*$ como

$$H(f)(y) = f(S(y)), \quad y \in Y,$$

es decir, $H(f) = f \circ S$.

Claramente, la aplicación $H(f)$ está bien definida. Además es lineal al serlo f y S y es continua, ya que

$$\left|H(f)(y)\right| = \left|f(S(y))\right| \leq \|f\|\|S(y)\| = \|f\|\|y\|, \quad \forall y \in Y.$$

Por ello, $H(f)$ es un funcional lineal y continuo en Y, con lo que H está bien definida.

H es obviamente lineal por la linealidad de la composición. Veremos a continuación que se trata de una isometría.

Dado $f \in X^*$, y teniendo en cuenta que S es isomorfismo isométrico, tenemos

$$\begin{aligned}\left\|H(f)\right\| &= \sup\left\{\left|H(f)(y)\right| : y \in Y, \|y\| = 1\right\} = \sup\left\{\left|f(S(y))\right| : y \in Y, \|y\| = 1\right\} \\ &= \sup\left\{\left|f(x)\right| : x \in X, \|x\| = 1\right\} = \|f\|,\end{aligned}$$

con lo que H es, por tanto, isometría.

Por último, al ser H isometría lineal, basta con demostrar que es sobreyectiva. Sea pues $g \in Y^*$ y definamos $f = g \circ S^{-1}$. Es obvio que f así definida es lineal y además, si $x \in X$

$$|f(x)| = \left|g(S^{-1}(x))\right| \leq \|g\|\left\|S^{-1}(x)\right\| = \|g\|\|x\|,$$

con lo que f es continua y, por tanto, un funcional lineal y continuo en X y tenemos

$$H(f) = f \circ S = g \circ S^{-1} \circ S = g.$$

De modo que H es una isometría lineal biyectiva y, por tanto, X^* e Y^* son isométricamente isomorfos. □

Volviendo al caso de l_p $(1 < p < \infty)$, como

$$l_p^* \equiv l_{p^*} \text{ y } l_{p^*}^* \equiv l_p,$$

podemos ahora aplicar la proposición anterior y concluir que

$$l_p^{**} \equiv l_p,$$

es decir, *el bidual de l_p, es isométricamente isomorfo a l_p.* Esto nos hace pensar que, para $1 < p < \infty$, l_p es un espacio de Banach reflexivo, pero nos falta demostrar que la inclusión canónica es sobreyectiva. Lo veremos más adelante.

Al caso $p = 1$, es decir, para l_1, se le puede dar un tratamiento similar, ahora con $p^* = \infty$: el operador S se define formalmente de la misma manera y, razonamientos análogos a los anteriores, incluso más sencillos en algún aspecto, nos llevan a comprobar que S es un isomorfismo isométrico, obteniendo por tanto que

$$l_1^* \equiv l_\infty,$$

es decir, *el dual de l_1 es isométricamente isomorfo a l_∞.*

El caso $p = \infty$ nos reserva una sorpresa importante. En principio, puesto que en este caso tomamos $p^* = 1$, nada nos impide definir un operador lineal $S : l_1 \to l_\infty^*$ de la misma forma que en los casos anteriores. Comprobamos sin dificultad que S es isometría lineal, lo que nos permite identificar l_1 con un subespacio cerrado de l_∞^*. La sorpresa estriba en que esta vez S no es sobreyectivo. De momento no podemos probar este hecho (necesitamos el siguiente resultado), pero podemos explicar lo que ocurre. Si intentamos reproducir los razonamientos de los casos anteriores, el problema con el que nos encontramos es que un funcional $f \in l_\infty^*$ no queda determinado por sus valores sobre los vectores unidad, porque el subespacio engendrado por dichos vectores no es denso en l_∞. Veremos, a continuación, que existen funcionales lineales continuos en l_∞ que se anulan en los vectores unidad pero no son idénticamente nulos. Para ello necesitamos el siguiente resultado que es consecuencia del teorema de Hahn-Banach (ver libro de referencia [7]):

Teorema 2.2. *Sea X un espacio de Banach e Y un subespacio vectorial cerrado suyo (no total). Sea $x_0 \in X \setminus Y$. Existe un funcional $x^* \in X^*$ tal que $x^*|_Y = 0$ y $x^*(x_0) = 1$.*

Demostración. Elijamos un $\delta > 0$ tal que $B(x_0,\delta) \bigcap Y = \emptyset$, siendo $B(x_0,\delta)$ la bola abierta de centro x_0 y radio δ, es decir, el conjunto

$$\big\{x \in X : \|x - x_0\| < \delta\big\}.$$

Obsérvese que la existencia de tal δ está asegurada al ser Y cerrado. Para todo $x \in Y$, tendremos

$$\|x - x_0\| \geq \delta.$$

Sea $\widehat{Y}$ el subespacio engendrado por Y y x_0, es decir, la suma algebraica de Y y el subespacio $\langle x_0 \rangle$ (nótese que la suma es directa). Definimos la aplicación

$$f : \widehat{Y} \longrightarrow \mathbb{K} \quad : \quad x + \lambda x_0 \longmapsto \lambda, \quad x \in Y.$$

Esta aplicación está bien definida (al ser la suma directa) y se comprueba fácilmente que es lineal. Además si $\lambda \neq 0$,

$$\|x + \lambda x_0\| = |\lambda| \, \|x_0 + \lambda^{-1} x\| \geq |\lambda| \delta,$$

ya que $\lambda^{-1} x \in Y$. En consecuencia,

$$|f(x + \lambda x_0)| = |\lambda| \leq \frac{1}{\delta} \|x + \lambda x_0\|,$$

desigualdad que se verifica incluso si $\lambda = 0$. Así pues, f es continua. Por tanto, f es un funcional lineal y continuo definido en $\widehat{Y}$ que cumple $f|_Y = 0$ y $f(x_0) = 1$. Por el teorema de Hahn-Banach, existe un funcional $x^* \in X^*$ que extiende a f y que verifica $\|x^*\| = \|f\|$. El funcional x^* cumple las propiedades del enunciado. $\square$

Ahora podemos demostrar que la isometría lineal $S : l_1 \to l_\infty^*$ no es sobreyectiva. Observemos el elemento

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} e_k = (1,1,1,...) \in l_\infty,$$

donde e_i, $i = 1,2,...$ es el i-ésimo vector unidad. Obviamente, $z \notin C_0$ y, por la proposición 1.7, sabemos que C_0 es subespacio cerrado de l_∞. Por tanto, podemos aplicar el teorema anterior y concluir que existe un funcional $x^* \in l_\infty^*$ que se anula en C_0 y que verifica $x^*(z) = 1$. Este funcional no puede estar en la imagen de la aplicación S.

En efecto, si estuviese, existiría un elemento $y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l_1$, tal que el funcional x^* sería de la forma

$$x^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, \quad x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty.$$

Pero tomando, para cualquier $j \in \mathbb{N}$, $x = e_j \in C_0$, el j-ésimo vector unidad, y teniendo en cuenta que x^* se anula en C_0, tendríamos

$$0 = x^*(e_j) = y_j, \ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Se concluye que $x^* = 0$, lo cual no es posible, pues $x^*(z) = 1$. De modo que, efectivamente, x^* no está en la imagen de la aplicación S, y S no es, por tanto, sobreyectiva.

2.4.2. Dual y bidual del espacio C_0

Hemos dicho antes en el caso de $p = \infty$ que la aplicación S era isometría lineal, pero que no era sobreyectiva. El problema era que un funcional $f \in l_\infty^*$ no queda determinado por sus valores sobre los vectores unidad, porque el subespacio engendrado por dichos vectores no es denso en l_∞. Sin embargo, sabemos que los vectores unidad sí forman una base de Schauder de C_0, luego un funcional $f \in C_0^*$ sí queda determinado por sus valores sobre ellos, así que podemos trabajar con el espacio de Banach C_0 en lugar de l_∞. Con métodos análogos a los usados en ejemplos anteriores se prueba entonces que

$$C_0^* \equiv l_1,$$

es decir, *el dual de C_0 es isométricamente isomorfo a l_1.*

Además, como sabemos que $l_1^* \equiv l_\infty$, ahora podemos aplicar la proposición 2.2 y concluir que

$$C_0^{**} \equiv l_\infty,$$

es decir, *el bidual de C_0 es isométricamente isomorfo a l_∞.*

CAPÍTULO 3

Trasposición de operadores. Reflexividad

A lo largo de este capítulo definiremos el operador traspuesto y veremos algunos resultados necesarios para demostrar que los espacios l_p, $(1 < p < \infty)$, son reflexivos. Finalmente, veremos que los espacios C_0, l_1 y l_∞ no son reflexivos.

3.1. Trasposición de operadores

Definición 3.1. Sean X e Y espacios normados y T un operador lineal continuo de X en Y, es decir, $T \in L(X,Y)$. Podemos componer T con cualquier funcional $y^* \in Y^*$ y es obvio que $y^* \circ T \in X^*$. Obtenemos así una aplicación $y^* \longmapsto y^* \circ T$, de Y^* en X^*, que vamos a denotar por $\mathbf{T}^*$. Obsérvese que la definición de T^* se resume de la siguiente forma:

$$T^* y^*(x) = y^*\left(Tx\right) \quad (x \in X, y^* \in Y^*).$$

Es claro que T^* es lineal, además,

$$\left|T^* y^*(x)\right| = \left|y^*\left(Tx\right)\right| \leq \|y^*\| \left\|Tx\right\| \leq \left\|T\right\| \|y^*\| \|x\|,$$

de donde se deduce $\left\|T^* y^*\right\| \leq \left\|T\right\| \|y^*\|$ para todo $y^* \in Y^*$. Así pues, T^* es continuo, es decir, $T^* \in L(Y^*, X^*)$ y obtenemos, además, $\left\|T^*\right\| \leq \left\|T\right\|$.
El operador T^* recibe el nombre de **operador traspuesto, operador adjunto u operador dual** de T.

Proposición 3.1. *Para todo $T \in L(X,Y)$, su operador adjunto, $T^* \in L(Y^*,X^*)$, verifica*

$$\left\|T^*\right\| = \left\|T\right\|.$$

Demostración. Primero veremos que si X es un espacio normado, la norma de cualquier $x \in X$ queda determinada por el espacio dual X^*, de la siguiente manera:

$$\|x\| = \sup\left\{|x^*(x)|;\, x^* \in X^*, \|x^*\| \le 1\right\}. \tag{3.1}$$

Dados $x \in X$, $x^* \in X^*$, con $\|x^*\| \le 1$ es claro que se tiene $|x^*(x)| \le \|x^*\|\|x\| \le \|x\|$, por lo que

$$\sup\left\{|x^*(x)|;\, x^* \in X^*, \|x^*\| \le 1\right\} \le \|x\|.$$

Por otro lado, es obvio que si $x = 0$, se da la igualdad en (3.1), por tanto, podemos suponer $x \neq 0$. Sea pues $x \in X$, $x \neq 0$ y consideremos el subespacio vectorial de X engendrado por x, $\langle x \rangle$. Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} f : \langle x \rangle &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \lambda x \quad &\quad \lambda\|x\| \qquad (\lambda \in \mathbb{K}). \end{aligned}$$

Es claro que esta aplicación es lineal y además $|f(\lambda x)| = \|\lambda x\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, de donde se deduce $\|f\| = 1$, con lo que f es un funcional lineal continuo que verifica $f(x) = \|x\|$. Por el teorema 2.1 de extensión equinórmica, existe $x^* \in X^*$ que extiende a f y que cumple $\|f\| = \|x^*\|$. Por tanto, $\|x^*\| = 1$ y $|x^*(x)| = \|x\|$. De aquí se deduce

$$\|x\| \le \sup\left\{|x^*(x)|;\, x^* \in X^*, \|x^*\| \le 1\right\},$$

con lo que (3.1) queda probado.
Pasamos ahora a demostrar el enunciado de la proposición:

$$\begin{aligned}
\|T^*\| &= \sup\left\{\|T^*y^*\|;\, y^* \in Y^*, \|y^*\| \le 1\right\} = \sup\left\{\sup\left\{\left|T^*y^*(x)\right|;\, x \in X, \|x\| \le 1\right\};\, y^* \in Y^*, \|y^*\| \le 1\right\} \\
&= \sup\left\{\sup\left\{\left|y^*(Tx)\right|;\, x \in X, \|x\| \le 1\right\};\, y^* \in Y^*, \|y^*\| \le 1\right\} \\
&= \sup\left\{\left|y^*(Tx)\right|;\, y^* \in Y^*, \|y^*\| \le 1,\, x \in X, \|x\| \le 1\right\} \\
&= \sup\left\{\sup\left\{\left|y^*(Tx)\right|;\, y^* \in Y^*, \|y^*\| \le 1\right\};\, x \in X, \|x\| \le 1\right\} \\
&= \sup\left\{\|Tx\|,\, x \in X, \|x\| \le 1\right\} = \|T\|,
\end{aligned}$$

donde, en la penúltima igualdad, se ha usado (3.1). Esto finaliza la demostración. □

Proposición 3.2. *Sean X,Y y Z, espacios normados, $T \in L(X,Y)$ y $S \in L(Y,Z)$. Entonces:*

$$(S \circ T)^* = T^* \circ S^*.$$

Demostración. Se deduce directamente de la definición del operador transpuesto. □

Proposición 3.3. *Si T es un isomorfismo topológico de X sobre Y, entonces T^* es un isomorfismo topológico de Y^* sobre X^*. Si, además, T es isomorfismo isométrico, entonces T^* también.*

Demostración. Supongamos que T es un isomorfismo topológico de X sobre Y, es decir T es biyectivo y $T^{-1} \in L(Y,X)$. Denotando por Id_E al operador identidad en cualquier espacio normado E, tenemos claramente,

$$Id_{X^*} = \left(Id_X\right)^* = \left(T^{-1} \circ T\right)^* = T^* \circ \left(T^{-1}\right)^*,$$

y de manera análoga $Id_{Y^*} = \left(T^{-1}\right)^* \circ T^*$, con lo que hemos probado que T^* es biyectivo y $\left(T^*\right)^{-1} = \left(T^{-1}\right)^*$ es continuo, luego T^* es un isomorfismo topológico de Y^* sobre X^*. Si T es de hecho un isomorfismo isométrico, de la igualdad $\|T\| = \|T^{-1}\| = 1$ deducimos que $\|T^*\| = \|\left(T^*\right)^{-1}\| = 1$, es decir, T^* también es un isomorfismo isométrico. $\square$

3.2. Reflexividad de l_p, $(1 < p < \infty)$

Ahora podemos justificar rigurosamente la reflexividad de los espacios l_p, $(1 < p < \infty)$. Conocemos explícitamente un isomorfismo isométrico $S : l_{p^*} \longrightarrow l_p^*$; concretamente:

$$Sy(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \quad (x \in l_p, y \in l_{p^*}).$$

Por la proposición 3.3 sabemos que $S^* : l_p^{**} \longrightarrow (l_{p^*})^*$ es también isomorfismo isométrico. Pero tenemos también un isomorfismo isométrico $T : l_p \longrightarrow (l_{p^*})^*$, cuya definición es formalmente la misma que la de S, solo que intercambiando p con p^*:

$$Tx(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \quad (y \in l_{p^*}, x \in l_p).$$

Entonces,la composición $\left(S^*\right)^{-1} \circ T$ es un isomorfismo isométrico de l_p sobre l_p^{**} y vamos a ver que es precisamente la inyección canónica J de l_p en su bidual, o, equivalentemente, que $S^* \circ J = T$. Veámoslo:

Sean $x \in l_p$, $y \in l_{p^*}$, entonces tenemos:

$$\left(S^* \circ J\right)(x)(y) = Jx\left(Sy\right) = Sy(x) = Tx(y).$$

Así pues, hemos probado que J es sobreyectiva, es decir, que *para $1 < p < \infty$, l_p es un espacio de Banach reflexivo.*

3.3. No reflexividad de C_0

En este caso también disponemos de un isomorfismo isométrico $S : l_1 \longrightarrow C_0^*$, con la misma definición que antes:

$$Sy(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \quad (x \in C_0, y \in l_1).$$

Así que S^*, por la proposición 3.3, es un isomorfismo isométrico de C_0^{**} sobre l_1^*. Pero, he aquí la novedad, l_1^* no se identifica con C_0 sino con l_∞: tenemos un isomorfismo isométrico $T: l_\infty \longrightarrow l_1^*$, dado por:

$$Tz(y) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n z_n \quad (y \in l_1, z \in l_\infty).$$

Si llamamos I a la inclusión natural de C_0 en l_∞ y J a la inyección canónica de C_0 en su bidual, lo que ahora tenemos, para cualesquiera $x \in C_0$, $y \in l_1$, es:

$$\big(S^* \circ J\big)(x)(y) = Jx\big(Sy\big) = Sy(x) = T\big(Ix\big)(y),$$

es decir, $S^* \circ J = T \circ I$, o equivalentemente, $J = \big(S^*\big)^{-1} \circ T \circ I$. La interpretación de esta última igualdad es clara, cuando identificamos C_0^{**} con l_∞ mediante el isomorfismo isométrico $\big(S^*\big)^{-1} \circ T$ la inyección canónica J se convierte en la inclusión natural I. Naturalmente J no puede ser sobreyectiva, porque I no lo es. Así pues, C_0 *no es reflexivo.*

3.4. No reflexividad de l_1 y l_∞

Vamos a estudiar ahora la relación entre la reflexividad de un espacio de Banach X y la del dual X^*.

Definición 3.2. Sea X un espacio normado y M un subconjunto de X, se llama **anulador** de M al conjunto:

$$M^\circ = \Big\{ f \in X^* : f\big(M\big) = \{0\} \Big\}.$$

Proposición 3.4. *Sea T un operador lineal entre los espacios normados X e Y. Se verifica*

$$ker\, T^* = T\big(X\big)^\circ.$$

Demostración. $y^* \in ker\, T^* \Longleftrightarrow T^* y^* = 0 \Longleftrightarrow T^* y^*(x) = 0,\ \forall x \in X \Longleftrightarrow y^*\big(Tx\big) = 0,\ \forall x \in X$
$\Longleftrightarrow y^* \in T\big(X\big)^\circ$. □

Proposición 3.5. *Sea X un espacio normado y M un subespacio suyo. Entonces M es denso en X si, y solamente si, $M^\circ = \{0\}$.*

Demostración. Supongamos que M es denso en X y sea $f \in M^\circ$. Entonces $f(x) = 0$, $\forall x \in M$ y por continuidad de f y densidad de M se deduce $f(x) = 0$, $\forall x \in X$, con lo que $f = 0$. Así pues, $M^\circ = \{0\}$.

Recíprocamente, supongamos que M no es denso en X, entonces existe $x_0 \in X \setminus \overline{M}$ y podemos aplicar el teorema 2.2 a $\overline{M}$ y concluir que existe un funcional $x^* \in X^*$ que se anula en $\overline{M}$ (y, por tanto, en M) y que verifica $x^*(x_0) = 1$. Así pues, $x^* \in M^\circ$ y $x^* \neq 0$, con lo que $M^\circ \neq \{0\}$. □

Sea X un espacio de Banach. Recordemos que una proyección $P: X \longrightarrow X$ es una aplicación lineal que verifica $P^2 = P$.

Definición 3.3. Consideremos la inyección canónica $J_X : X \longrightarrow X^{**}$ y su operador traspuesto $J_X^* : X^{***} \longrightarrow X^*$. Por otra parte tenemos J_{X^*}, la inyección canónica de X^* en su bidual. Es fácil comprobar que se tiene

$$J_X^* \circ J_{X^*} = Id_{X^*}.$$

Si ahora hacemos la composición en orden contrario y definimos

$$P_X = J_{X^*} \circ J_X^*,$$

es fácil ver que P_X es una proyección lineal en X^{***} que se conoce como la **proyección de Dixmier** determinada por el espacio normado X. Claramente, la imagen de P_X es $J_{X^*}(X^*)$ y su núcleo es $ker\, J_X^*$, que por la proposición 3.4 sabemos que es igual a $J_X(X)^\circ$, el anulador de X cuando le vemos como subespacio de X^{**}. Recordemos que si $P : X \longrightarrow X$ es una proyección continua, X puede descomponerse en suma directa de la siguiente manera: $X \equiv P(X) \oplus ker\, P$ (se puede consultar esto en el libro de referencia [7]). Es claro que la proyección de Dixmier es continua. Tenemos pues la siguiente descomposición de X^{***} en suma directa:

$$X^{***} \equiv J_{X^*}(X^*) \oplus J_X(X)^\circ, \tag{3.2}$$

válida en cualquier espacio normado X.

Proposición 3.6. *Un espacio de Banach X es reflexivo si, y sólo si, X^* es reflexivo.*

Demostración. Si X es reflexivo, tenemos $J_X(X) = X^{**}$, por lo que $J_X(X)^\circ = \{0\}$, y deducimos de la descomposición (3.2) que $J_{X^*}(X^*) = X^{***}$, es decir, X^* es reflexivo.

Recíprocamente, si X^* es reflexivo, tenemos que $J_{X^*}(X^*) = X^{***}$ y, por tanto, de la descomposición (3.2) obtenemos que $J_X(X)^\circ = \{0\}$. Ahora, por la proposición 3.5 tenemos que $J_X(X)$ es denso en X^{**}, pero X es un espacio de Banach, así que $J_X(X)$ también debe serlo y, por tanto, es cerrado en X^{**}. Concluimos finalmente que $J_X(X) = X^{**}$, es decir, X es reflexivo. □

Como $C_0^* \equiv l_1$ y C_0 no es reflexivo, concluimos por la proposición anterior que l_1 *no es reflexivo.* De la misma manera, como $l_1^* \equiv l_\infty$, obtenemos que l_∞ *no es reflexivo.*

CAPÍTULO 4

TOPOLOGÍAS DÉBIL Y DÉBIL-ESTRELLA. OPERADORES COMPACTOS

A lo largo de este capítulo introduciremos los conceptos de topología débil y topología débil-estrella en un espacio normado, definiremos el concepto de operador compacto y veremos algunos resultados sin demostración (ésta puede consultarse en los libros de referencia [8] y [9]). La motivación de este capítulo es recoger definiciones y resultados que usaremos posteriormente.

4.1. Topologías débil ($\sigma(X,X^*)$) y débil-estrella ($\sigma(X^*,X)$)

La topología de la norma es muy restrictiva, así que es necesario introducir en los espacios normados otro tipo de topologías. Aquí veremos las topologías débil y débil-estrella. Además veremos algunos resultados que usaremos en el siguiente capítulo, la demostración de estos se puede encontrar en el libro de referencia [9].

Definición 4.1. Sea X un espacio normado y sea $x \in X$, se puede demostrar (ver libro de referencia [9]) que los conjuntos de la forma

$$V(0,x_1^*,x_2^*,\dots,x_k^*,\varepsilon) = \left\{y \in X; |x_i^*(y)| < \varepsilon \text{ para } 1 \le i \le k\right\},$$

donde $x_1^*,x_2^*,\dots,x_k^* \in X^*$ y $\varepsilon > 0$, son una base de entornos del origen que definen una topología, la cual denominaremos **topología débil** y denotaremos por $\sigma(X,X^*)$. Así pues, un **entorno de x en la topología débil** es un subconjunto de X de la forma:

$$\begin{aligned} V(x,x_1^*,x_2^*,\dots,x_k^*,\varepsilon) &= x + V(0,x_1^*,x_2^*,\dots,x_k^*,\varepsilon) \\ &= x + \left\{y \in X; |x_i^*(y)| < \varepsilon \text{ para } 1 \le i \le k\right\}, \end{aligned}$$

donde $x_1^*,x_2^*,\dots,x_k^* \in X^*$ y $\varepsilon > 0$.

A partir de esta noción que acabamos de introducir, se deduce que:

- Un conjunto $A \subset X$ es **acotado en la topología débil** si para todo $x^* \in X^*$ se verifica que $\sup\left\{|x^*(x)|;\, x \in A\right\} < \infty$.

- Una sucesión $\{x_n\} \subset X$ es **débilmente convergente** (convergente en la topología débil) a $x \in X$ si se verifica que para todo $x^* \in X^*$

$$\lim_{n\to\infty} x^*(x_n) = x^*(x).$$

Análogamente, si el espacio se trata de un dual X^*, se puede demostrar (ver libro de referencia [9]) que los conjuntos de la forma

$$V(0,x_1,x_2,...,x_k,\varepsilon) = \left\{y^* \in X^*;\, |y^*(x_i)| < \varepsilon \text{ para } 1 \le i \le k\right\},$$

donde $x_1,x_2,...,x_k \in X$ y $\varepsilon > 0$, son una base de entornos del origen que definen una topología, que denominaremos **topología débil-estrella** y denotaremos por $\sigma(X^*,X)$. Con ello, **los entornos de un punto x* en la topología débil-estrella** son de la forma

$$\begin{aligned} V(x^*,x_1,x_2,...,x_k,\varepsilon) &= x^* + V(0,x_1,x_2,...,x_k,\varepsilon) \\ &= x^* + \left\{y^* \in X^*;\, |y^*(x_i)| < \varepsilon \text{ para } 1 \le i \le k\right\}, \end{aligned}$$

donde $x_1,x_2,...,x_k \in X$ y $\varepsilon > 0$.

De aquí se deduce:

- Un conjunto $A \subset X^*$ es **acotado en la topología débil-estrella** si para todo $x \in X$ se verifica que $\sup\left\{|x^*(x)|;\, x^* \in A\right\} < \infty$.

- Una sucesión $\{x_n^*\} \subset X^*$ **converge** a $x^* \in X^*$ **en la topología débil estrella** si se verifica que para todo $x \in X$

$$\lim_{n\to\infty} x_n^*(x) = x^*(x).$$

En lo que sigue, B_X será la bola unidad cerrada en el espacio normado X, es decir, el conjunto:

$$B_X = \left\{x \in X : \|x\| \le 1\right\}.$$

Resultado 4.1. *Si A es un subconjunto convexo y cerrado del espacio normado X, entonces A es cerrado en la topología débil.*

Corolario 4.1. *Por el resultado anterior tanto la bola cerrada, B_X, como cualquier subespacio cerrado de X, son cerrados en la topología débil.*

Resultado 4.2. *Un espacio de Banach X es reflexivo si y solo si B_X es débilmente compacta.*

4.2. Operadores compactos

Recordemos que un conjunto $A \subset X$ es relativamente compacto si su adherencia $\overline{A}$ es un conjunto compacto.

Definición 4.2. Sean X, Y espacios normados. Se dice que un operador $T : X \to Y$ es **compacto** si verifica que el conjunto $T(B_X) \subset Y$ es relativamente compacto. Denotaremos por **K(X, Y)** a la familia de todos los operadores compactos definidos de X en Y.

A continuación veremos una serie de resultados relacionados con la compacidad de un operador T. La demostración de estos resultados puede consultarse en el libro de referencia [8].

Resultado 4.3. *Un operador $T : X \to Y$ es compacto si se verifica alguna de las siguientes tres propiedades, las cuales son equivalentes entre sí:*
• *$T(B_X) \subset Y$ es relativamente compacto.*
• *La imagen de cualquier conjunto acotado en X es relativamente compacto.*
• *Para toda sucesión acotada $\{x_n\} \subset X$ se verifica que la sucesión $\{T(x_n)\} \subset Y$ tiene una subsucesión convergente.*

Resultado 4.4. *Dado un operador $T \in L(X,Y)$ se verifica que T es compacto si y solo si el traspuesto, $T^* \in L(Y^*, X^*)$, es compacto.*

Definición 4.3. Se dice que un operador $T \in L(X,Y)$ es **incondicionalmente convergente** si transforma sucesiones débilmente convergentes en sucesiones convergentes en norma.

Resultado 4.5. *Todo operador compacto es incondicionalmente convergente.*

Resultado 4.6. *Para todo $T \in K(X,X)$ y para todo escalar $\lambda \neq 0$ se verifica que el operador $(\lambda I - T)$ tiene rango cerrado.*

CAPÍTULO 5

BASES DE SCHAUDER Y SUCESIONES BÁSICAS EN ESPACIOS DE SUCESIONES

Éste es un importante y extenso capítulo en el que ampliaremos el concepto de base de Schauder visto anteriormente, introduciremos otros y veremos con detalle nuevos resultados. Posteriormente, demostraremos uno de los resultados fundamentales de este proyecto: el teorema de Pitt, y analizaremos sus consecuencias. Más adelante, demostraremos otro de los resultados principales y es que los espacios C_0 y l_p, $1 \leq p < \infty$ son primos. Por último, veremos con detalle otro importante resultado: el espacio l_1 posee la propiedad de Schur.

5.1. Bases de Schauder y sucesiones básicas en espacios de Banach

Como hemos comentado, en esta sección vamos a ampliar la noción de base de Schauder con nuevos conceptos como el de funcionales biortogonales y proyecciones naturales asociados a una base de Schauder o el de sucesión básica.

Además, veremos con detalle una serie de resultados. Veremos, por ejemplo, que se pueden hacer algunos tipos de alteraciones a sucesiones básicas y que éstas sigan siendo básicas, o que se pueden obtener sucesiones básicas a partir de sucesiones a las que se le piden condiciones poco restrictivas.

Comencemos con la siguiente definición:

Definición 5.1. Sea $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder en un espacio de Banach X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un funcional $e_n^* \in X^*$ que verifica

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij},$$

siendo $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Además, dado $x \in X$, es claro que se cumple

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} e_n^*(x) e_n.$$

A estos funcionales se les denomina **funcionales biortogonales asociados a la base de Schauder $\{\mathbf{e_n}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$.**

Debemos ahora remarcar algo, en espacios de Banach los conceptos de base y base de Schauder coinciden porque siempre existen estos funcionales biortogonales (son continuos, se puede consultar una demostración de este hecho en el libro de referencia [9]). La definición 1.4 que vimos en el capítulo 1, realmente es la definición de base, aunque tratándose de espacios de Banach, esa definición es correcta. Una base será base de Schauder si, y solamente si, existen estos funcionales biortogonales. Por ejemplo, en los espacios localmente convexos que no son espacios de Banach, una base puede no ser base de Schauder. Pero no debemos preocuparnos por esto, ya que nosotros trabajaremos únicamente con espacios de Banach.

Definición 5.2. Sea $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder en un espacio de Banach X con funcionales biortogonales $\{e_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$. Consideremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, la siguiente familia de aplicaciones:

$$\begin{aligned} S_n : &X \longrightarrow X \\ &x \longmapsto \sum_{k=1}^{n} e_k^*(x) e_k. \end{aligned}$$

Además, definimos $S_0(x) = 0$, $\forall x \in X$.
Estas aplicaciones son obviamente lineales y como los funcionales biortogonales son continuos, estas aplicaciones también lo son. Además es fácil ver que son proyecciones. Por ello, esta familia de operadores recibe el nombre de **sucesión de proyecciones naturales.** Como es obvio, para cada $x \in X$, la sucesión $\{S_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x.

Es claro que para cada $x \in X$ se verifica

$$\sup_n \|S_n(x)\| < \infty,$$

ya que la sucesión $\{S_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x. Por tanto, por el principio de acotación uniforme (ver libro de referencia [7]), se tiene

$$\sup_n \|S_n\| < \infty.$$

Definición 5.3. Al número $K_b = \sup_n \|S_n\|$ se le denomina **constante de la base $\{\mathbf{e_n}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$.**

Notemos que si $n > m$, entonces $\|S_n(e_m)\| = \|e_m\| \leq K_b \|e_m\|$. Por tanto, siempre se cumple $K_b \geq 1$.

Observemos que dada una base de Schauder la familia de proyecciones naturales cumple las siguientes condiciones:

• $dim\Big(S_n(X)\Big) = n$.
• $S_n \circ S_m = S_m \circ S_n = S_{\text{mín}\{m,n\}}$.
• Para todo $x \in X$, $S_n(x)$ converge a x.

Proposición 5.1. *Supongamos que existe una familia $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de operadores acotados en un espacio de Banach X tales que cumplen las siguientes condiciones:*
• $dim\Big(S_n(X)\Big) = n$.
• $S_n \circ S_m = S_m \circ S_n = S_{\text{mín}\{m,n\}}$.
• *Para todo $x \in X$, $S_n(x)$ converge a x.*
Entonces podemos encontrar una sucesión de vectores $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, elegida inductivamente como; $e_1 \in S_1(X)$, $e_2 \in S_2(X)\bigcap ker\left(S_1\right)$,..., $e_n \in S_n(X)\bigcap ker\left(S_{n-1}\right)$,... Esta sucesión de vectores así tomada es una base de Schauder del espacio de Banach X y, de hecho, la familia $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la familia de proyecciones naturales asociada.

Demostración. Tomamos $0 \neq e_1 \in S_1(X)$ y definimos $e_1^* : X \longrightarrow \mathbb{K}$ mediante $e_1^*(x)e_1 = S_1(x)$. A continuación, tomamos $0 \neq e_2 \in S_2(X)\bigcap ker\left(S_1\right)$ y definimos $e_2^* : X \longrightarrow \mathbb{K}$ mediante $e_2^*(x)e_2 = S_2(x) - S_1(x)$. Esto nos da un método inductivo para obtener la base y sus funcionales biortogonales: para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos $0 \neq e_n \in S_n(X)\bigcap ker\left(S_{n-1}\right)$ y definimos $e_n^* : X \longrightarrow \mathbb{K}$ mediante $e_n^*(x)e_n = S_n(x) - S_{n-1}(x)$. Además,

$$\left|e_n^*(x)\right| = \left\|S_n(x) - S_{n-1}(x)\right\| \left\|e_n\right\|^{-1} \leq 2 \sup_n \left\|S_n\right\| \left\|e_n\right\|^{-1} \left\|x\right\|,$$

por lo que $e_n^* \in X^*$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por otra parte, es inmediato ver que $e_k^*(e_j) = \delta_{kj}$, para $k, j \in \mathbb{N}$. Y si, para todo $x \in X$, ponemos $S_0(x) = 0$, podemos escribir

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(S_k(x) - S_{k-1}(x)\right) = \sum_{k=1}^{n} e_k^* e_k,$$

que, por hipótesis, converge a x para cada $x \in X$. Así pues, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder de X y $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es su familia de proyecciones naturales asociada. □

En lo que sigue usaremos la siguiente notación: si $A \subset X$ es un subconjunto de X, escribimos $[A]$, para la clausura de su envoltura lineal, es decir, para $\overline{\langle A \rangle}$.

Definición 5.4. Una sucesión de elementos $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach X se denomina **sucesión básica** si es base de Schauder para $[e_n]_{n\in\mathbb{N}}$. Como puede observarse, esta definición no implica que $X = [e_n]_{n\in\mathbb{N}}$. Esto solo ocurrirá si la sucesión dada es base de Schauder de X.

Proposición 5.2 (Condición de Grunblum). *Una sucesión $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de elementos distintos de cero de un espacio de Banach X es una sucesión básica si, y sólo si, existe una constante positiva K tal que:*

$$\left\|\sum_{k=1}^{m} a_k e_k\right\| \leq K \left\|\sum_{k=1}^{n} a_k e_k\right\| \tag{5.1}$$

para cualquier sucesión de escalares $\{a_k\}$ *y cualesquiera* $m,n \in \mathbb{N}$ *con* $m \leq n$. *Además, la constante de base es no superior a* K.

Demostración. Supongamos que la sucesión dada es básica y sean $S_m : [e_k]_{k\in\mathbb{N}} \longrightarrow [e_k]_{k\in\mathbb{N}}$, $m = 1,2,...$, la familia de proyecciones naturales asociada. Si $m \leq n$ tenemos

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} a_k e_k \right\| = \left\| S_m\left(\sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right) \right\| \leq \sup_m \|S_m\| \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|,$$

por lo que se cumple (5.1) con $K = \sup_m \|S_m\|$.
Recíprocamente, (5.1) implica que los vectores son linealmente independientes. Esto permite definir sin ambigüedad el operador de rango finito $s_m : \langle e_k \rangle_{k\in\mathbb{N}} \longrightarrow [e_k]_{k=1}^{m}$ por

$$s_m\left(\sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right) = \sum_{k=1}^{\text{mín}\{m,n\}} a_k e_k, \quad m,n \in \mathbb{N}.$$

Por densidad, podemos extender s_m a $S_m : [e_k]_{k\in\mathbb{N}} \longrightarrow [e_k]_{k=1}^{m}$ con $\|S_m\| = \|s_m\| \leq K$.
Obsérvese que tenemos, para cada $x \in \langle e_k \rangle_{k\in\mathbb{N}}$,

$$(S_n \circ S_m)(x) = (S_m \circ S_n)(x) = S_{\text{mín}\{m,n\}}(x),$$

que por densidad se cumplirá para todo $x \in [e_k]_{k\in\mathbb{N}}$.
Para cada $x \in [e_k]_{k\in\mathbb{N}}$ la sucesión $\{S_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x, ya que, por el teorema de Banach-Steinhaus (se puede consultar el citado teorema en el libro de referencia [9]), el conjunto $\left\{x \in [e_k]_{k\in\mathbb{N}} : S_m(x) \longrightarrow x\right\}$ es cerrado y contiene a $\langle e_k \rangle_{k\in\mathbb{N}}$, que es denso en $[e_k]_{k\in\mathbb{N}}$. Finalmente, por la proposición 5.1, $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es base de Schauder para $[e_k]_{k\in\mathbb{N}}$ con sucesión de proyecciones naturales $\{S_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Además, si se verifica para $m \leq n$ y $x \in [e_k]_{k\in\mathbb{N}}$ que $\|S_m(x)\| \leq K\|S_n(x)\|$, tomando límite para $n \to \infty$ obtenemos $\|S_m(x)\| \leq K\|x\|$, de donde se deduce $\|S_m\| \leq K$. De aquí se concluye que la constante de base es no superior a K. □

Obsérvese que dada una sucesión $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach X, la condición de Grunblum junto con $e_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y $X = [e_n]_{n\in\mathbb{N}}$, forman las tres condiciones necesarias y suficientes para que la sucesión sea una base de Schauder de X.

Definición 5.5. Sea $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder de un espacio de Banach X. Supongamos que $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de enteros estríctamente creciente, con $\rho_0 = 0$ y sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de escalares. Entonces una sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la forma

$$u_n = \sum_{j=\rho_{n-1}+1}^{\rho_n} a_j e_j$$

es llamada **sucesión básica en bloque** de $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Además, si para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple $\|u_n\| = 1$, diremos que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una **sucesión básica en bloque normalizada** de $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Lema 5.1. *Supongamos que $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder en un espacio de Banach X con constante de base K_b, y supongamos que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica en bloque de $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, entonces, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica con constante de base menor o igual que K_b.*

Demostración. Tendremos, para cualquier sucesión de escalares $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, y cualquier $m\in\mathbb{N}$:

$$\left\|\sum_{k=1}^{m} b_k u_k\right\| = \left\|\sum_{k=1}^{m} b_k \sum_{j=\rho_{k-1}+1}^{\rho_k} a_j e_j\right\| = \left\|\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=\rho_{k-1}+1}^{\rho_k} b_k a_j e_j\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{\rho_m} c_j e_j\right\|,$$

donde $c_j = b_k a_j$ si $\rho_{k-1}+1 \le j \le \rho_k$ y $c_j = 0$ en cualquier otro caso. Ahora, si $n\in\mathbb{N}$ con $n \ge m$ y teniendo en cuenta que $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder de X con constante de base K_b, tenemos:

$$\left\|\sum_{j=1}^{\rho_m} c_j e_j\right\| = \left\|S_{\rho_m}\left(\sum_{j=1}^{\rho_n} c_j e_j\right)\right\| \le K_b \left\|\sum_{j=1}^{\rho_n} c_j e_j\right\| = K_b \left\|\sum_{k=1}^{n} b_k u_k\right\|,$$

con lo que $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ satisface la condición de Grunblum (proposición 5.2) y es, por tanto, una sucesión básica con constate de base menor o igual que K_b. □

Definición 5.6. Diremos que dos bases de Schauder (o sucesiones básicas) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en los respectivos espacios de Banach X e Y son **equivalentes** si para cualquier sucesión de escalares $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge si, y sólo si, lo hace la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$.

Teorema 5.1. *Dos bases de Schauder (o sucesiones básicas) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en los respectivos espacios de Banach X e Y son equivalentes si, y sólo si, existe un isomorfismo topológico $T : [x_n]_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow [y_n]_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $Tx_n = y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Es obvio que las sucesiones o bases son equivalentes si existe tal isomorfismo topológico.
Recíprocamente, si son equivalentes, definimos $T : [x_n]_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow [y_n]_{n\in\mathbb{N}}$ como

$$T\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n.$$

Con esta definición T es claramente biyectivo. Probemos que T es continuo utilizando el teorema de la gráfica cerrada (ver libro de referencia [7]). Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a un elemento u en $[x_n]_{n\in\mathbb{N}}$ y supongamos que Tu_n converge a un elemento v en $[y_n]_{n\in\mathbb{N}}$. Podemos escribir:

$$u_j = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(u_j) x_n,\ \forall j \in \mathbb{N}; \quad u = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(u) x_n.$$
$$Tu_j = \sum_{n=1}^{\infty} y_n^*(Tu_j) y_n,\ \forall j \in \mathbb{N}; \quad v = \sum_{n=1}^{\infty} y_n^*(v) y_n.$$

Por la continuidad de los funcionales biortogonales y la definición de T, es claro que si $j \longrightarrow \infty$, entonces $x_n^*(u_j) \longrightarrow x_n^*(u)$ e $y_n^*(Tu_j) = x_n^*(u_j) \longrightarrow y_n^*(v)$, con lo que, por la unicidad del límite, debe ser $x_n^*(u) = y_n^*(v)$. Así pues, $Tu = v$ y T es, por tanto, continua. De hecho, como consecuencia del teorema de la aplicación abierta (ver libro de referencia [7]), T es un isomorfismo topológico. □

Corolario 5.1. *Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dos bases (o sucesiones básicas) en los respectivos espacios de Banach X e Y. Entonces son equivalentes, si, y solo si, existe una constante $C>0$ tal que para cualquier sucesión de escalares $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se tiene*

$$C^{-1}\left\|\sum_{i=1}^{\infty}a_iy_i\right\|\leq\left\|\sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i\right\|\leq C\left\|\sum_{i=1}^{\infty}a_iy_i\right\|.$$

Demostración. Si son equivalentes, por el teorema anterior existe un isomorfismo topológico $T:[x_n]_{n\in\mathbb{N}}\longrightarrow[y_n]_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $Tx_n=y_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$, y es fácil probar que se cumple

$$\frac{1}{\|T\|}\left\|\sum_{i=1}^{\infty}a_iy_i\right\|\leq\left\|\sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i\right\|\leq\|T^{-1}\|\left\|\sum_{i=1}^{\infty}a_iy_i\right\|.$$

Entonces, basta tomar $C=\max\{\|T\|,\|T^{-1}\|\}$.

Recíprocamete, si existe tal C, definimos $T:[x_n]_{n\in\mathbb{N}}\longrightarrow[y_n]_{n\in\mathbb{N}}$ como

$$T\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_ny_n.$$

Con esta definición T es claramente biyectivo, además

$$\left\|T\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n\right)\right\|=\left\|\sum_{n=1}^{\infty}a_ny_n\right\|\leq C\left\|\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n\right\|,$$

por lo que T es continua. De hecho, como consecuencia del teorema de la aplicación abierta (ver libro de referencia [7]), T es un isomorfismo topológico. Por el teorema anterior, las sucesiones son equivalentes. □

Definición 5.7. Si en el corolario anterior $C=1$, se dice que las bases (o sucesiones básicas) son **isométricamente equivalentes**. No es difícil ver que, en este caso, existe un isomorfismo isométrico $T:[x_n]_{n\in\mathbb{N}}\longrightarrow[y_n]_{n\in\mathbb{N}}$ verificando $Tx_n=y_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Y si existe tal isomorfismo isométrico, entonces $C=1$. Por lo que también podemos decir que las bases (o sucesiones básicas) son isométricamente equivalentes si existe tal isomorfismo isométrico.

Recordemos que un subespacio Y de X se dice complementado si existe una proyección $P\in L(X,X)$ tal que $P(X)=Y$.

Definición 5.8. Una sucesión básica $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach X se dice **complementada** si el subespacio $[x_n]_{n\in\mathbb{N}}$ es complementado.

Definición 5.9. Sean X e Y espacios de Banach. Decimos que dos sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset X$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset Y$ son **congruentes con respecto al par (X,Y)** si existe un isomorfismo topológico $T:X\longrightarrow Y$ tal que $Tx_n=y_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$. En el caso particular en el que $X=Y$, diremos, simplemente, que son **congruentes**.

Es claro que si dos sucesiones son congruentes respecto al par (X,Y) y además son sucesiones básicas (o bases), entonces son equivalentes.

Lema 5.2. *Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son congruentes con respecto al par (X,Y), se cumplen las siguientes propiedades:*

- *$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es base de X si, y sólo si, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ lo es de Y.*
- *La constante de base de $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es a lo sumo $K\|T\|\|T^{-1}\|$, siendo K la constante de base de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y T el isomorfismo topológico que existe por la definición anterior.*

Demostración. Vamos con la primera propiedad. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es base, entonces, dado $y\in Y$, existirá $x=\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in X$ con $Tx=y$, con lo que tendremos

$$y = Tx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n T(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n.$$

En consecuencia $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es base de Y. El recíproco es idéntico pero utilizando T^{-1}.

Vamos ahora con la segunda propiedad. Sean S_n las proyecciones naturales asociadas a $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y P_n las asociadas a $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Si $x\in X$, tendremos

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) T x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) y_n,$$

y como $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es base, concluimos $y_n^*\big(Tx\big) = x_n^*(x)$. Entonces, dado $y\in Y$, existirá $x\in X$ con $T(x)=y$, y tendremos:

$$P_n(y) = \sum_{k=1}^{n} y_k^*(y) y_k = \sum_{k=1}^{n} y_k^*\big(Tx\big) y_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^*(x) T x_k = T\big(S_n(x)\big) = T\big(S_n(T^{-1}y)\big),$$

de donde se deduce $\|P_n\| \le \|S_n\|\|T\|\|T^{-1}\| \le K\|T\|\|T^{-1}\|$. Tomando supremos obtenemos ya lo deseado. □

La demostración del siguiente lema se puede consultar en el libro de referencia [8]:

Lema 5.3. *Sea X un espacio de Banach y A un operador que cumple $\|A - I_X\| < 1$ entonces A es invertible y su inversa viene dada por*

$$A^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (I_X - A)^k,$$

que converge en la norma de $L(X)$, siendo $(I_X - A)^0 = I_X$. De hecho, $\left\|A^{-1}\right\| \le \frac{1}{1-\|I_X - A\|}$.

Teorema 5.2 (Principio de las pequeñas perturbaciones)**.** *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica en un espacio de Banach X con constante de base K y supongamos que existe $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ cumpliendo*

$$2K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|x_n - y_n\|}{\|x_n\|} = \theta < 1,$$

entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son congruentes y se tienen las siguientes propiedades:

- *$\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión básica, con constante de base a lo sumo $K\frac{1+\theta}{1-\theta}$.*
- *Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es base, también lo es $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*
- *Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es complementada, también lo es $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

Demostración. Para cada $n \geq 2$ y cada vector $x \in [x_k]_{k\in\mathbb{N}}$ se tiene que

$$x_n^*(x)x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k^*(x)x_k - \sum_{k=1}^{n-1} x_k^*(x)x_k,$$

donde $\{x_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ son los funcionales biortogonales de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definidos en $[x_n]_{n\in\mathbb{N}}$. Por lo que tomando normas y teniendo en cuenta que K es la constante de base, obtenemos

$$|x_n^*(x)|\|x_n\| \leq 2K\|x\|,$$

de donde se deduce $\|x_n^*\| \leq \frac{2K}{\|x_n\|}$. Si $n = 1$, es claro que se tiene $\|x_1^*(x)x_1\| \leq K\|x\|$, de donde se deduce, análogamente, $\|x_1^*\| \leq \frac{K}{\|x_1\|}$. Estas desigualdades se mantienen si reemplazamos x_n^* por su extensión de Hahn-Banach a X (ver libro de referencia[7]), que llamaremos $\widehat{x}_n^*$.

Para cada $x \in X$ ponemos

$$Tx = x + \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x}_n^*(x)(y_n - x_n).$$

Es claro que T es un operador acotado de X en X que cumple $Tx_n = y_n$. Además, si $\|x\| \leq 1$, tenemos

$$\|Tx\| \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \|\widehat{x}_n^*\|\|y_n - x_n\| \leq 1 + 2K\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|y_n - x_n\|}{\|x_n\|} = 1 + \theta,$$

de donde se tiene $\|T\| \leq 1 + \theta$. Además, por la definición de T, tenemos

$$\|T - I_X\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x}_n^*(x)(y_n - x_n) \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\widehat{x}_n^*\|\|y_n - x_n\| \leq \theta < 1,$$

por lo que, aplicando el lema anterior, concluimos que T es invertible y que $\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\theta}$. Esto demuestra que las sucesiones son congruentes.

Veamos, finalmente, las propiedades. Las dos primeras son consecuencia directa del lema 5.2. En cuanto a la última propiedad, observemos que, si P es una proyección tal que $P(X) = [x_k]_{k\in\mathbb{N}}$, entonces $T \circ P \circ T^{-1}$ es otra proyección con imagen $[y_k]_{k\in\mathbb{N}}$. □

Teorema 5.3 (Principio de selección de Bessaga-Pelczynski)**.** *Sea $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de un espacio de Banach X con constante de base K_b y funcionales biortogonales $\{e_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$. Supongamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X cumpliendo las siguientes condiciones:*
- $\inf_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| > 0$.
- $\lim_{n\to\infty} e_k^*(x_n) = 0$ *para cualquier k.*

Entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que es básica y congruente a alguna sucesión básica en bloque $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Mas aún, para cada $\epsilon > 0$, es posible elegir la sucesión básica en bloque, de modo que, la constante de base de dicha sucesión sea a lo mas $K_b + \epsilon$. De hecho, el mismo resultado se cumple si la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a cero en norma y verifica $\lim_{n\to\infty} x^*(x_n) = 0$ para todo $x^* \in X^*$.

Demostración. Sea $\alpha = \text{ínf}_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| > 0$ y supongamos $0 < \nu < \frac{1}{4}$. Tomamos $n_1 = 1, r_0 = 0$. Como es frecuente, sean $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, las proyecciones naturales asociadas a la base. Como $S_r x_{n_1} \longrightarrow x_{n_1}$, existe r_1 tal que

$$\|x_{n_1} - S_{r_1} x_{n_1}\| < \frac{\nu\alpha}{2K_b}.$$

Por otro lado, por la segunda condición, existirá un $n_2 > n_1$ tal que

$$\|S_{r_1} x_{n_2}\| < \frac{\nu^2\alpha}{2K_b}.$$

Ahora, otra vez por la convergencia de $S_r x_{n_2}$ a x_{n_2}, podemos tomar $r_2 > r_1$ tal que

$$\|x_{n_2} - S_{r_2} x_{n_2}\| < \frac{\nu^2\alpha}{2K_b}.$$

De nuevo, por la segunda condición, existirá $n_3 > n_2$ tal que

$$\|S_{r_2} x_{n_3}\| < \frac{\nu^3\alpha}{2K_b}.$$

Con este método inductivo, podemos tomar una sucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ y una sucesión de enteros $\{r_k\}_{k=0}^{\infty}$, con $r_0 = 0$, que verifican

$$\|S_{r_{k-1}} x_{n_k}\| < \frac{\nu^k\alpha}{2K_b}, \quad \|x_{n_k} - S_{r_k} x_{n_k}\| < \frac{\nu^k\alpha}{2K_b}.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea

$$y_k = S_{r_k} x_{n_k} - S_{r_{k-1}} x_{n_k} = \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} e_j^*(x_{n_k}) e_j.$$

La sucesión $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica en bloque de $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Por tanto, por el lema 5.1, es una sucesión básica con constante de base no superior a K_b. Además, para cada k

$$\|y_k - x_{n_k}\| = \|S_{r_k} x_{n_k} - x_{n_k} - S_{r_{k-1}} x_{n_k}\| \le \|S_{r_k} x_{n_k} - x_{n_k}\| + \|S_{r_{k-1}} x_{n_k}\| < \frac{\nu^k\alpha}{K_b},$$

de donde

$$\|x_{n_k}\| - \|y_k\| \le \|x_{n_k} - y_k\| < \frac{\nu^k\alpha}{K_b} \Longrightarrow \|y_k\| \ge \alpha - \frac{\nu^k\alpha}{K_b} \ge \alpha - \frac{\nu\alpha}{K_b} \ge \alpha(1-\nu).$$

En la última desigualdad hemos tenido en cuenta que $K_b \ge 1$. Apliquemos ahora el principio de las pequeñas perturbaciones (teorema 5.2). Tenemos:

$$2K_b \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|y_k - x_{n_k}\|}{\|y_k\|} \le 2K_b \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{\nu^k\alpha}{K_b}}{\alpha(1-\nu)} = \frac{2}{1-\nu} \sum_{k=1}^{\infty} \nu^k = \frac{2\nu}{(1-\nu)^2}.$$

Obsérvese que podemos hacer tender a cero el cociente anterior sin más que hacer tender ν a cero, por lo que conseguiremos que dicho cociente sea menor que uno. Por tanto, por el principio de las pequeñas perturbaciones, ambas bases son congruentes y, además, podemos elegir la constante de la sucesión básica en bloque tan cerca de K_b como deseemos.

Además, en el caso en el que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a cero en norma y verifica $\lim_{n\to\infty} x^*(x_n) = 0$ para todo $x^* \in X^*$, es claro que podemos escoger una subsucesión de ella que cumplirá las dos propiedades citadas en el enunciado. En este caso, el resultado se sigue al aplicar el teorema a esta subsucesión. □

5.2. Bases de Schauder y sucesiones básicas en espacios de sucesiones

Aplicaremos los conceptos de bases de Schauder y sucesiones básicas vistos hasta ahora a los espacios de sucesiones.

5.2.1. La estructura isomórfica de los espacios C_0 y $l_p, (1 \le p < \infty)$

Veremos aquí que estos espacios tienen una cierta estructura isomórfica. Gracias a esta estructura podremos demostrar el teorema de Pitt, uno de los resultados fundamentales de este proyecto y analizaremos sus consecuencias. Más adelante, gracias también esta estructura isomórfica, podremos demostrar otro de los resultados fundamentales de este proyecto y es que estos espacios son primos. Finalmente, usaremos también dicha estructura para ver que l_1 posee la propiedad de Schur.

Lema 5.4. *Sea $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica en bloque normalizada en C_0 o en $l_p, (1 \le p < \infty)$ de la base canónica $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Entonces $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es isométricamente equivalente a la base canónica $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ del espacio, y el rango de una proyección contractiva es $[y_k]_{k\in\mathbb{N}}$, es decir, $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es complementada.*

Demostración. Veremos el caso de $l_p, (1 \le p < \infty)$, ya que el caso de C_0 es similar pero con pequeñas modificaciones.

Como $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica en bloque normalizada de $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, tendremos

$$y_k = \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} a_j e_j, \quad k \in \mathbb{N},$$

donde $0 = r_0 < r_1 < r_2 < ...$ son enteros y $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de escalares que cumple

$$\|y_k\|^p = \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} |a_j|^p = 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Entonces, dada una sucesión de escalares $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, tenemos

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} b_k y_k \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} b_k a_j e_j \right\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^p \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} |a_j|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^p \right)^{1/p} = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k \right\|.$$

Por el corolario 5.1 las sucesiones básicas son equivalentes con $C = 1$, es decir, son isométricamente equivalentes.

Vamos ahora a la construcción de la proyección contractiva. Aquí supondremos $1 < p < \infty$, los casos para l_1 y C_0 son similares. Para cada k elijamos unos escalares $\{b_j\}_{j=r_{k-1}+1}^{r_k}$ tales que

$$\sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} |b_j|^q = 1 \quad y \quad \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} b_j a_j = 1,$$

donde q es el exponente conjugado de p, es decir, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ponemos

$$y_k^* = \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} b_j e_j^*.$$

Claramente, $\{y_k^*\}_{k\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de funcionales biortogonales asociada a $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y cumple $\|y_k^*\| = \|y_k\| = 1$ (recordemos que el dual de l_p es l_q). Definimos

$$P(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k^*(\xi) y_k, \quad \xi \in l_p.$$

Mostraremos que $\|P(\xi)\| \leq \|\xi\|$ si $\xi \in C_{00}$ y luego observemos que P se puede extender por densidad a una proyección contractiva. Si $\xi = \{\xi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in C_{00}$, aplicando la desigualdad de Hölder (ver libro de referencia [7]), tenemos

$$|y_k^*(\xi)| = \left| \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} b_j \xi_j \right| \leq \left(\sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} |b_j|^q \right)^{1/q} \left(\sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} |\xi_j|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} |\xi_j|^p \right)^{1/p}.$$

Por tanto, usando la equivalencia isométrica entre $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, obtenemos

$$\|P(\xi)\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k^*(\xi)|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=r_{k-1}+1}^{r_k} |\xi_j|^p \right)^{1/p} = \|\xi\|.$$

Así pues, P es una proyección contractiva de l_p en $\left[y_k\right]_{k\in\mathbb{N}}$. □

Remarquemos algo sobre el lema anterior: si $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ no está normalizada, pero satisface

$$0 < a \leq \|y_k\| \leq b < \infty, \quad k \in \mathbb{N},$$

para algunas constantes, a y b (en ese caso se dice que $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ está seminormalizada), entonces podemos aplicar el lema anterior a $\{y_k/\|y_k\|\}_{k\in\mathbb{N}}$, y obtenemos que $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es equivalente a $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ (no isométricamente) e $\left[y_k\right]_{k\in\mathbb{N}}$ esta complementado por una proyección contractiva.

Proposición 5.3. *Supongamos $1 \leq p < \infty$. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión normalizada en l_p (o en C_0) tal que para cada $j \in \mathbb{N}$ se tiene $\lim_{n\to\infty} x_{nj} = 0$. Entonces tiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que es una sucesión básica equivalente a la base canónica $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de l_p (respectivamente C_0) y es complementada en l_p (respectivamente C_0).*

Demostración. La sucesión cumple las propiedades necesarias para aplicar el principio de selección de Bessaga-Pelczynski (teorema 5.3). Por tanto, existen una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y una sucesión básica en bloque $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es básica y equivalente a $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es complementada si, y solo si, $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es complementada. Aplicamos ahora el lema 5.4 a la sucesión $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Observemos que podemos aplicar dicho lema, ya que revisando la demostración del principio de selección de Bessaga-Pelczynski, la sucesión $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ cumple, teniendo en cuenta que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está normalizada, que

$$\frac{3}{4} < 1-\nu \leq \|y_k\| \leq 1+\nu < \frac{5}{4}.$$

Es decir, $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ está seminormalizada. Así pues, esta sucesión es equivalente a $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e $\left[y_k\right]_{k\in\mathbb{N}}$ esta complementado por una proyección contractiva. De modo que la subsucesión básica $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ también será equivalente a $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y será complementada en l_p (respectivamente C_0). □

Proposición 5.4. *Cada subespacio cerrado infinito-dimensional Y de l_p con $1 \leq p < \infty$ (respectivamente C_0) contiene un subespacio cerrado Z isomorfo a l_p (respectivamente C_0) que es complementado en l_p (respectivamente en C_0).*

Demostración. Veamos primero que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in Y$, $y_n \neq 0$ tal que $e_k^*(y_n) = 0$ para $1 \leq k \leq n$. Si no fuese así, existiría un $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $y \in Y$, $y \neq 0$ se tendría $e_k^*(y) \neq 0$ para algún k con $1 \leq k \leq n$. Entonces si $y \in Y$, $y \neq 0$, $S_n(y) = \sum_{k=1}^n e_k^*(y)e_k \neq 0$. Con ello, $S_n|_Y : Y \longrightarrow Y$ sería un operador inyectivo de rango finito, lo cual no es posible pues Y es infinito dimensional. Así pues, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in Y$, $y_n \neq 0$ tal que $e_k^*(y_n) = 0$ para $1 \leq k \leq n$. Entonces, la sucesión $\left\{\frac{y_n}{\|y_n\|}\right\}$ verifica las condiciones de la proposición anterior, con lo que existe un isomorfismo H de $\left[\frac{y_n}{\|y_n\|}\right]$ en l_p (respectivamente C_0) e $\left[\frac{y_n}{\|y_n\|}\right]$ es complementado en l_p (respectivamente C_0). Obsérvese que es necesario que Y sea cerrado para que se tenga $\left[\frac{y_n}{\|y_n\|}\right] \subset Y$. □

5.2.1.1. El teorema de Pitt y sus consecuencias

En este momento casi disponemos de las herramientas necesarias para demostrar el teorema de Pitt. Solamente nos faltan unos pocos resultados, así que vamos a ello. Las siguientes proposiciones serán utilizadas en su demostración:

Proposición 5.5. *Si X es un espacio de Banach reflexivo y M es un subespacio cerrado de X, entonces M es reflexivo.*

Demostración. Sabemos que la topología débil de M es la topología débil de X restringida a M, es decir, $\sigma(M,M^*) = \sigma(X,X^*)|_M$. Además, $B_M = B_X \cap M$ y por el corolario 4.1 B_X y M son cerrados en la topología débil de X, con lo que B_M también lo será pues es intersección de dos cerrados. Ahora, como X es de Banach, por el resultado 4.2, se tiene que B_X es compacta en la topología débil. Como B_M es un cerrado contenido en un compacto, se deduce que es compacta en la topología débil de X y, en consecuencia, en la topología $\sigma(M, M^*)$. Finalmente, usando el resultado 4.2 otra vez, concluimos que M es reflexivo. □

Como consecuencia de la proposición anterior y teniendo en cuenta que cualquier subespacio cerrado de un espacio de Banach es espacio de Banach, obtenemos que, *cualquier subespacio cerrado de l_p para $1 < p < \infty$ es un espacio de Banach reflexivo*. Además, las dos últimas proposiciones nos permiten afirmar que *cualquier subespacio cerrado infinito-dimensional de C_0 o l_1 no es reflexivo.* Veremos esto en el siguiente corolario:

Corolario 5.2. *Si Y es un subespacio cerrado infinito-dimensional de C_0 o l_1, Y no es reflexivo.*

Demostración. Supongamos que Y es reflexivo. Por la proposición 5.4, sabemos que Y contiene un subespacio cerrado Z isomorfo a C_0 o l_1 respectivamente. Por la proposición 5.5, Z sería reflexivo, luego C_0 o l_1 serían reflexivos, lo que es una contradicción. □

Proposición 5.6. *Si X, Y son espacios de normados siendo X de Banach y reflexivo y $T : X \longrightarrow Y$ es un operador incondicionalmente convergente, entonces T es compacto.*

Demostración. Sea $\{x_n\} \subset X$ una sucesión acotada. Entonces existe $\delta > 0$ tal que $x_n \in \delta B_X$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Como X es reflexivo, por el resultado 4.2, el conjunto δB_X es débilmente compacto, por lo que existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ débilmente convergente. Como T es incondicionalmente convergente, la sucesión $\left\{Tx_{n_k}\right\}$ es convergente en norma. Finalmente, por el resultado 4.3, concluimos que T es compacto. □

Como consecuencia de la proposición anterior y del resultado 4.5 obtenemos que si X es de Banach y reflexivo, un operador entre espacios normados que parta de X es compacto si, y solamente si, es incondicionalmente convergente.

Ahora si que disponemos de las herramientas necesarias para demostrar el teorema de Pitt:

Teorema 5.4 (Teorema de Pitt)**.** *Supongamos $1 \leq p < r < \infty$. Si X es un subespacio cerrado de l_r y $T : X \longrightarrow l_p$ es un operador acotado entonces T es compacto.*

Demostración. Como X es cerrado en un espacio de Banach, es de Banach y además por la proposición 5.5 es reflexivo. Por tanto, por la proposición 5.6, basta probar que T es incondicionalmente convergente. Además, como una sucesión $\{y_n\}$ es débilmente convergente a un elemento y, si, y solamente si, la sucesión $\{y_n - y\}$ es débilmente nula (débilmente convergente a 0) y una sucesión $\{z_n\}$ es convergente a un elemento z, si, y solamente si, la sucesión $\{z_n - z\}$ es convergente a 0, basta probar que para cualquier sucesión $\{x_n\}$ débilmente nula en X, la sucesión $\{Tx_n\}$ converge a 0 en l_p. Procederemos por reducción al absurdo.

Supongamos pues, que existe una sucesión $\{x_n\}$ débilmente nula en X tal que la sucesión $\{Tx_n\}$ no converge a 0 en l_p. Como $\{Tx_n\}$ no converge a 0, por continuidad de T, se deduce que $\{x_n\}$ no puede converger a 0 y de aquí se deduce que $\{x_n\}$ tiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ tal que la sucesión $\left\{\frac{1}{\|x_{n_k}\|}\right\}$ es acotada. De modo que, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que la sucesión $\{x_n\}$ es tal que la sucesión $\left\{\frac{1}{\|x_n\|}\right\}$ es acotada, es decir, nos quedamos con la subsucesión, que obviamente seguirá siendo débilmente nula en X y verificará que $\{Tx_n\}$ no converge a 0 en l_p.

Vamos a seguir simplificando nuestra sucesión: por las características que ahora tiene, es claro que la sucesión $\{y_n\} = \left\{\frac{x_n}{\|x_n\|}\right\}$ es débilmente nula en X y verifica que $\{Ty_n\}$ no converge a 0 en l_p y, además, $\|y_n\| = 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Así pues, podemos suponer que existe una sucesión $\{x_n\}$ débilmente nula en X que verifica que $\{Tx_n\}$ no converge a 0 en l_p y, además, $\|x_n\| = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Ahora como $\{Tx_n\}$ no converge a 0, existe un $\delta > 0$ y una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ con las mismas propiedades que $\{x_n\}$ y que verifica $\|Tx_{n_k}\| > \delta$. Nos quedamos con esta subsucesión. De modo que existe una sucesión $\{x_n\}$ débilmente nula tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ verifica que $\|x_n\| = 1$ y $\|Tx_n\| > \delta$. Como es débilmente nula, verifica, para todo $j \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} e_j^*(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{nj} = 0,$$

y además esta normalizada, por lo que, por la proposición 5.3 contiene una subsucesión básica equivalente a la base canónica $\{e_n\}$ de l_r. Nos quedamos con esta subsucesión. Es decir, existe una sucesión $\{x_n\}$ débilmente nula en X que es básica y equivalente a la base canónica de l_r tal que $\|Tx_n\| > \delta, \forall n \in \mathbb{N}$. Por continuidad de T, la sucesión $\{Tx_n\}$, es débilmente nula, así que podemos aplicar otra vez la proposición 5.3 y pasando a una subsucesión podemos suponer que $\{Tx_n/\|Tx_n\|\}$ y, por tanto, $\{Tx_n\}$ es básica y equivalente a la base canónica de l_p. Esto demuestra que la restricción $i : l_r \longrightarrow l_p$ es continua. Veamos esto: por las equivalencias existen dos isomorfismos topológicos $S : l_r \longrightarrow [x_k]_{k\in\mathbb{N}}$ y $R : [Tx_k]_{k\in\mathbb{N}} \longrightarrow l_p$ que verifican $Se_i = x_i$ y $R(Tx_i) = e_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$ (teorema 5.1). Se tendría entonces $i = R \circ T \circ S$, por lo que la restricción sería continua. Pero sabemos que esto es falso, dicha restricción no es continua ya que las normas $\|\cdot\|_p$ y $\|\cdot\|_r$, no son equivalentes (corolario 1.2). Esto constituye la contradicción que buscábamos, con lo que el teorema queda demostrado. □

Observación: El mismo resultado es cierto si sustituimos l_r por C_0: si $T : X \subset C_0 \longrightarrow l_p$ es un operador acotado, con $p > 1$, entonces, el operador traspuesto, $T^* : l_{p^*} \longrightarrow X^* \subset l_1$ es acotado, y por el teorema 5.4 de Pitt, es compacto. Aplicamos el resultado 4.4 y concluimos que T es compacto. Veremos al final del capítulo el caso en el que $p = 1$.

Veremos a continuación algunas consecuencias del teorema de Pitt:

Corolario 5.3. *Si $T : l_r \longrightarrow l_p$ es un operador acotado con $1 \le p < r < \infty$, entonces cualquier sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ débilmente nula en l_r cumplirá que $\|Tx_n\|_p \to 0$. En particular, $\|Te_n\|_p \to 0$. Lo mismo es cierto para cualquier operador acotado $T : C_0 \longrightarrow l_p$.*

Demostración. Por el teorema de Pitt (teorema 5.4), T es compacto y por el resultado 4.5 es incondicionalmente convergente. Luego transforma sucesiones débilmente nulas en sucesiones convergentes a cero en norma. □

Recordemos que un espacio de Banach X es de dimensión finita si, y sólo si, su bola unidad cerrada B_X es compacta (se puede consultar una demostración de este hecho en el libro de referencia [9]). Usaremos este resultado en el siguiente corolario:

Corolario 5.4. *Los espacios del conjunto* $\{C_0\} \bigcup \{l_p : 1 \leq p < \infty\}$ *son mutuamente no isomorfos. De hecho, si* X *es un subespacio infinito-dimensional de alguno de estos espacios, entonces* X *no es isomorfo a un subespacio de cualquiera de otro de ellos.*

Demostración. Supongamos que existe un isomorfismo $T : X \longrightarrow Y$, siendo X un subespacio infinito dimensional de C_0 o de l_r e Y un subespacio de l_p, con $1 \leq p < r < \infty$. Podemos extender T a la clausura de X definiendo $\widehat{T} : \overline{X} \longrightarrow \overline{Y}$ mediante $\widehat{T}(\text{lím}_n\, x_n) = \text{lím}_n\, Tx_n$ para toda sucesión $\{x_n\}$ en X. No es difícil comprobar que el operador $\widehat{T}$ seguirá siendo un isomorfismo.

Como $\overline{Y}$ es un subespacio cerrado de l_p contiene un subespacio Z isomorfo a l_p (proposición 5.4) y podemos considerar la restricción de $\widehat{T}$ a $\widehat{T}^{-1}(Z)$. Podemos suponer, para simplificar que Z es l_p, así

$$\widehat{T}|_{\widehat{T}^{-1}(l_p)} \longrightarrow l_p$$

es un isomorfismo entre un subespacio cerrado infinito-dimensional de C_0 o de l_r y l_p. Para no sobrecargar demasiado la notación, al subespacio $\widehat{T}^{-1}(l_p)$ lo llamaremos simplemente W. Ahora bien, si $y \in B_{l_p}$ existe $x \in W$ tal que $\widehat{T}^{-1}(y) = x$, con lo que

$$\left\|\widehat{T}^{-1}(y)\right\| = \|x\| \leq \left\|\widehat{T}^{-1}\right\| \|y\| \leq \left\|\widehat{T}^{-1}\right\|.$$

Se deduce que $B_{l_p} \subset \left\|\widehat{T}^{-1}\right\| \widehat{T}(B_W)$. Finalmente, por el teorema de Pitt (teorema 5.4), $\widehat{T}(B_W)$ es relatívamente compacto, por lo que B_{l_p} es compacto. Se deduce que l_p es de dimensión finita, lo cual es una contradicción. □

El corolario anterior sugiere la siguientes definiciones:

Definición 5.10. Dos espacios de Banach infinito-dimensionales X e Y se dicen **totalmente incomparables** si no tienen subespacios infinito-dimensionales en común (isomorfos).

Por ello, *los espacios* l_p *son totalmente incomparables entre ellos* (para distintos valores de p) y C_0 *es totalmente incomparable a cualquier* l_p.

Definición 5.11. Un operador acotado T de un espacio de Banach X en un espacio de Banach Y se dice **estrictamente singular** si no hay subespacio infinito-dimensional $W \subset X$ tal que $T|_W$ sea isomorfismo sobre su imagen.

Como consecuencia del corolario anterior, *cualquier operador acotado de* C_0 *en* l_p*, de* l_p *en* C_0 *o de* l_p *en* l_q *para* $p \neq q$*, es estrictamente singular.*

Veamos ahora una última observación al teorema de Pitt: Si $r < p$ un operador acotado de un subespacio cerrado de l_r en l_p puede no ser compacto, es decir, el teorema de Pitt no es cierto en este caso. Tomemos, por ejemplo, la inclusión natural $i : l_r \longrightarrow l_p$; es un operador de norma uno no compacto, ya que la imagen de la base canónica de l_r es una sucesión contenida en $i\big(B_{l_r}\big)$ sin ninguna subsucesión convergente, puesto que la distancia entre dos cualesquiera de sus elementos es $\|e_i - e_j\|_p = 2^{1/p}$.

Y hasta aquí con el teorema de Pitt.

5.2.1.2. Los espacios l_p y C_0 son primos

Nuestro siguiente objetivo es demostrar que los espacios l_p y C_0 son primos. Introduciremos la definición de espacio de Banach primo en su debido momento. Primero necesitamos una técnica de descomposición, pero debemos introducir previamente algunos conceptos:

Definición 5.12. Sea X un espacio de Banach, para $1 \leq p < \infty$ se define la **suma directa infinita de X en el sentido de $\mathbf{l_p}$**, que denotaremos por

$$l_p(X) = (X \oplus X \oplus \ldots)_p$$

como todas las sucesiones $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con valores en X tales que $\big\{\|x_n\|_{\mathrm{X}}\big\}_{n\in\mathbb{N}} \in l_p$, con la norma

$$\|x\| = \Big\|\big\{\|x_n\|_{\mathrm{X}}\big\}_{n\in\mathbb{N}}\Big\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{\mathrm{X}}^p\right)^{1/p}.$$

Análogamente, se define la **suma directa infinita de X en el sentido de $\mathbf{C_0}$**, que denotaremos por

$$C_0(X) = (X \oplus X \oplus \ldots)_{C_0}$$

como todas las sucesiones $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con valores en X tales que $\lim_n \|x_n\|_{\mathrm{X}} = 0$, con la norma

$$\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_{\mathrm{X}}.$$

Observaciones:

• Fijémonos en el espacio $l_p(l_p)$. Si $x \in l_p(l_p)$, entonces x sera de la forma

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots), \quad \text{donde}\, x_i \in l_p,\ \forall i \in \mathbb{N},$$

y se verificará $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|_p^p = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |x_{ij}|^p < \infty$. Observemos que cada elemento x de $l_p(l_p)$ se puede ver como una matriz infinita (de dimensión $Card(\mathbb{N}) \times Card(\mathbb{N})$) cuyos elementos cumplen, precisamente, $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |x_{ij}|^p < \infty$ y cuya norma será, justamente, $\left(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |x_{ij}|^p\right)^{1/p}$. Pero sabemos que existe una biyección de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$, con lo que podremos escribir dicha matriz en un único vector, que, obviamente, estará en l_p y su norma será, precisamente, la misma que la de la matriz. En definitiva, estamos diciendo que $l_p(l_p)$ es isométricamente isomorfo a l_p.
Análogamente, se puede ver que $C_0(C_0)$ es isométricamente isomorfo a C_0.

• Otra observación a destacar es que $l_p(X) \oplus l_p(X)$ es isométricamente isomorfo a $l_p(X)$ y

$C_0(X) \oplus C_0(X)$ lo es a $C_0(X)$ para cualquier espacio de Banach X. En efecto, consideremos en el espacio producto $l_p(X) \times l_p(X)$ la norma $\|\cdot\|_p$ y sea la aplicación definida por

$$H : l_p(X) \longrightarrow l_p(X) \times l_p(X) \quad : \quad z = (x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots) \longmapsto (x, y),$$

donde $x = (x_1, x_2, \ldots)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots)$. Esta aplicación es obviamente lineal y biyectiva y está bien definida. Además,

$$\|(x,y)\|_p = (\|x\|_p^p + \|y\|_p^p)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p + \sum_{i=1}^{\infty} \|y_i\|^p\right)^{1/p} = \|z\|_p,$$

con lo que H es un isomorfismo isométrico. Un razonamiento similar sirve para ver que $C_0(X) \oplus C_0(X)$ es isométricamente isomorfo a $C_0(X)$.

• Otra más a destacar es que $l_p(X)$ es isométricamente isomorfo a $X \oplus l_p(X)$ y $C_0(X)$ lo es a $X \oplus C_0(X)$ para cualquier espacio de Banach X. Efectivamente, al igual que antes, consideremos en el espacio producto $X \times l_p(X)$ la norma $\|\cdot\|_p$ y sea la aplicación definida por

$$S : l_p(X) \longrightarrow X \times l_p(X) \quad : \quad z = (x_0, x_1, x_2, \ldots) \longmapsto (x_0, x),$$

donde $x = (x_1, x_2, \ldots)$. Es claro que esta aplicación es lineal y biyectiva y que está bien definida. Además,

$$\|(x_0,x)\|_p = (\|x_0\|^p + \|x\|_p^p)^{1/p} = \left(\|x_0\|^p + \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \|x_i\|^p\right)^{1/p} = \|z\|_p,$$

y S es, por tanto, isomorfismo isométrico. El razonamiento para ver que $C_0(X)$ es isométricamente isomorfo a $X \oplus C_0(X)$ es análogo.

• La última observación es que $l_p(X \oplus Y)$ es isométricamente isomorfo a $l_p(X) \oplus l_p(Y)$ y $C_0(X \oplus Y)$ lo es a $C_0(X) \oplus C_0(Y)$ para cualesquiera X, Y espacios de Banach. En efecto, considerando la norma $\|\cdot\|_p$ en los espacios producto, tenemos la aplicación

$$T : l_p(X \times Y) \longrightarrow l_p(X) \times l_p(Y) \quad : \quad z = (x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots) \longmapsto (x, y),$$

donde $x = (x_1, x_2, \ldots)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots)$. Esta aplicación está bien definida y es lineal y biyectiva. Además,

$$\|(x,y)\|_p = \left(\|x\|_p^p + \|y\|_p^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p + \sum_{i=1}^{\infty} \|y_i\|^p\right)^{1/p} = \|z\|_p.$$

Así que T es isomorfismo isométrico. El razonamiento para ver que $C_0(X \oplus Y)$ es isométricamente isomorfo a $C_0(X) \oplus C_0(Y)$ es similar.

Una vez introducidos estos conceptos tenemos la siguiente técnica de descomposición (téngase en cuenta que para simplificar notación pondremos $X \approx Y$ para indicar que X es isomorfo a Y):

Teorema 5.5 (Técnica de descomposición de Pelczynski)**.** *Sean X, Y espacios de Banach tales que X es isomorfo a un subespacio complementado de Y, e Y es isomorfo a un subespacio complementado de X. Si además se cumple alguna de las dos condiciones siguientes*

1. $X \approx X \oplus X$ *e* $Y \approx Y \oplus Y$.

2. $X \approx l_p(X)$ *para algún* $1 \leq p < \infty$ *o* $X \approx C_0(X)$.

Entonces $X \approx Y$.

Demostración. Si X es isomorfo a un subespacio complementado de Y podremos escribir $Y \approx X \oplus E$, donde E es el complemento de este subespacio. Análogamente, podremos poner $X \approx Y \oplus F$.

Supongamos que se cumple la condición 1, entonces

$$Y \approx X \oplus E \approx X \oplus X \oplus E \approx X \oplus Y \quad \text{y} \quad X \approx Y \oplus F \approx Y \oplus Y \oplus F \approx Y \oplus X,$$

luego $X \approx Y$.

Supongamos que se cumple la condición 2, es decir, $X \approx l_p(X)$ para algún $1 \leq p < \infty$ (el caso $X \approx C_0(X)$ es idéntico). Por las observaciones precedentes al teorema (la segunda observación) tendremos $X \approx X \oplus X$ y, al igual que antes, obtenemos $Y \approx X \oplus Y$. Además,

$$X \approx l_p(X) \approx l_p(Y \oplus F) \approx l_p(Y) \oplus l_p(F) \approx Y \oplus l_p(Y) \oplus l_p(F) \approx Y \oplus l_p(Y \oplus F) \approx Y \oplus l_p(X) \approx Y \oplus X,$$

donde se han usado la tercera y cuarta observación precedentes al teorema. En consecuencia $X \approx Y$. □

Gracias a la técnica de descomposición de Pelczynski, podemos demostrar el siguiente teorema:

Teorema 5.6. *Supongamos que Y es un subespacio infinito-dimensional complementado de l_p con $1 \leq p < \infty$ (respectivamente C_0). Entonces Y es isomorfo a l_p (respectivamente C_0).*

Demostración. Obviamente, al ser Y complementado, es cerrado. Podemos, por tanto, aplicar la proposición 5.4 y concluir que Y contiene un subespacio cerrado Z isomorfo a l_p (respectivamente C_0) y complementado en l_p (respectivamente C_0). También, el propio Z es complementado en Y al ser complementado en l_p (respectivamente C_0). Así pues, l_p (respectivamente C_0) es isomorfo a un subespacio complementado de Y e Y (que es isomorfo a sí mismo) es complementado en l_p (respectivamente C_0). Además, por la primera observación dada después de la definición 5.12, l_p (respectivamente C_0) es isomorfo a $l_p(l_p)$ (respectivamente $C_0(C_0)$). Con ello, podemos aplicar la técnica de descomposición de Pelczynski (teorema 5.5) y concluir que Y es isomorfo a l_p (respectivamente C_0). □

Una idea natural que resulta del teorema anterior es la noción de que los espacios l_p y C_0 son los "ladrillos" con los que los espacios de Banach están construidos; por analogía, parece que juegan el rol de los primos en la teoría de números. Esto nos lleva, por fin, a la siguiente definición:

Definición 5.13. Un espacio de Banach X se dice **primo** si cualquier subespacio infinito-dimensional complementado de X es isomorfo a X.

Como se ha demostrado en el teorema 5.6, *los espacios l_p con $1 \le p < \infty$ y C_0 son primos.* Cualquiera pensaría en este momento en el espacio l_∞, y, en efecto, *l_∞ es un espacio de Banach primo no separable.* Este hecho fue demostrado por Lindenstrauss en 1967, aunque no lo veremos en este proyecto.

5.2.1.3. El espacio l_1

El espacio l_1 tiene un rol especial en la teoría de espacios de Banach. Veremos aquí que tiene algunas propiedades interesantes, como por ejemplo, que posee la propiedad de Schur.

Empezaremos viendo el siguiente teorema que fue demostrado por Banach y Mazur en 1933:

Teorema 5.7. *Si X es un espacio de Banach separable, existe un operador continuo $Q : l_1 \longrightarrow X$ que es sobreyectivo y que verifica $\|Q\| = 1$.*

Demostración. Basta probar que X admite un operador continuo $Q : l_1 \longrightarrow X$ que transforma el conjunto $B_{l_1} = \{\xi \in l_1 : \|\xi\|_1 \le 1\}$ en el conjunto $B_X = \{x \in X : \|x\| \le 1\}$.

Como X es separable, existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ densa en B_X. Definimos el operador

$$Q : l_1 \longrightarrow X \quad : \quad \xi = \{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n.$$

Este operador está bien definido pues la serie anterior es absolutamente convergente, ya que $\sum_{n=1}^{\infty} \|\xi_n x_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| \|x_n\| \le \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| < \infty$. Además, es claramente lineal y también es continua pues

$$\|Q(\xi)\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n \right\| \le \sum_{n=1}^{\infty} \|\xi_n x_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| \|x_n\| \le \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| = \|\xi\|_1.$$

Observemos que el conjunto $Q(B_{l_1})$ es denso en B_X, ya que la imagen de la base canónica de l_1 es precisamente $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Por tanto, dado $x \in B_X$ y $0 < \epsilon < 1$, existe $\xi_1 \in B_{l_1}$ tal que $\|x - Q\xi_1\| < \epsilon$. Además, tenemos que $\left\| \frac{1}{\epsilon}(x - Q\xi_1) \right\| < 1$, por lo que podemos hallar $\xi_2^{'} \in B_{l_1}$ tal que

$$\left\| \frac{1}{\epsilon}(x - Q\xi_1) - Q\xi_2^{'} \right\| < \epsilon.$$

Ponemos $\xi_2 = \epsilon\xi_2^{'}$, por lo que $\|\xi_2\|_1 < \epsilon$, y además obtenemos

$$\|x - Q(\xi_1 + \xi_2)\| < \epsilon^2.$$

Ahora, como $\left\| \frac{1}{\epsilon^2}\big(x - Q(\xi_1 + \xi_2)\big) \right\| < 1$, podemos hallar $\xi_3^{'} \in B_{l_1}$ tal que

$$\left\| \frac{1}{\epsilon^2}\big(x - Q(\xi_1 + \xi_2)\big) - Q\xi_3^{'} \right\| < \epsilon,$$

Ponemos $\xi_3 = \epsilon^2 \xi_3'$ por lo que $\|\xi_3\|_1 < \epsilon^2$, y además tenemos

$$\left\| x - Q(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) \right\| < \epsilon^3.$$

Iterando, obtenemos una sucesión $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en l_1 que satisface

$$\|\xi_n\|_1 < \epsilon^{n-1} \quad \text{y} \quad \left\| x - Q\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right) \right\| < \epsilon^n.$$

Sea $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$, entonces $\|\xi\|_1 \leq \frac{1}{1-\epsilon}$ y $Q\xi = x$. Como podemos hacer $\epsilon \to 0$, se deduce finalmente $Q\left(B_{l_1}\right) = B_X$. Obsérvese que esto además implica $\|Q\| = 1$. □

Corolario 5.5. *Si X es un espacio de Banach separable, es isométricamente isomorfo a un cociente de l_1.*

Demostración. Sea Q la aplicación del teorema anterior. Como Q es sobreyectiva, sabemos que la aplicación $\widehat{Q} : l_1/kerQ \longrightarrow X$ definida por $\widehat{Q}(\xi + kerQ) = Q\xi$ para $\xi \in l_1$, es un isomorfismo (se puede consultar este resultado en el libro de referencia [8]). Además, si $\pi : l_1 \longrightarrow l_1/kerQ$ es la aplicación cociente, sabemos también que transforma la bola unidad cerrada de l_1 en la bola unidad cerrada de $l_1/kerQ$ (este resultado se puede encontrar en el libro de referencia [7]). Consultando la demostración del teorema anterior, teníamos que $Q\left(B_{l_1}\right) = B_X$, con lo que

$$\widehat{Q}\left(B_{l_1/kerQ}\right) = \widehat{Q}\left(B_{l_1} + kerQ\right) = Q\left(B_{l_1}\right) = B_X,$$

de donde, obtenemos, $\left\|\widehat{Q}\right\| = 1$ y además $\widehat{Q}^{-1}\left(B_X\right) = B_{l_1/kerQ}$. De esta última igualdad, se deduce, $\left\|\widehat{Q}^{-1}\right\| = 1$. Finalmente, de $\left\|\widehat{Q}\right\| = 1$ y $\left\|\widehat{Q}^{-1}\right\| = 1$ obtenemos ya que $\left\|\widehat{Q}(\xi + kerQ)\right\| = \|\xi + kerQ\|$, con lo que $\widehat{Q}$ es, además, isometría. □

Corolario 5.6. *El espacio l_1 tiene un subespacio cerrado no complementado.*

Demostración. Sea X un espacio de Banach separable infinito-dimensional que no es isomorfo a l_1 (por ejemplo C_0 o cualquier l_p con $p \neq 1$, que son separables y por el corolario 5.4 no son isomorfos a l_1). El teorema 5.7 nos proporciona un operador acotado $Q : l_1 \longrightarrow X$ que es sobreyectivo y cuyo núcleo, $kerQ$, es un subespacio cerrado de l_1.

Si $kerQ$ fuese complementado en l_1, existiría una proyección $P : l_1 \longrightarrow l_1$, cuyo núcleo coincide con el de Q y cuya imagen sería un subespacio cerrado M de l_1 y tendríamos $l_1 = kerP \oplus M$. Así, $P : l_1 \longrightarrow M$ es sobreyectiva, y al igual que en la demostración del corolario anterior, tendríamos $l_1/kerP = l_1/kerQ \approx M$. Pero en la demostración del corolario anterior se vio que $l_1/kerQ \approx X$, luego sería $X \approx M$. Pero, obviamente, M también es un subespacio complementado de l_1, así que por el teorema 5.6 (obsérvese que M no puede ser de dimensión finita ya que $X \approx M$), tenemos $M \approx l_1$, luego $X \approx l_1$, lo cual es una contradicción. De modo que $kerQ$ no es complementado en l_1. □

Una vez vistos estos interesantes corolarios, veamos en qué consiste la propiedad de Schur:

Definición 5.14. Un espacio de Banach X tiene la **propiedad de Schur** (o es un **espacio de Schur**) si en X la convergencia débil es equivalente a la convergencia en norma, o, lo que es lo mismo, cualquier sucesión es débilmente nula si, y solamente si, converge a cero en norma.

Realmente, cualquier sucesión que converja a un elemento x en norma es débilmente convergente a x, ya que si $x^* \in X^*$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X que converge a x en norma, se tendrá, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$|x^*(x_n - x)| \leq \|x^*\| \|x_n - x\|.$$

Por tanto, X posee la propiedad de Schur si las sucesiones débilmente nulas convergen a cero en norma.

Ni los espacios l_p para $1 < p < \infty$ ni C_0 poseen esta propiedad, ya que la sucesión de vectores unidad $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es débilmente nula y, sin embargo, no converge a cero en norma. La convergencia débil a cero de esta sucesión es debida a que los duales de estos espacios son isométricamente isomorfos a espacios de sucesiones cuyos elementos $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cumplen $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Sin embargo, el dual de l_1 es isométricamente isomorfo a l_∞, y hay elementos de este último espacio que no cumplen esto; se deduce de aquí que la sucesión $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es débilmente nula en l_1 (basta observar el funcional definido por $x^*(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$, para $\xi = \{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in l_1$). Cabe preguntarse entonces qué ocurre con l_1. Lo veremos en el siguiente teorema:

Teorema 5.8. *El espacio l_1 tiene la propiedad de Schur.*

Demostración. Supongamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión débilmente nula en l_1 que no converge a cero en norma. Como no converge a cero en norma, existirá $\epsilon > 0$ y una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que verificará $\|x_{n_k}\| > \epsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Entonces, la sucesión $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ definida por

$$y_k = \frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|} \quad \text{para todo} \, k \in \mathbb{N},$$

será débilmente nula y estará normalizada. Esta sucesión verifica las hipótesis de la proposición 5.3, por lo que tiene una subsucesión $\{y_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ que es una sucesión básica equivalente a la base canónica $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de l_1. Esto es una contradicción, porque como hemos dicho en el comentario precedente al teorema, la base canónica de l_1 no es débilmente nula y, sin embargo, esta subsucesión sí. Por tanto, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero en norma. □

Recordemos un momento el teorema de Eberlein-Smulian (su demostración se puede encontrar en el libro de referencia [10]):

Teorema 5.9 (Eberlein-Smulian)**.** *Sea A un subconjunto de un espacio de Banach X, entonces A es débilmente (relativamente) compacto si, y sólo si, A es débilmente (relativamente) sucesionalmente compacto.*

El teorema anterior quiere decir que A es compacto en la topología débil si, y sólo si, cualquier sucesión en A posee una subsucesión convergente en A. Y A es relativamente compacto en la topología débil si, y sólo si, cualquier sucesión en A posee una subsucesión convergente en X. Obviamente, en este último caso, la subsucesión convergerá en la clausura de A en la topología débil. Usaremos el teorema de Eberlein-Smulian en el siguiente resultado.

Teorema 5.10. *Sea W un subconjunto de un espacio de Banach X con la propiedad de Schur. Entonces W es compacto si, y sólo si, W es débilmente compacto.*

Demostración. Supongamos que W es compacto y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en W. Por la compacidad de W la sucesión anterior tendrá una subsucesión convergente en norma a un elemento $x \in W$, la cual, será convergente a x en la topología débil. Por tanto, por el teorema 5.9 de Eberlein-Smulian, W es débilmente compacto.

Recíprocamente, si W es débilmente compacto, sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en W. Por el teorema 5.9 de Eberlein-Smulian, esta sucesión posee una subsucesión débilmente convergente en W. Pero como X es un espacio de Schur, esta subsucesión será convergente en W (en norma), con lo que W es compacto. □

Gracias al teorema anterior podemos afirmar que *en l_1 los compactos coinciden con los débilmente compactos*.

Veamos ahora un curioso corolario que se deduce del teorema anterior:

Corolario 5.7. *Si X es un espacio de Banach reflexivo con la propiedad de Schur, entonces X es de dimensión finita.*

Demostración. Por el resultado 4.2, la bola unidad cerrada es débilmente compacta y por el teorema anterior, es compacta. Por tanto, X es de dimensión finita. □

Vamos a ver una propiedad más del espacio l_1, pero para ello necesitamos definir algunos conceptos:

Definición 5.15. Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach X se dice **débilmente de Cauchy** si

$$\lim_{n\to\infty} x^*(x_n)$$

existe para cada $x^* \in X^*$.

Observemos que si $J_X : X \longrightarrow X^{**}$ es la inclusión canónica de X en su bidual, dado $x^* \in X^*$ y debido a la convergencia de $\lim_{n\to\infty} J_X(x_n)(x^*)$, obtenemos que el conjunto

$$\left\{ J_X(x_n)(x^*) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

está acotado, por lo que aplicando el teorema de Banach-Steinhaus (ver libro de referencia [7]), concluimos que $\sup\left\{ \left\|J_X(x_n)\right\| : n \in \mathbb{N} \right\} = \sup\left\{ \|x_n\| : n \in \mathbb{N} \right\} < \infty$. Es decir, toda sucesión débilmente de Cauchy está acotada. Entonces, si X es reflexivo, por el resultado 4.2 y por el teorema 5.9 de Eberlein-Smulian, cualquier sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ débilmente de Cauchy tendrá una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergente en la topología débil. Pero además, si $x^* \in X^*$, tendremos que $x^*(x_n)$ converge y $x^*(x_{n_k})$ converge a, digamos, $x^*(x)$. Se deduce, por unicidad del límite, que $x^*(x_n)$ ha de converger a $x^*(x)$, con lo que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ será débilmente convergente.

En definitiva, hemos probado

- Toda sucesión débilmente de Cauchy está acotada.
- Toda sucesión débilmente de Cauchy en un espacio de Banach reflexivo es débilmente convergente.

Además, es claro que toda sucesión débilmente convergente es débilmente de Cauchy. Por ello, en los espacios de Banach reflexivos, las sucesiones débilmente de Cauchy coinciden con las sucesiones débilmente convergentes.

En el caso de que X no sea reflexivo, puede haber sucesiones débilmente de Cauchy que no sean débilmente convergentes.

Definición 5.16. Se dice que un espacio de Banach X es **débilmente sucesionalmente completo** si cualquier sucesión débilmente de Cauchy converge débilmente. Como consecuencia, en un espacio de Banach débilmente sucesionalmente completo las sucesiones débilmente de Cauchy coinciden con las sucesiones débilmente convergentes.

Veamos un ejemplo. En el espacio C_0, consideremos la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} e_k = e_1 + e_2 + \dots + e_n,$$

donde e_i, $i = 1, 2, \dots, n$ es el i-ésimo vector unidad. Entonces si x^* es un funcional en C_0, será de la forma

$$x^*(z) = \sum_{j=1}^{\infty} z_j y_j, \quad \{z_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in C_0, \{y_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in l_1,$$

que actuando sobre el elemento n-ésimo de la sucesión dada, es, $\sum_{j=1}^{n} y_j$. Obviamente, si hacemos $n \to \infty$, el límite existe, ya que la sucesión $\{y_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ está en l_1 y verifica, por tanto, $\sum_{j=1}^{\infty} |y_j| < \infty$. Con ello, la sucesión dada, es débilmente de Cauchy.

Observemos ahora que la topología débil en C_0 es la topología débil-estrella en l_∞ restringida a C_0, considerando C_0 como subespacio de l_∞. Veamos que la sucesión dada converge en la topología débil-estrella de l_∞ al elemento $x = \sum_{k=1}^{\infty} e_k$. Si x^* es un funcional en l_∞ continuo en la topología débil-estrella, actuando sobre el n-ésimo elemento de la sucesión dada, será, al igual que antes, de la forma

$$\sum_{j=1}^{n} y_j,$$

donde, como antes, $\{y_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in l_1$. Este mismo funcional, actuando sobre x es $\sum_{j=1}^{\infty} y_j$. Tenemos, además

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} y_j - \sum_{j=1}^{n} y_j\right| = \left|\sum_{j=n+1}^{\infty} y_j\right|,$$

que converge a cero por ser el resto de una serie convergente. Así pues, la sucesión dada converge en la topología débil-estrella de l_∞ al elemento $x = \sum_{k=1}^{\infty} e_k$. Como este elemento no está en C_0, concluimos que, la sucesión dada no converge en la topología débil de C_0.

En definitiva, C_0 *no es débilmente sucesionalmente completo*. Otro ejemplo son los espacios l_p, para $1 < p < \infty$. Al ser reflexivos, tenemos que *los espacios l_p, para $1 < p < \infty$ son débilmente sucesionalmente completos*. Cabe pensar qué ocurre con l_1. Lo veremos en el siguiente teorema:

Teorema 5.11. *Si X es un espacio de Banach con la propiedad de Schur, entonces X es débilmente sucesionalmente completo.*

Demostración. Supongamos que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es débilmente de Cauchy. Entonces, si $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ son dos sucesiones estríctamente crecientes de enteros positivos, la sucesión $\{x_{n_k} - x_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es débilmente nula y, como X es un espacio de Schur, converge a cero en norma, es decir, $\lim_{k\to\infty} \|x_{n_k} - x_{m_k}\| = 0$. Se deduce que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y, como X es de Banach, convergente en norma. Finalmente, como la convergencia en norma implica la convergencia débil, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es débilmente convergente. □

Como consecuencia de los teoremas 5.8 y 5.11, *el espacio l_1 es débilmente sucesionalmente completo*. Es un ejemplo de espacio de Banach débilmente sucesionalmente completo que no es reflexivo.

A continuación recordaremos el teorema de Alaoglu, su demostración puede encontrarse en el libro de referencia [13]:

Teorema 5.12 (Alaoglu)**.** *Para cualquier espacio normado X, B_{X^*} es compacta en la topología débil*. Consecuentemente, cada conjunto acotado de X^* es relativamente compacto en la topología débil*.*

Usaremos el teorema de Alaoglu y el siguiente corolario (antes del corolario viene un lema que se usará para su demostración) para demostrar el teorema de Pitt en el caso de C_0 para $p = 1$, es decir, que todo operador acotado $T : X \subset C_0 \longrightarrow l_1$ es compacto, siendo X un subespacio cerrado de C_0.

Lema 5.5. *Si X es un espacio de Banach separable, la bola unidad cerrada B_{X^*} de X^* es (compacta y) metrizable para la topología débil*.*

Demostración. Como X es separable, podemos tomar una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ densa en B_X. Definimos la topología τ inducida en X^* por convergencia en cada x_n. Una base de entornos de un punto $x_0^* \in X^*$ para esta topología es dada por conjuntos de la forma:

$$V(x_0^*; x_1, x_2, \ldots, x_N, \epsilon) = \{x^* \in X^* \ : \ |x^*(x_n) - x_0^*(x_n)| < \epsilon, \ n = 1, 2, \ldots, N\},$$

donde $\epsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$ y $x_1, x_2, ..., x_N \in \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Como puede observarse, cada entorno básico de esta topología es un entorno básico en la topología débil* de X^*, por lo que la topología débil* es más fina que τ. Además τ es metrizable: una métrica que induce la topología τ puede ser definida mediante la distancia

$$d(x^*, y^*) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \min(1, |x^*(x_n) - y^*(x_n)|), \quad x^*, y^* \in X^*.$$

Por ello, τ es Hausdorff. Como la topología débil* es más fina que τ, la identidad $i : (X^*, \sigma(X^*, X)) \longrightarrow (X^*, \tau)$ es continua y, por ello, si K es un compacto en la topología débil*, también será compacto para la topología τ. Ahora, si C es un cerrado de K en la topología débil*, es compacto y su imagen también será compacta. Como la topología τ es Hausdorff, tenemos que C también es cerrado en esta topología. Concluimos que las topologias débil* y τ coinciden en los compactos.

Finalmente, por el teorema 5.12 de Alaoglu, B_{X^*} es compacta en la topología débil*, por lo que es metrizable para la topología débil*. □

Corolario 5.8. *Si X es un espacio de Banach y X^* es separable, entonces $B_{X^{**}}$ es sucesionalmente compacta en la topología débil*. Como consecuencia, toda sucesión acotada en X tiene una subsucesión débilmente de Cauchy.*

Demostración. Por el teorema 5.12 de Alaoglu, $B_{X^{**}}$ es compacta en la topología débil* y, por el lema anterior, es metrizable en esta topología, luego es sucesionalmente compacta.

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en X, entonces considerándola en X^{**} (vía inclusión canónica), existirá $\alpha > 0$ tal que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \alpha B_{X^{**}}$. Como este conjunto es sucesionalmente compacto, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tendrá una subsucesión convergente en la topología débil* de X^{**}. Sea $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ esta subsucesión, entonces

$$\exists \lim_{k\to\infty} x^*(x_{n_k}) \quad \forall x^* \in X^*,$$

por lo que la subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es débilmente de Cauchy. □

Ahora podemos demostrar el teorema de Pitt en el caso de C_0 para $p = 1$:

Corolario 5.9 (Teorema de Pitt en el caso de C_0 para $p = 1$)**.** *Si X es un subespacio cerrado de C_0, todo operador acotado $T : X \subset C_0 \longrightarrow l_1$ es compacto.*

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en X. Entonces es acotada en C_0 y como el dual de C_0 es l_1 que es separable, por el corolario anterior, deducimos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión débilmente de Cauchy. Sea $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ esta subsucesión. Como T es continuo, el operador traspuesto $T^* : l_\infty \longrightarrow X^* \subset l_1$ es continuo y tenemos, si $y^* \in l_\infty$

$$y^*(Tx_{n_k}) = T^* y^*(x_{n_k}), \quad k \in \mathbb{N},$$

de donde se deduce que la sucesión $\{Tx_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es débilmente de Cauchy en l_1. Como hemos visto en esta sección, l_1 es débilmente sucesionalmente completo, por ello la sucesión $\{Tx_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge débilmente. Pero además, l_1 tiene la propiedad de Schur (teorema 5.8), por lo que $\{Tx_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge en norma, con lo que T es compacto. $\square$

CAPÍTULO 6

EL TEOREMA DE ROSENTHAL SOBRE l_1

Empecemos con una motivación del capítulo:

Sea $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la base canónica de l_1 y $\{e_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión suya. Es claro que $\{e_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica en bloque normalizada de $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y, por tanto, por el lema 5.4, las dos sucesiones básicas son isométricamente equivalentes. Deducimos que cualquier subsucesión de la base canónica de l_1 es débilmente de Cauchy si, y solamente si, la propia base canónica de l_1 lo es. Pero, si consideramos el funcional definido por

$$x^* : l_1 \longrightarrow \mathbb{K} \quad : \quad x = \{x_k\} \longmapsto \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x_k,$$

que aplicado sobre el vector unidad n-ésimo es $x^*(e_n) = (-1)^n$. Concluimos que

$$\nexists \lim_{n\to\infty} x^*(e_n).$$

En consecuencia, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es débilmente de Cauchy y, por tanto, ninguna subsucesión suya lo será.

Hemos demostrado que el espacio l_1 posee una sucesión acotada sin subsucesiones débilmente de Cauchy. El teorema de Rosenthal sobre l_1 afirma, de cierta manera, que l_1 es el único espacio de Banach que posee esta propiedad, en el sentido de que si X es un espacio de Banach que tiene una sucesión acotada sin subsucesiones débilmente de Cauchy, entonces X contiene una copia (isomórfica) de l_1.

Antes de comenzar su demostración necesitamos algunos resultados previos. Las dos siguientes secciones estarán dedicadas a obtener estos resultados. Veremos la demostración del teorema de Rosenthal en la tercera sección.

6.1. Obtención de sucesiones básicas

En esta sección veremos nuevos resultados acerca de como obtener sucesiones básicas en un espacio de Banach X. Comencemos con el siguiente lema:

Lema 6.1. *Sea X un espacio de Banach y supongamos que S es un subconjunto de X^* tal que $0 \in \overline{S}^{\sigma(X^*,X)}$ pero $0 \notin \overline{S}$. Sea E un subespacio finito-dimensional de X^*. Dado $\epsilon > 0$ existe $x^* \in S$ tal que*

$$\|e^* + \lambda x^*\| \geq (1-\epsilon)\|e^*\|$$

para todo $e^* \in E$ y $\lambda \in \mathbb{K}$.

Demostración. En primer lugar observemos que tal conjunto S existe porque la topología débil* y la topología de la norma no coinciden en un espacio de Banach infinito-dimensional. El hecho $0 \notin \overline{S}$ implica que existe $\alpha > 0$ tal que $\alpha \leq \|x^*\|$, $\forall x^* \in S$.

Dado $\epsilon > 0$, ponemos $\overline{\epsilon} = \frac{\alpha\epsilon}{2(1+\alpha)}$. Sea

$$U_E = \{e^* \in E : \|e^*\| = 1\}.$$

Este conjunto es compacto ya que E es finito-dimensional y, por ello, podemos tomar $y_1^*, y_2^*, ..., y_N^* \in U_E$ tales que dado cualquier $e^* \in U_E$ existe $k \in \{1,2,...,N\}$ con $\|e^* - y_k^*\| < \overline{\epsilon}$.

Para cada $j \in \{1,2,...,N\}$ tomamos $x_j \in B_X$ tal que $|y_j^*(x_j)| > 1 - \overline{\epsilon}$ (esto es posible pues $\|y_j^*\| = 1$). Como $0 \in \overline{S}^{\sigma(X^*,X)}$, cada entorno de 0 en la topología débil* de X^* contiene al menos un elemento no nulo de S (nótese que $0 \notin S$ ya que $0 \notin \overline{S}$). En particular, considerando el entorno de 0

$$V(0, x_1, x_2, ..., x_N, \overline{\epsilon}) = \{x^* \in X^* : |x^*(x_i)| < \overline{\epsilon}, 1 \leq i \leq N\},$$

deducimos que existe $x^* \in S$ tal que $|x^*(x_i)| < \overline{\epsilon}$ para cada $j = 1,2,...,N$.

Sea $e^* \in U_E$. Si $|\lambda| \geq 2/\alpha$, tenemos

$$\|e^* + \lambda x^*\| \geq |\lambda|\|x^*\| - \|e^*\| \geq |\lambda|\alpha - 1 \geq 1 \geq 1 - \epsilon.$$

Si $|\lambda| < 2/\alpha$, tomamos $k \in \{1,2,...,N\}$ con $\|e^* - y_k^*\| < \overline{\epsilon}$ y tenemos

$$\begin{aligned}\|y_k^* + \lambda x^*\| &= \sup\{|y_k^*(x) + \lambda x^*(x)|, x \in B_x\} \geq |y_k^*(x_k) + \lambda x^*(x_k)| \geq |y_k^*(x_k)| - |\lambda||x^*(x_k)| \geq (1-\overline{\epsilon}) - |\lambda|\overline{\epsilon} \\ &\geq 1 - \left(1 + \frac{2}{\alpha}\right)\overline{\epsilon},\end{aligned}$$

y, por tanto,

$$\|e^* + \lambda x^*\| = \|\lambda x^* + y_k^* - (y_k^* - e^*)\| \geq \|\lambda x^* + y_k^*\| - \|y_k^* - e^*\| \geq 1 - \left(1 + \frac{2}{\alpha}\right)\overline{\epsilon} - \overline{\epsilon} = 1 - \epsilon.$$

Con esto, el resultado queda probado en el caso en que $e^* \in U_E$.

Finalmente, si $e^* \in E$, $e^* \neq 0$, poniendo $\lambda' = \frac{\lambda}{\|e^*\|}$ y aplicando el caso anterior, tenemos

$$\|e^* + \lambda x^*\| = \left\|\frac{e^*}{\|e^*\|} + \frac{\lambda}{\|e^*\|}x^*\right\|\|e^*\| = \left\|\frac{e^*}{\|e^*\|} + \lambda' x^*\right\|\|e^*\| \geq (1-\epsilon)\|e^*\|,$$

y es claro que el resultado se cumple si $e^* = 0$, con lo que el enunciado queda probado. □

Veremos a continuación que si X^* tiene un subconjunto S que cumple las condiciones del lema anterior, entonces podemos encontrar una sucesión básica en S con constante de base tan cercana a 1 como deseemos.

Teorema 6.1. *Sea X un espacio de Banach y supongamos que S es un subconjunto de X^* tal que $0 \in \overline{S}^{\sigma(X^*,X)}$ pero $0 \notin \overline{S}$. Entonces para cada $\epsilon > 0$, S contiene una sucesión básica con constante de base $K \leq 1+\epsilon$.*

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, tomemos una sucesión decreciente de reales positivos $\{\epsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n < \infty \quad \text{y} \quad \prod_{n=1}^{\infty}(1-\epsilon_n) > \frac{1}{1+\epsilon}.$$

Vale, por ejemplo, una sucesión del tipo $\epsilon_n = 1/k^n$, con k natural suficientemente grande: como para todo $x \in [0,1/2]$ se verifica que $1-x \geq e^{-2x}$, se deduce que

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k^n}\right) \geq e^{\frac{-2}{k-1}},$$

de donde se obtiene que

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k^n}\right) \geq \frac{1}{1+\epsilon} \quad \text{si} \quad k \geq \frac{2}{ln(1+\epsilon)}.$$

Sea $x_1^* \in S$ y consideremos el espacio 1-dimensional $E_1 = \langle x_1^* \rangle$. Por el lema anterior, existe $x_2^* \in S$ tal que

$$\left\|e^* + \lambda x_2^*\right\| \geq (1-\epsilon_1)\left\|e^*\right\|$$

para todo $e^* \in E_1$ y $\lambda \in \mathbb{K}$.

A continuación, sea $E_2 = \langle x_1^*, x_2^* \rangle$, aplicando de nuevo el lema anterior, obtenemos $x_3^* \in S$ tal que

$$\left\|e^* + \lambda x_3^*\right\| \geq (1-\epsilon_2)\left\|e^*\right\|$$

para todo $e^* \in E_2$ y $\lambda \in \mathbb{K}$.

Inductivamente, obtenemos una sucesión $\{x_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos

$$\left\|e^* + \lambda x_{n+1}^*\right\| \geq (1-\epsilon_n)\left\|e^*\right\|$$

para todo $e^* \in E_n$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Obsérvese que e^* es arbitrario y que está en E_n. Podemos, por tanto, escribirlo en la forma $e^* = \sum_{k=1}^n a_k x_k^*$, donde a_k ($k = 1,2,...,n$) son escalares. Poniendo entonces $a_{k+1} = \lambda$, deducimos que la sucesión $\{x_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ es tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada sucesión de escalares $\{a_k\}$, verifica

$$\left\|\sum_{k=1}^{n+1} a_k x_k^*\right\| \geq (1-\epsilon_n)\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k^*\right\|.$$

De aquí se deduce, si $n \geq m$ que

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k^* \right\| \geq (1-\epsilon_{n-1}) \left\| \sum_{k=1}^{n-1} a_k x_k^* \right\| \geq (1-\epsilon_{n-1})(1-\epsilon_{n-2}) \left\| \sum_{k=1}^{n-2} a_k x_k^* \right\| \geq \ldots \geq \prod_{k=m}^{n-1} (1-\epsilon_k) \left\| \sum_{k=1}^{m} a_k x_k^* \right\|$$
$$\geq \prod_{k=1}^{n-1} (1-\epsilon_k) \left\| \sum_{k=1}^{m} a_k x_k^* \right\|,$$

de donde,

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} a_k x_k^* \right\| \leq \frac{1}{\prod_{k=1}^{n-1}(1-\epsilon_k)} \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k^* \right\| \leq \frac{1}{\prod_{k=1}^{\infty}(1-\epsilon_k)} \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k^* \right\| \leq (1+\epsilon) \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k^* \right\|.$$

Finalmente, aplicando la condición de Grunblum (proposición 5.2), concluimos que la sucesión $\{x_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ es básica con constante de base no superior a $1+\epsilon$. □

Corolario 6.1. *Todo espacio de Banach infinito-dimensional X contiene, para cada $\epsilon > 0$, una sucesión básica con constante de base no superior a $1+\epsilon$.*

Demostración. Consideremos el conjunto $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$. Claramente, $0 \notin \overline{S}$. Veamos que además $0 \in \overline{S}^{\sigma(X,X^*)}$. Si no fuese así, existirían unos funcionales $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^* \in X^*$, no nulos y un $\delta > 0$ tales que el entorno del origen en la topología débil

$$V(0, x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, \delta) = \left\{ x \in X : \left| x_i^*(x) \right| < \delta, \, i = 1, 2, \ldots, n \right\}$$

no contiene ningún elemento de S. Esto es imposible, pues como sabemos, la intersección de los núcleos de los funcionales $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ es un subespacio no nulo contenido en $V(0, x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, \delta)$ y que contiene puntos de S. De modo que, efectivamente, $0 \in \overline{S}^{\sigma(X,X^*)}$.

Ahora, si consideramos S contenido en X^{**} (vía inclusión canónica), se deduce que la clausura débil* de S como subconjunto de X^{**} contiene al 0. Aplicamos el teorema anterior y hemos terminado. □

Lema 6.2. *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica en X. Supongamos que existe un funcional $x^* \in X^*$ tal que $x^*(x_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $u \notin [x_n]_{n\in\mathbb{N}}$, entonces la sucesión $\{x_n + u\}_{n\in\mathbb{N}}$ es básica.*

Demostración. En primer lugar observemos que como $u \notin [x_n]_{n\in\mathbb{N}}$, podemos aplicar el teorema 2.2 y concluir que existe un funcional $y^* \in X^*$ que se anula en $[x_n]_{n\in\mathbb{N}}$ y que cumple $y^*(u) = 1$. Entonces, el funcional en X^* definido por $z^* = x^* - x^*(u)y^*$, verifica $z^*(x_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $z^*(u) = 0$.

Definimos el operador $T : X \longrightarrow X$ mediante $Tx = z^*(x)u$. Si I_X es la identidad en X, es fácil comprobar que el operador $I_X + T$ es invertible con inversa $I_X - T$, y es, por tanto, un isomorfismo topológico. Pero además, tenemos $(I_X + T)(x_n) = x_n + u$ para cada $n \in \mathbb{N}$, con lo que las sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{x_n + u\}_{n\in\mathbb{N}}$ son congruentes y, por tanto, aplicando el lema 5.2, esta última sucesión es básica. □

Recordemos un momento el teorema de Mazur, cuya demostración puede encontrarse en el libro de referencia [13].

Teorema 6.2 (Mazur). *Si K es un subconjunto convexo de un espacio normado X, entonces la clausura de K en la topología de la norma coincide con la clausura de K en la topología débil.*

Usaremos el teorema de Mazur, además de algunos de los resultados vistos hasta ahora, para probar el resultado fundamental de esta sección, el cual, a su vez, es necesario para conseguir nuestro objetivo: demostrar el teorema de Rosenthal. El resultado fundamental de esta sección es el siguiente:

Teorema 6.3. *Sea S un subconjunto acotado en un espacio de Banach X tal que $0 \notin \overline{S}$. Las dos propiedades siguientes son equivalentes:*
- *S no contiene ninguna sucesión básica.*
- *$\overline{S}^{\sigma(X,X^*)}$ es débilmente compacto y no contiene al 0.*

Demostración. Empezaremos demostrando que la segunda propiedad implica la primera. Supongamos pues que $\overline{S}^{\sigma(X,X^*)}$ es débilmente compacto y no contiene al 0 y procederemos por reducción al absurdo. Entonces, supondremos que existe una sucesión básica $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S$. Por el teorema 5.9 de Eberlein-Smulian la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ débilmente convergente a un elemento $x \in \overline{S}^{\sigma(X,X^*)}$. Por tanto, este elemento x estará en la clausura débil de $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$, que claramente, al ser subespacio es convexo. Aplicamos ahora el teorema 6.2 de Mazur y concluimos que $x \in [x_n]_{n\in\mathbb{N}}$. De modo que, podemos escribir

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)x_n.$$

Pero además, la subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a x y, por ello, para cada $m \in \mathbb{N}$, tendremos

$$0 = \lim_{k\to\infty} x_m^*(x_{n_k}) = x_m^*(x).$$

De aquí se concluye $x = 0$, lo cual es una contradicción con la hipótesis pues $x \in \overline{S}^{\sigma(X,X^*)}$.

Demostremos ahora que la primera propiedad implica la segunda. Partimos de que S no contiene ninguna sucesión básica, además, como por hipótesis $0 \notin \overline{S}$, aplicamos el teorema 6.1 (considerando $S \subset X^{**}$ vía inclusión canónica) y obtenemos que la clausura débil* de S en X^{**} no puede contener al cero y, por tanto, la clausura débil de S en X tampoco. Falta por ver que S es relativamente débilmente compacto. Ahora bien, S es acotado, por lo que considerándolo contenido en X^{**} (vía inclusión canónica) y por el teorema 5.12 de Alaoglu, tenemos que es relativamente compacto en la topología débil* de X^{**}. Por tanto, basta probar que cualquier punto de clausura de S en la topología débil* de X^{**} está, a su vez, en X. Procederemos, de nuevo, por reducción al absurdo. Supongamos pues, que x^{**} es un punto de clausura de S en la topología débil* de X^{**}, verificando que $x^{**} \in X^{**} \setminus X$. Consideremos el conjunto

$$W = S - x^{**} = \{s - x^{**} : s \in S\} \subset X^{**}.$$

Observemos que al ser x^{**} es un punto de clausura de S en la topología débil* de X^{**}, tenemos que $0 \in \overline{W}^{\sigma(X^{**},X^*)}$ y que como $x^{**} \notin X$, entonces, $0 \notin \overline{W}$. Podemos, por tanto, aplicar el teorema 6.1 y deducir que existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que la sucesión $\{x_n - x^{**}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es básica. Observemos ahora lo siguiente

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} [x_n - x^{**}]_{n=k}^{\infty} = \{0\},$$

ya que la sucesión de conjuntos que aparece en la intersección es decreciente y no podemos encontrar un conjunto distinto del cero contenido en todos ellos. Por tanto, existe n_0 tal que $x^{**} \notin [x_n - x^{**}]_{n=n_0}^{\infty}$ y la sucesión $\{x_n - x^{**}\}_{n=n_0}^{\infty}$ seguirá siendo básica. Ahora, por el teorema 2.2 existe $x^{***} \in X^{***}$ que se anula en X (vía inclusión canónica) y que verifica $x^{***}(x^{**}) = 1$. Por ello, el funcional $-x^{***}$ verifica $-x^{***}(x_n - x^{**}) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Finalmente, aplicamos el lema 6.2, y concluimos que la sucesión $\{x_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ es básica, lo cual está en contra de la primera propiedad. $\square$

6.2. Teoría de Ramsey

Sea $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ el conjunto de todas las partes de $\mathbb{N}$. Observemos que $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ puede ser identificado con el conjunto de Cantor $\Delta = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ mediante la aplicación

$$A \longmapsto u_A = \{\chi_A(n) : n \in \mathbb{N}\},$$

donde por χ_A denotamos la función característica de A. Expliquemos esto un poco: si recordamos la construcción del conjunto de Cantor, en la primera iteración se divide el intervalo $[0,1]$ en tres partes iguales y se elimina el intervalo abierto del centro (en este caso el intervalo $(1/3, 2/3)$). En la segunda iteración se repite el paso anterior a cada uno de los intervalos que han quedado ($[0,1/3]$ y $[2/3,1]$) y así sucesivamente.

Pues bien, la aplicación anterior nos determina para cada elemento $A \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ un único elemento del conjunto de Cantor Δ. La sucesión u_A nos indica, en cada iteración de la construcción del conjunto Δ, en qué intervalo se encuentra el elemento de Δ, es decir, si $\chi_A(n) = 0$, en la iteración n nos quedamos con el intervalo más próximo a 0, y si $\chi_A(n) = 1$, nos quedamos con el más próximo a 1. Así queda perfectamente determinado el elemento de Δ.

Denotaremos por $\mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$ el subconjunto de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ de las partes infinitas de $\mathbb{N}$, y su complementario, el subconjunto de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ de las partes finitas de $\mathbb{N}$, lo denotaremos por $\mathscr{F}(\mathbb{N})$. Dado $M \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ y $r \in \mathbb{N}$, $\mathscr{F}_r(M)$ será la colección de los subconjuntos finitos de M con cardinal r.

Si $M \in \mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$ y $f : \mathscr{F}_r(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función, diremos que

$$\exists \lim_{A \in \mathscr{F}_r(M)} f(A) = \alpha$$

si dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $A \in \mathscr{F}_r(M)$ y $A \subset [N,\infty)$, entonces $|f(A)-\alpha| < \epsilon$.

Empezaremos probando una generalización del teorema de Ramsey. El siguiente teorema consta de dos aserciones. El teorema original de Ramsey corresponde al caso $r=2$ de la segunda aserción.

Teorema 6.4 (Teorema de Ramsey)**.**

i. *Supongamos que $r \in \mathbb{N}$ y $f : \mathscr{F}_r(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada. Entonces existe $M \in \mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$ tal que*

$$\exists \lim_{A \in \mathscr{F}_r(M)} f(A).$$

ii. *Si $\mathscr{A} \subset \mathscr{F}_r(\mathbb{N})$, existe $M \in \mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$ tal que $\mathscr{F}_r(M) \subset \mathscr{A}$ ó $\mathscr{F}_r(M) \cap \mathscr{A} = \emptyset$.*

Demostración. La segunda aserción se deduce de la primera si definimos $f(A) = \chi_{\mathscr{A}}(A)$, es decir, $f(A) = 1$ si $A \in \mathscr{A}$ y $f(A) = 0$ si $A \notin \mathscr{A}$. En este caso, como el límite existe para un cierto $M \in \mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$ y además el valor de f es únicamente 0 ó 1 se deduce que el valor α del límite únicamente puede ser 0 ó 1. Además, el valor de N (en la definición del límite) será 1 si $\epsilon \geq 1$ o un cierto natural (que volveremos a llamar N) si $0 < \epsilon < 1$ (este valor de N es fijo para todos los epsilon entre 0 y 1). Entonces, considerando $M' = M \cap [N,\infty)$, tendremos que $M' \in \mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$ y si $A \in \mathscr{F}_r(M')$, entonces $f(A) = \alpha$. Finalmente, si $\alpha = 1$, se deduce $\mathscr{F}_r(M') \subset \mathscr{A}$, y si $\alpha = 0$, se deduce $\mathscr{F}_r(M') \cap \mathscr{A} = \emptyset$.

La prueba de la primera aserción la haremos por inducción en r. Realmente probaremos lo siguiente, de lo cual, se deduce directamente la primera aserción:

(6.1) Dados $r \in \mathbb{N}$, $M' \in \mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$ y $f : \mathscr{F}_r(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada, existe $M \in \mathscr{P}_\infty(M')$ tal que

$$\exists \lim_{A \in \mathscr{F}_r(M)} f(A).$$

Para el caso $r = 1$, tenemos que $\mathscr{F}_r(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, por lo que f es una sucesión en $\mathbb{R}$ que además está acotada, con lo que si $M' \in \mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$ tenemos que la sucesión $\{f(n)\}_{n \in M'}$ está acotada, por lo que tiene una subsucesión convergente, o lo que es lo mismo, existe $M \in \mathscr{P}_\infty(M')$ tal que $\{f(n)\}_{n \in M}$ converge. Esto demuestra (6.1) en el caso r=1.

Supongamos ahora $r \geq 2$ y que se cumple (6.1) para $r-1$. Para distintos naturales $m_1, m_2, ..., m_r$ ponemos

$$f(m_1, m_2, ..., m_r) = f(\{m_1, m_2, ..., m_r\}).$$

Obsérvese que la imagen de f no depende del orden de los naturales $m_1, m_2, ..., m_r$. Sea $\eta : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^{r-1}$ una biyección, por el caso $r = 1$, dado $M' \in \mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$ existe $I_1 \in \mathscr{P}_\infty(M')$ tal que el límite

$$\lim_{m_r \in I_1} f(\eta(1), m_r)$$

existe. Otra vez, por el caso $r = 1$, existe $I_2 \in \mathscr{P}_\infty(I_1)$, tal que los límites

$$\lim_{m_r \in I_2} f(\eta(1), m_r) \quad \text{y} \quad \lim_{m_r \in I_2} f(\eta(2), m_r)$$

existen. De manera inductiva, construimos una sucesión decreciente $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_k \supset \ldots$ de elementos de $\mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$ que verifica que el límite

$$\lim_{m_r \in I_k} f(\eta(j), m_r)$$

existe para todo natural $j \leq k$. Observemos que para cada $k \in \mathbb{N}$, I_k es una sucesión de números naturales. Pondremos $I_k(j)$ para el elemento j-ésimo de la sucesión I_k. Sea M_1 la sucesión diagonal, es decir, la sucesión $\{I_k(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$. Nótese que $M_1 \subset I_1 \subset M'$. Entonces, por la construcción que hemos hecho, el límite

$$\lim_{m_r \in M_1} f(m_1, m_2, \ldots, m_{r-1}, m_r)$$

existe para cualesquiera $m_1, m_2, \ldots, m_{r-1}$ naturales distintos y no depende del orden de esos naturales (ya que f tampoco). Así pues, podemos definir $g : \mathscr{F}_{r-1}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$g(m_1, m_2, \ldots, m_{r-1}) = \lim_{m_r \in M_1} f(m_1, m_2, \ldots, m_{r-1}, m_r).$$

Como f es acotada, también lo será g y por la hipótesis de inducción (para el caso $r-1$), existirá $M_2 \in \mathscr{P}_\infty(M_1)$ tal que

$$\exists \lim_{A \in \mathscr{F}_{r-1}(M_2)} g(A) = \alpha$$

para un número real α. Notar que además como $M_2 \in \mathscr{P}_\infty(M_1)$, se sigue cumpliendo

$$g(m_1, m_2, \ldots, m_{r-1}) = \lim_{m_r \in M_2} f(m_1, m_2, \ldots, m_{r-1}, m_r),$$

por lo que dado $\epsilon > 0$ y $A \in \mathscr{F}_{r-1}(M_2)$, podemos encontrar un natural $N(\epsilon, A)$ (depende de ϵ y A), el cual podemos tomar superior al máximo de A, tal que si $n \in M_2 \cap \left[N(\epsilon, A), \infty\right)$, entonces $n \notin A$ y

$$\left|f(A, n) - g(A)\right| < \epsilon.$$

Por último, construiremos $M \in \mathscr{P}_\infty(M_2) \subset \mathscr{P}_\infty(M')$. Elegimos $r-1$ puntos iniciales $m_1 < m_2 < \ldots < m_{r-1}$ en M_2. Para $n \geq r-1$ elegimos m_{n+1} en M_2 cumpliendo $m_{n+1} > m_n$ y

$$m_{n+1} > \max_{A \in \mathscr{F}_{r-1}(m_1, m_2, \ldots, m_n)} N(2^{-n}, A).$$

Sea $M = \{m_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Dado $\epsilon > 0$, como

$$\lim_{B \in \mathscr{F}_{r-1}(M)} g(B) = \alpha,$$

y la sucesión $M = \{m_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, podemos tomar $n \in \mathbb{N}$, tal que si $B \in \mathscr{F}_{r-1}(M)$ y $B \subset [m_n, \infty)$, entonces $\left|g(B) - \alpha\right| < \frac{\epsilon}{2}$. Además, podemos tomar n suficientemente grande, de manera que se cumpla $2^{-n} < \frac{\epsilon}{2}$. Si $A \in \mathscr{F}_r(M)$ con $A \subset [m_n, \infty)$, sea $m_k = \max\{m_j : m_j \in A\}$ y sea $B = A \setminus \{m_k\}$. Entonces, como

$$g(B) = \lim_{i \in M} f(B, i),$$

y por la elección de M, tenemos $\left|f(B,m_k)-g(B)\right| = \left|f(A)-g(B)\right| < 2^{-(k-1)} < 2^{-n} < \frac{\epsilon}{2}$. Finalmente

$$\left|f(A)-\alpha\right| \leq \left|f(A)-g(B)\right| + \left|g(B)-\alpha\right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Esto demuestra que

$$\lim_{A \in \mathscr{F}_r(M)} f(A) = \alpha.$$

Obsérvese que, además, $M \in \mathscr{P}_\infty(M')$, pues tenemos $M \subset M_2 \subset M_1 \subset I_1 \subset M'$. Con esto queda, finalmente, demostrado (6.1). $\square$

No perdamos de vista nuestro objetivo: demostrar el teorema de Rosenthal sobre l_1. Para ello, necesitamos una generalización del teorema anterior, más concretamente, de la segunda aserción. Queremos ver qué condiciones hay que pedirle a un subconjunto $\mathscr{A}$ de $\mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$ para que exista un elemento M de $\mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$ que verifique $\mathscr{P}_\infty(M) \subset \mathscr{A}$ ó $\mathscr{P}_\infty(M) \cap \mathscr{A} = \emptyset$.

Definición 6.1. Sea $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$. Diremos que $\mathscr{A}$ tiene la **propiedad de Ramsey** o es un **conjunto Ramsey** si existe $M \in \mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$ verificando $\mathscr{P}_\infty(M) \subset \mathscr{A}$ ó $\mathscr{P}_\infty(M) \cap \mathscr{A} = \emptyset$.

Sin embargo, estudiaremos una propiedad aún más fuerte que definiremos a continuación. Antes necesitamos introducir algunos conceptos más. Dados $A \in \mathscr{F}(\mathbb{N})$ y $E \in \mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$, definimos

$$\mathscr{P}_\infty(A,E) = \left\{B \in \mathscr{P}_\infty(A \cup E) \,:\, A \subset B\right\}.$$

Se cumplen las siguientes propiedades:

- $\mathscr{P}_\infty(\emptyset,E) = \mathscr{P}_\infty(E)$.
- $A_1 \subset A_2 \subset E \implies \mathscr{P}_\infty(A_2,E) \subset \mathscr{P}_\infty(A_1,E)$.
- $E_1 \subset E_2 \implies \mathscr{P}_\infty(A,E_1) \subset \mathscr{P}_\infty(A,E_2)$.
- $\mathscr{P}_\infty(A,E) = \mathscr{P}_\infty(A,A \cup E)$.

Definición 6.2. Sea $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$. Diremos que $\mathscr{A}$ es **completamente Ramsey** si para cualesquiera $A \in \mathscr{F}(\mathbb{N})$ y $E \in \mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$, existe $M \in \mathscr{P}_\infty(E)$ tal que $\mathscr{P}_\infty(A,M) \subset \mathscr{A}$ ó $\mathscr{P}_\infty(A,M) \cap \mathscr{A} = \emptyset$.

Observemos que todo subconjunto de $\mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$ completamente Ramsey tiene la propiedad de Ramsey, pues basta tomar $A = \emptyset$ y $E = \mathbb{N}$. Observemos, además, que si $\mathscr{A}$ es completamente Ramsey, entonces, su complementario $\mathscr{A}^c$ también.

Veremos, más adelante, que una condición suficiente para que un subconjunto de $\mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$ sea completamente Ramsey, es una propiedad de carácter topológico. Por ello, necesitamos estudiar alguna topología en $\mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$.

Definición 6.3. Recordemos que, al inicio de la sección, dijimos que $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ puede ser identificado con el conjunto de Cantor $\Delta = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ mediante la aplicación

$$A \longmapsto u_A = \{\chi_A(n) : n \in \mathbb{N}\}.$$

También indicamos, al inicio de la sección, que podemos considerar los elementos de Δ como sucesiones de unos y ceros.
Consideremos en Δ la topología inducida por la distancia

$$d(\delta_1,\delta_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\delta_{1k} - \delta_{2k}|}{2^k}$$

donde, los elementos $\delta_1,\delta_2 \in \Delta$, están expresados de la manera que acabamos de mencionar. Por tanto, también podemos considerar en $\mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$ la topología métrica heredada, que denominaremos **topología de Cantor** y denotaremos τ_C. Así pues, dados $A_1,A_2 \in \mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$, tenemos

$$d\big(A_1,A_2\big) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\chi_{A_1}(k) - \chi_{A_2}(k)|}{2^k}$$

y una base de entornos para esta topología es

$$\Big\{B\big(A,\epsilon\big) = \big\{D \in \mathscr{P}_\infty(\mathbb{N}) \,:\, d\big(A,D\big) < \epsilon\big\} \,:\, A \in \mathscr{P}_\infty(\mathbb{N}), \epsilon > 0\Big\}.$$

Obsérvese que, para cualesquiera $A_1,A_2 \in \mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$, se verifica

$$d\big(A_1,A_2\big) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\chi_{A_1}(k) - \chi_{A_2}(k)|}{2^k} = \sum_{k\in A_1\setminus A_2} \frac{1}{2^k} + \sum_{k\in A_2\setminus A_1} \frac{1}{2^k}.$$

Usaremos este razonamiento más tarde.

Trabajaremos también con otra topología sobre $\mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$ que definiremos después de la siguiente proposición.

Proposición 6.1. *Consideremos la familia τ_E de subconjuntos de $\mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$ definida por*

$$\tau_E = \big\{\mathscr{U} \subset \mathscr{P}_\infty(\mathbb{N}) \quad : \quad \forall E \in \mathscr{U} \ \exists A \subset E, A \in \mathscr{F}(\mathbb{N}) : \mathscr{P}_\infty(A,E) \subset \mathscr{U}\big\}.$$

La familia τ_E define una topología sobre $\mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$.

Demostración. Es claro que el conjunto vacío y $\mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$ están en τ_E.

Sean $\mathscr{U}_1, \mathscr{U}_2 \in \tau_E$ y sea $E \in \mathscr{U}_1 \cap \mathscr{U}_2$ (podemos suponer que la intersección es no vacía, ya que el conjunto vacío está en τ_E). Entonces $E \in \mathscr{U}_1$ y $E \in \mathscr{U}_2$, por lo que existen $A_1,A_2 \subset E$, $A_1,A_2 \in \mathscr{F}(\mathbb{N})$ tales que $\mathscr{P}_\infty(A_1,E) \subset \mathscr{U}_1$ y $\mathscr{P}_\infty(A_2,E) \subset \mathscr{U}_2$. Sea $A = A_1 \cup A_2$. Entonces $A \subset E$, $A \in \mathscr{F}(\mathbb{N})$ y

$$\mathscr{P}_\infty(A,E) \subset \mathscr{P}_\infty(A_1,E) \subset \mathscr{U}_1, \quad \mathscr{P}_\infty(A,E) \subset \mathscr{P}_\infty(A_2,E) \subset \mathscr{U}_2 \quad \Longrightarrow \quad \mathscr{P}_\infty(A,E) \subset \mathscr{U}_1 \cap \mathscr{U}_2.$$

Por tanto, la intersección finita de conjuntos de τ_E también está en τ_E.

Sea $\{\mathscr{U}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de conjuntos de τ_E y sea $E \in \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \mathscr{U}_\alpha$. Existe $\beta \in \Lambda$ tal que $E \in \mathscr{U}_\beta$ y, por tanto, existe $A \subset E$, $A \in \mathscr{F}(\mathbb{N})$ tal que $\mathscr{P}_\infty(A,E) \subset \mathscr{U}_\beta \subset \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \mathscr{U}_\alpha$. Así, la unión (no necesariamente numerable) de conjuntos de τ_E está en τ_E.

De modo que, efectivamente, τ_E define una topología sobre $\mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$. ☐

Definición 6.4. La topología τ_E sobre $\mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$ vista en la proposición anterior se denomina **topología de Ellentuck** y a sus elementos $\mathscr{U} \subset \mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$ se les llama **abiertos-Ellentuck**.

Proposición 6.2. *La familia*

$$\left\{\mathscr{P}_\infty(A,E) : A \in \mathscr{F}(\mathbb{N}), E \in \mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})\right\}$$

es una base de entornos para la topología τ_E.

Demostración. Veamos primero que, efectivamente, es base para una cierta topología $\tau_{E'}$:
Sea $E \in \mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$, entonces si $A \in \mathscr{F}(E)$, tenemos que $E \in \mathscr{P}_\infty(A,E)$.
Sea $E \in \mathscr{P}_\infty(A_1,E_1) \cap \mathscr{P}_\infty(A_2,E_2)$ para ciertos $A_1,A_2 \in \mathscr{F}(\mathbb{N})$, $E_1,E_2 \in \mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$. Se deduce que $A_1 \cup A_2 \subset E$ y que $E \subset (A_1 \cup E_1) \cap (A_2 \cup E_2)$. Entonces

$$E \in \mathscr{P}_\infty(A_1 \cup A_2,E) \subset \mathscr{P}_\infty(A_1,E) \subset \mathscr{P}_\infty(A_1,A_1 \cup E_1) = \mathscr{P}_\infty(A_1,E_1),$$

y análogamente $\mathscr{P}_\infty(A_1 \cup A_2,E) \subset \mathscr{P}_\infty(A_2,E_2)$. Con ello

$$E \in \mathscr{P}_\infty(A_1 \cup A_2,E) \subset \mathscr{P}_\infty(A_1,E_1) \cap \mathscr{P}_\infty(A_2,E_2).$$

De modo que, la familia del enunciado es una base de entornos para una cierta topología $\tau_{E'}$.
Veamos que coincide con τ_E:
Si $\mathscr{U}$ es un abierto-Ellentuck, por definición, para todo $E \in \mathscr{U}$ existe $A \subset E$, $A \in \mathscr{F}(\mathbb{N})$ tal que $\mathscr{P}_\infty(A,E) \subset \mathscr{U}$. Luego $\mathscr{U}$ es abierto en $\tau_{E'}$.
Si $\mathscr{U}$ es un abierto en $\tau_{E'}$, sea $E \in \mathscr{U}$. Existen $A \in \mathscr{F}(\mathbb{N})$ y $E' \in \mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$ tales que
$E \in \mathscr{P}_\infty(A,E') \subset \mathscr{U}$. Deducimos $E \subset A \cup E'$ y $A \subset E$. Por tanto

$$\mathscr{P}_\infty(A,E) \subset \mathscr{P}_\infty(A,A \cup E') = \mathscr{P}_\infty(A,E') \subset \mathscr{U},$$

luego $\mathscr{U}$ es abierto-Ellentuck. Por tanto, $\tau_{E'} = \tau_E$. □

A continuación, veremos que todo abierto en la topología de Cantor τ_C es abierto en la topología de Ellentuck τ_E.

Proposición 6.3. *La topología de Ellentuck τ_E es más fina que la topología de Cantor τ_C.*

Demostración. Basta ver que los entornos básicos de τ_C son abiertos-Ellentuck. Sean pues $A \in \mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$ y $\epsilon > 0$. Consideremos el entorno básico $B(A,\epsilon)$ en τ_C y sea $D \in B(A,\epsilon)$, entonces

$$d(A,D) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\chi_A(k) - \chi_D(k)|}{2^k} = \delta < \epsilon.$$

Sea $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k>k_0} \frac{1}{2^k} < \epsilon - \delta$. Definimos $F = A \cap D \cap \{1,2,\ldots,k_0\}$ (pudiera ser que F fuese vacío) y consideremos el conjunto $\mathscr{P}_\infty(F,D)$. Sea $E \in \mathscr{P}_\infty(F,D)$, entonces $E \subset F \cup D = D$ y $F \subset E$.

Tenemos

$$d(A,E)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\chi_A(k)-\chi_E(k)|}{2^k}=\sum_{k\le k_0}\frac{|\chi_A(k)-\chi_E(k)|}{2^k}+\sum_{k>k_0}\frac{|\chi_A(k)-\chi_E(k)|}{2^k}$$
$$\le\sum_{k\le k_0}\frac{|\chi_A(k)-\chi_E(k)|}{2^k}+\epsilon-\delta.$$

Observemos ahora que $(A\setminus D)\cap\{1,2,...,k_0\}=(A\setminus E)\cap\{1,2,...,k_0\}$:
Si $x\in(A\setminus D)\cap\{1,2,...,k_0\}$ entonces $x\notin D$ y como $E\subset D$, $x\notin E$. Así pues, $x\in(A\setminus E)\cap\{1,2,...,k_0\}$. Recíprocamente, si $x\in(A\setminus E)\cap\{1,2,...,k_0\}$, entonces $x\in A\cap\{1,2,...,k_0\}$. Además, $x\notin E$. Pero $F=A\cap D\cap\{1,2,...,k_0\}\subset E$, luego $x\notin F=A\cap D\cap\{1,2,...,k_0\}$. Se deduce $x\notin D$, y, por tanto, $x\in(A\setminus D)\cap\{1,2,...,k_0\}$.

Con lo anterior y teniendo en cuenta que $E\subset D$, y, por tanto, $E\setminus A\subset D\setminus A$, tenemos

$$\sum_{k\le k_0}\frac{|\chi_A(k)-\chi_E(k)|}{2^k}=\sum_{\substack{k\in A\setminus E\\ k\le k_0}}\frac{1}{2^k}+\sum_{\substack{k\in E\setminus A\\ k\le k_0}}\frac{1}{2^k}\le\sum_{\substack{k\in A\setminus D\\ k\le k_0}}\frac{1}{2^k}+\sum_{\substack{k\in D\setminus A\\ k\le k_0}}\frac{1}{2^k}$$
$$=\sum_{k\le k_0}\frac{|\chi_A(k)-\chi_D(k)|}{2^k}\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\chi_A(k)-\chi_D(k)|}{2^k}=d(A,D)=\delta.$$

De ello, deducimos, finalmente $d(A,E)\le\delta+\epsilon-\delta=\epsilon$ y, en consecuencia, $\mathscr{P}_\infty(F,D)\subset B(A,\epsilon)$, con lo que $B(A,\epsilon)$ es abierto-Ellentuck. □

A continuación demostraremos el resultado fundamental de esta sección, el cual generaliza la segunda aserción del teorema 6.4 de Ramsey y que utilizaremos en la demostración del teorema de Rosenthal.

Teorema 6.5 (Lema de Galvin)**.** *Todo abierto-Ellentuck es completamente Ramsey.*

Demostración. Comenzaremos definiendo algunos conceptos que usaremos en la demostración. Si $A\in\mathscr{F}(\mathbb{N})$ y $E\in\mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$, diremos que (A,E) es un par. Dado un abierto-Ellentuck $\mathscr{U}$, diremos que (A,E) es un par bueno para $\mathscr{U}$ si existe $M\in\mathscr{P}_\infty(E)$ tal que $\mathscr{P}_\infty(A,M)\subset\mathscr{U}$. En caso contrario, diremos que es un par malo para $\mathscr{U}$. Se deducen algunas propiedades:

- Si (A,E) es un par malo para $\mathscr{U}$ y $F\in\mathscr{P}_\infty(E)$, entonces también (A,F) es un par malo para $\mathscr{U}$, ya que $\mathscr{P}_\infty(F)\subset\mathscr{P}_\infty(E)$.

- Sean $E,F\in\mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$ tales que $E\setminus F$ es finito y sea $\mathscr{U}$ un abierto-Ellentuck. Supongamos que existe $A\in\mathscr{F}(\mathbb{N})$ tal que (A,E) es un par bueno para $\mathscr{U}$. Entonces existe $M\in\mathscr{P}_\infty(E)$ tal que $\mathscr{P}_\infty(A,M)\subset\mathscr{U}$. Tenemos $M\subset E$, con lo que

  $$M=M\cap E=M\cap\left[(E\cap F)\cup(E\setminus F)\right]=(M\cap E\cap F)\cup\left[M\cap(E\setminus F)\right]=(M\cap F)\cup\left[M\cap(E\setminus F)\right],$$

  pero M es infinito y $M\cap(E\setminus F)$ es finito, por ello, se deduce que $M\cap F$ es infinito, es decir, $M\cap F\in\mathscr{P}_\infty(F)$. Con ello,

  $$\mathscr{P}_\infty(A,M\cap F)\subset\mathscr{P}_\infty(A,M)\subset\mathscr{U},$$

y (A,F) es un par bueno para $\mathscr{U}$. Así, hemos demostrado que si $E\setminus F$ es finito con $E,F\in\mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$, entonces, dados $A\in\mathscr{F}(\mathbb{N})$ y $\mathscr{U}$ abierto-Ellentuck,

$$(A,E) \text{ par bueno para } \mathscr{U} \implies (A,F) \text{ par bueno para } \mathscr{U}.$$

- Como consecuencia de la propiedad anterior, si $E,F\in\mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$ son tales que su diferencia simétrica $E\triangle F=(E\setminus F)\cup(F\setminus E)$ es finita, entonces, dados $A\in\mathscr{F}(\mathbb{N})$ y $\mathscr{U}$ abierto-Ellentuck,

  $$(A,E) \text{ par bueno para } \mathscr{U} \iff (A,F) \text{ par bueno para } \mathscr{U}.$$

  Es decir, los pares son, o los dos buenos, o los dos malos para $\mathscr{U}$.

Observemos que dado un abierto-Ellentuck $\mathscr{U}$ y un par (A,E), este último, o es bueno, o es malo para $\mathscr{U}$. Si el par es bueno, por definición, existe $M\in\mathscr{P}_\infty(E)$ tal que $\mathscr{P}_\infty(A,M)\subset\mathscr{U}$. Por tanto, si volvemos a la definición 6.2 de subconjunto de $\mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$ completamente Ramsey, observamos que, lo único que hay que demostrar es que si el par (A,E) es malo, entonces debe existir $M\in\mathscr{P}_\infty(E)$ tal que $\mathscr{P}_\infty(A,M)\cap\mathscr{U}=\emptyset$.

En esto consistirá la demostración, la cual dividiremos en tres pasos. Sea $\mathscr{U}$ un abierto-Ellentuck.

Paso 1: En este paso demostraremos que si $\{A_j\}_{j=1}^m$ son finitos, $E\in\mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$ y (A_j,E) es un par malo para $\mathscr{U}$ para cada $j=1,2,...m$, entonces existe $n\in E\setminus\bigcup_{j=1}^m A_j$ y $F\in\mathscr{P}_\infty(E)$ tal que $(A_j\cup\{n\},F)$ es un par malo para $\mathscr{U}$ para cada $j=1,2,...m$.

Procederemos por reducción al absurdo. Supongamos lo contrario, entonces, dado $n_1\in E\setminus\bigcup_{j=1}^m A_j$, existe $p_1\in\{1,2,...,m\}$ tal que el par $(A_{p_1}\cup\{n_1\},E)$ es bueno para $\mathscr{U}$ (tomamos $F=E$). Por tanto, existe $E_1\in\mathscr{P}_\infty(E)$ tal que $\mathscr{P}_\infty(A_{p_1}\cup\{n_1\},E_1)\subset\mathscr{U}$.

Como $E_1\in\mathscr{P}_\infty(E)$, por las propiedades vistas al inicio de la demostración (la primera), el par (A_j,E_1) es malo para todo $j=1,2,...m$. Por ello, dado $n_2>n_1$, $n_2\in E_1\setminus\bigcup_{j=1}^m A_j$ existe $p_2\in\{1,2,...,m\}$ tal que el par $(A_{p_2}\cup\{n_2\},E_1)$ es bueno para $\mathscr{U}$, por lo que existe $E_2\in\mathscr{P}_\infty(E_1)$ tal que $\mathscr{P}_\infty(A_{p_2}\cup\{n_2\},E_2)\subset\mathscr{U}$.

De manera inductiva obtenemos una sucesión creciente $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, una sucesión decreciente de conjuntos infinitos $\{E_k\}_{k=0}^\infty$, con $E_0=E$ y una sucesión $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, con $1\le p_k\le m$ para todo $k\in\mathbb{N}$, cumpliendo

$$n_k\in E_{k-1}\setminus\bigcup_{j=1}^m A_j \quad y \quad \mathscr{P}_\infty(A_{p_k}\cup\{n_k\},E_k)\subset\mathscr{U}, \quad \forall k\in\mathbb{N}.$$

Observemos que $n_k\in E_j$ para todo $k>j$. Además, ha de existir $p\in\{1,...,m\}$ tal que el conjunto $\{k\,:\,p_k=p,\,k\in\mathbb{N}\}$ es infinito. Sea $M=\{n_k\,:\,p_k=p,\,k\in\mathbb{N}\}$. Entonces, $M\in\mathscr{P}_\infty(E)$. Si $G\in\mathscr{P}_\infty(A_p,M)$, tomamos k_0 el menor natural tal que $n_{k_0}\in G$. Tenemos que $p=p_{k_0}$, $A_{p_{k_0}}\subset G$ y, además, como la sucesión $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es creciente y $n_k\in E_j$ para todo $k>j$, se deduce que $G\in\mathscr{P}_\infty(A_{p_{k_0}}\cup\{n_{k_0}\}\cup E_{k_0})$. Luego, $G\in\mathscr{P}_\infty(A_{p_{k_0}}\cup\{n_{k_0}\},E_{k_0})\subset\mathscr{U}$. De modo que hemos demostrado que

$$\mathscr{P}_\infty(A_{p_{k_0}},M)\subset\mathscr{P}_\infty(A_{p_{k_0}}\cup\{n_{k_0}\},E_{k_0})\subset\mathscr{U},$$

lo que implica que $(A_{p_{k_0}}, E)$ es un par bueno para $\mathscr{U}$. Esto contradice a la hipótesis, con lo que queda demostrada la afirmación del paso 1.

Paso 2: En este paso veremos que si (A,E) es un par malo para $\mathscr{U}$ entonces existe $M \in \mathscr{P}_\infty(E)$ tal que para todo conjunto finito B que cumpla $A \subset B \subset A \cup M$, el par (B,M) es malo para $\mathscr{U}$.

Ponemos $E_0 = E$, como (A,E_0) es un par malo para $\mathscr{U}$, por el paso anterior, existen $n_1 \in E_0 \setminus A$ y $E_1 \in \mathscr{P}_\infty(E_0)$ tal que $(A \cup \{n_1\}, E_1)$ es un par malo para $\mathscr{U}$. Observemos ahora que si $M \in \mathscr{P}_\infty(E_1)$, y B es finito cumpliendo $A \subset B \subset A \cup \{n_1\}$, tenemos que

$$\mathscr{P}_\infty(A \cup \{n_1\}, M) \subset \mathscr{P}_\infty(B,M) \subset \mathscr{P}_\infty(A,M),$$

de donde se deduce que los pares (A,E_1) y (B,E_1) no pueden ser buenos para $\mathscr{U}$, pues si alguno lo fuese, también lo sería el par $(A \cup \{n_1\}, E_1)$, lo cual es falso. Naturalmente, en este primer paso del razonamiento inductivo sólo puede ser $B = A \cup \{n_1\}$.

Ahora como $(A \cup \{n_1\}, E_1)$ es un par malo para $\mathscr{U}$, existen $n_2 \in E_1 \setminus A$, $n_2 \neq n_1$ y $E_2 \in \mathscr{P}_\infty(E_1)$ tal que $(A \cup \{n_1, n_2\}, E_2)$ es un par malo para $\mathscr{U}$. Análogamente, si $M \in \mathscr{P}_\infty(E_2)$, y B es finito cumpliendo $A \subset B \subset A \cup \{n_1, n_2\}$, tenemos que

$$\mathscr{P}_\infty(A \cup \{n_1, n_2\}, M) \subset \mathscr{P}_\infty(B,M) \subset \mathscr{P}_\infty(A,M),$$

y, por tanto, los pares (A,E_2) y (B,E_2) son malos para $\mathscr{U}$. Obsérvese que aquí B puede ser dos posibles conjuntos.

Supongamos tomados $n_1, n_2, ..., n_{k-1}$ números naturales diferentes y $E = E_0 \supset E_1 \supset ... \supset E_{k-1}$ elementos de $\mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$, con $n_j \in E_{j-1} \setminus A$ para todo $j = 1,2,...,k-1$ tales que el par $(\bigcup_{j=1}^{k-1}\{n_j\} \cup A, E_{k-1})$ es un par malo para $\mathscr{U}$ y que para todo B finito, con $A \subset B \subset \bigcup_{j=1}^{k-1}\{n_j\} \cup A$, el par (B, E_{k-1}) es malo para $\mathscr{U}$. Entonces, por el paso 1, existen un natural $n_k \in E_{k-1} \setminus A$ con $n_k \neq n_j$ para todo $j = 1,2,...,k-1$ y $E_k \in \mathscr{P}_\infty(E_{k-1})$ tales que $(\bigcup_{j=1}^{k}\{n_j\} \cup A, E_k)$ es un par malo para $\mathscr{U}$ y además, para todo B finito con $A \subset B \subset \bigcup_{j=1}^{k}\{n_j\} \cup A$ se tendrá que el par (B, E_k) es malo para $\mathscr{U}$.

Obsérvese que en realidad podemos construir una sucesión $M = \{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de números naturales todos diferentes y una sucesión decreciente $\{E_k\}_{k=0}^{\infty}$ de elementos de $\mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$ con $E_0 = E$ y $n_k \in E_{k-1} \setminus A$ para cada $k \in \mathbb{N}$, tales que, para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y todo B finito con $A \subset B \subset \bigcup_{j=1}^{k}\{n_j\} \cup A$, los pares $(\bigcup_{j=1}^{k}\{n_j\} \cup A, E_k)$ y (B, E_k) son malos para $\mathscr{U}$.

Tenemos que, $M \in \mathscr{P}_\infty(E)$ y si B es finito cumpliendo $A \subset B \subset A \cup M$ ha de existir $k \in \mathbb{N}$ tal que $A \subset B \subset \bigcup_{j=1}^{k}\{n_j\} \cup A$, por lo que el par (B, E_k) es malo para $\mathscr{U}$. Además, observemos que $n_j \in E_k$ para todo $j > k$, por lo que $M \subset \bigcup_{j=1}^{k}\{n_j\} \cup E_k$. Por tanto, $M \setminus E_k$ es finito. Como el par (B, E_k) es malo para $\mathscr{U}$, se deduce, de las propiedades vistas al inicio de la demostración (la segunda) que el par (B,M) es malo para $\mathscr{U}$. Con esto finaliza el paso 2.

Paso 3: En este paso finalizaremos la demostración del teorema. Supongamos que (A,E) es malo para $\mathscr{U}$. Recordemos que queremos demostrar que existe $M \in \mathscr{P}_\infty(E)$ tal que $\mathscr{P}_\infty(A,M) \cap \mathscr{U} = \emptyset$. Por el paso anterior, existe $M \in \mathscr{P}_\infty(E)$ tal que para todo conjunto finito

B que cumpla $A \subset B \subset A \cup M$, el par (B,M) es malo para $\mathscr{U}$. Veamos que este conjunto M cumple lo requerido. Procederemos por reducción al absurdo. Supongamos, por tanto, que existe $G \in \mathscr{P}_\infty(A,M) \cap \mathscr{U}$. Como $\mathscr{U}$ es abierto-Ellentuck, existe $B \subset G, B \in \mathscr{F}(\mathbb{N})$ tal que $\mathscr{P}_\infty(B,G) \subset \mathscr{U}$. Observemos que $A \cup B \subset G$, ya que $G \in \mathscr{P}_\infty(A,M)$ (por tanto $A \subset G$) y $B \subset G$. Por ello,

$$\mathscr{P}_\infty(A \cup B, G) \subset \mathscr{P}_\infty(B,G) \subset \mathscr{U}.$$

Además, tenemos que $G \in \mathscr{P}_\infty(A \cup M)$. Por ello, el par $(A \cup B, A \cup M)$ es bueno para $\mathscr{U}$. Ahora como, $(A \cup M) \triangle M$ es finito, por las propiedades vistas al inicio (la tercera), se deduce que el par $(A \cup B, M)$ es bueno para $\mathscr{U}$. Pero $A \subset A \cup B \subset A \cup M$, por tanto, por la propiedad que cumple M, este par no puede ser bueno para $\mathscr{U}$. Esto finaliza la demostración. $\square$

Corolario 6.2. *Los cerrados-Ellentuck son completamente Ramsey.*

Demostración. Ya observamos que si un conjunto es completamente Ramsey, entonces su complementario también. Por tanto, se aplica el teorema 6.5. $\square$

Corolario 6.3. *Tanto los conjuntos abiertos como los cerrados en la topología de Cantor τ_C son completamente Ramsey.*

Demostración. Es consecuencia del teorema 6.5, de la proposición 6.3 y de la misma observación que en el corolario anterior. $\square$

6.3. Demostración del teorema de Rosenthal

En este momento disponemos de las herramientas necesarias para realizar la demostración del teorema de Rosenthal sobre l_1. Vayamos a ello.

Teorema 6.6 (Teorema de Rosenthal)**.** *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en un espacio de Banach infinito-dimensional X. Entonces, o bien $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión que es débilmente de Cauchy, o bien $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión que es básica y equivalente a la base canónica de l_1.*

Demostración. Supongamos que ninguna subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es débilmente de Cauchy, entonces, como toda sucesión débilmente convergente es débilmente de Cauchy, se deduce que, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene subsucesiones débilmente convergentes. Por el teorema 5.9 de Eberlein-Smulian, el conjunto $S = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es débilmente relativamente compacto, es decir, $\overline{S}^{\sigma(X,X^*)}$ no es compacto en la topología débil. Observemos que la sucesión no puede converger a 0, por lo que podemos suponer, quedándonos con una subsucesión si fuese necesario, que existe $K > 0$ tal que $\|x_n\| \geq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Podemos, por tanto, aplicar el teorema 6.3 y deducir que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contiene una sucesión básica. Entonces, podemos suponer directamente que, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es básica y, además, como está acotada, dividiendo entre una cota superior si fuese necesario, podemos suponer también que $\|x_n\| \leq 1$ (nótese que al dividir entre esta cota la sucesión seguiría siendo básica, pues, por ejemplo, se seguiría cumpliendo la condición de Grunblum (proposición 5.2)).

Si $M \in \mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$, consideremos la subsucesión $\{x_n\}_{n\in M}$ de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Con el fin de medir la proximidad de $\{x_n\}_{n\in M}$ a ser débilmente de Cauchy, definimos

$$osc(M) = \sup_{\|x^*\|\leq 1} \lim_{k\to\infty} \sup_{\substack{m,n>k\\ m,n\in M}} \left|x^*(x_m) - x^*(x_n)\right|.$$

Obsérvese que $osc(M)$ está bien definido: para cada x^*, con $\|x^*\| \leq 1$ y cada $k \in \mathbb{N}$, tenemos que si $m,n > k$, $m,n \in M$,

$$\left|x^*(x_m) - x^*(x_n)\right| \leq \|x^*\|\left(\|x_m\| + \|x_n\|\right) \leq 2,$$

por lo que existe $\sup_{\substack{m,n>k\\ m,n\in M}} \left|x^*(x_m) - x^*(x_n)\right|$. Ahora, para cada x^*, con $\|x^*\| \leq 1$, si $k_1 < k_2$, observamos que

$$0 \leq \sup_{\substack{m,n>k_2\\ m,n\in M}} \left|x^*(x_m) - x^*(x_n)\right| \leq \sup_{\substack{m,n>k_1\\ m,n\in M}} \left|x^*(x_m) - x^*(x_n)\right|,$$

por lo que existe $\lim_{k\to\infty} \sup_{\substack{m,n>k\\ m,n\in M}} \left|x^*(x_m) - x^*(x_n)\right|$, además, se cumple

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{\substack{m,n>k\\ m,n\in M}} \left|x^*(x_m) - x^*(x_n)\right| = \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{\substack{m,n>k\\ m,n\in M}} \left|x^*(x_m) - x^*(x_n)\right| \leq 2,$$

de donde se deduce que existe $\sup_{\|x^*\|\leq 1} \lim_{k\to\infty} \sup_{\substack{m,n>k\\ m,n\in M}} \left|x^*(x_m) - x^*(x_n)\right|$. Con ello, $osc(M)$ está bien definido.

Observemos, además, que si F es finito, entonces $osc(M) = osc(M\cup F)$, ya que existirá $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $F \subset \{1,2,\ldots,k_0\}$, y tendremos

$$\begin{aligned}
osc(M\cup F) &= \sup_{\|x^*\|\leq 1} \lim_{k\to\infty} \sup_{\substack{m,n>k\\ m,n\in M\cup F}} \left|x^*(x_m) - x^*(x_n)\right| = \sup_{\|x^*\|\leq 1} \inf_{k\geq 1} \sup_{\substack{m,n>k\\ m,n\in M\cup F}} \left|x^*(x_m) - x^*(x_n)\right| \\
&= \sup_{\|x^*\|\leq 1} \inf_{k\geq k_0} \sup_{\substack{m,n>k\\ m,n\in M\cup F}} \left|x^*(x_m) - x^*(x_n)\right| = \sup_{\|x^*\|\leq 1} \inf_{k\geq k_0} \sup_{\substack{m,n>k\\ m,n\in M}} \left|x^*(x_m) - x^*(x_n)\right| \\
&= \sup_{\|x^*\|\leq 1} \inf_{k\geq 1} \sup_{\substack{m,n>k\\ m,n\in M}} \left|x^*(x_m) - x^*(x_n)\right| = \sup_{\|x^*\|\leq 1} \lim_{k\to\infty} \sup_{\substack{m,n>k\\ m,n\in M}} \left|x^*(x_m) - x^*(x_n)\right| = osc(M).
\end{aligned}$$

Otra observación es que si $M \in \mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$ y $N \in \mathscr{P}_\infty(M)$, entonces $osc(N) \leq osc(M)$, ya que para todo $x^* \in X^*$ y todo $k \in \mathbb{N}$, se tendrá

$$\sup_{\substack{m,n>k\\ m,n\in N}} \left|x^*(x_m) - x^*(x_n)\right| \leq \sup_{\substack{m,n>k\\ m,n\in M}} \left|x^*(x_m) - x^*(x_n)\right|.$$

Y si la diferencia $M\setminus N$ es finita, se tendrá la igualdad, pues existirá $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $N\cap(k_0,\infty) = M\cap(k_0,\infty)$, con lo que

$$\inf_{k\geq k_0} \sup_{\substack{m,n>k\\ m,n\in N}} \left|x^*(x_m) - x^*(x_n)\right| = \inf_{k\geq k_0} \sup_{\substack{m,n>k\\ m,n\in M}} \left|x^*(x_m) - x^*(x_n)\right|.$$

Veamos una última observación interesante sobre $osc(M)$. Si $\{x_n\}_{n\in M}$ fuese débilmente de Cauchy, entonces, para cada $x^* \in X^*$, existiría $\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in M}} x^*(x_n)$, por lo que la sucesión $\{x^*(x_n)\}_{n\in M}$ sería de Cauchy en $\mathbb{K}$. Por ello, dado $\epsilon > 0$, existiría $n_0(x^*) \in \mathbb{N}$ (dependería de x^*), tal que si $n, m \geq n_0(x^*)$, $n, m \in M$, se tendría

$$|x^*(x_m) - x^*(x_n)| < \epsilon.$$

De aquí se deduce que sería $osc(M) < \epsilon$ y como ϵ es arbitrario, concluimos que si $\{x_n\}_{n\in M}$ fuese débilmente de Cauchy, entonces $osc(M) = 0$. ¿Qué ocurre si $\{x_n\}_{n\in M}$ no es débilmente de Cauchy, como precisamente es nuestro caso? Veámoslo.

Si no es débilmente de Cauchy, entonces existe $x^* \in X^*$ tal que no existe $\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in M}} x^*(x_n)$, por lo que la sucesión $\{x^*(x_n)\}_{n\in M}$ no puede ser de Cauchy en $\mathbb{K}$. Por tanto, existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $n_0 \in \mathbb{N}$, existirán $n, m \geq n_0$, $n, m \in M$ tales que

$$|x^*(x_m) - x^*(x_n)| > \epsilon.$$

De aquí se concluye $osc(M) > \epsilon > 0$. Así pues, $osc(M)$ mide cómo de cerca (o de lejos) está $\{x_n\}_{n\in M}$ de ser débilmente de Cauchy: cuanto más próximo esté $osc(M)$ a 0, más cerca estará la sucesión de ser débilmente de Cauchy, y cuanto más alejado esté de 0, más lejos estará la sucesión de ser débilmente de Cauchy.

Una vez hemos visto esta definición y estas observaciones continuemos con la demostración. La dividiremos en pasos. Partimos de la hipótesis de que ninguna subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es débilmente de Cauchy y que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es básica y cumple

$$K \leq \|x_n\| \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

donde K es una constante positiva.

Paso 1: En este paso veremos que existe $M \in \mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$ tal que para todo $M' \in \mathscr{P}_\infty(M)$ se tiene $osc(M) = osc(M') > 0$.

Sea $M_0 = \mathbb{N}$, tomamos $M_1 \in \mathscr{P}_\infty(M_0)$ tal que

$$osc(M_1) < \inf_{N\in\mathscr{P}_\infty(M_0)} osc(N) + 1.$$

M_1 existe por definición de ínfimo, es decir, si no existiese, para todo $N \in \mathscr{P}_\infty(M_0)$, tendríamos que

$$osc(N) \geq \inf_{N\in\mathscr{P}_\infty(M_0)} osc(N) + 1,$$

lo cual no es posible, pues el ínfimo es la mayor de las cotas inferiores del conjunto $\{osc(N) : N \in \mathscr{P}_\infty(M_0)\}$. Ahora tomamos $M_2 \in \mathscr{P}_\infty(M_1)$ tal que

$$osc(M_2) < \inf_{N\in\mathscr{P}_\infty(M_1)} osc(N) + \frac{1}{2}.$$

Al igual que antes, M_2 existe por definición de ínfimo. De manera inductiva, construimos una sucesión decreciente de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$, $M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_k \supset \ldots$, tales que

$$osc(M_k) < \inf_{N \in \mathscr{P}_\infty(M_{k-1})} osc(N) + \frac{1}{k}, \quad k = 1,2,\ldots$$

Obsérvese que para cada $k = 0,1,2,\ldots$, $M_k = \{m_{k0},\ m_{k1},\ \ldots\} = \{m_{kj}\}_{j=0}^{\infty}$ es una sucesión de elementos diferentes en $\mathbb{N}$. Sea $M = \{m_{kk}\}_{k=0}^{\infty}$ la sucesión diagonal. Ponemos $F_0 = \emptyset$ y, para cada $k \in \mathbb{N}$, $F_k = \{m_{00},\ m_{11},\ \ldots,\ m_{(k-1)(k-1)}\} = \{m_{jj}\}_{j=0}^{k-1}$. Tenemos entonces, para cada $k = 0,1,2,\ldots$,

$$M \subset M_k \cup F_k.$$

De aquí se deduce, teniendo en cuenta las observaciones, que $osc(M) \le osc(M_k \cup F_k) = osc(M_k)$. Dado $M' \in \mathscr{P}_\infty(M)$, tendremos $osc(M') \le osc(M)$. Observemos además que $M' \cap M_{k-1} \in \mathscr{P}_\infty(M_{k-1})$, por lo que

$$\inf_{N \in \mathscr{P}_\infty(M_{k-1})} osc(N) \le osc(M' \cap M_{k-1}) = osc(M'),$$

donde la última igualdad es debida a que $M' \cap M_{k-1} \subset M'$ y $M' \setminus (M' \cap M_{k-1})$ es finito. Por tanto,

$$osc(M) \le osc(M_k) < \inf_{N \in \mathscr{P}_\infty(M_{k-1})} osc(N) + \frac{1}{k} \le osc(M') + \frac{1}{k}, \quad k = 1,2,\ldots$$

De aquí se deduce $osc(M) \le osc(M')$, con lo que, finalmente, $osc(M) = osc(M')$. Además $osc(M) > 0$ pues la sucesión $\{x_n\}_{n\in M}$ no es débilmente de Cauchy. Esto finaliza el paso 1.

Paso 2: Observemos que si $x^* \in X^*$ con $\|x^*\| \le 1$, $M \in \mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$ y $m,p \in M$ con $m,p > k$ para un cierto $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$|x^*(x_m) - x^*(x_p)| \le |x^*(x_m)| + |x^*(x_p)| \le 2 \sup_{\substack{n>k \\ n\in M}} |x^*(x_n)|,$$

y, por tanto,

$$\frac{osc(M)}{2} = \frac{1}{2} \sup_{\|x^*\|\le 1} \lim_{k\to\infty} \sup_{\substack{m,p>k \\ m,p\in M}} \left|x^*(x_m) - x^*(x_p)\right| \le \sup_{\|x^*\|\le 1} \lim_{k\to\infty} \sup_{\substack{n>k \\ n\in M}} |x^*(x_n)| = \sup_{\|x^*\|\le 1} \limsup_{n\in M} |x^*(x_n)|.$$

Por ello, podemos tomar $u^* \in X^*$ con $\|u^*\| \le 1$ tal que $\limsup_{n\in M} |u^*(x_n)| \ge \frac{osc(M)}{3}$. Se deduce que existe $M' \in \mathscr{P}_\infty(M)$ tal que la sucesión $\{u^*(x_n)\}_{n\in M'}$ converge y se verifica

$$\limsup_{n\in M} u^*(x_n) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in M'}} u^*(x_n),$$

por tanto, si $\theta = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in M'}} u^*(x_n)$, entonces $|\theta| \ge \frac{osc(M)}{3}$.

En el paso anterior demostramos que existe $M \in \mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$ tal que para todo $M' \in \mathscr{P}_\infty(M)$ se tiene $osc(M) = osc(M') > 0$. Trabajaremos en un subconjunto infinito de ese conjunto M. Además acabamos de demostrar que existe $u^* \in X^*$ con $\|u^*\| \le 1$ tal que

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in M'}} u^*(x_n) = \theta,$$

para un cierto $M' \in \mathscr{P}_\infty(M)$, verificándose $|\theta| \geq \frac{osc(M')}{3} = \frac{osc(M)}{3}$. Es justamente M' el conjunto en el que trabajaremos. Como cualquier subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ está en biyección con $\mathbb{N}$, podemos suponer directamente que $M' = \mathbb{N}$, simplificando así la notación (o lo que es lo mismo, simplificamos nuestra sucesión y nos quedamos con la subsucesión $\{x_n\}_{n\in M'}$ y haciendo un cambio de índices hacemos que n varíe en $\mathbb{N}$). Resumiendo: podemos suponer que para todo $M \in \mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$ tenemos que $osc(\mathbb{N}) = osc(M) = 4\delta > 0$ para un cierto $\delta > 0$ y que existe un funcional $u^* \in B_{X^*}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} u^*(x_n) = \theta,$$

verificándose $|\theta| \geq \frac{4\delta}{3} > \delta$. Con estas simplificaciones finalizamos el paso 2.

Paso 3: Sean $C = 1 + \delta^{-1} + \delta^{-2}$ y $\mathscr{V} \subset \mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$ el conjunto definido por

$$\mathscr{V} = \left\{M = \{m_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in \mathscr{P}_\infty(\mathbb{N}) \,:\, \exists x^* \in X^*,\, \|x^*\| \leq C,\, x^*(x_{m_j}) = (-1)^j,\, \forall j \in \mathbb{N}\right\}.$$

Afirmamos que $\mathscr{V}$ es cerrado en la topología de Cantor τ_C. Este tercer paso consiste en demostrar esto.

Podemos suponer que $\mathscr{V}$ es no vacío, ya que si lo fuese, sería cerrado en τ_C, que es lo que queremos demostrar. Tomamos una sucesión $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos en $\mathscr{V}$ convergiendo en τ_C a un elemento $M \in \mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$. Pondremos $M_n = \{m_{nj}\}_{j\in\mathbb{N}}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $M = \{m_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ (las sucesiones $\{m_{nj}\}_{j\in\mathbb{N}}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\{m_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ son estrictamente crecientes). Hemos de probar que $M \in \mathscr{V}$.

Por el teorema 5.12 de Alaoglu el conjunto $B = \{x^* \in X^* \,:\, \|x^*\| \leq C\}$ es compacto en la topología débil*. Tenemos que para cada M_n existe un $x_n^* \in B$ tal que $x_n^*(x_{m_{nj}}) = (-1)^j$. Por la compacidad débil* de B deducimos que la sucesión $\{x_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $\{x_{n_k}^*\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergente en la topología débil* a un elemento $x^* \in B$ (podemos suponer que B_{X^*} es sucesionalmente compacto en la topología débil*, ya que si no lo fuese, como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión básica, en lugar de trabajar con X podríamos trabajar con el subespacio $Y = [x_n]_{n\in\mathbb{N}}$ que es separable y, por tanto, por el lema 5.5, cumple que B_{Y^*} es sucesionalmente compacto en la topología débil*). Tendremos, por tanto, $\|x^*\| \leq C$. Además, como

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k}^*(x) = x^*(x), \quad \forall x \in X,$$

deducimos que $x^*(x_{m_{n_k j}}) = (-1)^j$ para todo $k, j \in \mathbb{N}$. Dado que la sucesión $\{M_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ también converge a M, podemos quedarnos con ella para simplificar notación. Es decir, podemos tomar una sucesión $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos en $\mathscr{V}$ convergiendo en τ_C a un elemento $M \in \mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$ y tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un $x_n^* \in B$ que verifica $x_n^*(x_{m_{nj}}) = (-1)^j$ para cada $j \in \mathbb{N}$, y la sucesión $\{x_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en la topología débil* a un elemento $x^* \in B$ que verifica $x^*(x_{m_{nj}}) = (-1)^j$ para todo $n, j \in \mathbb{N}$. Sólo falta por probar que $x^*(x_{m_j}) = (-1)^j$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Por la convergencia de la sucesión a M, se tiene que

$$d(M_n, M) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\chi_{M_n}(k) - \chi_M(k)|}{2^k} \longrightarrow 0, \text{ si } n \longrightarrow \infty,$$

por lo que para cada $N \in \mathbb{N}$ también tendremos

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{|\chi_{M_n}(k) - \chi_M(k)|}{2^k} \longrightarrow 0, \text{ si } n \longrightarrow \infty.$$

Por tanto, dado $N \in \mathbb{N}$, existirá $n_0(N)$ tal que si $n \geq n_0(N)$, entonces

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{|\chi_{M_n}(k) - \chi_M(k)|}{2^k} \leq 2^{-N},$$

y, en particular, si $1 \leq k \leq N$, entonces $|\chi_{M_n}(k) - \chi_M(k)| \leq 2^{-N}2^k < 2^{-N}2^N = 1$. Se deduce que si $n \geq n_0(N)$ y $1 \leq k \leq N$, tendremos

$$\chi_{M_n}(k) = \chi_M(k).$$

Poniendo $N = m_1$, si $n \geq n_0(m_1)$ tendremos que $1 = \chi_M(m_1) = \chi_{M_n}(m_1)$, luego existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $m_1 \in M_n$. Veamos que además m_1 es el primer elemento de M_n. Si no fuese así, existiría $j \in \mathbb{N}$ tal que $m_{nj} \in M_n$ y $m_{nj} < m_1 = N$, con lo que $1 = \chi_{M_n}(m_{nj}) = \chi_M(m_{nj})$. Se deduce que $m_{nj} \in M$, lo cual no es posible pues m_1 es el primer elemento (y más pequeño) de M. Por tanto, $m_1 = m_{n1}$ es el primer elemento de M_n. Además, tenemos

$$x^*(m_1) = x^*(m_{n1}) = (-1)^1.$$

Poniendo ahora, $N = m_2$, existirá $n_0(m_2)$ que podemos suponer mayor que $n_0(m_1)$ tal que si $n \geq n_0(m_2)$, entonces $1 = \chi_M(m_2) = \chi_{M_n}(m_2)$. Por ello, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $m_2 \in M_n$. Observemos que, por lo anterior, también $m_1 \in M_n$ y $m_1 = m_{n1}$. Entonces, m_2 es el segundo elemento de M_n. Si no fuese así, existiría $j \in \mathbb{N}$, $j > 2$ (observemos que no puede ser el primero pues lo es m_1) tal que $m_{nj} \in M_n$ y $m_{nj} < m_2 = N$. Tendríamos $1 = \chi_{M_n}(m_{nj}) = \chi_M(m_{nj})$, por lo que $m_{nj} \in M$. Como $m_{nj} < m_2$ solo puede ser $m_{nj} = m_1 = m_{n1}$, es decir, $j = 1$, lo cual es una contradicción. Por ello, m_2 es el segundo elemento de M_n. Además, se tiene

$$x^*(m_2) = x^*(m_{n2}) = (-1)^2.$$

Procederemos ya por inducción, ponemos $N = m_r$ para $r \in \mathbb{N}$, existirá $n_0(m_r)$ que podemos suponer $n_0(m_r) > n_0(m_{r-1}) > ... > n_0(m_2) > n_0(m_1)$, tal que si $n \geq n_0(m_r)$, entonces $1 = \chi_M(m_r) = \chi_{M_n}(m_r)$. Por ello, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $m_r \in M_n$. Por hipótesis de inducción, para $p \in \mathbb{N}$ con $p \leq r-1$, tendremos que $m_p \in M_n$ y $m_p = m_{np}$. Veamos que m_r es el r-ésimo elemento de M_n. Si no fuese así, existiría $j \in \mathbb{N}$, $j > r$ (no puede estar antes porque están los m_p con $p \leq r-1$) tal que $m_{nj} \in M_n$ y $m_{nj} < m_r = N$. Entonces, $1 = \chi_{M_n}(m_{nj}) = \chi_M(m_{nj})$, por lo que $m_{nj} \in M$. Como $m_{nj} < m_r$ solo puede ser $m_{nj} = m_p = m_{np}$, con $p \leq r-1$, es decir, $j = p \leq r-1$, lo cual es una contradicción. Por ello, m_r es el r-ésimo elemento de M_n y tenemos

$$x^*(m_r) = x^*(m_{nr}) = (-1)^r,$$

válido para todo $r \in \mathbb{N}$. Con esto hemos terminado de demostrar que

$$\mathcal{V} = \{M = \{m_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in \mathscr{P}_\infty(\mathbb{N}) : \exists x^* \in X^*, \|x^*\| \leq C, x^*(x_{m_j}) = (-1)^j, \forall j \in \mathbb{N}\}$$

es cerrado en la topología de Cantor τ_C y finalizamos el paso 3.

Paso 4: Como $\mathcal{V}$ es cerrado en la topología de Cantor τ_C, por el corolario 6.3, es completamente Ramsey y, por tanto, tiene la propiedad de Ramsey. En este paso veremos que existe $M \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ tal que $\mathcal{P}_\infty(M) \subset \mathcal{V}$ (con ello, también veremos que $\mathcal{V}$ es no vacío).

Sea $M \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$. Como $osc(M) = 4\delta$ (paso 2), existe $y^* \in B_{X^*}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{\substack{m,n>k \\ m,n\in M}} \left|y^*(x_m) - y^*(x_n)\right| \geq 2\delta.$$

En particular, la sucesión $\left\{y^*(x_n)\right\}_{n\in M}$ no converge. Ponemos

$$l = \lim_{k\to\infty} \sup_{\substack{m,n>k \\ m,n\in M}} \left|y^*(x_m) - y^*(x_n)\right| \geq 2\delta.$$

Existen $k_1, m_1, n_1 \in \mathbb{N}$ con $m_1, n_1 \geq k_1$ tales que

$$l - 1 \leq |y^*(x_{m_1}) - y^*(x_{n_1})| \leq l + 1.$$

Existen $k_2, m_2, n_2 \in \mathbb{N}$ con $m_2, n_2 \geq k_2$ y podemos suponer que $k_2 > k_1$, $m_2 > m_1$ y $n_2 > n_1$ tales que

$$l - \frac{1}{2} \leq |y^*(x_{m_2}) - y^*(x_{n_2})| \leq l + \frac{1}{2}.$$

Por inducción, existen unas sucesiones crecientes de números naturales, $\left\{k_p\right\}_{p\in\mathbb{N}}$, $\left\{m_p\right\}_{p\in\mathbb{N}}$ y $\left\{n_p\right\}_{p\in\mathbb{N}}$, con $m_p, n_p \geq k_p$ para todo $p \in \mathbb{N}$ tales que

$$l - \frac{1}{p} \leq |y^*(x_{m_p}) - y^*(x_{n_p})| \leq l + \frac{1}{p}, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Las sucesiones $\left\{y^*(x_{m_p})\right\}_{p\in\mathbb{N}}$ y $\left\{y^*(x_{n_p})\right\}_{p\in\mathbb{N}}$ están acotadas en $\mathbb{K}$, por lo que tienen una subsucesión convergente. Supongamos que la subsucesión de la primera converge a un cierto $\alpha \in \mathbb{K}$ y la de la segunda a un cierto $\beta \in \mathbb{K}$. Entonces, debe verificarse

$$|\alpha|, |\beta| \leq 1 \quad \text{y} \quad 2\delta \leq l = |\alpha - \beta|.$$

En definitiva, existe $M' = \left\{m_j\right\}_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}_\infty(M)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ con $|\alpha|, |\beta| < 1$ y $|\alpha - \beta| \geq 2\delta$ tales que $y^*(x_{m_{2j}}) \longrightarrow \alpha$, $y^*(x_{m_{2j-1}}) \longrightarrow \beta$. Recordemos que, por el paso 2, existe un funcional $u^* \in B_{X^*}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} u^*(x_n) = \theta,$$

verificándose $|\theta| \geq \frac{4\delta}{3} > \delta$. Ponemos

$$v^* = \frac{2}{\alpha - \beta} y^* - \frac{\alpha + \beta}{\theta(\alpha - \beta)} u^*.$$

Este nuevo funcional v^* verifica

$$\|v^*\| \leq \frac{1}{|\alpha - \beta|}\left(2 + \frac{|\alpha + \beta|}{|\theta|}\right) \leq \frac{1}{2\delta}\left(2 + \frac{2}{\delta}\right) = \delta^{-1} + \delta^{-2}$$

y, además,

$$\lim_{j\to\infty} v^*(x_{m_{2j}}) = \lim_{j\to\infty}\left(\frac{2}{\alpha-\beta}y^*\big(x_{m_{2j}}\big) - \frac{\alpha+\beta}{\theta(\alpha-\beta)}u^*\big(x_{m_{2j}}\big)\right) = \frac{2}{\alpha-\beta}\alpha - \frac{\alpha+\beta}{\theta(\alpha-\beta)}\theta = 1$$
$$\lim_{j\to\infty} v^*(x_{m_{2j-1}}) = \lim_{j\to\infty}\left(\frac{2}{\alpha-\beta}y^*\big(x_{m_{2j-1}}\big) - \frac{\alpha+\beta}{\theta(\alpha-\beta)}u^*\big(x_{m_{2j-1}}\big)\right) = \frac{2}{\alpha-\beta}\beta - \frac{\alpha+\beta}{\theta(\alpha-\beta)}\theta = -1,$$

Ahora ponemos $c_j = v^*(x_{m_j}) - (-1)^j$. Obsérvese que, por lo anterior, $c_j \longrightarrow 0$, por lo que tomando una subsucesión si fuese necesario, podemos suponer que $|c_j|$ es suficientemente pequeño. Recordemos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión básica cuya norma está acotada inferiormente por una constate positiva K, entonces, si $\{x_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de funcionales biortogonales asociados, se deduce que existe una constante $B > 0$ tal que $\|x_n^*\| \le B$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ya que si $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de proyecciones naturales asociadas y K_b es la constante de base, tenemos, para cada $x \in X$

$$\|x_n^*(x)x_n\| = \|S_n(x) - S_{n-1}(x)\| \le 2K_b\|x\| \implies |x_n^*(x)| \le \frac{2K_b}{\|x_n\|}\|x\| \implies \|x_n^*\| \le \frac{2K_b}{\|x_n\|} \le \frac{2K_b}{K} = B.$$

Por tanto, podemos suponer que $|c_j| \le 2^{-j}B^{-1}$. Ahora ponemos

$$x^* = v^* - \sum_{j=1}^{\infty} c_j x_{m_j}^*.$$

Tenemos entonces

$$\|x^*\| \le \|v^*\| + \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|\,\|x_{m_j}^*\| \le \delta^{-1} + \delta^{-2} + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j}B^{-1}B = \delta^{-1} + \delta^{-2} + 1 = C,$$

donde C es la constante definida al inicio del paso 3. Además,

$$\begin{aligned} x^*(x_{m_i}) &= v^*(x_{m_i}) - \sum_{j=1}^{\infty} c_j x_{m_j}^*(x_{m_i}) = v^*(x_{m_i}) - \sum_{j=1}^{\infty}\big(v^*(x_{m_j}) - (-1)^j\big)x_{m_j}^*(x_{m_i}) \\ &= v^*(x_{m_i}) - v^*(x_{m_i}) + (-1)^i = (-1)^i. \end{aligned}$$

Con esto hemos demostrado que $M' \in \mathcal{V}$. Como tenemos $M' \in \mathscr{P}_\infty(M)$, y $M \in \mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$ es arbitrario, esto demuestra que

$$\forall M \in \mathscr{P}_\infty(\mathbb{N}),\ \mathscr{P}_\infty(M) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset.$$

Ahora bien, hemos demostrado al inicio de este paso que $\mathcal{V}$ tiene la propiedad de Ramsey, por tanto, como no puede existir $M \in \mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$ tal que $\mathscr{P}_\infty(M) \cap \mathcal{V} = \emptyset$, concluimos que existe $M \in \mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$ tal que $\mathscr{P}_\infty(M) \subset \mathcal{V}$ (con ello, $\mathcal{V}$ es no vacío). Con esto finalizamos el paso 4.

Paso 5: Sea $M = \{m_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ el elemento de $\mathscr{P}_\infty(\mathbb{N})$, cuya existencia hemos probado en el paso anterior, ordenado de manera creciente. Tenemos que

$$\mathscr{P}_\infty(M) \subset \mathcal{V} = \big\{N = \{n_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in \mathscr{P}_\infty(\mathbb{N}) :\ \exists x^* \in X^*,\ \|x^*\| \le C,\ x^*(x_{n_j}) = (-1)^j,\ \forall j \in \mathbb{N}\big\}.$$

Afirmamos que la sucesión $M' = \{m_{2j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tiene la propiedad de que para cualquier elección de signos $\{\epsilon_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, existe $x^* \in X^*$ con $\|x^*\| \le C$ tal que $x^*(x_{m_{2j}}) = \epsilon_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Para demostrar esto, construiremos $N = \{n_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in \mathscr{P}_\infty(M)$ verificando

$$M' \subset N \subset M.$$

Obsérvese que para el conjunto N que construyamos, como está en $\mathscr{P}_\infty(M) \subset \mathscr{V}$, existirá $x^* \in X^*$ con $\|x^*\| \leq C$ tal que $x^*(x_{n_j}) = (-1)^j$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Sea pues $\{\epsilon_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una elección de signos. Construimos N de la siguiente forma:

- Si $\epsilon_1 = 1 \Longrightarrow n_1 = m_1,\, n_2 = m_2 \Longrightarrow x^*(x_{m_2}) = x^*(x_{n_2}) = (-1)^2 = 1 = \epsilon_1$.
  - Si $\epsilon_2 = 1 \Longrightarrow n_3 = m_3,\, n_4 = m_4 \Longrightarrow x^*(x_{m_4}) = x^*(x_{n_4}) = (-1)^4 = 1 = \epsilon_2$.
    - Si $\epsilon_3 = 1 \Longrightarrow n_5 = m_5,\, n_6 = m_6 \Longrightarrow x^*(x_{m_6}) = x^*(x_{n_6}) = (-1)^6 = 1 = \epsilon_3$.
    - Si $\epsilon_3 = -1 \Longrightarrow n_5 = m_6 \Longrightarrow x^*(x_{m_6}) = x^*(x_{n_5}) = (-1)^5 = -1 = \epsilon_3$.
  - Si $\epsilon_2 = -1 \Longrightarrow n_3 = m_4 \Longrightarrow x^*(x_{m_4}) = x^*(x_{n_3}) = (-1)^3 = -1 = \epsilon_2$.
    - Si $\epsilon_3 = 1 \Longrightarrow n_4 = m_6 \Longrightarrow x^*(x_{m_6}) = x^*(x_{n_4}) = (-1)^4 = 1 = \epsilon_3$.
    - Si $\epsilon_3 = -1 \Longrightarrow n_4 = m_5,\, n_5 = m_6 \Longrightarrow x^*(x_{m_6}) = x^*(x_{n_5}) = (-1)^5 = -1 = \epsilon_3$.
- Si $\epsilon_1 = -1 \Longrightarrow n_1 = m_2 \Longrightarrow x^*(x_{m_2}) = x^*(x_{n_1}) = (-1)^1 = -1 = \epsilon_1$.
  - Si $\epsilon_2 = 1 \Longrightarrow n_2 = m_4 \Longrightarrow x^*(x_{m_4}) = x^*(x_{n_2}) = (-1)^2 = 1 = \epsilon_2$.
    - Si $\epsilon_3 = 1 \Longrightarrow n_3 = m_5,\, n_4 = m_6 \Longrightarrow x^*(x_{m_6}) = x^*(x_{n_4}) = (-1)^4 = 1 = \epsilon_3$.
    - Si $\epsilon_3 = -1 \Longrightarrow n_3 = m_6 \Longrightarrow x^*(x_{m_6}) = x^*(x_{n_3}) = (-1)^3 = -1 = \epsilon_3$.
  - Si $\epsilon_2 = -1 \Longrightarrow n_2 = m_3,\, n_3 = m_4 \Longrightarrow x^*(x_{m_4}) = x^*(x_{n_3}) = (-1)^3 = -1 = \epsilon_2$.
    - Si $\epsilon_3 = 1 \Longrightarrow n_4 = m_6 \Longrightarrow x^*(x_{m_6}) = x^*(x_{n_4}) = (-1)^4 = 1 = \epsilon_3$.
    - Si $\epsilon_3 = -1 \Longrightarrow n_4 = m_5,\, n_5 = m_6 \Longrightarrow x^*(x_{m_6}) = x^*(x_{n_5}) = (-1)^5 = -1 = \epsilon_3$.

Reiterando este proceso se obtiene la sucesión $N = \{n_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in \mathscr{P}_\infty(M)$ deseada. En general, si ya se ha realizado el proceso para todo natural $i < j$ y tenemos $\epsilon_j = 1$ pondremos $n_k = m_{2j}$ para algún k par con $j \leq k \leq 2j$ (en este caso k será el menor par para el que n_k todavía no se ha definido y si n_{k-1} tampoco se ha definido, se pondrá $n_{k-1} = m_{2j-1}$). Y si $\epsilon_j = -1$ pondremos $n_k = m_{2j}$ para algún k impar con $j \leq k \leq 2j$ (en este caso k será el menor impar para el que n_k todavía no se ha definido y si n_{k-1} tampoco se ha definido, se pondrá $n_{k-1} = m_{2j-1}$). En cualquier caso obtenemos $x^*(x_{m_{2j}}) = x^*(x_{n_k}) = (-1)^k = \epsilon_j$ para cualquier $j \in \mathbb{N}$. Así pues, $M' = \{m_{2j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tiene la propiedad de que para cualquier elección de signos $\{\epsilon_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, existe $x^* \in X^*$ con $\|x^*\| \leq C$ tal que $x^*(x_{m_{2j}}) = \epsilon_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Con esto, finalizamos el paso 5.

Paso 6: En este paso finalizaremos la demostración del teorema. Veremos que la sucesión básica $\{x_{m_{2j}}\}_{j\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base canónica $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de l_1, siendo $M' = \{m_{2j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ la sucesión del paso anterior. Diferenciaremos aquí entre el caso real y el caso complejo.

- Caso real:
  Sea $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, tomamos una elección de signos $\{\epsilon_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ verificando $\epsilon_j = sgn(a_j)$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Por el paso anterior, existe $x^* \in X^*$ con $\|x^*\| \leq C$ tal que $x^*(x_{m_{2j}}) = \epsilon_j = sgn(a_j)$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Supongamos que la serie $\sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j$ converge. Se deduce que $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| < \infty$, y, por tanto,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|a_j x_{m_{2j}}\| = \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| \, \|x_{m_{2j}}\| \le \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| < \infty,$$

es decir, la serie $\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_{m_{2j}}$ es absolutamente convergente.

Recíprocamente, supongamos que la serie $\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_{m_{2j}}$ converge, tenemos entonces $\| \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_{m_{2j}} \| < \infty$ y

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| &= \sum_{j=1}^{\infty} a_j \, sgn(a_j) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \, x^*(x_{m_{2j}}) = x^*\big(\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_{m_{2j}}\big) = \Big| x^*\big(\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_{m_{2j}}\big) \Big| \\ &\le \|x^*\| \, \Big\| \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_{m_{2j}} \Big\| \le C \Big\| \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_{m_{2j}} \Big\| < \infty,\end{aligned}$$

con lo que $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in l_1$ y, por tanto, la serie $\sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j$ converge.

En consecuencia, en el caso real, la sucesión básica $\{x_{m_{2j}}\}_{j\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base canónica $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de l_1.

- Caso complejo:

  Sea $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, tomamos dos elecciones de signos $\{\epsilon_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ y $\{\xi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ verificando $\epsilon_j = sgn\big(Re(a_j)\big)$ y $\xi_j = sgn\big(Im(a_j)\big)$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Por el paso anterior, existen $x_1^*, x_2^* \in X^*$ con $\|x_1^*\| \le C$ y $\|x_2^*\| \le C$ tales que $x_1^*(x_{m_{2j}}) = \epsilon_j = sgn\big(Re(a_j)\big)$ y $x_2^*(x_{m_{2j}}) = \xi_j = sgn\big(Im(a_j)\big)$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

  Si la serie $\sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j$ converge, se demuestra, exactamente igual que en el caso real, que la serie $\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_{m_{2j}}$ converge.

  Si la serie $\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_{m_{2j}}$ converge, las series $\sum_{j=1}^{\infty} Re(a_j) x_{m_{2j}}$ y $\sum_{j=1}^{\infty} Im(a_j) x_{m_{2j}}$ convergen y con razonamientos análogos a los utilizados en el caso real, se demuestra que

  $$\sum_{j=1}^{\infty} \big|Re(a_j)\big| \le C \Big\| \sum_{j=1}^{\infty} Re(a_j) x_{m_{2j}} \Big\| < \infty \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \big|Im(a_j)\big| \le C \Big\| \sum_{j=1}^{\infty} Im(a_j) x_{m_{2j}} \Big\| < \infty,$$

  y, con ello

  $$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| = \sum_{j=1}^{\infty} \big|Re(a_j) + i\, Im(a_j)\big| \le \sum_{j=1}^{\infty} \big|Re(a_j)\big| + \sum_{j=1}^{\infty} \big|Im(a_j)\big| < \infty,$$

  con lo que $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in l_1$ y, por tanto, la serie $\sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j$ converge.

  De modo que, también en el caso complejo, la sucesión básica $\{x_{m_{2j}}\}_{j\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base canónica $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de l_1.

En cualquier caso (real o complejo) hemos llegado a que las sucesiones básicas son equivalentes, con lo que, finalmente, hemos terminado de demostrar el teorema de Rosenthal sobre l_1. $\square$

Veamos, por último, un interesante corolario que se deduce del teorema de Rosenthal y del hecho de que la base canónica de l_1 es acotada y sin subsucesiones débilmente de Cauchy (vimos este hecho al inicio del capítulo).

Corolario 6.4. *Un espacio de Banach X posee alguna sucesión acotada sin subsucesiones débilmente de Cauchy si, y sólo si, X contiene una copia (isomórfica) de l_1.*

Demostración. Si posee una sucesión acotada sin subsucesiones débilmente de Cauchy, por el teorema 6.6 de Rosenthal, posee una sucesión básica $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que es equivalente a la base canónica de l_1. Por tanto, el espacio de Banach $[x_n]_{n\in\mathbb{N}}$ es isomorfo a l_1.

Recíprocamente, si X contiene una copia de l_1, posee una sucesión acotada sin subsucesiones débilmente de Cauchy porque la base canónica $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de l_1 es acotada y sin subsucesiones débilmente de Cauchy. $\square$

Observemos, además, que si X es un espacio de Banach, cuyo dual X^* es separable, no puede contener ninguna copia de l_1, ya que por el corolario 5.8, cualquier sucesión acotada tendrá una subsucesión débilmente de Cauchy.

CONCLUSIONES

Gracias a este proyecto nos hemos iniciado en el campo de la geometría de los espacios de Banach. Nos hemos basado en el estudio de los espacios de sucesiones: los espacios l_p, $1 \le p < \infty$, C_0 y l_∞. A través de los diversos capítulos hemos ido viendo las definiciones de estos espacios, sus propiedades básicas, el estudio de sus duales y biduales, el concepto de reflexividad y, finalmente, gracias a los conceptos de bases de Schauder y sucesiones básicas, hemos podido profundizar más en la geometría de estos espacios y conocer algunas de sus propiedades más avanzadas, entre las que destacamos: el teorema de Pitt (teorema 5.4), la condición de espacio de Banach primo de los espacios l_p, $1 \le p < \infty$ y C_0 (teorema 5.6), que el espacio l_1 posee la propiedad de Schur (teorema 5.8) y el teorema de Rosenthal sobre l_1 (teorema 6.6).

Tras muchísimos años de estudio por parte de un amplio número de matemáticos, da la impresión de que, actualmente, se conoce absolutamente todo acerca de estos espacios, pero realmente no es así. Todavía quedan problemas abiertos sobre los espacios de sucesiones y dejaremos constancia aquí de uno de ellos:

El problema de la base de Rosenthal:

Se dice que una sucesión básica normalizada $\{x_n\}$ en un espacio de Banach X es perfectamente homogénea si cualquier sucesión básica en bloque normalizada $\{v_n\}$ de $\{x_n\}$ es equivalente a $\{x_n\}$. En este proyecto hemos probado que las bases canónicas de vectores unidad de los espacios C_0 y l_p para $1 \le p < \infty$ son perfectamente homogéneas (ver lema 5.4). Remarquemos que además se cumple el siguiente teorema, atribuido a M. Zippin, y cuya demostración puede encontrarse en el libro de referencia [11]:

Teorema. *Cualquier sucesión básica $\{x_n\}$ perfectamente homogénea es equivalente a la base canónica de C_0 o de l_p para algún $1 \le p < \infty$.*

Hay una noción algo más débil que el concepto de sucesión básica perfectamente homogénea: se dice que una sucesión básica normalizada $\{x_n\}$ en un espacio de Banach X es base de Rosenthal si cualquier sucesión básica en bloque normalizada $\{v_n\}$ de $\{x_n\}$ tiene una subsucesión que es equivalente a $\{x_n\}$.

Y he aquí el problema de la base de Rosenthal, al cual, a día de hoy, no se le ha dado respuesta y que fue formulado por el propio Rosenthal (ver libro de referencia [12]):

¿Es cierto que cualquier base de Rosenthal $\{x_n\}$ *es equivalente a la base canónica de* C_0 *o de* l_p *para algún* $1 \leq p < \infty$*?*

Queda, por tanto, trabajo por delante. Esto me anima (y espero que anime a otros) a continuar con el estudio de los espacios de sucesiones.

Y no es la única linea posible de trabajo a seguir. Están, por ejemplo, los espacios de funciones, linea de trabajo que también ha sido estudiada por muchísimos matemáticos a lo largo de la historia y en la que todavía quedan muchos problemas abiertos. Otra linea de trabajo posible y con amplias posibilidades de desarrollo es el estudio de aplicaciones no lineales en espacios de Banach.

BIBLIOGRAFÍA

[1] M. Fréchet, “Sur quelques points du Calcul Fonctionne”, Rend. Circ. Mat. di Palermo, 22, 1906.

[2] O. Toeplitz, “Ueber einige aufgaben der analysis situs Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft in Solothurn”, 1911.

[3] E. Helly, “Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten”, 1923.

[4] S. Banach, “Théorie des opérations linéaires”, 1932.

[5] G. Köthe and O. Toeplitz, “Lineare Räume mit unendlich vielen Koordinaten und Ringe unendlicher Matrizen”, Jour. ReineAngew. Math., 1934.

[6] A. Grothendieck, “Produits tensoriels topologiques et spaces nucléaires”, 1955.

[7] Rafael Payá Albert, “Apuntes de Análisis Funcional”.

[8] Beatriz Hernando Boto, “Operadores en espacios de Banach”.

[9] Manuel Valdivia Ureña, “Análisis Matemático V”.

[10] Fernando Albiac, Nigel J. Kalton, “Topics in Banach Space Theory”.

[11] M. Zippin, “On perfectly homogeneous bases in Banach spaces”, Israel J. Math., 1966.

[12] V. Ferenczi, A. M. Pelczar and C. Rosendal, “On a question of Haskell P. Rosenthal concerning a characterization of c_0 and l_p”, Bull. London Math. Soc. 36 (2004).

[13] J. Diestel, “Secuences and series in Banach spaces”.

[14] Pandelis Dodos, Jordi López-Abad y Stevo Todorcevic, “Banach spaces and Ramsey theory: some open problems”.