



FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA, INVESTIGACIÓN OPERATIVA y
CÁLCULO NUMÉRICO

TRABAJO FIN DE MÁSTER:

**INTRODUCCIÓN A LOS MODELOS DE
VOLATILIDAD ESTOCÁSTICA**

Trabajo Fin de Máster presentado por Gema Cuesta Yustas para
el Máster Universitario en Matemáticas Avanzadas

Supervisado por:
Tomás Prieto Rumeau

Índice

| | |
|--|-----------|
| 1. Introducción | 2 |
| 2. Cálculo Estocástico y Modelo de Black-Scholes | 2 |
| 2.1. Opciones | 2 |
| 2.1.1. Definición | 2 |
| 2.1.2. Tipos de Opciones | 4 |
| 2.2. Nociones de Cálculo Estocástico | 4 |
| 2.2.1. Definición de Movimiento Browniano o proceso de Wiener | 5 |
| 2.2.2. Integrales Estocásticas | 5 |
| 2.2.3. Fórmula de Itô | 7 |
| 2.2.4. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas | 8 |
| 2.2.5. Fórmula de Feynman Kac | 9 |
| 2.3. Modelo de Black-Scholes-Merton | 9 |
| 2.3.1. Marco Histórico | 10 |
| 2.3.2. Hipótesis que sostiene | 10 |
| 2.3.3. Formulación | 11 |
| 2.3.4. Solución específica para Opciones Europeas | 12 |
| 2.3.5. ¿Cómo se utiliza? | 14 |
| 3. Modelos de Volatilidad Estocástica | 16 |
| 3.1. Motivación de considerar la Volatilidad Estocástica | 16 |
| 3.1.1. Crisis 1987 | 16 |
| 3.1.2. Carencias Black-Scholes-Merton | 16 |
| 3.1.3. Nuevos Modelos | 17 |
| 3.2. La Volatilidad como Proceso Estocástico | 17 |
| 3.2.1. Formulación | 17 |
| 3.3. Modelo Heston | 20 |
| 3.3.1. Descripción y Formulación | 20 |
| 3.3.2. Solución específica para Opciones Europeas | 21 |
| 3.4. Volatilidad Local | 23 |
| 3.4.1. Descripción y Formulación | 24 |
| 3.4.2. Solución específica para Opciones Europeas | 24 |
| 4. Resultados numéricos para modelos de volatilidad estocástica | 25 |
| 4.1. Integración de Monte Carlo | 25 |
| 4.2. Aplicación al modelo de Heston | 25 |
| 4.2.1. Discretización de Euler | 25 |
| 4.2.2. Discretización de Milstein | 26 |
| 4.2.3. Discretización Implícita | 26 |
| 4.2.4. El muestreo de la Ley de Transición exacta (Simulación de Broadie-Kaya) | 27 |
| 5. Conclusiones | 27 |

1. Introducción

Con el presente trabajo se pretende mostrar una introducción a los modelos de volatilidad estocástica, la motivación de su existencia, un primer contacto con su definición y su importancia en la valoración de opciones financieras.

La estructura del texto se organiza en torno a tres secciones principales:

- En la primera sección, *Cálculo Estocástico y Modelo de Black-Scholes*, se hace un repaso de las nociones de cálculo estocástico a las que se va a hacer referencia en algún punto del desarrollo del trabajo. También se contextualiza el modelo de Black-Scholes-Merton que se trata del principal punto de partida del surgimiento de la necesidad de plantearse los modelos de volatilidad estocástica.
- La segunda sección, *Modelos de Volatilidad Estocástica*, es el núcleo del trabajo. En esta sección se plantean las claves que llevan al estudio de los modelos de volatilidad estocástica, así como, el desarrollo de los mismos, su formulación y su aplicación para la valoración de opciones europeas sobre acciones.
- En la tercera sección, *Resultados numéricos para modelos de volatilidad estocástica*, se da una ligera visión de los métodos de Monte Carlo más usados en la práctica para materializar computacionalmente los modelos de volatilidad estocástica (especialmente el modelo Heston que es el más usado en la valoración de opciones).

Para finalizar se plantean una serie de conclusiones con el propósito de situar a los modelos de volatilidad estocástica, lo que han supuesto en la valoración de instrumentos financieros y las nuevas necesidades que se han generado en la práctica con el uso de los mismos.

2. Cálculo Estocástico y Modelo de Black-Scholes

En esta sección vamos a hacer un repaso al Modelo de Black-Scholes para poner en contexto a los Modelos de Volatilidad Estocástica. Para ello recordaremos qué son las Opciones Financieras y algunos conceptos básicos en el Cálculo Estocástico.

2.1. Opciones

En esta sección vamos a estudiar las opciones financieras, que son el sujeto de valoración del modelo de Black-Scholes.

2.1.1. Definición

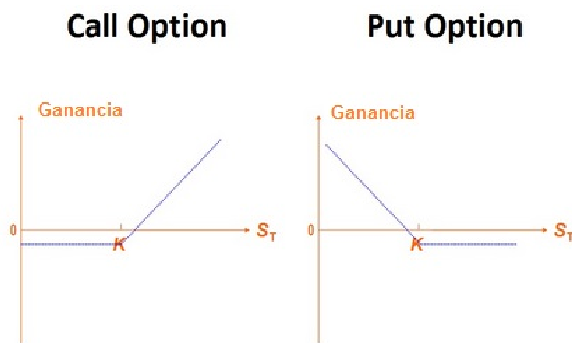
Una Opción Financiera es un contrato que otorga el derecho (y no la obligación) a comprar o vender bienes y valores a un precio predeterminado hasta

una determinada fecha. Cualquier bien o valor susceptible de ser comprado o vendido se denomina activo. El precio de la propia Opción se llama *Prima*. La *Prima* de una opción se negocia en función de la ley de oferta y demanda que establece el mercado. No obstante, su valor teórico depende de una serie de parámetros:

- *Subyacente*(S): Es el activo sobre el que versa el contrato.
- *Strike*(K): Es el precio predeterminado del subyacente.
- *Vencimiento*(T): Tiempo hasta la finalización del contrato.
- *Tipos de Interés*(r): Determinan el precio del dinero.
- *Volatilidad* (σ): Volatilidad de los precios del subyacente.

Según se compre el derecho a comprar o vender el subyacente las opciones pueden ser:

- *Call*: obliga al vendedor a desprenderse del subyacente en caso de que el comprador haga uso de su derecho de compra.
- *Put*: obliga al vendedor a comprar el subyacente si el comprador decide ejercer su derecho a la venta.



Los contratos de opciones también pueden ser clasificados por la diferencia entre su Strike y el valor del Subyacente al vencimiento en tres categorías: In the money, At the money u Out of the money.

| Precio de ejercicio | Opción Call | Opción Put |
|--------------------------------------|-------------|------------|
| Opción <i>In the money</i> (ITM) | $K \leq S$ | $K \geq S$ |
| Opción <i>At the money</i> (ATM) | $K = S$ | $K = S$ |
| Opción <i>Out of the money</i> (OTM) | $K \geq S$ | $K \leq S$ |

Cuadro 1: Clasificación de las opciones según la posición de K respecto S

2.1.2. Tipos de Opciones

Las opciones más comunes, que son las que se conocen como *plain vanilla*, son las opciones europeas y las opciones americanas:

- *Opciones europeas*: sólo pueden ser ejercidas en la fecha de vencimiento. Antes de esa fecha, pueden comprarse o venderse si existe un mercado donde se negocien.
- *Opciones americanas*: pueden ser ejercidas en cualquier momento entre el día de la compra y el día de vencimiento, ambos inclusive, y al margen del mercado en el que se negocien.

También podemos encontrar en los mercados opciones más complejas, que son las que se conocen como exóticas. Aunque se podría enumerar una larga lista, las más conocidas son:

- *Opciones Bermuda*: sólo pueden ser ejercidas en determinados momentos entre la fecha de compra y el vencimiento. Permiten el ejercicio en días particulares.
- *Opciones Digitales*: es un tipo de opción donde la rentabilidad es o bien una cierta cantidad fija de algunos activos o nada en absoluto.
- *Opciones Barrera*: la opción deja de existir knock out- (o comienza a existir knock in-) cuando el subyacente alcanza (o se cruza) un determinado valor (barrier level).
- *Opciones Asiáticas*: Son aquellas opciones cuyo valor depende de la media del valor del subyacente en un período determinado.

2.2. Nociones de Cálculo Estocástico

En esta sección vamos a repasar algunos conceptos fundamentales del Cálculo Estocástico para facilitar el entendimiento del estudio expuesto.

2.2.1. Definición de Movimiento Browniano o proceso de Wiener

Se dice que Z_t es un Movimiento Browniano o proceso de Wiener si Z es una función definida en algún intervalo $I = [0, T]$ (eventualmente puede ser $T = +\infty$), con las siguientes propiedades:

- $Z_0 = 0$
- Para todo t y para todo $a \geq 0$ la variable aleatoria $Z_{t+a} - Z_t$ es independiente de $Z_s : 0 \leq s \leq t$
- Para todo t y para todo $a \geq 0$

$$Z_{t+a} - Z_t \approx N(0, \sqrt{a}) \quad (1)$$

2.2.2. Integrales Estocásticas

En esta sección daremos las ideas básicas utilizadas para construir la integral estocástica en el sentido de Itô. Para ello, enunciaremos un listado de Definiciones y Lemas que nos permitirán formalizar la definición de Integral de Itô.

Definición 2.2.1: Sea $B_t(w)$ un movimiento Browniano n -dimensional. Entonces definimos $F_t = F_t^{(n)}$ como la σ -álgebra generada por las variables aleatorias $B_s(\cdot)$ tal que $s \leq t$. En otras palabras, F_t es la σ -álgebra más pequeña que contiene todos los conjuntos de la forma:

$$w; B_{t_1}(w) \in F_1, \dots, B_{t_k}(w) \in F_k \quad (2)$$

donde $t_j \leq t$ y $F_j \subset \mathfrak{R}_n$ como conjuntos Borelianos con $j \leq k = 1, 2, \dots$ (Se asume que todos los conjuntos de medida cero están incluidos en F_t).

Definición 2.2.2: Una función $h(w)$ es F_t -medible si y sólo si h puede ser definida punto a punto como límite de suma de funciones de la forma:

$$g_1(B_{t_1})g_2(B_{t_2})\dots g_k(B_{t_k}) \quad (3)$$

donde g_1, g_2, \dots, g_k son funciones continuas y acotadas y $t_j \leq t$ para todo $j \leq k$, $k = 1, 2, \dots$

Definición 2.2.3: Sea $\{N_t\}_{t \geq 0}$ una familia creciente de σ -álgebras de subconjuntos de Ω . Un proceso estocástico $g(t, w) : [0, \infty] \times \Omega \rightarrow \mathfrak{R}_n$ se dice que es N_t -adaptado si para cada $t \geq 0$ la función:

$$w \rightarrow g(t, w) \quad (4)$$

es N_t -medible.

Vamos a definir ahora nuestra clase de funciones para las que la Integral de Itô estaría bien definida:

Definición 2.2.4: Sev $V = V(S, T)$ la clase de funciones

$$f(t, w) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathfrak{R} \quad (5)$$

tal que:

- $(t, w) \rightarrow f(t, w)$ es $B \times F$ - medible, donde B son los Borelianos de la σ -álgebra en $[0, \infty)$.
- $f(t, w)$ es F_t - adaptado.
- $E[\int_S^T f(t, w)^2 dt \leq \infty]$.

Definición 2.2.5: Una función $\phi \in V$ se dice que es elemental si es de la forma:

$$\phi(t, w) = \sum_j e_j(w) \cdot \chi_{[t_j, t_{j+1}]}(t) \quad (6)$$

donde e_j debe ser F - medible y χ es la función característica.

Para funciones elementales es razonable definir la integral como sigue:

$$\int_S^T \phi(t, w) dB_t(w) = \sum_{j \geq 0} e_j(w) [B_{t_{j+1}} - B_{t_j}](w) \quad (7)$$

Lema 2.2.1 (Propiedad de Isometría de Itô): Si $\phi(t, w)$ es una función acotada y elemental entonces:

$$E \left[\left(\int_S^T \phi(t, w) dB_t(w) \right)^2 \right] = E \left[\int_S^T \phi(t, w)^2 dt \right] \quad (8)$$

La idea ahora es usar la propiedad de Isometría de Itô para extender la definición de integral dada para funciones elementales a funciones que pertenecen a V . Haremos esto en 3 pasos:

Paso 1: Sea $g \in V$ función acotada y $g(\cdot, w)$ continua para cada w . Entonces existen funciones elementales $\phi_n \in V$ tal que:

$$E \left[\int_S^T (g - \phi_n)^2 dt \right] \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty \quad (9)$$

Paso 2: Sea $h \in V$ función acotada. Entonces existen funciones acotadas $g_n \in V$ tales que $g_n(\cdot, w)$ es continua para toda w y toda n , y:

$$E \left[\int_S^T (h - g_n)^2 dt \right] \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty \quad (10)$$

Paso 3: Sea $f \in V$. Entonces existe una serie $\{h_n\} \subset V$ tal que h_n es acotada para cada n y

$$E \left[\int_S^T (f - h_n)^2 dt \right] \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty \quad (11)$$

Con toda esta información, estamos preparados para definir la Integral de Itô para $f \in V$:

$$\int_S^T f(t, w) dB_t(w) \text{ para } f \in V \quad (12)$$

Por los Pasos 1,2 y 3, existen funciones elementales $\phi_n \in V$ tales que:

$$E \left[\int_S^T (f - \phi_n)^2 dt \right] \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty \quad (13)$$

Entonces definimos la **Integral de Itô** de f como:

Definición 2.2.6:

$$I[f](w) : \int_S^T f(t, w) dB_t(w) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S^T \phi_n(t, w) dB_t(w) \quad (14)$$

El límite existe como un elemento de $L^2(P)$ puesto que por la Propiedad de Isometría de Itô la secuencia de funciones $\left\{ \int_S^T \phi_n(t, w) dB_t(w) \right\}$ es de Cauchy en $L^2(P)$.

Destaquemos algunos corolarios importantes:

Corolario 2.2.1 (Propiedad de Isometría de Itô)

$$E \left[\left(\int_S^T f(t, w) dB_t(w) \right)^2 \right] = E \left[\int_S^T f(t, w)^2 dt \right] \quad (15)$$

Corolario 2.2.2: Si $f(t, w) \in V$ y $f_n(t, w) \in V(S, T)$ para $n = 1, 2, \dots$, y $E \left[\left(\int_S^T (f_n(t, w) - f(t, w))^2 dt \right) \right] \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces:

$$\int_S^T f_n(t, w) dB_t \rightarrow \int_S^T f(t, w) dB_t \quad (16)$$

en $L^2(P)$ cuando $n \rightarrow \infty$.

2.2.3. Fórmula de Itô

El Lema o Fórmula de Itô es una fórmula que es muy útil para valorar integrales estocásticas.

Definición 2.3.1 (Proceso de Itô): Sea B_t un movimiento Browniano en (Ω, F, P) . Un proceso de Itô es un proceso estocástico X_t en (Ω, F, P) de la forma:

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s, w) ds + \int_0^t v(s, w) dB_s \quad (17)$$

donde $u(s, w)$ y $v(s, w)$ cumplen las siguientes condiciones:

- $P[\int_0^t v(s, w)^2 ds \leq \infty \text{ para todo } t \geq 0] = 1$
- $P[\int_0^t |u(s, w)| ds \leq \infty \text{ para todo } t \geq 0] = 1$

Si X_t es un proceso de Itô también puede ser descrito en forma de ecuación diferencial estocástica:

$$dX_t = udt + vdB_t \quad (18)$$

Teorema 2.3.1 (Fórmula de Itô) Sea X_t un proceso de Itô dado por:

$$dX_t = udt + vdB_t \quad (19)$$

Sea $g(t, x) \in C^2([0, \infty) \times \mathfrak{R})$. Entonces

$$Y_t = g(t, X_t) \quad (20)$$

es también un proceso de Itô y además:

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t)(dX_t)^2 \quad (21)$$

donde $(dX_t)^2 = (dX_t)(dX_t)$ es calculado de acuerdo a: $dt \cdot dt = dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0$, $dB_t \cdot dB_t = dt$

2.2.4. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

En este apartado vamos a enunciar un teorema sobre la existencia y unicidad de posibles soluciones $X_t(w)$ de la ecuación diferencial estocástica:

$$\frac{dX_t}{dt} = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \quad (22)$$

con $b(t, x) \in \mathfrak{R}$, $\sigma(t, x) \in \mathfrak{R}$ y B_t es un movimiento browniano.

Teorema 2.3.2 (Existencia y unicidad para Ecuaciones Diferenciales Estocásticas) Sea $T \geq 0$ y $b(., .) : [0, T] \times \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$, $\sigma(., .) : [0, T] \times \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^{n \times m}$ funciones medibles tales que:

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|); \quad x \in \mathfrak{R}^n, t \in [0, T] \quad (23)$$

para alguna constante C , (donde $|\sigma|^2 = \sum |\sigma_{ij}|^2$) y se cumple que:

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq D|x - y|; \quad x, y \in \mathfrak{R}^n, t \in [0, T] \quad (24)$$

para alguna constante D . Sea Z una variable aleatoria que es independiente de la σ -álgebra $F_\infty^{(m)}$ generada por $B_s(\cdot)$, $s \geq 0$ y tal que $E[|Z|^2] \leq \infty$. Entonces la ecuación diferencial estocástica:

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad X_0 = Z \quad (25)$$

tiene una única solución $X_t(w)$ continua en t .

2.2.5. Fórmula de Feynman Kac

La fórmula de Feynman Kac establece un vínculo entre las ecuaciones en derivadas parciales parabólicas (PDEs) y los procesos estocásticos. Permite resolver EDPs mediante caminos de procesos estocásticos y, la parte que más nos interesa, permite obtener procesos estocásticos a partir de EPDs.

Teorema 2.4.1 (La fórmula de Feynman-Kac): Sea $f \in C_0^2(\mathfrak{R}^n)$ y $q \in C(\mathfrak{R}^n)$. Asumimos que q está acotada inferiormente.

Sea X_t , tal que:

$$\frac{dX_t}{dt} = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \quad (26)$$

1. Si tomamos

$$v(t, x) = E^x \left[\exp \left(- \int_0^t q(X_s) ds \right) f(X_t) \right] \quad (27)$$

entonces,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = Av - qv; \quad t \geq 0, x \in \mathfrak{R}^n \quad (28)$$

con $Av = b \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$

$$v(0, x) = f(x); \quad x \in \mathfrak{R}^n \quad (29)$$

2. Además, si $w(t, x) \in C^{1,2}(\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^n)$ está acotada en $K \times \mathfrak{R}^n$ para cada compacto $K \subset \mathfrak{R}$ y w es solución de la ecuación de (26), entonces $w(t, x) = v(t, x)$ dada en (27).

La demostración de la Fórmula de Feynman Kac puede hacerse basándose en la Fórmula de Itô.

Con una ligera adaptación de las condiciones del Teorema se puede conseguir la solución analítica de la PDE de Black-Scholes.

2.3. Modelo de Black-Scholes-Merton

En este apartado vamos a centrarnos en un repaso al modelo de valoración de Opciones Europeas de Black-Scholes-Merton (B-S)[8], que es el principal desencadenante de lo que se desarrolla en el resto del estudio.

2.3.1. Marco Histórico

La teoría de Procesos Estocásticos, iniciada en los años 1930 por los probabilistas Paul Lévy y Joseph Doob, había adquirido en la década de 1970 un considerable desarrollo en el que habían participado matemáticos y probabilistas de la talla de Kolmogorov, Feller, Kai Lai Chung, Loéve, Cramér, Dynkin y muchos otros. Sus aplicaciones en Física teórica, Epidemiología, Sociología, Ingeniería, etc. son importantes, pero no habían tenido la entidad suficiente para que los procesos estocásticos trascendiesen del ámbito académico de las Universidades y los Centros de Investigación.

Sin embargo en 1973 dos economistas, Fisher Black y Myron Scholes, desarrollaron una técnica de valoración de opciones, explicada con más precisión por Robert Merton, que supuso una verdadera revolución en el mundo financiero. El problema de la valoración de opciones era un problema pendiente desde antiguo y, como reconocimiento, el premio Nobel de Economía de 1997 fue otorgado a Scholes y Merton (Black había muerto en 1995) por sus trabajos en esta materia, dado su tremendo impacto en la comprensión de las leyes que rigen los mercados financieros. La metodología de Black-Scholes-Merton se basa en técnicas de procesos estocásticos considerablemente sofisticadas y, consecuentemente, desde mediados de la década de 1980, el mundo de los brokers y las sociedades de inversión han adquirido un sorprendente interés por las peculiaridades del movimiento browniano y los entresijos del cálculo diferencial estocástico de Itô.

2.3.2. Hipótesis que sostiene

Las hipótesis sobre las que se sustenta el modelo de Black-Scholes configuran un escenario ideal, un mercado perfecto:

- El precio del activo subyacente se modeliza como un proceso estocástico de media μ y desviación típica σ . B_t es un proceso de Wiener:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \quad (30)$$

- La tasa de interés libre de riesgo r y la volatilidad σ del activo subyacente se suponen constantes durante el tiempo que dura la opción.
- No hay costes de transacción asociados a las coberturas.
- El activo subyacente no paga dividendos durante la vida de la opción. El dividendo es la parte de los beneficios (o reservas) que una sociedad reparte entre sus accionistas en un momento determinado, como retribución al capital que han aportado a la empresa.
- No hay posibilidad de arbitraje. La ausencia de arbitraje significa que todos los activos libres de riesgo deben tener la misma rentabilidad.
- Los activos son completamente líquidos, es decir, la compra y venta del activo puede tener lugar continuamente.

- El mercado es completo. Supongamos que el mercado es libre de arbitraje y está formado por los activos S_1, S_2, \dots, S_n y un activo libre de riesgo. Sea X un derivado sobre S_1, S_2, \dots, S_n . Si existe un portfolio h basado en dichos activos subyacentes tal que vale lo mismo que X :

$$V^h = X \quad (31)$$

y replica X , entonces decimos que X es cubierto por h . Así, llamamos a h portfolio de cobertura. Si para cada derivado X sobre S_1, S_2, \dots, S_n existe un portfolio de cobertura entonces el mercado es completo.

2.3.3. Formulación

En primer lugar vamos a formular el modelo de Black-Scholes para Opciones.

Como ya mencionamos anteriormente en las hipótesis sobre las que se plantea el modelo, supongamos que el valor de una acción S es un proceso estocástico y satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \quad (32)$$

donde μ es la tasa promedio de rendimiento, t es el tiempo, σ es la volatilidad y B_t es un proceso de Wiener.

El valor de la Opción Europea sobre la acción lo denotaremos por $V = V(S, t)$ y es una función de S y de tiempo t . Aplicando *Teorema 2.3.1 (Fórmula de Itô unidimensional)* a la función V tenemos que:

$$dV = \frac{\delta V}{\delta t} dt + \frac{\delta V}{\delta S} dS + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 V}{\delta S^2} (dS)^2 \quad (33)$$

Sustituyendo el valor de dS y reagrupando tenemos que:

$$dV = \left(\frac{\delta V}{\delta t} + \mu S \frac{\delta V}{\delta S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\delta^2 V}{\delta S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\delta V}{\delta S} dB_t \quad (34)$$

Para valorar el precio de la opción, dado que el mercado es completo, se puede hacer a través de un portfolio apropiado que elimine la aleatoriedad del movimiento browniano. Como V depende de S , esto puede hacerse construyendo un portfolio que se compone de una opción y un número $-\frac{\delta V}{\delta S}$ de acciones. El valor de este portfolio vendrá dado por:

$$\Pi = V - \frac{\delta V}{\delta S} S \quad (35)$$

Así, la variación de valor del portfolio será:

$$d\Pi = dV - \frac{\delta V}{\delta S} dS \quad (36)$$

Si sustituimos los valores dV y dS tenemos que:

$$d\Pi = \left(\frac{\delta V}{\delta t} + \mu S \frac{\delta V}{\delta S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\delta^2 V}{\delta S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\delta V}{\delta S} dB_t - \frac{\delta V}{\delta S} (\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t) \quad (37)$$

Por lo tanto,

$$d\Pi = \left(\frac{\delta V}{\delta t} + \mu S \frac{\delta V}{\delta S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\delta^2 V}{\delta S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\delta V}{\delta S} dB_t - \frac{\delta V}{\delta S} (\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t) \quad (38)$$

$$d\Pi = \left(\frac{\delta V}{\delta t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\delta^2 V}{\delta S^2} \right) dt \quad (39)$$

Además la ganancia de invertir una cantidad X a una tasa sin riesgo r durante un intervalo de tiempo dt sería $rXdt$, como partimos de las hipótesis de que no hay posibilidad de arbitraje ni costes de transacción, se tendría que:

$$r\Pi dt = \left(\frac{\delta V}{\delta t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\delta^2 V}{\delta S^2} \right) dt \quad (40)$$

Sustituyendo $\Pi = V - \frac{\delta V}{\delta S} S$ en la expresión anterior y dividiendo por dt se obtiene la ecuación diferencial de Black-Scholes:

$$\frac{\delta V}{\delta t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\delta^2 V}{\delta S^2} + rS \frac{\delta V}{\delta S} - rV = 0 \quad (41)$$

2.3.4. Solución específica para Opciones Europeas

El modelo de Black-Scholes tiene solución cerrada para Opciones Call/Put sobre acciones. A continuación veremos esta fórmula y posteriormente veremos como adaptar dicho modelo a otro tipo activos subyacentes. A veces, se usa B-S para valorar opciones americanas suponiendo que son un conjunto de Europeas. En el caso de las Opciones Europeas Call y Put con Strike K y fecha de vencimiento T , al final del período, cuando $T = t$, la opción debe valer exactamente $\max(S - K, 0)$ si es Call y $\max(K - S, 0)$ si es Put. Para este derivado en particular y con la condición dada, se puede aplicar el *Teorema 2.4.1 (La fórmula de Feynman-Kac)* a la ecuación diferencial estocástica de Black-Scholes y obtener una solución cerrada.

$$C = S_0 N(d_1) - K \exp(-rT) N(d_2) \quad (42)$$

$$P = K \exp(-rT) N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \quad (43)$$

donde,

- C es el valor de una opción de compra.
- P es el valor de una opción de venta.
- S_0 es el valor inicial de la acción.

- K es el strike de la opción.
- T es el tiempo en años para que finalice la opción.
- N es la función de distribución acumulativa de la distribución normal.
- $d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$
- $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$
- σ es la volatilidad (desviación típica) del activo subyacente.

Aunque una de las hipótesis del modelo era la ausencia de **pago de dividendos**, se puede adaptar la fórmula para opciones europeas sobre acciones que sí pagan dividendos. Tanto si son discretos como continuos, la clave está en descontarlos al precio de la acción.

1. *Dividendos Discretos*: Supongamos que se pagan n dividendos durante el tiempo de vida de la acción: D_1, D_2, \dots, D_n en tiempos t_1, t_2, \dots, t_n respectivamente, entonces descontaríamos a S_0 los mismos obteniendo $S_0 - \sum_{i=0}^n D_i \exp(-rt_i)$, de tal manera que el modelo de B-S sería:

$$C = (S_0 - \sum_{i=0}^n D_i \exp(-rt_i))N(d_1) - K \exp(-rT)N(d_2) \quad (44)$$

$$P = K \exp(-rT)N(-d_2) - (S_0 - \sum_{i=0}^n D_i \exp(-rt_i))N(-d_1) \quad (45)$$

2. *Dividendos Continuos*: Sea q la tasa de dividendos continuos. El precio inicial de la acción pasaría a ser $S_0 \exp(-qT)$ y la fórmula de B-S:

$$C = (S_0 \exp(-qT))N(d_1) - K \exp(-rT)N(d_2) \quad (46)$$

$$P = K \exp(-rT)N(-d_2) - (S_0 \exp(-qT))N(-d_1) \quad (47)$$

con $d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$ y $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$.

Según el **tipo de activo subyacente**, tenemos algunas adaptaciones del B-S:

1. *Opciones sobre Índices*: Un índice es una selección de valores (acciones) que intentan representar una variedad de mercados, industrias, sectores o empresas. Ejemplos de Índices son el IBEX 35, STOXX50, etc. Considerando ahora q como tasa de rentabilidad media esperada por dividendos durante la vida de la opción, S_0 es el nivel actual del índice:

$$C = (S_0 \exp(-qT))N(d_1) - K \exp(-rT)N(d_2) \quad (48)$$

$$P = K \exp(-rT)N(-d_2) - (S_0 \exp(-qT))N(-d_1) \quad (49)$$

con $d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$ y $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$.

2. *Opciones sobre Divisas*: Una divisa es un activo que proporciona una rentabilidad continua por dividendos igual a r_f . Estas opciones son utilizadas para comprar un seguro cuando la cartera está expuesta al riesgo de tipos de cambio.

$$C = (S_0 \exp(-r_f T))N(d_1) - K \exp(-rT)N(d_2) \quad (50)$$

$$P = K \exp(-rT)N(-d_2) - (S_0 \exp(-r_f T))N(-d_1) \quad (51)$$

$$\text{con } d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - r_f + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \text{ y } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

3. *Opciones sobre Futuros*: El precio inicial de un futuro es $F_0 \exp(-rT)$, con r la tasa de interés libre de riesgo, por lo que sustituyendo en la fórmula original de B-S y sacando factor común, obtenemos:

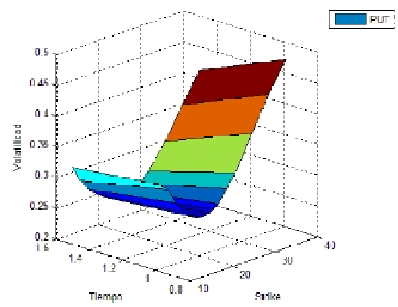
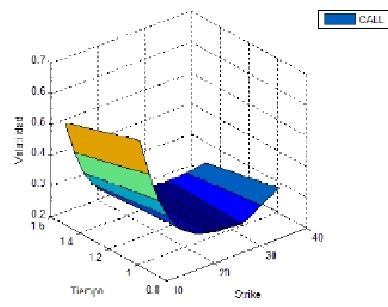
$$C = \exp(-rT)[(F_0)N(d_1) - KN(d_2)] \quad (52)$$

$$P = \exp(-rT)[KN(-d_2) - S_0N(-d_1)] \quad (53)$$

$$\text{con } d_1 = \frac{\ln(F_0/K) + (\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \text{ y } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

2.3.5. ¿Cómo se utiliza?

El principal cometido para el que se utiliza el modelo de B-S en el mundo real es para calcular la volatilidad implícita σ . Las entidades financieras manejan opciones complejas, exóticas. Un método para intentar valorar dichos productos, obteniendo un precio realista de mercado, es calcular dicho precio utilizando una volatilidad implícita obtenida a partir del B-S: para un Strike K y Vencimiento T dados, dicha volatilidad sería la que mejor ajusta el precio de las Opciones Call y Put Europeas que se cotizan en el mercado (y a cuyo precio las empresas tienen acceso a través de diferentes medios de datos de mercado como Bloomberg, Reuters..) calculado con la fórmula de B-S. Al variar K y T se obtienen superficies de volatilidad. Aunque las superficies de volatilidad deben recalcularse cada cierto tiempo, gestionarse con volatilidades es mucho más estable que gestionarse directamente con precios directos de las opciones, pues es una manera que permite filtrar los movimientos en el mercado que afectan al precio de la opción de forma constante tales como el precio del subyacente o lo tipos de interés.



3. Modelos de Volatilidad Estocástica

En este capítulo vamos a desarrollar el objetivo principal de nuestro trabajo: Los Modelos de Volatilidad Estocástica. Veremos qué suscitó el estudio de los mismos, su formulación, posibles soluciones y métodos numéricos asociadas a su resolución.

3.1. Motivación de considerar la Volatilidad Estocástica

En este apartado nos detendremos en las causas principales que condujeron a la necesidad de replantearse el Modelo de Black Scholes e investigar alternativas. Fruto de esta investigación surgieron los Modelos de Volatilidad Estocástica.

3.1.1. Crisis 1987

El suelo de Wall Street se resquebrajó el 19 de octubre de 1987. El índice bursátil Dow Jones, que contaba con casi 100 años a sus espaldas, se hundió irremisiblemente como nunca antes lo había hecho. Se desplomó un 22,6 por ciento en un único día, que desde ese mismo instante quedó grabado para siempre en la memoria de los mercados. Ninguna otra sesión, ni siquiera las que acontecieron durante el crac de 1929, igualaba en envergadura a los descensos sufridos durante aquella jornada, bautizada para la historia como **Lunes Negro**. Fuera de Estados Unidos, el impacto, si bien no resultó tan acusado, también fue calamitoso. Entre los descensos más acusados destacaron los del índice japonés Nikkei 225, que bajó un 14,9 por ciento, y los del británico Footsie 100, que cedió un 12,2 por ciento. Como mencionamos en una sección anterior, el mundo de los brokers y las sociedades de inversión habían adquirido un sorprendente interés por el modelo de B-S para la valoración de Opciones. Tras los acontecimientos del Lunes Negro el modelo pasa a ser cuestionado.

3.1.2. Carencias Black-Scholes-Merton

El hecho de considerar la volatilidad como un parámetro fijo implica que el modelo Black-Scholes no recoja características críticas de la volatilidad que pueden ayudar a prever situaciones como la crisis de 1987. Las características más relevantes de la volatilidad son:

1. *Exceso de curtosis - Volatilidad Leptocúrtica.* La curtosis es una medida estadística que determina el grado de concentración que presentan los valores de una muestra en la región central de la distribución. Si existe una gran concentración de valores (exceso de curtosis) decimos que la muestra es Leptocúrtica.
2. *Conglomerados de Volatilidad.* Son períodos de alta y baja volatilidad, es decir, si la volatilidad es baja o alta en un período tiende a seguir este comportamiento.

3. *Volatilidad alta puntual.* De manera ocasional, se producen valores altos de volatilidad, que se interpretan como discontinuidades de salto en los precios.
4. *Volatilidad moderada a largo plazo.* Periodos de alta o baja volatilidad tienden a estar precedidos de períodos en los que la volatilidad es más moderada a largo plazo.
5. *Asimetría.* Se presenta un comportamiento asimétrico de las series de volatilidades, según informaciones de los mercados financieros.
6. *Movimientos conjuntos de Volatilidad.* Es decir, que al estudiar en diferentes mercados series distintas, pero del mismo concepto (cotizaciones, tipos de interés, entre otros), se observa que los movimientos importantes en un mercado están relacionados con movimientos importantes en otro mercado.

3.1.3. Nuevos Modelos

Con la necesidad de ser capaces de recoger las características propias de la volatilidad para tener mejores estimaciones de los precios de las opciones surgen los Modelos de Volatilidad Estocástica. Estos modelos permiten explicar de forma consistente por qué opciones con diferentes Strikes y Vencimientos tienen diferentes volatilidades implícitas calculadas con el Black Scholes (esto es lo que se conoce como el **Smile** de la Volatilidad). Además, aunque hay modelos que pueden ajustar el smile (como los modelos de Volatilidad Local por ejemplo), son los modelos de Volatilidad Estocástica los que asumen la estocasticidad realista de los precios del subyacentes.

3.2. La Volatilidad como Proceso Estocástico

En esta sección desarrollaremos la formulación del Modelo de Volatilidad Estocástica para opciones, cuya principal característica es considerar la volatilidad como un proceso estocástico.

3.2.1. Formulación

Las variables de las ecuaciones que definirán el modelo de Volatilidad Estocástica para valorar Opciones serán las siguientes:

1. S : Es el precio de la acción sobre la que se contrata la opción.
2. v : Es la varianza de la acción S .

Supongamos que ambas variables son Procesos Estocásticos y que satisfacen la siguiente Ecuación Diferencial Estocástica:

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dZ_1 \quad (54)$$

$$dv_t = \alpha(S_t, v_t, t)dt + \eta\beta(S_t, v_t, t)\sqrt{v_t}dZ_2 \quad (55)$$

$$\langle dZ_1, dZ_2 \rangle = \rho dt \quad (56)$$

donde μ_t es la media de los retornos de los precios de la acción, η es la volatilidad de la volatilidad y ρ es la correlación entre los retornos de la acción y los cambios en v_t . dZ_1 y dZ_2 son procesos de Wiener.

La primera ecuación es del estilo de la ecuación de Black-Scholes, la diferencia es que la volatilidad se modelada como $\sqrt{v_t}$.

La segunda ecuación es muy general, de hecho, no asumimos formas para las funciones $\alpha(\cdot)$ y $\beta(\cdot)$.

Para deducir las ecuaciones de Black-Scholes partíamos de las condiciones de *ausencia de arbitraje* y *mercado completo*, es decir, la cartera formada por la opción V y la acción S era libre de riesgo y, por lo tanto, ganaba la rentabilidad del activo libre de riesgo r .

En el modelo de volatilidad estocástica, tenemos que tener tanto una cobertura para el precio de la acción, como una cobertura para lo cambios estocásticos de volatilidad. Para ello, consideremos la cartera Π formada por:

1. La opción sobre la acción que queremos valorar cuyos valores denotamos por $V(S, v, t)$.
2. Una cantidad $-\Delta$ de la acción.
3. Una cantidad $-\Delta_1$ de otro activo cuyo valor V_1 depende de la volatilidad.

Así, nuestro portfolio quedaría de la siguiente manera:

$$\Pi = V - \Delta S - \Delta_1 V_1 \quad (57)$$

Además, sabemos que por aplicando *Teorema 2.3.1 (Fórmula de Itô unidimensional)* a la función V tenemos que:

$$dV = \frac{\delta V}{\delta t} dt + \frac{\delta V}{\delta S} dS + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 V}{\delta S^2} (dS)^2 \quad (58)$$

Así, la variación del valor del portfolio Π en un intervalo de tiempo dt sería:

$$\begin{aligned} d\Pi = & \left\{ \frac{\delta V}{\delta t} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\delta^2 V}{\delta S^2} + \rho \eta v \beta S \frac{\delta^2 V}{\delta v \delta S} + \frac{1}{2} \eta^2 v \beta^2 \frac{\delta^2 V}{\delta v^2} \right\} dt \\ & - \Delta_1 \left\{ \frac{\delta V_1}{\delta t} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\delta^2 V_1}{\delta S^2} + \rho \eta v \beta S \frac{\delta^2 V_1}{\delta v \delta S} + \frac{1}{2} \eta^2 v \beta^2 \frac{\delta^2 V_1}{\delta v^2} \right\} dt \\ & + \left\{ \frac{\delta V}{\delta S} - \Delta_1 \frac{\delta V_1}{\delta S} - \Delta \right\} dS \\ & + \left\{ \frac{\delta V}{\delta v} - \Delta_1 \frac{\delta V_1}{\delta v} \right\} dv \end{aligned} \quad (59)$$

donde, por simplificar, hemos eliminado la dependencia del tiempo t en las variables S y v , y la dependencia de α y β de las variables S_t , v_t y t .

Para conseguir un portfolio libre de riesgo, es decir, su rentabilidad debe ser igual a la del activo libre de riesgo que denotaremos por r , tenemos que eliminar los términos dS y dv , para ello, los igualamos a cero:

$$\frac{\delta V}{\delta S} - \Delta_1 \frac{\delta V_1}{\delta S} - \Delta = 0 \quad (60)$$

$$\frac{\delta V}{\delta v} - \Delta_1 \frac{\delta V_1}{\delta v} = 0 \quad (61)$$

Así,

$$\begin{aligned} d\Pi &= \left\{ \frac{\delta V}{\delta t} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\delta^2 V}{\delta S^2} + \rho\eta v\beta S \frac{\delta^2 V}{\delta v\delta S} + \frac{1}{2}\eta^2 v\beta^2 \frac{\delta^2 V}{\delta v^2} \right\} dt \\ &- \Delta_1 \left\{ \frac{\delta V_1}{\delta t} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\delta^2 V_1}{\delta S^2} + \rho\eta v\beta S \frac{\delta^2 V_1}{\delta v\delta S} + \frac{1}{2}\eta^2 v\beta^2 \frac{\delta^2 V_1}{\delta v^2} \right\} dt \\ &= r\Pi dt \\ &= r(V - \Delta S - \Delta_1 V_1) dt \end{aligned} \quad (62)$$

Por otro lado, de las ecuaciones que hemos igualado a cero, podemos deducir los valores δ_1 y δ :

$$\Delta_1 = \frac{\frac{\delta V}{\delta v}}{\frac{\delta V_1}{\delta v}} \quad (63)$$

$$\Delta = \frac{\delta V}{\delta S} - \Delta_1 \frac{\delta V_1}{\delta S} \quad (64)$$

Así,

$$\Delta = \frac{\delta V}{\delta S} - \frac{\frac{\delta V}{\delta v}}{\frac{\delta V_1}{\delta v}} \frac{\delta V_1}{\delta S} \quad (65)$$

En la práctica, no existe un mercado real de activos V_1 como sí lo tenemos de activos S . Por eso, en el desarrollo que aplicamos a continuación, acabamos llegando a una ecuación en la que tenemos un grado de libertad (función ϕ), porque realmente no sabemos valorar V_1 . Éste grado de libertad pone de manifiesto que se tiene un mercado incompleto.

Agrupando todos los términos en V al lado derecho y todos los términos en V_1 al lado izquierdo en la ecuación de $d\Pi$ (después de sustituir δ_1 y δ por los valores anteriores) tenemos que:

$$\frac{\frac{\delta V}{\delta t} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\delta^2 V}{\delta S^2} + \rho\eta v\beta S \frac{\delta^2 V}{\delta v \delta S} + \frac{1}{2}\eta^2 v\beta^2 \frac{\delta^2 V}{\delta v^2} + rS \frac{\delta V}{\delta S} - rV}{\frac{\delta V}{\delta v}} = \frac{\frac{\delta V_1}{\delta t} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\delta^2 V_1}{\delta S^2} + \rho\eta v\beta S \frac{\delta^2 V_1}{\delta v \delta S} + \frac{1}{2}\eta^2 v\beta^2 \frac{\delta^2 V_1}{\delta v^2} + rS \frac{\delta V_1}{\delta S} - rV_1}{\frac{\delta V_1}{\delta v}} \quad (66)$$

La única posibilidad de que ambos lados sean iguales es que ambos lados sean iguales a una función f de variables S , v y t independientes entre sí. Por lo que podemos deducir que:

$$\frac{\delta V}{\delta t} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\delta^2 V}{\delta S^2} + \rho\eta v\beta S \frac{\delta^2 V}{\delta v \delta S} + \frac{1}{2}\eta^2 v\beta^2 \frac{\delta^2 V}{\delta v^2} + rS \frac{\delta V}{\delta S} - rV = -(\alpha - \phi\beta\sqrt{v}) \frac{\delta V}{\delta v} \quad (67)$$

donde, sin pérdida de generalidad, hemos escrito una función arbitraria f de S , v y t como $(\alpha - \phi\beta\sqrt{v}) \frac{\delta V}{\delta v}$ donde α y β son las funciones de la Ecuación Diferencial Estocástica propuesta anteriormente y ϕ es una función de S , v y t .

Esta ecuación Estocástica tiene solución cerrada sólo en contadas ocasiones, veamos en el siguiente apartado el ejemplo más conocido.

3.3. Modelo Heston

En esta sección vamos a presentar el modelo de volatilidad estocástica más popular, conocido como Modelo de Heston[5]. Su popularidad se debe a que, a diferencia del resto de modelos de volatilidad estocástica, tiene una rápida solución casi cerrada y de fácil implementación para Opciones Europeas Call y Put.

3.3.1. Descripción y Formulación

El modelo de Heston corresponde al modelo resultante de escoger:

- $\alpha(S, v_t, t) = -\lambda(v_t - \bar{v})$
- $\beta(S, v, t) = 1$
- $\phi(S, v, t) = 0$

y sustituir estos valores en el modelo general de volatilidad estocástica.

Empezando por las ecuaciones que definen las variables estocásticas de partida S y v , tendríamos que:

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dZ_1 \quad (68)$$

$$dv_t = -\lambda(v_t - \bar{v})dt + \eta\sqrt{v_t}dZ_2 \quad (69)$$

$$\langle dZ_1 dZ_2 \rangle = \rho dt \quad (70)$$

donde λ sería la velocidad de reversión de v_t a su media \bar{v}

Sustituyamos ahora nuestros valores de α , β y ϕ en la ecuación (67) para tener una fórmula de valoración de una opción V:

$$\frac{\delta V}{\delta t} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\delta^2 V}{\delta S^2} + \rho\eta v\beta S \frac{\delta^2 V}{\delta v \delta S} + \frac{1}{2}\eta^2 v \frac{\delta^2 V}{\delta v^2} + rS \frac{\delta V}{\delta S} - rV = \lambda(v_t - \bar{v}) \frac{\delta V}{\delta v} \quad (71)$$

3.3.2. Solución específica para Opciones Europeas

Apliquemos el modelo de Heston para valorar Opciones Europeas.

Sea K el strike de una opción europea sobre una acción, T su vencimiento, $F_{t,T}$ es el precio forward de la acción en T . Denotemos $x := \log(F_{t,T}/K)$. Además supongamos que vamos a calcular el precio de la opción en tiempo T en vez de hoy qué sería en tiempo t . El precio de la opción lo denotaremos como C y definiremos $\tau = T - t$. Con estas premisas, la ecuación (71) quedaría:

$$-\frac{C}{\tau} + \frac{1}{2}vC_{11} - \frac{1}{2}vC_1 + \frac{1}{2}\eta^2 v C_{22} + \rho\eta v C_2 - \lambda(v_t - \bar{v})C_2 = 0 \quad (72)$$

donde los subíndices 1 y 2 los usamos para denotar las derivadas respecto a x y v respectivamente.

Supongamos que la solución de esa ecuación es del estilo de Black-Scholes:

$$C(x, v, \tau) = K[\exp(x)P_1(x, v, \tau) - P_0(x, v, \tau)] \quad (73)$$

El primer término representa la pseudo-expectativa de que el precio de la opción sea igual al Strike y el segundo término representa la pseudoprobabilidad de que se ejecute la opción.

Sustituyendo la solución supuesta de C en la ecuación (72), tenemos que P_0 y P_1 satisfacen:

$$-\frac{\delta P_j}{\delta \tau} + \frac{1}{2}v \frac{\delta^2 P_j}{\delta x^2} - \left(\frac{1}{2} - j\right)v \frac{\delta P_j}{\delta x} + \frac{1}{2}\eta^2 v \frac{\delta^2 P_j}{\delta v^2} + \rho\eta v \frac{\delta^2 P_j}{\delta x \delta v} + (a - b_j v) \frac{\delta P_j}{\delta v} = 0 \quad (74)$$

para $j = 0, 1$, donde

$$a = \lambda\bar{v} \quad (75)$$

$$b_j = \lambda - j\rho\eta \quad (76)$$

sujetos a la condición de:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} P_j(x, v, \tau) = \{1 \text{ si } x \geq 0; 0 \text{ si } x \leq 0\} = \theta(x) \quad (77)$$

Resolvamos la ecuación a través de la transformada de Fourier de P_j :

$$\overline{P}(u, v, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-iux) P(x, v, \tau) \quad (78)$$

Entonces,

$$\overline{P}(u, v, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-iux) \theta(x) = \frac{1}{iu} \quad (79)$$

La inversa de la transformada de Fourier viene dada por:

$$P(u, v, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi} \exp(iux) \overline{P}(u, v, \tau) \quad (80)$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (74) tenemos que:

$$-\frac{\overline{P}_j}{\delta\tau} - \frac{1}{2}u^2 v \overline{P}_j - \left(\frac{1}{2} - j\right) iuv \overline{P}_j + \frac{1}{2}\eta^2 v \frac{\delta^2 \overline{P}_j}{\delta v^2} + \rho\eta iuv \frac{\delta \overline{P}_j}{\delta v} + (a - bv) \frac{\delta \overline{P}_j}{\delta v} = 0 \quad (81)$$

Definamos:

$$\alpha = -\frac{u^2}{2} - \frac{iu}{2} + iju \quad (82)$$

$$\beta = \lambda - \rho\eta j - \rho\eta iu \quad (83)$$

$$\gamma = \frac{\eta^2}{2} \quad (84)$$

Así, la ecuación (81) quedaría:

$$\left\{ \alpha \overline{P}_j - \beta \frac{\delta \overline{P}_j}{\delta v} + \gamma \frac{\delta^2 \overline{P}_j}{\delta v^2} \right\} + a \frac{\delta \overline{P}_j}{\delta v} - \frac{\delta \overline{P}_j}{\delta \tau} = 0 \quad (85)$$

Si ahora definimos,

$$\overline{P}_j(u, v, \tau) = \exp[C(u, \tau)\overline{v} + D(u, \tau)v] \overline{P}_j(u, v, \tau) = \frac{1}{iu} \exp[C(u, \tau)\overline{v} + D(u, \tau)v] \quad (86)$$

Tenemos que:

$$\frac{\delta \overline{P}_j}{\delta \tau} = \left\{ \overline{v} \frac{\delta C}{\delta \tau} + v \frac{\delta D}{\delta \tau} \right\} \overline{P}_j \quad (87)$$

$$\frac{\delta \overline{P}_j}{\delta v} = D \overline{P}_j \quad (88)$$

$$\frac{\delta^2 \overline{P}_j}{\delta v^2} = D^2 \overline{P}_j \quad (89)$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (85) se satisfice que:

$$\frac{\delta C}{\delta \tau} = \lambda D \quad (90)$$

$$\frac{\delta D}{\delta \tau} = \alpha - \beta D + \gamma D^2 = \gamma(D - r_+)(D - r_-) \quad (91)$$

Donde,

$$r_{\pm} = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\gamma} = \frac{\beta \pm d}{\tau^2} \quad (92)$$

Integrando las ecuaciones anteriores, con las condiciones de que $C(u, 0) = 0$ y $D(u, 0) = 0$, llegamos a:

$$D(u, \tau) = r - \frac{1 - \exp(-d\tau)}{1 - g \exp(-d\tau)} \quad (93)$$

$$C(u, \tau) = \lambda r_- \tau - \frac{2}{\tau^2} \log\left(\frac{1 - g \exp(-d\tau)}{1 - g}\right) \quad (94)$$

Donde,

$$g = \frac{r_-}{r_+} \quad (95)$$

Teniendo definidas $C(u, \tau)$ y $D(u, \tau)$, tenemos definida $\overline{P}_j(u, v, \tau)$. Aplicando la inversa de la transformada de Fourier tenemos que $P_j(x, v, \tau)$ son integrales de funciones reales:

$$P_j(x, v, \tau) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \operatorname{Re} \left\{ \frac{\exp(C_j(u, \tau)\overline{v}) + D_j(u, \tau)v + iux}{iu} \right\} \quad (96)$$

Así, esta integral puede ser aproximada usando métodos numéricos. Una vez que tenemos las pseudo-probabilidades calculadas, tenemos el precio de la opción $C(x, v, t) = K[\exp(x)P_1(x, v, \tau) - P_0(x, v, \tau)]$.

3.4. Volatilidad Local

Dada la complejidad computacional de los modelos de volatilidad estocástica y la dificultad para ajustar parámetros que repliquen los precios de mercado de las opciones vanilla, se busca un camino más simple para valorar opciones exóticas y surge el modelo de Volatilidad Local.

3.4.1. Descripción y Formulación

El modelo de Volatilidad Local parte del modelo de Black-Scholes y sustituye la volatilidad constante por una volatilidad que es función del propio activo S_t y del tiempo t :

$$\sigma_t = \sigma(S_t, t; S_0) \quad (97)$$

Así el modelo de Volatilidad Local sería:

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma(S_t, t) S_t dZ_t \quad (98)$$

donde μ_t es la media de los retornos de los precios del activo y Z_t es un proceso de Wiener.

3.4.2. Solución específica para Opciones Europeas

Este trabajo fue realizado por Dupire[2].

Para una fecha de vencimiento T y un precio S_0 a día de hoy de la acción, la colección $[C(S_0, K, T)]$ de precios de opciones europeas sobre acciones para diferentes strikes mantiene la siguiente relación con la función de densidad φ del precio S_T :

$$C(S_0, K, T) = \int_K^\infty dS_t \varphi(S_t, T; S_0) (S_t - K) \quad (99)$$

Derivando dos veces respecto de K :

$$\varphi(K, T; S_0) = \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} \quad (100)$$

Conocida la distribución del precio de la acción S_T para cada T condicionada al precio S_0 , Dupire muestra que dado el conjunto de los precios de todas las Opciones Europeas sobre S , se puede determinar un único funcional $\sigma(S_t, t; S_0)$ tal que:

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma(S_t, t) S_t dZ_t \quad (101)$$

Aplicando el Lema de Itô junto con la condición de no haber arbitraje obtenemos una ecuación en derivadas parciales sobre el precio de la acción, la cual es una generalización de la de Black-Scholes. En particular, la función de densidad $\varphi(K, T; S_0) = \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}$ debe satisfacer la ecuación de Feynman Kac y esto nos lleva a la siguiente ecuación para el precio de opciones europeas:

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{\sigma^2 K^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} + (r_t - D_t) (C - K \frac{\partial C}{\partial K}) \quad (102)$$

donde r_t es el tipo de interés libre de riesgo, D_t es la tasa de dividendos, C es la abreviatura para $C(S_0, K, T)$ y σ es la abreviatura para $\sigma(S_t, t; S_0)$.

4. Resultados numéricos para modelos de volatilidad estocástica

Los métodos numéricos por excelencia para simular aleatorios, son los Métodos de Monte Carlo. En la práctica, la mayoría de los que se han desarrollado para simular la volatilidad estocástica se han hecho con el modelo de Heston por ser el que tiene una implementación más asequible dentro del universo de los modelos de volatilidad estocástica.

4.1. Integración de Monte Carlo

La idea elemental de los métodos de Monte Carlo es obtener muestras aleatorias del universo de posibilidades y tomar la fracción de ellas que caen dentro de un conjunto dado como una estimación del volumen del mismo. La ley de los grandes números asegura la convergencia del estimador a medida que el número de muestras aleatorias se incrementa.

4.2. Aplicación al modelo de Heston

Veamos diferentes métodos de Monte Carlo para simular la volatilidad estocástica en el modelo de Heston:

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dZ_1 \quad (103)$$

$$dv_t = -\lambda(v_t - \bar{v})dt + \eta\sqrt{v_t}dZ_2 \quad (104)$$

$$\langle dZ_1 dZ_2 \rangle = \rho dt \quad (105)$$

4.2.1. Discretización de Euler

Si consideramos una discretización de Euler para resolver la ecuación:

$$dv_t = -\lambda(v_t - \bar{v})dt + \eta\sqrt{v_t}dZ_2 \quad (106)$$

tendríamos que:

$$v_{i+1} = v_i - \lambda(v_i - \bar{v})\Delta t + \eta\sqrt{v_i}\sqrt{\Delta t}Z \quad (107)$$

donde Z se distribuye como una $N(0,1)$. Este método puede dar lugar a volatilidades negativas. Para evitar este problema, se suelen usar dos aproximaciones:

1. Asumir que $v = 0$ si $v \leq 0$.
2. Asumir que $v = -v$ si $v \leq 0$.

4.2.2. Discretización de Milstein

Si añadimos un término de segundo orden en el desarrollo de Taylor de v que utilizamos en la Discretización de Euler, tenemos el método de discretización de Milstein:

$$v_{i+1} = v_i - \lambda(v_i - \bar{v})\Delta t + \eta\sqrt{v_i}\sqrt{\Delta t}Z + \frac{\eta^2}{4}\Delta t(Z^2 - 1) \quad (108)$$

La ecuación anterior puede reescribirse como:

$$v_{i+1} = \left(\sqrt{v_i} + \frac{\eta}{2}\sqrt{\Delta t}Z\right)^2 - \lambda(v_i - \bar{v})\Delta t - \frac{\eta^2}{4}\Delta t \quad (109)$$

Observemos que si $v_i = 0$ y $\frac{4\lambda\bar{v}}{\eta^2} \geq 1$ entonces $v_{i+1} \geq 0$. Ésto indica que el hecho de que se dé una volatilidad negativa es bastante reducido. Incluso, con los parámetros que se suelen dar en la práctica, aunque $\frac{4\lambda\bar{v}}{\eta^2} \leq 1$, la frecuencia con la que la volatilidad sale negativa es casi nula. Esto es una ventaja respecto a la discretización de Euler además, es menos costoso computacionalmente por lo que se suele preferir utilizar el método de Milstein.

4.2.3. Discretización Implícita

Consideremos el método de Euler y sumemos y restemos términos en v_{i+1} :

$$\begin{aligned} v_{i+1} &= v_i - \lambda(v_i - \bar{v})\Delta t + \eta\sqrt{v_i}\sqrt{\Delta t}Z = \\ &= v_i - \lambda(v_{i+1} - \bar{v})\Delta t + \eta\sqrt{v_{i+1}}\sqrt{\Delta t}Z - \eta(\sqrt{v_{i+1}} - \sqrt{v_i})\sqrt{\Delta t}Z + (\text{otros términos}) \end{aligned} \quad (110)$$

Observemos que:

$$\sqrt{v_{i+1}} - \sqrt{v_i} = \frac{\eta}{2}\sqrt{\Delta t}Z + (\text{otros términos}) \quad (111)$$

Sustituyendo (111) en la ecuación (110) y teniendo en cuenta que $E[Z^2] = 1$, obtenemos la discretización implícita:

$$v_{i+1} = v_i - \lambda(v_{i+1} - \bar{v})\Delta t + \eta\sqrt{v_{i+1}}\sqrt{\Delta t}Z - \frac{\eta}{2}\Delta t \quad (112)$$

Entonces $\sqrt{v_{i+1}}$ puede obtenerse como solución de una ecuación de segundo grado:

$$\sqrt{v_{i+1}} = \frac{\sqrt{4v_i + \Delta t[(\lambda\bar{v} - \frac{\eta^2}{2})(1 + \lambda\Delta t) + \eta^2 Z^2]} + \eta\sqrt{\Delta t}Z}{2(1 + \lambda\Delta t)} \quad (113)$$

Si $\frac{2\lambda\bar{v}}{\eta} \geq 1$ está garantizado que la raíz será un número real positivo y, por lo tanto, la volatilidad será positiva. En la práctica, los parámetros comunes en el modelo de Heston, no suelen satisfacer la condición $\frac{2\lambda\bar{v}}{\eta} \geq 1$ por lo que sigue siendo preferible usar la discretización de Milstein.

4.2.4. El muestreo de la Ley de Transición exacta (Simulación de Broadie-Kaya)

La solución del modelo de Heston:

- $\alpha(S, v_t, t) = -\lambda(v_t - \bar{v})$
- $\beta(S, v, t) = 1$
- $\phi(S, v, t) = 0$

puede ser escrita explícitamente como:

$$S_t = S_0 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^t v_s ds + \rho \int_0^t \sqrt{v_s} dZ_s + \sqrt{1 - \rho^2} \int_0^t \sqrt{v_s} dZ_s^\perp \right\} \quad (114)$$

$$v_t = v_0 + \lambda \bar{v} t - \lambda \int_0^t v_s ds + \eta \int_0^t \sqrt{v_s} dZ_s \quad (115)$$

con,

$$\langle dZ_s dZ_s^\perp \rangle = 0 \quad (116)$$

El procedimiento de la simulación de Brodie-Kaya se basa en los siguientes pasos:

- Generar una muestra de la distribución de v_t dado v_0 .
- Generar una muestra de la distribución de $\int_0^t v_t ds$ dados v_t y v_0 .
- Calcular $\int_0^t \sqrt{v_s} dZ_s$ dados $\int_0^t v_t ds$, v_t y v_0 .
- Generar una muestra de la distribución de S_t dados $\int_0^t \sqrt{v_s} dZ_s$ y $\int_0^t v_t ds$.

Observemos que en el último paso, la distribución de $\int_0^t \sqrt{v_s} dZ_s^\perp$ es normal con varianza $\int_0^t v_t ds$ porque dZ_s^\perp y v_s son independientes por construcción.

Este tipo de simulación soluciona el hecho de que no haya volatilidades negativas, pero el coste computacional es muy grande.

5. Conclusiones

- Lo modelos de volatilidad estocástica surgen como necesidad de solucionar las carencias que suponía el modelo de Black-Scholes en la valoración de opciones financieras a partir de la crisis de 1987.
- La ventaja fundamental de los modelos de volatilidad estocástica es que recogen todas las características principales de la volatilidad para tener mejor estimación de los precios de las opciones.
- El principal punto negativo de los modelos de volatilidad estocástica es la dificultad de implementar sus soluciones computacionalmente.

- El modelo de volatilidad estocástica más utilizado en la práctica es el modelo de Heston, por tener una solución casi cerrada y ser relativamente fácil de implementar para opciones europeas. El método de Monte Carlo más usado para simular la volatilidad en el modelo de Heston es la Discretización de Milstein.
- Dadas las dificultades de resolución que presentan los modelos de volatilidad estocástica, en la práctica se usan alternativas que modelizan de forma más sencilla la volatilidad y, por tanto, con menor exactitud. El ejemplo más característico es el modelo de volatilidad local.
- En la actualidad, con toda la depresión financiera que se está viviendo, surge la necesidad de tener estimaciones más exactas de los precios de los instrumentos financieros. Además de la volatilidad, existen parámetros adicionales que requieren estar bien modelizados y calibrados. Como ejemplo de dichos parámetros podemos mencionar la correlación, los dividendos, spreads entre tipos de cambio, etc. Esto da lugar a un campo abierto a la investigación en la modelización estocástica de parámetros financieros para tener valoraciones cada vez más acertadas.

Referencias

- [1] Tomas Bjork. *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford, 2004.
- [2] Bruno Dupire. *Pricing and hedging with smiles*. Mathematics of derivative securities. Dempster and Pliska eds., Cambridge Uni. Press, 1997.
- [3] Franz Eigner. Stochastic volatility-option pricing using heston sv model. 2010.
- [4] Jim Gatheral. *The volatility surface: a practitioner's guide*, volume 357. John Wiley and Sons, 2006.
- [5] Heston. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. 1993.
- [6] John Hull. Options, futures, and other derivatives. 2006.
- [7] Bernt Øksendal. *Stochastic differential equations*. Springer, 2003.
- [8] F.Black y M.Scholes. The valuation of option contracts and a test of market efficiency. 1972.