



## FORMULAÇÃO DE ESCOAMENTO PLÁSTICO: ASPECTOS DE NATUREZA COMPUTACIONAL E APLICAÇÃO A PROCESSOS DE FORJAMENTO

M. L. ALVES<sup>1</sup>, J. M. C. RODRÍGUES<sup>2</sup>, P. A. F. MARTINS<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Instituto Politécnico de Leiria, Departamento de Engenharia Mecânica,  
Morro do Lena, 2400 Leiria, Portugal

<sup>2</sup> Instituto Superior Técnico, Departamento de Engenharia Mecânica,  
Av. Rovisco Pais, 1049-001 Lisboa, Portugal

*(Recibido 31 de marzo de 2004, para publicación 28 de mayo de 2004)*

**Resumo** – Este artigo apresenta um resumo do trabalho de investigação que tem vindo a ser realizado pelos autores no domínio da simulação numérica e análise experimental de processos de deformação plástica na massa. A investigação de natureza teórica tem vindo a ser consubstanciada no desenvolvimento do sistema de modelização numérica tridimensional I-form3, constituído por um programa de elementos finitos baseado na formulação de escoamento plástico. O trabalho experimental, realizado sob condições laboratoriais controladas tem servido fundamentalmente para aferir os desenvolvimentos de natureza teórica e, desta forma, contribuir para os objectivos globais que se pretendem alcançar.

### 1. INTRODUÇÃO

A visão global do estado-da-arte ao nível da modelização numérica de processos de deformação plástica na massa, permite afirmar que a formulação de escoamento plástico é, de entre as diversas formulações existentes, aquela que se encontra mais desenvolvida e, conseqüentemente, mais difundida pelos meios académicos e industriais [1-3]. A sua aplicação a processos de deformação plástica na massa permite contabilizar as não-linearidades geométricas e do material, de modo a fornecer estimativas correctas da distribuição de tensão, extensão, velocidade de deformação e temperatura no interior das peças.

Embora os programas bidimensionais de elementos finitos para operações de deformação plástica na massa estejam actualmente relativamente bem consolidados, só muito recentemente se começaram a efectuar desenvolvimentos no sentido de estender a aplicabilidade destes programas à simulação tridimensional de peças complexas. De facto, a generalidade dos estudos tridimensionais que foram realizados na década de 90 estiveram limitados a geometrias tridimensionais simples que permitiam tirar partido de simplificações geométricas e do escoamento do material por forma a manter o tratamento numérico e matemático dos problemas dentro de níveis considerados aceitáveis.

Este artigo efectua uma revisão dos principais aspectos teóricos e numéricos que estão associados ao desenvolvimento, robustez e utilização de programas de computador destinados à simulação numérica tridimensional de processos de deformação plástica na massa. Os principais tópicos abordados compreendem: a selecção de elementos, os esquemas de integração temporal, os algoritmos de contacto e a análise elástica de ferramentas. No caso concreto da análise elástica de ferramentas será proposto um algoritmo eficiente e de fácil implementação destinado à transferência das cargas aplicadas entre as malhas de elementos finitos utilizadas na peça e nas ferramentas. O trabalho experimental envolveu o projecto e concepção de uma ferramenta instrumentada com células de carga e transdutores de deslocamento, a caracterização mecânica e tribológica do material e lubrificantes e a realização de um conjunto diversificado de operações elementares de deformação plástica na massa destinados a reproduzir os principais modos de deformação característicos das operações de forjamento em ambiente laboratorial.

## 2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS DA FORMULAÇÃO DE ESCOAMENTO PLÁSTICO

A formulação fraca do princípio extremo de Hill, no qual se baseia a formulação de escoamento plástico, determina a seguinte igualdade em termos da variação arbitrária da velocidade,

$$\delta\Pi = \int_V \bar{\sigma} \delta\dot{\epsilon} dV + K \int_V \dot{\epsilon}_V \delta\dot{\epsilon}_V dV - \int_{S_F} F_i \delta u_i dS = 0 \quad (1)$$

$V$  é o volume de controlo limitado pelas superfícies  $S_U$  e  $S_F$ , onde a velocidade e as tensões exteriores actuam respectivamente, e o símbolo  $K$  representa um número positivo, grande, que actua directamente sobre a velocidade de deformação volumétrica,  $\dot{\epsilon}_V$ , de modo a forçar a incompressibilidade do material.

Uma questão importante que surge durante o desenvolvimento/utilização de programas numéricos tridimensionais para deformação plástica está relacionada com a discretização da equação (1) através de elementos finitos. Vários programas comerciais de elementos finitos utilizam elementos tetraédricos devido às vantagens destes elementos nas operações de geração e regeneração de malhas. Contudo, estes elementos são muito sensíveis à orientação das malhas e requerem elevadas densidades de elementos para se obterem resultados aceitáveis.

Estudos recentemente efectuados ao nível do desempenho relativo entre elementos tetraédricos e hexaédricos permitem concluir que os elementos hexaédricos devem, sempre que possível, ser a escolha preferencial na discretização de componentes tridimensionais. Infelizmente, a sua utilização actual ainda não se encontra tão divulgada quanto seria desejável na medida em que estes elementos apresentam algumas limitações ao nível da geração automática de malhas não-estruturadas. De facto, os elementos hexaédricos não se ajustam tão facilmente aos volumes e superfícies das peças quanto os elementos tetraédricos, sendo a geração automática de malhas de hexaédros num volume arbitrário um campo actual de pesquisa e desenvolvimento [4].

Após ponderar os prós e os contras acima referidos, optou-se por efectuar a discretização da equação (1) através de  $M$  elementos hexaédricos isoparamétricos de oito nós, ligados entre si através de  $N$  pontos nodais, tendo-se obtido o sistema de equações não-lineares, que se apresenta a seguir,

$$\sum_{m=1}^M \{ [\bar{\sigma} \mathbf{P}_{n-1} + K^m \mathbf{Q}] \{ \mathbf{v}_n \} = \{ \mathbf{F} \} \} \quad (2)$$

onde  $\sum_m^M$  representa a operação de assemblagem e os restantes termos se definem através de,

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}; \mathbf{P}_{n-1} = \int_{V^m} \frac{1}{\dot{\epsilon}_{n-1}} \mathbf{K} dV^m; \mathbf{Q} = \int_{V^m} \mathbf{C}^T \mathbf{B} \mathbf{C}^T \mathbf{B} dV^m, \mathbf{F} = \int_{S_F^m} \mathbf{N} \mathbf{T} dS^m \quad (3)$$

O símbolo  $\mathbf{N}$  representa a matriz que contém as funções de forma do elemento,  $\mathbf{B}$  é a matriz das velocidades de deformação,  $\mathbf{C}$  é a forma matricial do símbolo de Kronecker e  $\mathbf{D}$  é a matriz que relaciona as tensões desviadoras com as velocidades de deformação, de acordo com as equações constitutivas de Levy-Mises.

### 2.1. Técnicas de Resolução de Sistemas de Equações

A resolução do sistema de equações não-lineares (2) que resulta da formulação de escoamento plástico, pode ser efectuada recorrendo a diversas técnicas numéricas. De entre estas técnicas merecem destaque pela sua importância; o método das iterações directas e o método de Newton-Raphson. O método das iterações directas considera que as equações constitutivas de Levy-Mises são lineares durante cada iteração permitindo, desta forma, transformar (2) num sistema linear de equações e calcular a estimativa da distribuição de velocidade. O método é iterativo na medida em que a estimativa da distribuição de velocidade serve para determinar uma nova estimativa para a iteração subsequente. O método de Newton-

Raphson é um método iterativo baseado na expansão linear em série de Taylor do resíduo  $\mathbf{R}(\mathbf{v})$  próximo da estimativa da velocidade na iteração anterior,

$$\mathbf{R}(\mathbf{v}_n) \cong \mathbf{R}_n = \mathbf{R}_{n-1} + \left[ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{v}} \right]_{n-1} \Delta \mathbf{v}_n = \mathbf{0} \quad (4)$$

onde  $\Delta \mathbf{v}$  é a correcção de primeira ordem do campo de velocidade,

$$\{\mathbf{v}_n\} = \{\mathbf{v}_{n-1}\} + \beta \{\Delta \mathbf{v}_n\} \quad \beta \in ]0,1[ \quad (5)$$

A formulação de escoamento plástico é habitualmente utilizada com esquemas de integração temporal implícitos de modo a garantir o anulamento do resíduo e, conseqüentemente, o equilíbrio do volume de controlo em qualquer instante do cálculo. Este facto dá origem a convergências do processo iterativo mais lentas sempre que os problemas envolvam geometrias complexas e sempre que às não-linearidades geométrica e do material seja acrescentada uma outra não-linearidade decorrente de efeitos termo-mecânicos. Ainda assim, preferiu-se optar por um esquema implícito na medida em que os esquemas explícitos alternativos, por não garantirem o anulamento do resíduo, não conseguem garantir a qualidade final dos resultados obtidos. A necessidade dos esquemas explícitos necessitarem de incrementos de tempo mais reduzidos também contribui para uma menor eficiência deste tipo de esquemas de integração temporal.

### 2.2. Algoritmo de Contacto

Os algoritmos de contacto geralmente utilizados em programas tridimensionais de elementos finitos podem ser classificados em (i) directos [5] e (ii) indirectos (ou variacionais).

Os algoritmos de contacto directos (figura 1) estabelecem o incremento de tempo,  $\Delta t$ , para que a ferramenta atinja a superfície da peça com base em estimativas e correcções calculadas a partir da integração das trajetórias dos pontos nodais posicionados na fronteira das peças,

$$\mathbf{x}_{t+\Delta t} = \mathbf{x}_t + (\theta \mathbf{v}_t + (1-\theta) \mathbf{v}_{t+\Delta t}) \Delta t \quad 0 < \theta \leq 1 \quad (6)$$

Os algoritmos de contacto indirectos (ou variacionais) baseiam-se na modificação do funcional,  $\Pi$  (1), de modo a incluir os constrangimentos do contacto mediante funções adicionais (ou seja, multiplicadores de Lagrange ou termos de penalidade),

$$\Pi_c = \Pi + \int_{S_c} \lambda f_p dS \quad \text{ou} \quad \Pi_c = \Pi + \int_{S_c} \frac{K}{2} f_p^2 dS, \quad f_p = f + \sqrt{f^2} = 0 \quad (7)$$

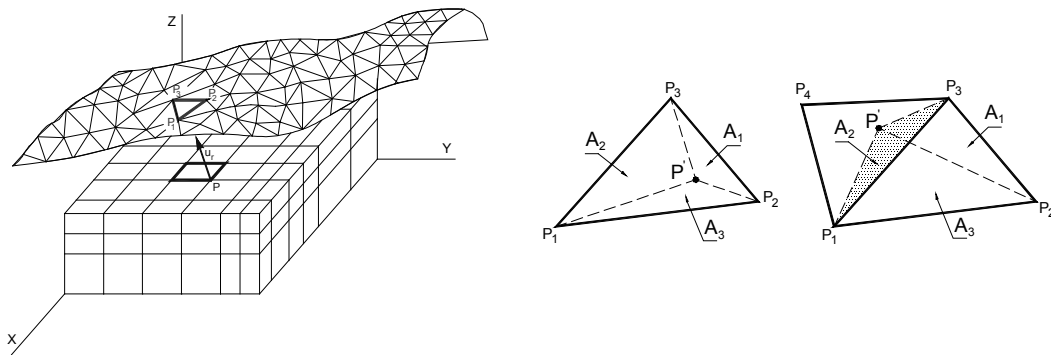


Fig. 1. (Esq.) Representação esquemática do algoritmo de contacto explícito directo implementado no programa de elementos finitos I-form3 [5]. (Dta.) Pormenor de um elemento triangular utilizado na discretização da superfície da ferramenta e representação da projecção do ponto nodal P na superfície da ferramenta.

Na equação anterior,  $f(x, y, z) = 0$ , é a descrição implícita da superfície da ferramenta e  $f_p$  representa o seu valor no ponto nodal,  $\mathbf{P}$ , localizado na fronteira da peça.

### 2.3. Análise Elástica das Ferramentas

Um aspecto fundamental na prossecução da análise elástica das ferramentas (utilizando-se metodologias acopladas ou não-acopladas) consiste na transferência das cargas aplicadas entre as malhas de elementos finitos utilizadas na peça e nas ferramentas, na medida em que os pontos nodais adjacentes às duas malhas geralmente não são coincidentes. O algoritmo de transferência que foi desenvolvido no âmbito deste trabalho baseia-se na utilização da forma implícita,  $f(x, y, z) = 0$ , do plano que passa pelos pontos nodais ( $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ ) de um elemento triangular situado na superfície da ferramenta, de modo a identificar os pontos nodais,  $\mathbf{P}$ , localizados na fronteira da peça que estão em contacto com as ferramentas,  $f(x, y, z) = Ax + By + Cz + D = 0$ , onde os termos  $A, B, C, D$  são calculados através de,

$$\begin{aligned} A &= (y_2 - y_1) \cdot (z_3 - z_1) - (z_2 - z_1) \cdot (y_3 - y_1) \\ B &= (z_2 - z_1) \cdot (x_3 - x_1) - (x_2 - x_1) \cdot (z_3 - z_1) \\ C &= (x_2 - x_1) \cdot (y_3 - y_1) - (y_2 - y_1) \cdot (x_3 - x_1) \\ D &= -x_2 \cdot A - y_2 \cdot B - z_2 \cdot C \end{aligned} \quad (8)$$

Após determinada a equação do plano que contém o elemento triangular  $\Delta(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3)$ , exige-se o cálculo da projecção normal  $\mathbf{P}'(x, y, z)$  do ponto nodal,  $\mathbf{P}$ , sobre a superfície do plano, obtendo-se,

$$x' = A \cdot t + x_p; y' = B \cdot t + y_p; z' = C \cdot t + z_p; t = \frac{-A \cdot x_p - B \cdot y_p - C \cdot z_p - D}{A^2 + B^2 + C^2} \quad (9)$$

O ponto nodal,  $\mathbf{P}$ , é considerado em contacto com o elemento triangular da ferramenta  $\Delta(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3)$  se forem satisfeitas as seguintes condições (figura 1),

$$|\mathbf{P} - \mathbf{P}'| \leq \delta; A_{123} = A_1 + A_2 + A_3 \quad (10)$$

onde  $\delta$  é uma distância muito pequena.  $A_i$  é definido em coordenadas de área do elemento triangular e  $A_{123}$  é a área do elemento triangular  $\Delta(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3)$ .

Obtidos todos os pontos nodais que satisfazem as condições acima requeridas, procede-se à transferência da carga,  $F_i$ , de uma malha para a outra, da forma a seguir indicada,

$$F_{x_i} = -F_{x_p} \cdot \frac{A_i}{A_{123}}; F_{y_i} = -F_{y_p} \cdot \frac{A_i}{A_{123}}; F_{z_i} = -F_{z_p} \cdot \frac{A_i}{A_{123}} \quad (i=1,2,3) \quad (11)$$

A análise elástica das ferramentas realiza-se mediante o recurso a um módulo de elementos finitos para pequenas deformações elásticas.

## 3. PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

O procedimento experimental consistiu na realização de diversos tipos de ensaios laboratoriais [6]. Serão discutidos três ensaios laboratoriais; (i) redução da secção transversal de barras, para examinar o escoamento do material sob condições de redistribuição do material, (ii) forjamento de precisão de engrenagens de dentes rectos e (iii) forjamento em matriz fechada com rebarba de cruzetas, para avaliar o escoamento do material numa operação de forjamento em matriz fechada.

O material utilizado nos ensaios laboratoriais foi o alumínio E1CM (99.95%) e a curva tensão-extensão do material foi obtida mediante ensaios de compressão uniaxial, realizados à temperatura ambiente, em espécimes cilíndricos, usando folha de teflon como lubrificante (0.1mm de espessura) para assegurar deformação homogénea,

$$\sigma = 177.46 \varepsilon^{0.190} \quad (MPa) \quad (12)$$

Os ensaios laboratoriais realizaram-se com lubrificação (óleo mineral Castrol Iloform PNW 124) e as condições tribológicas na interface de contacto peça-ferramenta foram estimadas através de ensaios de anel, cuja relação entre o diâmetro exterior, o diâmetro interior e a espessura de cada espécime foi de 6:3:2. O atrito foi especificado em termos de um factor de atrito constante,  $m = \tau / k = 0.12$ , sendo o ábaco utilizado na calibração construído com base no método dos elementos finitos.

#### 4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A Figura 2 (esq.) ilustra a discretização da barra e da geometria da ferramenta utilizadas na simulação numérica da operação de redistribuição de material por redução da secção transversal de uma barra. Devido à simetria, apenas foi analisado um quarto da geometria da peça, sendo a discretização efectuada por intermédio de 960 elementos hexaedrais. A figura 2 (centro e dta.) apresenta a malha deformada depois de concluído o primeiro golpe (correspondente a 25% de redução de altura) e após efectuada uma rotação da peça de 90° e aplicado um segundo golpe.

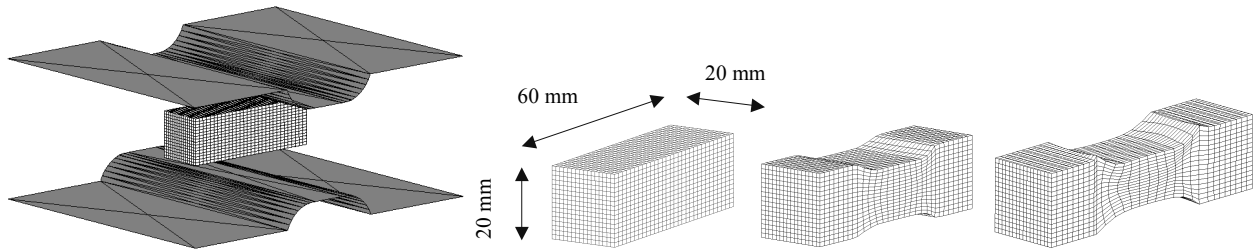


Fig. 2. (Esq.) Geometria inicial discretizada da barra e da ferramenta; (Centro e Dta.) Evolução da geometria da barra sujeita à operação de redistribuição de material: geometria inicial, 25% (final do 1º golpe) e 35% (final do 2º golpe) de redução de altura.

A figura 3 apresenta uma estimativa da distribuição de tensão  $\sigma_z$  na matriz superior. Os valores mais elevados são identificados na zona plana adjacente ao raio de canto devido às elevadas pressões de contacto que nessa zona resultam da compressão da ferramenta contra a peça.

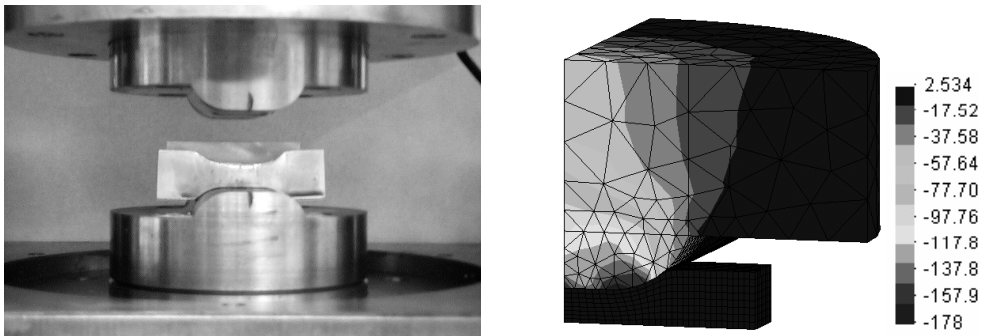


Fig. 3. Distribuição da tensão  $\sigma_z$  na matriz superior obtida por intermédio de uma análise elástica não-acoplada.

Os ensaios laboratoriais de forjamento de engrenagens foram realizados a partir de pré-formas cilíndricas com 17.8 mm de diâmetro e 23 mm de altura. A figura 4 apresenta uma imagem das engrenagens obtidas experimentalmente e fornece uma estimativa teórica da distribuição da extensão

efectiva. Os valores mais elevados de extensão são obtidos junto à raiz dos dentes, registando-se um aumento progressivo destes valores à medida que a deformação vai progredindo.

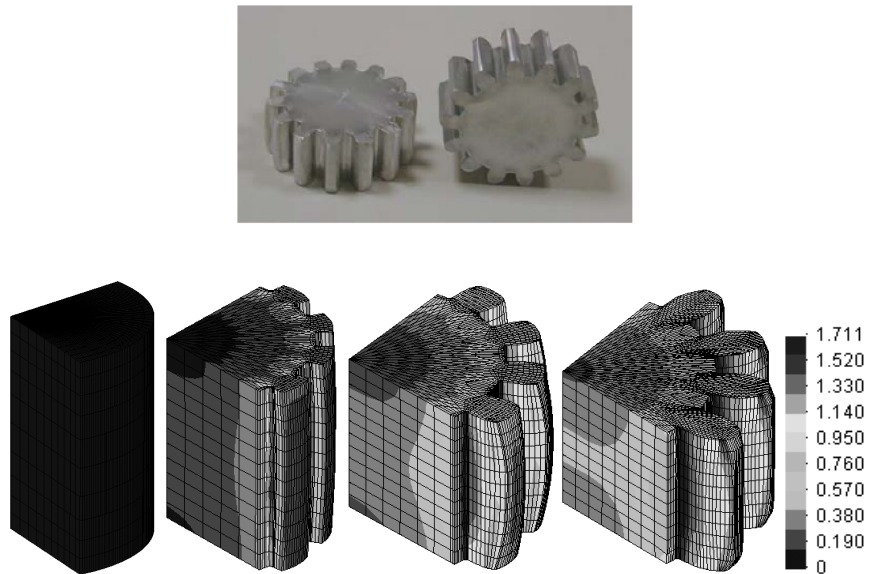


Fig. 4. Geometria e distribuição numérica da extensão efectiva numa engrenagem de dentes rectos ( $Z=14$  e  $M=2$ ), para diferentes reduções de altura: geometria inicial, 16%, 27% e 32%.

Na figura 5 (Esquerda) podemos visualizar as linhas de escoamento do material que são observáveis no topo dos espécimes fabricados em laboratório, durante a fase de preenchimento dos dentes, para uma redução de altura igual a 30%. A correspondente distribuição de tensão efectiva determinada pelo sistema de elementos finitos I-FORM3 no topo das engrenagens, está representada na figura 5 (Direita) e permite observar a analogia existente entre as linhas de escoamento e o encruamento do material resultante da deformação plástica.

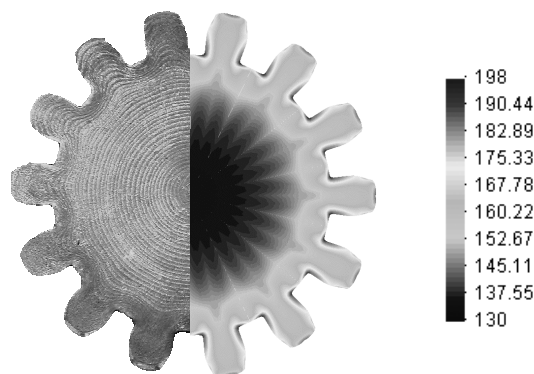


Fig. 5. (Esquerda) Linhas de fluxo observáveis nos espécimes fabricados em ambiente laboratorial, para uma redução de altura igual a 30%. (Direita) Estimativa teórica da distribuição de tensão efectiva  $\bar{\sigma}$  (MPa) para o instante de deformação correspondente a uma redução de altura igual a 30%.

As pré-formas utilizadas nos ensaios laboratoriais de forjamento em matriz fechada com rebarba de cruzetas foram maquinadas a partir de um varão cilíndrico com 38 mm de diâmetro. O diâmetro e a altura

iniciais de cada pré-forma são respectivamente iguais a 14.54 mm e 17.70 mm. Antes de serem colocados em posição os provetes foram desengordurados com acetona e lubrificados com óleo Castrol Iloform PNW 124. Os ensaios foram realizados à temperatura ambiente e com uma velocidade constante e igual a 2.5 mm/s.

Os modelos de elementos finitos utilizados na simulação numérica dos ensaios experimentais do forjamento das cruzetas basearam-se na discretização da geometria inicial das pré-formas cilíndricas através de 2052 elementos hexaedrais lineares e na discretização das ferramentas por intermédio de 817 elementos triangulares de contacto com atrito. A geração das malhas tridimensionais utilizadas nestas operações foi efectuada por intermédio do pré&pós-processador comercial GiD e da interface que foi desenvolvida entre este programa e a unidade de pré-processamento do programa I-FORM3.

A isotropia do material, associado à simetria da deformação permite que apenas exista a necessidade de discretizar a geometria do conjunto peça-ferramenta correspondente a um sector angular de 45°, (1/16 de um modelo completo para ferramentas simétricas) (figura 6).

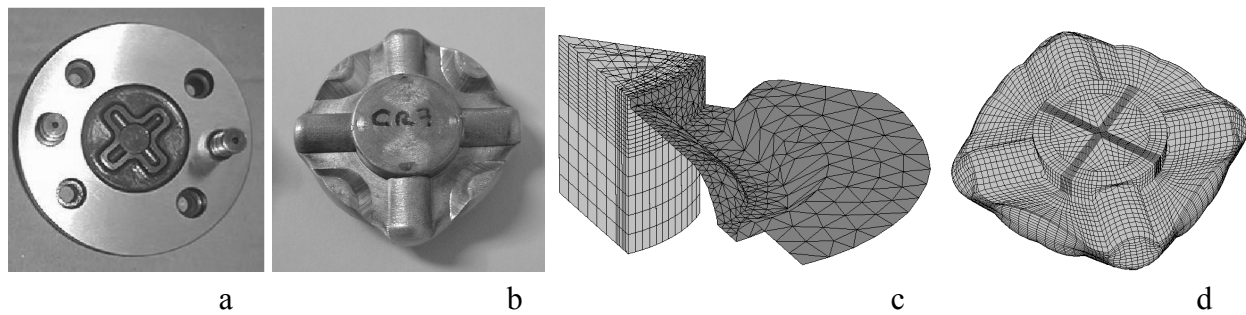


Fig. 6. (a) Ferramenta utilizada nos ensaios laboratoriais de forjamento a frio de cruzetas. (b) Geometria da cruzeta após 60% de redução da altura inicial da pré-forma. (c) Discretização da geometria da pré-forma e da ferramenta no instante inicial. (d) Estimativa teórica da geometria final da cruzeta após uma redução de 62% da altura inicial da pré-forma.

A figura 7 apresenta uma estimativa teórica da evolução da distribuição de extensão efectiva ao longo de diferentes instantes da deformação. Conforme se pode observar os valores mais elevados de extensão efectiva vão sendo sucessivamente registados nas zonas correspondentes ao canal de rebarba e aos braços das cruzetas. A zona central da cruzeta permanece sob acção de gradientes de deformação bastante mais reduzidos e, portanto, apresenta no final da operação valores de extensão efectiva consideravelmente mais baixos.

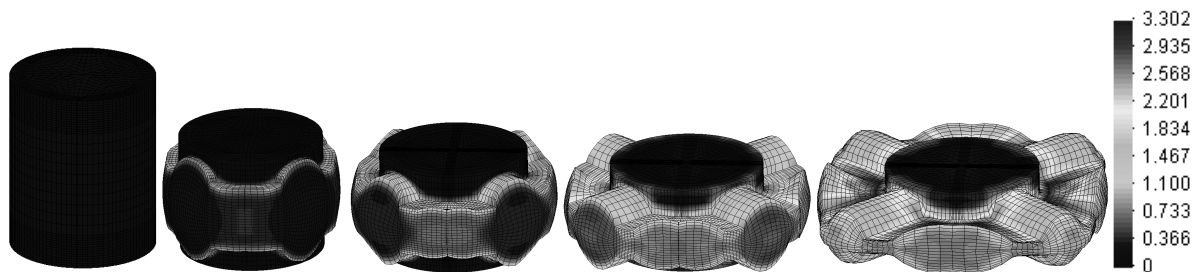


Fig. 7. Estimativa teórica da evolução da distribuição de extensão efectiva ao longo de diferentes instantes da operação de forjamento a frio de cruzetas com ferramentas simétricas. As geometrias apresentadas correspondem ao instante inicial e aos instantes caracterizados por reduções de 29%, 41%, 52% e 62% da altura inicial da pré-forma.

Os valores obtidos com o programa de elementos finitos I-form3 para a evolução da força de forjamento com o deslocamento do punção apresentam uma boa concordância com os valores experimentais obtidos em laboratório (figura 8).

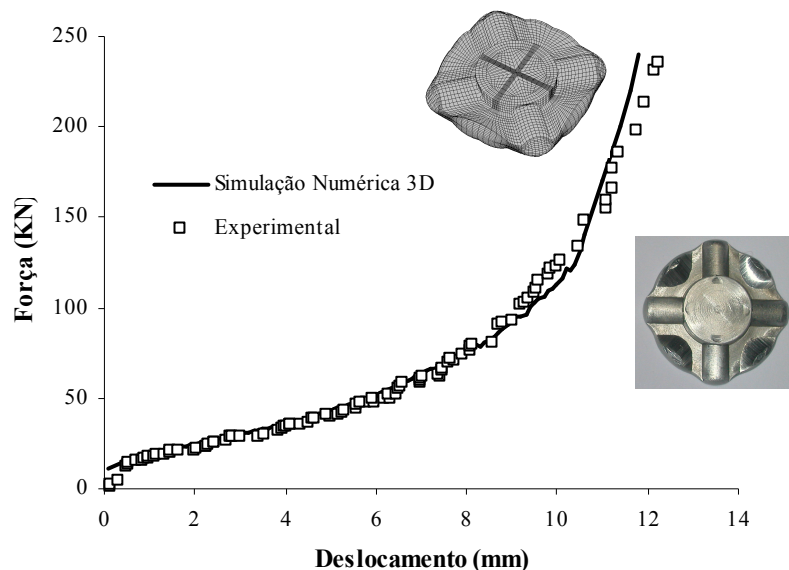


Fig. 8. Evolução teórica e experimental da força de forjamento das cruzetas com o deslocamento das matrizes.

## 5. CONCLUSÕES

Este artigo apresenta uma descrição dos principais ingredientes necessários ao desenvolvimento e utilização de programas de elementos finitos para processos de deformação plástica na massa baseados na formulação de escoamento plástico. São apresentados detalhes de implementação computacional e proposto um novo algoritmo para transporte e interpolação das cargas nodais da peça para as ferramentas no contexto da análise elástica das ferramentas. Os ensaios experimentais incluídos na apresentação foram utilizados como suporte do trabalho numérico efectuado.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Brännberg N., Mackerle J., Finite element methods and material processing technology, *Eng. Computations*, **11**, 413, (1994).
- [2] Mackerle J., Finite element methods and material processing technology – An addendum, *Eng. Computations*, **15**, 616, (1998).
- [3] Tekkaya A., Meidert M., Bariani P., *Proc. 2nd ICFG workshop on process simulation in metal forming industry*, Editores: Tekkaya A., Meidert M., Bariani P., Italy, (2002).
- [4] Cifuentes A. O. and Kalbag A., A performance study of tetrahedral and hexahedral elements in 3-D finite element structural analysis, *Finite Elements in Analysis and Design*, **12**, 313, (1992).
- [5] Barata Marques M. J. M. and Martins P. A. F., Three-dimensional finite element contact algorithm for metal forming, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **30**, 1341, (1990).
- [6] Alves M. L., Rodrigues J. M. C. and Martins P. A. F., Numerical and Experimental Simulation of Three-Dimensional Cold Forming Parts, *Proc. COMPLAS VII, Computational Plasticity. Fundamentals and Applications*, Editores: Owen D.R.J., Oñate E., Suárez B., Barcelona, 163, (2003).



## **FLOW FORMULATION: COMPUTATIONAL ASPECTS AND APPLICATION TO FORGING PROCESSES**

**Abstract** – This paper draws from fundamental research on the finite element flow formulation to the development and validation of a computer program for modelling three-dimensional bulk forming processes. The overall investigation is supported by experimental work that was performed by the authors under controlled laboratorial conditions. Comprehensive assessment between experimental data and numerical predictions is being crucial for fulfilling the objectives of the ongoing investigation.

