

Aplicação de transdutores piezoelétricos para o controle da instabilidade de *whirl-flutter*

Sérvio Túlio S. Haramura Bastos¹, Rui M. G. de Vasconcellos²

¹Faculdade de Engenharia de São João da Boa Vista, Universidade Estadual Paulista (UNESP), Brasil. Email: tulio.haramura@unesp.br

²Faculdade de Engenharia de São João da Boa Vista, Universidade Estadual Paulista (UNESP), Brasil. Email: rui.vasconcellos@unesp.br

Resumo

O fenômeno *whirl-flutter* é uma instabilidade aeroelástica que deve ser considerada durante o projeto de uma aeronave. Normalmente, hélices ou rotores acoplados às estruturas aeronáuticas são susceptíveis a tal fenômeno, especialmente quando esses possuem grande diâmetro, como no caso das aeronaves com capacidade de decolagem e pouso vertical (VTOL) com ou sem rotores móveis, como as *tilt-rotors*. Para uma determinada velocidade de cruzeiro tal instabilidade influencia no projeto dos rotores, da asa e dos *pylons*. Com o advento da mobilidade aérea do futuro torna-se fundamental a melhoria do entendimento acerca de tal fenômeno, bem como o desenvolvimento de formas para o controle das oscilações e aumento nas margens de estabilidade para a obtenção de aeronaves cada vez mais eficientes. Dessa forma, a presente pesquisa propõe o controle passivo aplicando transdutores piezoelétricos observando o comportamento aeroelástico do sistema com apenas uma única camada piezoelétrica, sistema *unimorph harvester*. Como principal constatação está o aumento da velocidade de *flutter*, aumentando a faixa de estabilidade do sistema.

Palavras chave: *Whirl-flutter*; Controle passivo; piezoelétricos; *unimorph harvester*.

Abstract

The whirl-flutter phenomenon is an aeroelastic instability which must be considered during the project of an aircraft. Commonly, propellers and rotors connected to aeronautical structures are susceptible to such phenomenon, especially when large rotor diameter is considered, such as vertical take-off and landing aircrafts (VTOL) with or without moving rotors, as the case of tilt-rotors. Depending on the cruise speed, the whirl-flutter influences the project of rotors, wings and pylons. With the advent of modern air mobility, a better understanding of such phenomenon, as well as the development of vibrational control techniques to increase the stability margins becomes important. Thus, the present research proposes passive control technique based on the piezoelectric harvesting effect, in a unimorph configuration, observing its effect on the aeroelastic system's behavior. As main result the presence of the piezoelectric material, an increase in the flutter speed is observed, improving the system's stability.

Keywords: Whirl-flutter; Passive control; piezoelectric material; unimorph harvester.

1. Introdução

Os materiais inteligentes são aqueles possuem a capacidade de ativar suas funções de forma intrínseca e extrínseca a partir de respostas aos estímulos ou mudanças ambientais [1]. Outra forma de definição é a apresentada por [2] na qual se afirma que os materiais inteligentes são aqueles que apresentam acoplamentos entre diversos domínios físicos. Pode-se dizer que um material possui acoplamento quando a mudança de uma variável de estado de um determinado domínio

físico engendra uma mudança em outra variável de estado de outro domínio físico. No caso, da presente pesquisa, foca-se nos materiais do tipo piezoelétrico que são aqueles que possuem o acoplamento entre os domínios elétrico e mecânico [2].

A escolha da utilização de tal material reside no fato de que a busca por formas alternativas para se obter energia elétrica têm sido buscadas nos últimos anos e a coleta de energia (do inglês - *energy harvesting*) vem sendo largamente explorada pela comunidade

científica. Como definido por [3], a *energy harvesting* é o processo pelo qual as energias luminosa, solar, térmica e cinética podem ser convertidas em formas de energia utilizáveis para o desenvolvimento de sensores, atuadores e de outros dispositivos eletrônicos autossustentáveis. Contudo, a conversão de energia mecânica é a mais explorada, visto que essa pode ser encontrada em diversos processos mesmo quando a energia térmica ou luminosa não se fazem presentes.

Como afirmado por [4], os fenômenos aeroelásticos são especialmente interessantes para a obtenção de energia elétrica, uma vez que diversas estruturas quando são submetidas a um escoamento podem sofrer diversos tipos de respostas e por isso há um interesse grande acerca da conversão mecânica-elétrica. Desse modo, tais fenômenos podem ocorrer em diversas estruturas como pontes, chaminés, linhas de transmissão, dutos de extração de petróleo (do inglês - *risers*), trens de pouso, asas e rotores de uma aeronave causando vibrações excessivas e de grande amplitude que podem causar desde falhas estruturais graves a sérios prejuízos ambientais e econômicos [5].

Dentre todas as instabilidades aeroelásticas, a instabilidade de *flutter* é a mais importante para o setor da aviação, uma vez que essa gera condições catastróficas para as aeronaves. Tal instabilidade pode ser entendida de uma forma geral como um fenômeno aeroelástico dinâmico no qual forças aerodinâmicas, elásticas e inerciais interagem em uma asa fixa ou rotativa. Tal interação faz com que a energia provida pelo fluido seja rapidamente absorvida e transformada em vibrações mecânicas que resultam em uma resposta vibracional divergente [6]. Se a velocidade do escoamento for aumentada, pode haver uma determinada velocidade crítica denominada de velocidade de *flutter*. A partir dessa velocidade os movimentos vibracionais tornam-se auto-excitáveis graças ao amortecimento insuficiente perante aos carregamentos aerodinâmicos não estacionários [3]. Tais movimentos vibracionais podem causar falhas catastróficas em diversas estruturas e por isso atraem grande interesse da comunidade científica.

Embora o fenômeno do *flutter* possua subcategorias como o *flutter* torcional e o *stall flutter*, com o advento da mobilidade aérea do futuro outro fenômeno relacionado volta a se destacar: o denominado *whirl-flutter*. O *whirl-flutter* é um fenômeno conhecido desde 1960 devido aos acidentes das aeronaves *Lockheed L-188 C Electra II*. Esse surge a partir de efeitos dinâmicos e aerodinâmicos providos de partes que rotacionam, como as hélices e rotores de grande diâmetro, como por exemplo, nas aeronaves *tilt-rotors*, como apresentado na Fig. 1, [7] e aeronaves *turbo-prop*.



Figura 1. CV-22B Osprey, Miramar air show 2019.
Fonte: Autoria própria.

Devido ao aumento da velocidade de voo, da rotação, a possibilidade de mudança de orientação e a flexibilidade do eixo dos rotores, sob o efeito giroscópico, forças aerodinâmicas não estacionárias podem induzir a instabilidade. Tais forças engendram um movimento elíptico associado a dois modos: o de *backward (BW)*, com menor frequência e movimento de precessão no sentido oposto a rotação das hélices e de *forward (FW)*, com maior frequência e movimento de precessão no mesmo sentido da rotação das hélices [8].

Diante do exposto, nota-se que a aplicação de materiais piezoelétricos para o controle da instabilidade de *whirl-flutter* em rotores de aeronaves pode representar uma estratégia efetiva para o controle da instabilidade, contribuindo para o desenvolvimento de aeronaves cada vez mais eficientes e com uma menor massa estrutural, pois parte da energia mecânica do sistema é transformada em energia elétrica. Portanto, no presente trabalho, propõe-se a aplicação de transdutores piezoelétricos para o controle passivo da instabilidade de *whirl-flutter*.

2. Materiais e Métodos

2.1. O Modelo Mecânico

O modelo matemático empregado na presente pesquisa pauta-se na abordagem utilizada por [9]. O modelo concentrado possui dois graus de liberdade (2GDL) para a representação dos movimentos de arfagem e guinada do rotor definidos, respectivamente, por θ e ψ . Adicionalmente, sejam definidos R o raio do rotor, I_x a inércia do rotor, I_n a inércia da nacele e considerando que as contribuições da estrutura da asa sejam modeladas como rigidez, k_θ e k_ψ , e amortecimento, c_θ e c_ψ , equivalentes em ambos GDL. Por fim, considerando que o raio esteja conectado a uma distância a , múltipla do raio, e que o rotor esteja submetido a um fluxo axial de intensidade U incidente

ao mesmo e paralelo a x, então se possui um sistema como apresentado na Fig. 2.

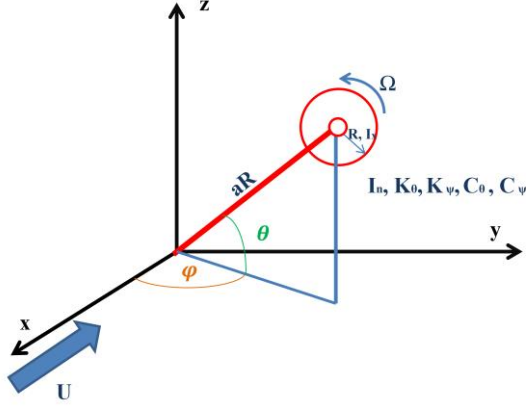


Figura 2. Esquema para a representação de um sistema rotor-nacele submetido ao *whirl-flutter*. Fonte: Autoria própria.

Assim, as equações que descrevem o sistema são dadas por [10]:

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_\theta & -I_x \Omega \\ I_x \Omega & c_\psi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_\theta & 0 \\ 0 & k_\psi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_\theta \\ M_\psi \end{Bmatrix} \quad (1)$$

com M_θ e M_ψ sendo, respectivamente, os momentos aerodinâmicos de arfagem e guinada. Ressalta-se que tais momentos foram obtidos por [11] e aqui é necessário notar que é utilizada a teoria do elemento de pá (do inglês - *blade element theory*) e se assume uma aerodinâmica *quasi*-estacionária, ou seja, as forças e os momentos aerodinâmicos dependem apenas de movimentos instantâneos da superfície do corpo, além de ser negligenciado o movimento do fluido ou a influência da esteira. Assim, pode-se descrever tais momentos como:

$$M_\theta = \frac{n_b k_a R}{2} \left[-(A_3 + a^2 A_1) \frac{\dot{\theta}}{\Omega} - A'_2 \psi + a A'_1 \theta \right] \quad (2)$$

$$M_\psi = \frac{n_b k_a R}{2} \left[-(A_3 + a^2 A_1) \frac{\dot{\psi}}{\Omega} + A'_2 \theta + a A'_1 \psi \right] \quad (3)$$

onde $k_a = 0,5 \rho c_{l,\alpha} R^4 \Omega^2$ representa um termo para tornar a notação mais concisa. Já ρ é a densidade do ar, $c_{l,\alpha}$ é a inclinação do gráfico do coeficiente de sustentação pelo ângulo de ataque do perfil de uma seção da pá. Além disso, os termos A_i são as integrais aerodinâmicas que surgem a partir da integração da sustentação ao longo de cada uma das pás e são definidas como:

$$A_1 = \frac{c}{R} \int_0^1 \frac{\mu^2}{\sqrt{\mu^2 + \eta^2}} d\eta \quad (4)$$

$$A'_1 = \mu A_1 \quad (5)$$

$$A'_2 = \frac{c}{R} \int_0^1 \frac{\mu^2 \eta^2}{\sqrt{\mu^2 + \eta^2}} d\eta \quad (6)$$

$$A_3 = \frac{c}{R} \int_0^1 \frac{\mu^4}{\sqrt{\mu^2 + \eta^2}} d\eta \quad (7)$$

$$\mu = \frac{U}{\Omega R} \quad (8)$$

Incorporando os termos da direita no lado esquerdo da Eq. 1 e escrevendo o sistema no espaço de estados possui-se:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J} \mathbf{X} \quad (9)$$

com $\mathbf{X} = [\theta, \psi, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T$ e \mathbf{J} a matriz jacobiana do sistema dada por:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Calculando por fim os autovalores de \mathbf{J} pode-se obter a frequência e amortecimentos modais definidos como:

$$\omega = \sqrt{Re(\lambda)^2 + Im(\lambda)^2} \quad (11)$$

$$\xi = \frac{-Re(\lambda)}{\omega} \quad (12)$$

Logo, pode-se analisar a estabilidade do sistema mecânico e quantificá-lo em termos de margens.

2.2. O Modelo Piezo-Aeroelástico

Para que se possa computar o efeito elétrico promovido pela aplicação do material piezoelétrico, o modelo mecânico apresentado foi modificado, de forma a englobar a abordagem descrita por [12-13] que se baseia em vigas engastadas acopladas com o presente material inteligente. Tal abordagem aproxima a rigidez estrutural e os movimentos do sistema a partir da flexão da viga. Adicionalmente, com tais movimentos de flexão pode-se observar o efeito piezoelétrico direto. Dessa forma, aplicando a abordagem que é descrita em seguida pode-se modificar o modelo puramente mecânico descrito na seção 2.1 obtendo-se o modelo piezo-aeroelástico aplicado ao fenômeno do *whirl-flutter*. Vale notar ainda que, embora sejam apresentadas as equações fundamentais que foram utilizadas, todo equacionamento e maiores detalhes podem ser encontrados nas referências [12-13].

De forma geral, o equacionamento para a obtenção do modelo piezo-aeroelástico surge a partir das equações lineares elásticas para um material isotrópico para a subestrutura e eletro-elásticas para o material piezoelétrico e considera-se que a polarização do

material piezoelétrico ocorre na direção da estrutura e as hipóteses de placa de Kirchhoff de forma a se realizar a modelagem da estrutura de suspensão do sistema aeroelástico para a simulação a rigidez estrutural nos GDL de guinada e arfagem do sistema rotor-nacele submetido ao *whirl-flutter* em concomitância a aplicação da piezocerâmica como apresentado na Fig. 3.

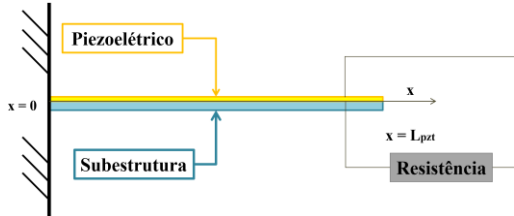


Figura 3. Representação do acoplamento eletromecânico em vigas engastadas para a configuração com uma única piezocerâmica (configuração *unimorph harvester*). Fonte: Elaboração própria.

Contudo, [14] afirma que tal modelo pode-se empregado com parâmetros concentrados de tal forma que se aplicando a lei de Gauss obtém-se:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{K}\mathbf{Y} - \Theta v_p = \mathbf{F} \quad (13)$$

$$C_p \dot{v}_p + \frac{v_p}{R_e} + \Theta^T \dot{\mathbf{Y}} = 0 \quad (14)$$

onde \mathbf{M} a matriz de massa, \mathbf{K} a matriz de rigidez, \mathbf{C} a matriz de amortecimento, $\Theta = [\vartheta_\theta \ \vartheta_\psi]^T$ a matriz de acoplamento eletromecânico equivalente para computar o efeito do acoplamento em apenas um grau de liberdade apenas, v_p a tensão elétrica obtida da piezocerâmica no grau de liberdade escolhido, C_p a capacitância do material piezoelétrico equivalente aplicado no grau de liberdade escolhido, $\mathbf{Y} = [\theta \ \psi]^T$ o vetor de deslocamentos, R_e a resistência externa e $\mathbf{F} = [M_\theta \ M_\psi]^T$ o vetor de forças.

Vale perceber ainda que C_p e ϑ dependem do tipo de material piezoelétrico aplicado. No entanto, [12] apresentam formas de calculá-los de forma a garantir a conformidade com os deslocamentos angulares com o acoplamento elétrico. Assim, C_p e ϑ podem ser descritos como:

$$C_p = \frac{\varepsilon_{33}^s bL}{h_p} \quad (15)$$

$$\vartheta = -\frac{Y_p b d_{31}}{2h_p} (h_c^2 - h_b^2) \quad (16)$$

sendo Y_p o módulo de Young do material piezoelétrico, d_{31} é a constante do piezoelétrico cujo valor é -190 pm/V e b a largura do material piezoelétrico. O termo ε_{33}^s é a permissividade de valor

15,33 nF/m, L o comprimento do piezoelétrico e h_p é a espessura do mesmo. Já h_b é a posição da base da camada piezoelétrica a partir do eixo neutro e h_c a posição do topo da mesma a partir do eixo neutro. Essas duas últimas podem ser descritas, respectivamente, como:

$$h_b = h_{pa} - h_p \quad (17)$$

$$h_c = h_{pa} \quad (18)$$

sendo que

$$h_{pa} = \frac{h_p^2 + 2n h_p h_s + n h_s^2}{2(h_p + n h_s)} \quad (19)$$

onde $n = Y_s/Y_p$, com Y_s o módulo de Young da

subestrutura e h_s a espessura da subestrutura.

Dessa forma, a matriz jacobiana do sistema piezo-aeroelástico, \mathbf{J}_e , com a aplicação do piezoelétrico em apenas um dos GDL torna-se:

$$\mathbf{J}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{1}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} & \mathbf{M}^{-1} \Theta \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & -\Theta^T / C_p & -1 / (R_e C_p) \end{bmatrix} \quad (20)$$

Dessa forma, pode-se calcular os autovalores e em seguida a frequência e amortecimento modais com o efeito piezoelétrico. Assim, torna-se possível analisar a estabilidade do sistema e analisar questões voltadas para a melhoria do controle vibracional do sistema.

3. Resultados e Discussão

3.1. Avaliação do modelo piezo-aeroelástico

Com a implementação do apresentado por [9] e [12-14] pode-se realizar a descrição do acoplamento piezoelétrico em termos angulares para a avaliação de seus efeitos no comportamento aeroelástico da instabilidade de *whirl-flutter*. Assim, para que se pudesse realizar tal análise utilizou-se os parâmetros como definidos na Tab. 1.

Utilizando os dados dispostos na Tab. 1 e o *software Matlab R2016a*[®], calcularam-se primeiramente os autovalores utilizando as Eqs. 10 e 20 e em seguida a frequência e o amortecimento modais a partir das Eqs. 11 e 12. Dessa forma, obtiveram-se os resultados apresentados nas Fig. 4 e 5.

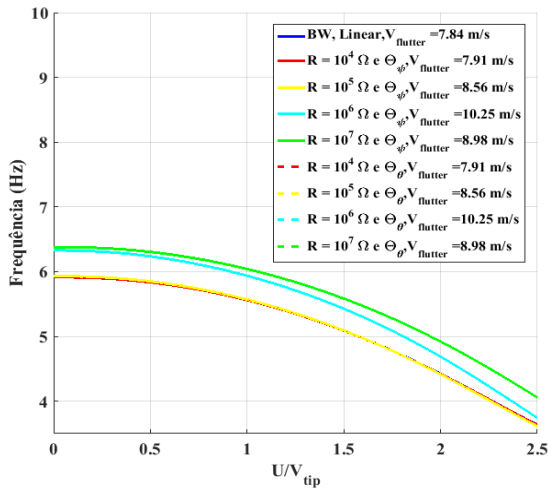


Figura 4. Variação da frequência modal para diferentes configurações. Fonte: Autoria própria.

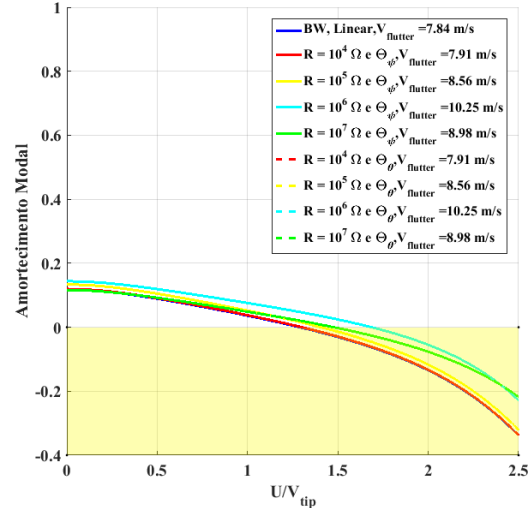


Figura 5. Variação do amortecimento modal para diferentes. Fonte: Autoria própria.

Tabela 1. Parâmetros físicos utilizados

Parâmetros	Valores
Comprimento do piezoelétrico, L	53,84 mm
Largura do piezoelétrico, b	20 mm
Espessura da subestrutura, h_s	0,5 mm
Espessura do piezoelétrico, h_p	0,4 mm
Módulo de Young da subestrutura, Y_s	100 GPa
Módulo de Young do piezoelétrico, Y_p	66 GPa
Constante piezoelétrica, d_{31}	-190 pm/V
Permissividade, ϵ_{33}^s	15,93 nF/m
Raio do rotor, R	152 mm
Velocidade angular do rotor, Ω	40 rad/s
Razão do comprimento do eixo de pivotamento pelo raio do rotor, a	0,25
Momento de inércia do rotor, I_x	$1,03 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$
Momento de inércia da nacele, I_n	$1,78 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$
Amortecimento estrutural de arfagem, c_θ	$10^{-3} \text{ N m s/rad}$
Rigidez estrutural de arfagem, k_θ	0,4 N m/rad
Amortecimento estrutural de guinada, c_ψ	$10^{-3} \text{ N m s/rad}$
Rigidez estrutural de guinada, k_ψ	0,4 N m/rad
Número de pás, n_p	4
Cor da pá, c	26 mm
Inclinação da sustentação da pá, $c_{l,\alpha}$	$2\pi \text{ rad}^{-1}$

Fonte: Autoria própria.

Como se observa nas Figs. 4 e 5 com o aumento da resistência externa há o aumento da frequência modal do sistema rotor-nacele. Ao mesmo tempo, devido à aplicação da camada piezoelétrica nota-se que a resistência externa afeta a velocidade linear de *flutter*.

Analisando especificamente a Fig. 5, observa-se que o sistema puramente mecânico apresentou uma velocidade de *flutter* de cerca de 7,84 m/s. No momento que se incluiu o acoplamento piezoelétrico com uma resistência externa $R_e = 10^4$ ohms já foi possível notar um leve ganho na velocidade de *flutter*, uma vez que a última passou para 7,91 m/s. Com o aumento da resistência externa de até $R_e = 10^6$ ohms o incremento na velocidade de *flutter* foi se tornando cada vez maior até se atingir uma velocidade de 10,25 m/s, para a resistência $R_e = 10^6$ ohms. Em termos de controle vibracional tal fato torna-se importante, uma vez que com o aumento da velocidade de *flutter* há o aumento das margens de estabilidade de operação do rotor aplicado, já que até se atingir essa nova velocidade de *flutter*, o sistema apresentará movimentos vibratórios amortecidos, garantindo, portanto, a integridade estrutural da aeronave.

O efeito no incremento na velocidade de *flutter* pode ser explicado devido ao aumento do amortecimento estrutural, como se observa na Fig. 5, através do efeito *shunt damping*. Com o movimento vibracional da estrutura há a geração de energia elétrica devido ao efeito piezoelétrico direto. Assim com a dissipação de energia através do circuito externo é adicionado um amortecimento a estrutura e reduz-se a amplitude de oscilação. Esse efeito do aumento de amortecimento da estrutura adicionado a questões relacionadas à aerodinâmica acabam por influenciar, por conseguinte, a variação da frequência, como presenciado na Fig. 4.

Vale ainda observar que com o aumento da resistência para $R_e = 10^7$ ohms a velocidade linear de *flutter* começou a ser reduzida, quando comparada com o caso de $R_e = 10^6$ ohms, visto que para essa tal velocidade ocorreu em cerca de 10,25 m/s, ao passo que para aquela ocorreu em 8,98 m/s. Desse modo, para o conjunto de resistências analisadas, observando o efeito do aumento da velocidade de *flutter* e considerando questões de controle vibracional, a resistência que otimizou o sistema foi a de $R_e = 10^6$ ohms, visto que forneceu o maior incremento na velocidade de *flutter*.

Por fim, como efeito adicional, verifica-se que em todos os casos as respostas tanto das frequências quanto dos amortecimentos modais obtidos foram simétricas quando se aplicou o piezoelétrico seja no grau de liberdade de arfagem ou no de guinada.

4. Conclusões

Com a aplicação do modelo piezo-aeroelástico pode-se avaliar o efeito da aplicação de materiais piezoelétricos em termos de controle da instabilidade de *whirl-flutter*.

A aplicação de piezoelétricos promoveu ganhos na velocidade de *flutter* de até 2,41 m/s quando se utilizou uma resistência de $R_e = 10^6$ ohms. Tal aumento da velocidade de *flutter* pode ser explicado devido ao efeito *shunt damping* que aumenta o amortecimento da estrutura. Tal efeito torna-se fundamental em termos de controle passivo, uma vez que a postergação da velocidade de *flutter* aumenta as margens de estabilidade do sistema, de modo que até que se atinja a nova velocidade crítica os movimentos oscilatórios serão amortecidos garantindo, por conseguinte, a integridade estrutural do rotor empregado, bem como de toda a aeronave. Além disso, foi observado o aumento da frequência do sistema.

Além disso, observou-se que com o aumento da resistência externa aplicada ao sistema, até de $R_e = 10^6$ ohms, houve o aumento da velocidade de *flutter*. Contudo, ao se atingir $R_e = 10^7$ ohms tal velocidade acabou por ser reduzida quando comparada com a primeira.

Como efeito adicional, foi percebido que a aplicação do acoplamento piezoelétrico seja no grau de liberdade de arfagem quanto no de guinada promoveram resposta simétricas tanto na frequência quanto no amortecimento modais.

Por fim, como passos futuros da presente pesquisa estão a avaliação do comportamento com a aplicação de duas camadas piezoelétricas (*bimorph harvester*),

bem como a avaliação do controle ativo e híbrido da presente estabilidade.

5. Agradecimentos

A presente pesquisa foi realizada com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) e da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processo: 2021/09276-5.

6. Referencias

- [1] Akhras, G.: Smart materials and smart systems for the future. *Canadian Military Journal* 1(3), 25–31 (2000).
- [2] Anicezio, M. M.: Atenuação de vibrações em pás de helicópteros utilizando circuito piezoelétrico semi-passivo. Dissertação (Mestrado em Aeronaves) — Universidade de São Paulo, São Carlos (2015).
- [3] Abdelkefi, A.: Aeroelastic energy harvesting: a review. *International Journal of Engineering Science* 100, 112–135 (2016).
- [4] Vasconcellos, R.; Abdelkefi, A.: Nonlinear dynamical analysis of an aeroelastic system with multi-segmented moment in the pitch degree-of-freedom. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 20(12), (2015).
- [5] Bastos, S. T. S. H., Vasconcellos, R. M. G., Marques, F. D.: Vibrações induzidas por vórtice em um cilindro com um grau de liberdade e rigidez não linear. In: Congresso Ibero-Americano De Engenharia Mecânica - CIBIM. Martínez, M. J., Cartagena, Colômbia (2019).
- [6] Latif, R., Khan, M. K. A., Javed, A., Shah, S., Rizvi, S.: A semi-analytical approach for flutter analysis of a high-aspect-ratio wing. *The Aeronautical Journal* 125(1284), 410–429 (2021).
- [7] Adeyemi, D. A., Cleaver, D. J., Du Bois, J. L.: Whirl flutter modelling for active control. In: The 4th Annual Uk Vertical Lift Network Technical Workshop. UK (2019).
- [8] Ceardle, J.: Theoretical background of whirl flutter phenomenon. Oxford: Woodhead Publishing (2015).
- [9] Mair C., Rezgui D., Titurus B.: Nonlinear stability analysis of whirl flutter in a rotor-nacelle system. *Nonlinear Dynamics* 94(3), 2013–2032 (2018).

[10] Bielawa, R. L.: Rotary wing structural dynamics and aeroelasticity. American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA education series), Washington, DC (1992).

[11] Ribner, H. S.: Propellers in yaw. NASA Langley Technical Report Server v. 820 (1945).

[12] Erturk, A., Inman, D. J.: A distributed parameter electromechanical model for cantilevered piezoelectric energy harvesters. *Journal of Vibration and Acoustics* 130(4), (2008).

[13] De Marqui Jr, C., Erturk, A., Inman, D.: Piezoaeroelastically coupled modeling and analysis of electrical power generation and shunt damping for a cantilever plate. In: 17th International Conference On Composite Materials, pp. 27–31. London: IOM Communications, Edinburgh, UK (2009).

[14] Abdelkefi, A.: Global nonlinear analysis of piezoelectric energy harvesting from ambient and aeroelastic vibrations. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) — Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg (2012).