ANEXO 8

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES RECURRENTES

1. INTRODUCCIÓN

1.1. ANALOGÍAS EXISTENTES ENTRE EL CÁLCULO DE DIFERENCIAS Y EL CÁLCULO DIFERENCIAL

Al definir la derivada de una función como límite de cociente de diferencias de la función y de la variable independiente o explicativa cuando esta última tiende a cero, se deducen interesantes analogías entre el cálculo de diferencias finitas y el cálculo diferencial. Revisemos, en primer lugar, la definición de derivada antes de entrar, propiamente, en el análisis de tales analogías.

Dada una función *y*, se denomina "derivada de dicha función" a una nueva función Dy, cuyo valor en *x* es el siguiente:

$$Dy(x) = \lim_{h\to 0}\frac{y(x+h)-y(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta y(x)}{h} = \frac{dy}{dx},$$

donde D es el operador de diferenciación que aplicado a una función da lugar a la derivada de dicha función. El valor de $[\Delta y(x)]/h$ es la pendiente de la recta que une los puntos de la representación gráfica de *y* correspondientes a unas abscisas *x* y *x+h*; el valor de Dy(x) es la pendiente de la tangente geométrica en *x*.

Por ejemplo, dado que:

$\Delta x^2 = 2xh + h^2$, aplicando la fórmula anterior tenemos que:

$$Dx^2 = \lim_{h\to 0}\left(\frac{2xh+h^2}{h}\right) = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x.$$

A esa misma conclusión llegaríamos aplicando la denominada "regla general para derivar" (que pese a ostentar tan pomposo nombre, no resulta estrictamente útil de aplicación a todos los casos) que, por lo que se refiere al ejemplo anterior, rezaría así (considerando $h = \Delta x$) para la función $y = x^2$ en los cuatro pasos siguientes:

1º. Tomando incrementos: $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + \Delta^2 x + 2x\cdot\Delta x$.
2º. Restando la expresión inicial: $\Delta y = \Delta^2 x + 2x\cdot\Delta x$.
3º. Dividiendo por Δx: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x + 2x$.
4º. Tomando límites cuando $\Delta x \to 0$: $y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$.

Las sucesivas diferenciaciones de una función se indican con potencias sucesivas del operador D; así, la segunda derivada de *y* se representa por D^2y y proviene de D(Dy), la tercera derivada se indica por D^3y, etc.

Consideremos ahora la operación inversa a la diferenciación. Si una función Y es tal que DY = y, se dice que Y es la *función primitiva* de *y*. Para ser consecuentes con la notación hasta ahora utilizada (ya que representamos al operador inverso del operador diferencia por Δ^{-1}), simbolizaremos el operador inverso del de diferenciación con la notación D^{-1} y escribiremos $Y = D^{-1}y$.

Aunque esta notación resulta de gran utilidad en muchos textos, es más frecuente, sin embargo, la clásica notación: $Y = \int y \cdot dx$, y la denominación para Y de "integral indefinida de la función *y*". Obsérvese que hay un número infinito de integrales indefinidas de una función *y*, puesto que DY = y, y también D(Y + C) = y, siendo C una constante cualquiera de integración.

De este modo, en el planteamiento y resolución de las ecuaciones en diferencias finitas o recurrentes, que se contemplan en el capítulo 9 de nuestro libro para el estudio del golpe de ariete en las tuberías forzadas, se presentan las siguientes analogías con las ecuaciones diferenciales ordinarias que podemos sintetizar en el siguiente cuadro comparativo:

ECUACIONES DIFERENCIALES	ECUACIONES RECURRENTES
1'. $Dy(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta y(x)}{h}.$	1. $\Delta y(x) = y(x+h) - y(x).$
2'. $D^n y = D(D^{n-1}y), \quad \forall\, n = 1, 2, ...$	2. $\Delta^n y = \Delta(\Delta^{n-1}y), \quad \forall\, n = 1, 2, ...$
3'. $D(cy) = cDy.$	3. $\Delta(cy) = c\Delta y.$
4'. $D(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1Dy_1 + c_2Dy_2.$	4. $\Delta(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1\Delta y_1 + c_2\Delta y_2.$
5'. Si y es un polinomio de grado n, $D^n y$ es constante y las derivadas de orden superior son nulas.	5. Si y es un polinomio de grado n, $\Delta^n y$ es constante y las diferencias de orden superior son nulas.
6'. $Dx^n = nx^{n-1}.$	6. $\Delta x^{(n)} = nhx^{(n-1)}.$
7'. $D(u \cdot v) = uDv + vDu.$	7. $\Delta(u \cdot v) = (Eu)\Delta v + v\Delta u.$
8'. $D\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vDu - uDv}{v^2}.$	8. $\Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{vEv}.$
9'. Si: $Dy = y, \int y = Y + C$, siendo C una constante de integración.	9. Si $\Delta Y = y, \Delta^{-1}y = Y + p$, siendo p una función periódica de período h.

Utilizando esta notación (o sea, el signo integral $\int$ en vez de D^{-1}), exponemos en la tabla anterior algunos resultados conocidos del cálculo diferencial y las fórmulas análogas que les corresponden en el cálculo de diferencias finitas. Una parte ciertamente importante de los resultados obtenidos en el cálculo diferencial pueden demostrarse fácilmente a partir de los correspondientes del cálculo de diferencias sin más que aplicar límites.

1.2. EQUILIBRIO

Las ecuaciones *autónomas o estacionarias* son aquellas que no dependen de *t*, y constituyen un caso particular de las ecuaciones recurrentes.

Si reparamos ahora en la ecuación de orden uno autónoma, que estudia la trayectoria temporal de las presiones en una tubería, o sea:

$$P_{t+1} = f(u_t),\ \forall\ t \in \{N\} = \{Z^+\},$$

donde f es una función que toma valores reales, estudiemos algunos aspectos del comportamiento de sus soluciones centrándonos en los denominados "puntos de equilibrio".

Un punto de equilibrio de la ecuación anterior es toda solución de la ecuación: x = f(x), o sea: $P_{t+1} = u_t = x$. Su representación gráfica, pues, comenzará por hallar los puntos de corte o intersección entre la gráfica de y = f(x) y la gráfica de y = x (recta bisectriz del primer cuadrante del círculo), esto es:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases}$$

Por otra parte, la noción de estabilidad de un punto de equilibrio, de provechosas aplicaciones en el estudio del golpe de ariete, está relacionada con el comportamiento de las soluciones de una ecuación recurrente que comienzan cerca de los puntos de equilibrio. En particular, interesa saber si las soluciones convergen o no a los puntos de equilibrio cerca de los cuales han empezado.

2. ECUACIONES LINEALES

2.1. ECUACIONES LINEALES DE PRIMER ORDEN

Son ecuaciones tales que estén definidas en cierto dominio de una variable y que relacionen una función incógnita de la variable *n* (en nuestro caso, el tiempo t) con la función de la variable *n* + 1, que difiere en 1 de la primera, o sea, u_n y u_{n+1} (en nuestro caso, P_t y P_{t+1}), y se llaman *ecuaciones en diferencias finitas de primer orden.*

Son ecuaciones de la forma: $x_{n+1} = p(n)x_n + q(n)$, siendo *p(n)* y *q(n)* funciones de la variable *n*, o simplemente constantes. En ellas, cada término con subíndice de la relación de recurrencia aparece elevado a la primera potencia (linealidad).

Cuando *q(n) = 0*, la ecuación se llama *homogénea*, y entonces se cumple que: $x_{n+1} = p(n)x_n$, $\forall n \geq 0$. Vamos a ver ahora que las ecuaciones homogéneas, en realidad, son fórmulas de recurrencia en las que, conocidas las condiciones iniciales, es decir, x_0, es posible calcular todos los términos de la sucesión:

$$x_1 = p(0)x_0 \quad x_2 = p(1)x_1 = p(1)p(0)x_0 \quad x_3 = p(2)x_2 = p(2)p(1)p(0)x_0 \quad ...$$

$$x_n = p(n-1)p(n-2)......p(1)p(0)x_0$$

Entonces, si la ecuación en diferencias es homogénea, en cualquier forma que se presente, puede ser reducida a la expresión:

$$a_{n+1} - \alpha \cdot a_n = 0 \ ,$$

y se prueba fácilmente que la solución general de esta ecuación es de la forma: $a_n = C \cdot \alpha^n$, siendo C una constante arbitraria. Esta última ecuación es una función discreta cuyo dominio es el conjunto {**N**} de los enteros no negativos o naturales.

2.2. ECUACIÓN LINEAL HOMOGÉNEA DE COEFICIENTES CONSTANTES Y ORDEN k

2.2.1. Introducción

Una ecuación en diferencias finitas de orden *k* es una ecuación que liga los términos de una sucesión relacionando cada término con los *k* anteriores. El estudio de estas ecuaciones puede resultar muy complicado, aunque aquí se estudiará básicamente el caso concreto de las ecuaciones lineales, que poseen una gran variedad de aplicaciones en muchas ciencias aplicadas.

Uno de los tipos de ecuaciones en diferencias que con mayor frecuencia se presentan son, pues, las llamadas “ecuaciones lineales”, que son de la forma siguiente, usando una notación más generalizada:

$$\varphi_0(n) \cdot u_{n+k} + \varphi_1(n) \cdot u_{n+k-1} + \varphi_2(n) \cdot u_{n+k-2} + \ldots + \varphi_{k-1}(n) \cdot u_{n+1} + \varphi_k(n) \cdot u_n =$$
$$= \sum_{i=0}^{k} \varphi_i(n) \cdot u_{n+k-i} = b_n$$

donde los $\varphi_i(n)$ y b_n son funciones de la variable entera *n*.

Así pues, cuando algún término con subíndice de la relación de recurrencia está multiplicado por un valor variable, como por ejemplo:

$$u_{n+1} - u_n = n \cdot u_{n-1}, \text{ con la condición: } u_0 = 1, \ \forall n \geq 1$$

se dice que estamos en presencia de una “ecuación de coeficientes variables”.

Por el contrario, si los $\varphi_i(n) = a_i$ son constantes, como sucederá en la mayoría de los casos que contemplaremos aquí, la ecuación en cuestión recibe el nombre de *ecuación lineal de coeficientes constantes*. Si además $b_n = 0$, la ecuación se denomina “homogénea” y, en caso contrario, “no homogénea o completa”, como también sucedía con las ecuaciones diferenciales.

Si la ecuación homogénea en diferencias finitas de orden k siguiente:

$$a_0 \cdot f(x+k) + a_1 \cdot f(x+k-1) + a_2 \cdot f(x+k-2) + \ldots + a_{k-1} \cdot f(x+1) + a_k \cdot f(x) = 0;$$

o bien, expresada en notación de subíndices:

$$a_0 \cdot u_{n+k} + a_1 \cdot u_{n+k-1} + a_2 \cdot u_{n+k-2} + \ldots + a_{k-1} \cdot u_{n+1} + a_k \cdot u_n = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot u_{n+k-i} = 0,$$

admite, como ya hemos dicho, k soluciones particulares linealmente independientes: $f_1(n)$, $f_2(n)$, $f_3(n)$, … , $f_k(n)$, resulta inmediato comprobar que:

$$u_n = c_1 \cdot f_1(n) + c_2 \cdot f_2(n) + c_3 \cdot f_3(n) + \ldots + c_k \cdot f_k(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot f_i(n),$$

es la solución general de la ecuación propuesta, puesto que contiene k constantes arbitrarias. Por lo tanto, el problema de resolver la ecuación dada se reduce a la obtención de k soluciones particulares linealmente independientes. Para ello, investiguemos las soluciones particulares de la forma: $u_n = r^n$, con lo que substituyendo en la ecuación inicial tendremos que:

$$a_0 \cdot r^{n+k} + a_1 \cdot r^{n+k-1} + a_2 \cdot r^{n+k-2} + \ldots + a_{k-1} \cdot r^{n+1} + a_k \cdot r^n = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot r^{n+k-i} = 0,$$

y después de simplificar dividiendo por r^n obtendremos la ecuación equivalente:

$$a_0 \cdot r^k + a_1 \cdot r^{k-1} + a_2 \cdot r^{k-2} + \ldots + a_{k-1} \cdot r + a_k = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot r^{k-i} = 0,$$

que es una ecuación algebraica asociada, denominada “ecuación característica”, que admitirá las k “raíces características”: r_1, r_2, r_3, … , r_k, y a cuyo primer miembro: $\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot r^{k-i}$ se le suele denominar “polinomio característico asociado”. Así pues, las soluciones para las ecuaciones en diferencias finitas normalmente se clasifican como *particulares* o *generales*, dependiendo de si hay o no *condiciones iniciales* asociadas. Las soluciones se verifican por medio de la substitución directa. La teoría de las soluciones para este tipo de ecuaciones resulta virtualmente idéntica a la de las ecuaciones diferenciales y las técnicas de “intuir soluciones” son, de algún modo, una reminiscencia de los métodos empleados y ya vistos para la resolución de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

2.2.2. Raíces reales distintas

Si las raíces son reales y distintas ($\forall\ r_i \neq r_j$), es inmediato comprobar que las k soluciones particulares siguientes: r_1^n, r_2^n, r_3^n, … , r_k^n, son linealmente independientes y, por lo tanto, la solución general de la ecuación en diferencias será una combinación lineal de las funciones r_1^n, r_2^n, …, así:

$$u_n = c_1 \cdot r_1^n + c_2 \cdot r_2^n + c_3 \cdot r_3^n + \ldots + c_k \cdot r_k^n = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot r_i^n,$$

siendo las c_i constantes arbitrarias.

2.2.3. Raíces reales múltiples

En el caso de que una de las raíces sea doble, por ejemplo, las r_i, se tiene que r_i^n y r_i^n no son linealmente independientes sino iguales, y se hace necesario encontrar una segunda solución, aunque se comprueba que la expresión: $(c_i + c_{i+1} \cdot n)r_i^n$ es una solución particular de la ecuación recurrente planteada. Del mismo modo, si r_i es raíz triple, se tendrá que:

$$(c_i + c_{i+1} \cdot n + c_{i+2} \cdot n^2)r_i^n,$$

es también una solución particular, y así sucesivamente según el grado de multiplicidad de la raíz en cuestión.

Se ha de tener en cuenta, en definitiva, que si alguna de las raíces es múltiple, las soluciones correspondientes a cada una de ellas deberían aparecer en la combinación lineal tantas veces como indicase su orden o grado de multiplicidad, siendo necesario multiplicar cada solución por n cuando aparezca por segunda vez, por n^2 si aparece por tercera vez, y así sucesivamente, hasta completar en cada caso el número de veces que aparece.

2.2.4. Raíces complejas

Si una de las raíces de la ecuación característica es compleja (pura o mixta), expresada en la forma binómica general: a + bi, también existirá la conjugada: a – bi, con módulo r y argumento θ.

Escritas en forma polar, resultará la expresión:

$$c_1(a + bi)^n + c_2(a - bi)^n = c_1 \cdot r^n(\cos \theta + i \cdot \sin \theta)^n + c_2 \cdot r^n(\cos \theta - i \cdot \sin \theta)^n =$$

$$= c_1 \cdot r^n(\cos n\theta + i \cdot \sin n\theta) + c_2 \cdot r^n(\cos n\theta - i \cdot \sin n\theta)$$

Elegidos convenientemente los números complejos c_1 y c_2, se obtiene una solución general de la ecuación recurrente planteada de la forma:

$$r^n(c_1 \cdot \cos n\theta + c_2 \cdot \sin n\theta) \qquad (1)$$

aunque también se pueden emplear las expresiones alternativas siguientes:

$$u_n = C \cdot r^n \cdot \cos (n\theta + \phi) \qquad (2)$$

$$\text{o bien: } u_n = (\alpha + i\beta) \cdot r_1^n + (\alpha - i\beta) \cdot r_2^n \qquad (3)$$

En el caso de obtenerse raíces complejas múltiples se opera como en el caso ya visto de las raíces reales múltiples, esto es, combinando los procedimientos anteriores.

En el siguiente ejercicio se resumen los fundamentos teóricos explicados hasta ahora.

a) Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$u_{n+4} + 2u_{n+2} + u_n = 0, \ \forall\ n \in \{\mathbf{N}\}.$$

b) Resumir simplificadamente las distintas formas que puede tener una ecuación en diferencias finitas, lineal, homogénea y de coeficientes constantes, según sean las raíces correspondientes de la ecuación característica asociada.

Solución:

a) La ecuación característica asociada: $r^4 + 2r^2 + 1 = 0$ tiene las raíces complejas i y –i (ambas dobles). Así pues, la solución general es la siguiente:

$$\boxed{u_n = A_1 \sin \frac{n\pi}{2} + B_1 \cos \frac{n\pi}{2} + n \cdot (A_2 \sin \frac{n\pi}{2} + B_2 \cos \frac{n\pi}{2})}$$

, que también puede expresarse de otras formas como veremos posteriormente en otro ejercicio de este mismo capítulo.

b) Al respecto, cabe realizar las siguientes consideraciones:

- Si $\mathbf{r_0}$ es una solución real de la ecuación característica, entonces sucede que: $\mathbf{n^{h-1} \cdot r_0^n}$ resulta ser una solución particular de la ecuación en diferencias planteada, siendo *h* el orden de multiplicidad de la expresada solución.

- Si $\rho(\mathbf{cos}\ \alpha\ \mathbf{+\ i \cdot sin}\ \alpha)$ y $\rho(\mathbf{cos}\ \alpha\ \mathbf{-\ i \cdot sin}\ \alpha)$ son raíces complejas de la ecuación característica, entonces también $\mathbf{n^{h-1} sin\ n}\alpha$ y $\mathbf{n^{h-1} cos\ n}\alpha$ son soluciones particulares de la ecuación en diferencias, siendo *h* el orden o grado de multiplicidad de las soluciones.

- La solución general se obtiene formando una combinación lineal, por el método de los coeficientes indeterminados, con todas las soluciones particulares asociadas a las distintas soluciones de la ecuación característica.

2.3. ECUACIÓN LINEAL NO HOMOGÉNEA DE COEFICIENTES CONSTANTES Y ORDEN *k*

2.3.1. Introducción

Sea la ecuación lineal no homogénea o completa de coeficientes constantes:

$$a_0 \cdot u_{n+k} + a_1 \cdot u_{n+k-1} + a_2 \cdot u_{n+k-2} + \ldots + a_{k-1} \cdot u_{n+1} + a_k \cdot u_n = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot u_{n+k-i} = b_n \ .$$

Sea u_n^* la solución de la correspondiente ecuación homogénea:

$$a_0 \cdot u_{n+k} + a_1 \cdot u_{n+k-1} + a_2 \cdot u_{n+k-2} + \ldots + a_{k-1} \cdot u_{n+1} + a_k \cdot u_n = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot u_{n+k-i} = 0,$$

y sea u_p una solución particular de la ecuación completa dada. Entonces, se verifica que la solución general de la ecuación buscada será la suma de las soluciones anteriores, esto es: $u_n = u_n^* + u_p$, como sucedía también con las ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas.

Por otra parte, se cumplen las siguientes proposiciones que admitiremos sin demostración: a) Si u_n y v_n son soluciones de la ecuación no homogénea, $(u_n - v_n)$ lo es de la homogénea asociada; b) si u_n es solución de la no homogénea y v_n lo es de la homogénea, entonces $(u_n + v_n)$ lo es de la no homogénea.

Obviamente, como sucede también con las ecuaciones diferenciales, según la naturaleza analítica de la función del segundo miembro habrá que ensayar diferentes tipos de soluciones particulares, cuestión ésta que desarrollaremos en los epígrafes siguientes para los casos más frecuentes que se pueden presentar en la práctica.

Existen diversos métodos para calcular soluciones particulares de la ecuación completa. El más común es el de los *coeficientes indeterminados*, aunque también se emplea el de *variación de parámetros o constantes* (este segundo será objeto de tratamiento en posterior epígrafe).

Por lo que se refiere al primero de ellos, veamos que dicho método consiste en probar como posible solución de la ecuación completa una combinación lineal de las funciones que forman el término independiente b_n con los coeficientes indeterminados y, posteriormente, de las ecuaciones que resultan de identificar los coeficientes de los términos semejantes, calcular los coeficientes de la combinación lineal. Además, hay que tener en cuenta que si alguna de las funciones monomio que forman el término independiente es, a la vez, solución de la ecuación homogénea con un cierto orden de multiplicidad (las simples tienen orden de multiplicidad 1), dicha función debe entrar en la combinación lineal que forma la solución multiplicada por n^p, siendo *p* dicho orden o grado de multiplicidad.

Para obtener la solución general de la ecuación de recurrencia realizamos los siguientes pasos:

- Resolvemos la relación homogénea asociada como se conoce (sin sacar las constantes), pasos anteriormente dados, y así obtenemos la solución homogénea asociada (u_n^*).

- Ahora iremos a obtener la solución particular de la ecuación completa. Lo primero es ver la naturaleza analítica la función dada en b_n y observamos la tabla siguiente para ver cuál es el ensayo de la u_p más conveniente, a saber:

b_n	u_p
c, constante	A, constante
n	$A_1 n + A_0$
n^2	$A_2 n^2 + A_1 n + A_0$
n^t, $t \in \{\mathbf{Z}^+\} = \{\mathbf{N}\}$	$A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \ldots + A_1 n + A_0$
r^n, $r \in \{\mathbf{R}\}$	Ar^n
$n^t r^n$	$r^n (A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \ldots + A_1 n + A_0)$

Solo faltaría (en su caso, si se trata de un problema de valor inicial o de contorno) calcular los valores constantes c_i (de la solución homogénea asociada), mediante un sencillo sistema de ecuaciones, substituyendo con las condiciones iniciales dadas. Y con esto, tenemos ya la solución general buscada de la relación de recurrencia planteada.

Veamos, a continuación, los diferentes casos que se pueden plantear en función de la naturaleza de la b_n, con mayor especificidad.

2.3.2. Si b_n es un polinomio

En este caso, se ensaya un polinomio genérico de igual o menor grado que se obtiene por aplicación del método de los coeficientes indeterminados. Los coeficientes de este polinomio son las incógnitas a determinar, lo que se puede llevar a efecto substituyendo en el ecuación en diferencias dada. Si se obtuviese un sistema incompatible (problema de "resonancia"), se ensayaría un polinomio de grado una unidad mayor. En general, si en la solución de la homogénea figurasen términos de un polinomio, se debería multiplicar el polinomio a ensayar por una potencia conveniente de *n* para que no resultasen términos linealmente dependientes.

2.3.3. Si b_n es una función exponencial

Si el segundo miembro de la ecuación es del tipo: $b_n = h \cdot a^n$, se debe ensayar otra función exponencial de la forma: $u_p = C \cdot a^n$, donde la constante C se determina igualando coeficientes. Si *a* fuera una raíz de orden de multiplicidad *p* de la ecuación característica de la homogénea, la solución particular que debe ensayarse será del tipo: $u_p = C \cdot n^p \cdot a^n$, de modo que este término no aparezca en la ecuación complementaria (solución de la ecuación homogénea asociada).

2.3.4. Si b_n es una expresión trigonométrica

Si el segundo miembro es de la forma *cos an* o bien *sin an*, se ensayará una solución de la forma: A·cos an + B·sin an.

2.3.5. Si b_n es una combinación lineal de los anteriores

En este caso, se ensayará también una combinación lineal de las soluciones particulares propuestas. Del mismo modo, si el segundo miembro es el producto de una exponencial a^n por un polinomio bastará con ensayar el producto de dicha exponencial por un polinomio del mismo grado, teniendo en cuenta las advertencias realizadas en los epígrafes anteriores.

2.4. ECUACIÓN NO LINEAL

En este tipo de ecuaciones recurrentes, algún término con subíndice de la relación de recurrencia aparece elevado a una potencia diferente a la primera potencia, como por ejemplo en la que se contempla en el ejemplo 9 del capítulo 9. En ella, para su resolución, se ha llevado a cabo el cambio de variable: $b_t = P_t^2$; $b_{t+1} = P_{t+1}^2$.

Esta modalidad de ecuaciones en diferencias finitas, cuya presencia resulta menos común en el análisis de algoritmos que las lineales, se pueden resolver también, además de la substitución ya reseñada, por diferentes procedimientos (cambio de variable, inducción constructiva, fórmulas maestras, etc.). Existen, sin embargo, otras ecuaciones no lineales que resultan más complicadas de solventar. Un ejemplo de ellas, en el estudio de las ondas de presión, podría ser el siguiente: $P_{t+2}^3 - 3P_{t+1} \cdot P_t = 1$.

En cualquier caso, toda ecuación en diferencias finitas da una relación recurrente siempre que podamos despejar. Así, en el ejemplo anterior, es:

$$P_{t+2} = \sqrt[3]{1 + 3P_t \cdot P_{t+1}} \ .$$

Ello posibilita calcular un gran número de términos partiendo de los iniciales, siempre que éstos sean fijos y mediante el uso de ordenadores con el *software* adecuado. El inconveniente de esta solución estriba en que puede complicar notablemente el estudio de algunas propiedades importantes como, por ejemplo, los comportamientos a largo plazo, o bien los estudios de sensibilidad, y no permite, en general, llevar a cabo trabajos sobre la expresión analítica de las funciones.

No hay métodos que funcionen para todos los casos, pero para ciertas familias de ecuaciones es posible efectuar ciertas transformaciones de los espacios que hacen las veces de dominio y rango de las posibles soluciones, de tal suerte que la ecuación transformada sí resulta lineal. Así, para una ecuación de recurrencia sobre una incógnita, un cambio de rango es una transformación sobre la incógnita. Dichas ecuaciones, como las lineales que acabamos de ver, pueden ser homogéneas o no y de coeficientes constantes o variables.

3. EL OPERADOR DIFERENCIA Δ Y SU INVERSO Δ^{-1}

De una forma general, se define el operador Δ de la forma siguiente: $\Delta f(x) = f(x + h) - f(x)$, donde *h* es un número dado llamado "intervalo de diferencia". La teoría que desarrollaremos a continuación corresponde al caso particular en que h = 1.

Así pues, la ecuación en diferencias finitas se puede expresar, genéricamente, de esta forma:

$$F[x, f(x), \Delta f(x), \Delta^2 f(x), \ldots, \Delta^n f(x)] = 0.$$

Hay que tener en cuenta que:

$$\begin{cases} \Delta f(x) = f(x+1) - f(x) \\ \Delta^2 f(x) = f(x+2) - 2f(x+1) + f(x) \\ \Delta^3 f(x) = f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

y así sucesivamente. Generalmente, venimos empleando la notación:

$$f(x) = u_n \ ; \ f(x+1) = u_{n+1} \ ; \ f(x+2) = u_{n+2} \ ; \ \ldots \ ; \ f(x+k) = u_{n+k} \ .$$

Pues bien, dadas dos funciones de variable entera que designaremos por f(x) y F(x), tales que: $\Delta F(x) = F(x + 1) - F(x) = f(x)$, se define el operador Δ^{-1}, como el operador tal que: $\Delta^{-1}f(x) = F(x)$.

Es inmediato comprobar que el operador Δ^{-1} es lineal, esto es, que cumple las siguientes propiedades:

a) $\Delta^{-1}[f(x) + g(x)] = \Delta^{-1}f(x) + \Delta^{-1}g(x)$
b) $\Delta^{-1}[k\cdot f(x)] = k\cdot\Delta^{-1}f(x)$

siendo *k* una constante arbitraria.

Los operadores Δ y Δ^{-1} son tales que: $\Delta\cdot\Delta^{-1} = \Delta^{-1}\cdot\Delta = I$, donde I denota el operador unidad o identidad; en otros términos, Δ y Δ^{-1} son operadores inversos. En efecto, a partir de: $\Delta^{-1}f(x) = F(x)$, se obtiene:

$$\Delta[\Delta^{-1}f(x)] = \Delta F(x), \text{ o sea: } (\Delta\Delta^{-1})f(x) = f(x), \text{ de donde } \Delta\Delta^{-1}\Delta = I.$$

Análogamente, de: $\Delta F(x) = f(x)$, se deduce que:

$$\Delta^{-1} [\Delta F(x)] = \Delta^{-1}f(x), \text{ de donde: } \Delta^{-1}\cdot\Delta = I, \text{ c.s.q.d.}$$

A partir de aquí, y de la linealidad de Δ, se comprueba que:

$$\Delta^{-1}[f(x) + g(x)] = \Delta^{-1}f(x) + \Delta^{-1}g(x), \text{ puesto que:}$$

$$\Delta\Delta^{-1}[f(x) + g(x)] = \Delta[\Delta^{-1}f(x) + \Delta^{-1}g(x)] \ \text{ resulta ser una identidad.}$$

Análogamente se tiene que: $\Delta^{-1}[k\cdot f(x)] = k\cdot\Delta^{-1}f(x)$, pues resulta también una identidad: $\Delta\Delta^{-1}[k\cdot f(x)] = \Delta[k\cdot\Delta^{-1}f(x)]$.

Una propiedad interesante del operador Δ^{-1}, que pone de manifiesto su analogía con el operador D^{-1}, inverso del operador derivada que se emplea en la resolución de las ecuaciones diferenciales, es la siguiente:

Si dos funciones tienen la misma diferencia, ambas funciones, no son necesariamente iguales, sino que pueden diferir en una función periódica de período unidad, esto es, una función C(x) tal que:

$$C(1) = C(2) = \dots = C(x) = C(x + 1) = \dots$$

En efecto, sean las funciones F(x) y F(x) + C(x); se verifica que:

a) $\Delta F(x) = F(x + 1) - F(x)$
b) $\Delta[F(x) + C(x)] = F(x + 1) + C(x + 1) - [F(x) + C(x)] = F(x + 1) - F(x)$,

luego ambas poseen la misma diferencia.

Otra interesante propiedad se deduce a partir de la diferencia de un producto; en efecto, de la igualdad:

$\Delta[f(x) \cdot g(x)] = \Delta f(x) \cdot g(x + 1) + f(x) \cdot \Delta g(x)$, se obtiene:

$$f(x) \cdot \Delta g(x) = \Delta\, [f(x) \cdot g(x)] - g(x + 1) \cdot \Delta f(x),$$

y después de aplicar el operador Δ^{-1}, resultará que:

$$\Delta^{-1}[f(x) \cdot \Delta g(x)] = f(x) \cdot g(x) - \Delta^{-1}[g(x + 1) \cdot \Delta f(x)],$$

fórmula ésta que recuerda la de la integración por partes y que algunos autores denominan, precisamente por esta razón, de "sumación por partes".

4. EL OPERADOR "E" EN EL ESTUDIO DE LAS ECUACIONES EN DIFERENCIAS

Suele ser conveniente, en ocasiones, el empleo del operador E, que se define del siguiente modo: $Ef(x) = f(x + 1)$.

De la igualdad anterior, se deduce que:

$$Ef(x) - f(x) = f(x + 1) - f(x), \text{ o bien: } (E - 1)f(x) = \Delta f(x),$$

donde por 1 se designa el operador identidad; luego se tendrá que:

$E - 1 = \Delta$, o bien: $E = 1 + \Delta$. Entonces, resulta evidente que:

$$\begin{cases} f(x + 2) = Ef(x + 1) = E^2f(x) \\ f(x + 3) = Ef(x + 2) = E^2f(x + 1) = E^3f(x) \end{cases}$$ etc., y así sucesivamente.

Usando esta misma notación, la ecuación:

$f(x + 3) + a\cdot f(x + 2) + b\cdot f(x + 1) + c\cdot f(x) = 0$, se escribirá del siguiente modo:

$$E^3f(x) + a\cdot E^2f(x) + b\cdot Ef(x) + c\cdot f(x) = 0, \text{ o bien: } (E^3 + aE^2 + bE + c)f(x) = 0.$$

En definitiva, veamos que la forma general de una ecuación en diferencias finitas o recurrente de segundo orden y homogénea es la siguiente:

$$(a_2.E^2 + a_1.E + a_0).y[n] = 0.$$

Suponemos que la ecuación tiene soluciones de la forma exponencial, así: $y(n) = r^n$. Se toman los dos primeros desplazamientos y se substituyen en la ecuación.

$$E\cdot y(n) = r^{n+1}\ ;\quad E^2\cdot y(n) = r^{n+2}\ ;\quad a_2\cdot r^{n+2} + a_1\cdot r^{n+1} + a_0\cdot r^n = 0\ .$$

A partir de la identidad anterior obtenemos la ecuación característica, la cual es una sencilla ecuación cuadrática que posee, como es sabido, las dos soluciones siguientes:

$$r_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4\cdot a_2\cdot a_0}}{2\cdot a_2}\ ;\quad r_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4\cdot a_2\cdot a_0}}{2\cdot a_2}$$

Análogamente, por ejemplo, la ecuación no homogénea de 2º orden, en diferencias finitas, dada por: $u_{n+2} + 3u_{n+1} + 2u_n = n^2 + 1$, $\forall\ n \in \{\mathbf{N}\}$, se podrá escribir así, usando el operador E:

$$(E^2 + 3E + 2)\cdot u_n = n^2 + 1,$$

donde el segundo miembro de la ecuación, b_n, es un polinomio o función polinómica de segundo grado.

Para la resolución de este tipo de ecuaciones se emplearán, también con el operador "E" los mismos criterios ya expuestos. De esta suerte, para resolver la ecuación no homogénea de segundo orden, representada por la expresión $(a_2E^2 + a_1E + a_0)\ y(n) = F[n] = b_n$, debemos sumar como siempre una solución particular de esta ecuación a la solución obtenida de resolver la ecuación homogénea:

$$(a_2E^2 + a_1E + a_0)\ y(n) = 0.$$

Para hallar la solución particular necesaria, empleamos el método de los coeficientes indeterminados, comenzando con una combinación lineal arbitraria de todos los términos independientes que se obtienen a partir de b_n por aplicación repetida del operador E.

Como también sucedía en el caso de las ecuaciones diferenciales, si cualquier término de la expresión elegida inicialmente para la solución particular u_p es repetición de algún término de la solución complementaria (solución de la ecuación en diferencias homogénea), éste y todos los términos asociados deben multiplicarse por la menor potencia entera positiva de *n*, hasta eliminar toda posible duplicación o resonancia.

El proceso a seguir es análogo al empleado para resolver ecuaciones diferenciales de orden superior, por lo que juzgamos interesante, llegados a este punto, efectuar un somero repaso del mismo.

La solución particular a ensayar, en los casos más relevantes que se pueden presentar en la práctica, se resume en la siguiente tabla:

$F[n] = b_n$	Forma que debe tomar $Y_p = u_p$
α (constante)	A (constante)
$\alpha . n^k$ (k entero positivo)	$A_0 n^k + A_1 n^{k-1} + ... + A_{k-1} n + A_0$
$\alpha . k^n$	$A . k^n$
$\alpha . \cos kn$	$A \cos kn + B \operatorname{sen} kn$
$\alpha . \operatorname{sen} kn$	$A \cos kn + B \operatorname{sen} kn$
$\alpha . n^k l^n \cos tn$	$(A_0 n^k + ... + A_{k-1} n + A_k) l^n \cos tn + (B_0 n^k + ... + B_{k-1} n + B_k) l^n \operatorname{sen} tn$
$\alpha . n^k l^n \operatorname{sen} tn$	$(A_0 n^k + ... + A_{k-1} n + A_k) l^n \cos tn + (B_0 n^k + ... + B_{k-1} n + B_k) l^n \operatorname{sen} tn$

Prosiguiendo con el parangón de las ecuaciones diferenciales, reparemos en que cuando b_n está formada por la suma de varios términos, la selección apropiada para u_p es la suma de las expresiones u_p correspondientes a cada uno de los términos por separado.

5. EL MÉTODO DE VARIACIÓN DE PARÁMETROS

Hemos visto anteriormente que para obtener una solución particular de una ecuación lineal no homogénea, en el caso de ser el segundo miembro un polinomio, bastaba con ensayar un polinomio de igual grado (salvo que se presentasen fenómenos de *resonancia*), que se obtenía por aplicación del método de los coeficientes indeterminados.

De igual forma, si el segundo miembro es una exponencial del tipo a^n, bastaba con ensayar otra expresión exponencial de la forma $A \cdot a^n$, donde A se determinaba también igualando coeficientes. En el caso de que *a* fuera raíz de la ecuación característica, téngase en cuenta lo empleado, en caso similar, para la resolución de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Vamos a exponer, a continuación, un método aplicable en todo caso para la determinación de la solución general de la ecuación lineal no homogénea una vez conocida la correspondiente solución de la homogénea asociada. Se denomina de “variación de parámetros o constantes” y, como casi siempre, tiene su parangón en la resolución de las ecuaciones diferenciales. Sea, v. gr., la ecuación siguiente, que tomamos de tercer orden, para hacer más clara la exposición subsiguiente,

$$a \cdot u_{n+3} + b \cdot u_{n+2} + c \cdot u_{n+1} + d \cdot u_n = \varphi(n), \ \forall\ n \in \{\mathbf{N}\},$$

y supongamos que la homogénea correspondiente, admite las tres soluciones particulares, linealmente independientes v_1, v_2 y v_3; por tanto, la solución general de la homogénea será: $u_n^* = Av_1 + Bv_2 + Cv_3$.

Si ahora suponemos que las tres constantes A, B y C se substituyen por tres funciones de n, A_n, B_n y C_n con la condición de que: $u = A_n v_1 + B_n v_2 + C_n v_3$ sea la solución general de la homogénea de la ecuación completa.

Teniendo en cuenta que:

$\Delta u = A_n \Delta v_1(n) + B_n \Delta v_2(n) + C_n \Delta v_3(n) + v_1(n+1) \cdot \Delta A_n + v_2(n+1) \cdot \Delta B_n +$
$+ v_3(n+1) \cdot \Delta C_n$, se puede obtener una condición complementaria, haciendo:

$$v_1(n+1) \cdot \Delta A_n + v_2(n+1) \cdot \Delta B_n + v_3(n+1) \cdot \Delta C_n = 0 \qquad (4)$$

Entonces la expresión de $\Delta^2 u$, resulta ser:

$\Delta^2 u = A_n \Delta^2 v_1(n) + B_n \Delta^2 v_2(n) + C_n \Delta^2 v_3(n) + \Delta v_1(n+1) \cdot \Delta A_n + \Delta v_2(n+1) \cdot \Delta B_n +$
$+ \Delta v_3(n+1) \cdot \Delta C_n$.

Una nueva condición complementaria se obtiene de:

$$\Delta v_1(n + 1) \cdot \Delta A_n + \Delta v_2(n + 1) \cdot \Delta B_n + \Delta v_3(n + 1) \cdot \Delta C_n = 0 \qquad (5)$$

De forma análoga se obtiene $\Delta^3 u$:

$$\Delta^3 u = A_n \Delta^3 v_1(n) + \cdots + \Delta^2 v_3(n + 2) \cdot \Delta C_n \ .$$

La ecuación propuesta, en definitiva, se puede escribir así:

$(a \cdot E^3 + b \cdot E^2 + c \cdot E + d) u_n = \varphi(n)$, y como $E = 1 + \Delta$, se tendrá que:

$$[a(1 + \Delta)^3 + b(1 + \Delta)^2 + c(1 + \Delta) + d] u_n = \varphi(n)$$

o sea: $[a\Delta^3 + (3a + b)\Delta^2 + (3a + 2b + c)\Delta + (a + b + c + d)] u_n = \varphi(n)$.

Substituidos, en esta igualdad, los valores de Δu, $\Delta^2 u$ y $\Delta^3 u$, se obtiene una ecuación que, junto con (4) y (5), conforma un sistema que permite despejar:

$$\Delta A_n = F_1(n); \quad \Delta B_n = F_2(n) \quad y \quad \Delta C_n = F_3(n) \ .$$

Si $\Delta^{-1}F_1$, $\Delta^{-1}F_2$ y $\Delta^{-1}F_3$ son calculables, sus expresiones conteniendo, cada una de ellas, una nueva constante, proporcionan la solución buscada.

6. ECUACIONES LINEALES DE COEFICIENTES VARIABLES

Las ecuaciones lineales de coeficientes variables, de orden superior al primero, no son siempre resolubles exactamente. Pero en el caso de que se pueda descomponer en factores lineales P(E), su solución es perfectamente viable; esto es, si escribimos el primer miembro de la ecuación, en la forma:

$$E^k u_n + A_1E^{k-1}u_n + \cdots + A_ku_n = (E^k + A_1E^{k-1} + \cdots + A_k)u_n = P(E)u_n \ .$$

P(E) se puede descomponer en factores de la forma:

$(E – B_1)(E – B_2) \ldots (E – B_k)$, donde tanto las A_i como las B_i son funciones de *n*, y la solución de la ecuación se obtiene a partir de ecuaciones de primer orden. Por tanto, el problema previo a resolver es el relativo a la ecuación lineal de primer orden. Hay que tener cuidado con la descomposición de P(E), pues hay que recordar que “E” no es más que un operador.

Sea, ahora, la ecuación:

$u_{n+1} – B_nu_n = (E – B_n)u_n = 0$, de donde: $u_{n+1} = B_nu_n$, y dando valores:

$$\begin{cases} u_n = B_{n-1}\cdot u_{n-1} \\ u_{n-1} = B_{n-2}\cdot u_{n-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_2 = B_1\cdot u_1 \end{cases}$$

y multiplicando, se tendrá que: $u_n = B_{n-1} \cdot B_{n-2} \ldots \cdot B_1u_1$, y tomando el valor u_1, como una constante C, resulta en definitiva:

$$u_n = C\cdot B_1 \cdot B_2 \ldots \cdot B_{n-1} = C\cdot \prod_{i=1}^{n-1} B_i \ .$$

Si la ecuación fuese no homogénea, se tendría una expresión del tipo: $u_{n+1} – B_nu_n = \varphi(n)$, que se puede determinar su solución por el método de variación de parámetros. En efecto, haciendo:

$u_n = C_nB_1B_2 \ldots B_{n-1}$; $Eu_n = C_{n+1}B_1B_2 \ldots B_{n-1}B_n$; y por tanto:

$B_1B_2 \ldots B_n(C_{n+1} – C_n) = \varphi(n)$, o bien: $\Delta C_n = \dfrac{\varphi(n)}{B_1B_2 \ldots B_n}$, de donde:

$C_n = \Delta^{-1} \dfrac{\varphi(n)}{B_1B_2 \ldots B_n} = \sum_{n=1}^{n-1} \dfrac{\varphi(n)}{B_1B_2 \ldots B_n} + K$, donde K es una nueva constante.

Por lo tanto, se tendrá que: $u_n = B_1B_2 ... B_{n-1}\sum_{n=1}^{n-1}\frac{\varphi(n)}{B_1B_2 ... B_n} + KB_1B_2 ... B_{n-1}$.

7. LA TRANSFORMADA Z

7.1. CONCEPTO

Del mismo modo que la transformada de Laplace resulta una herramienta útil para resolver ecuaciones diferenciales lineales, la transformada Z lo es homólogamente para resolver ecuaciones en diferencias finitas lineales. Y así, veamos, v. gr., como en el campo de la Ingeniería Electrónica la transformada Z convierte una señal real o compleja, definida en el dominio del tiempo discreto, en una representación en el dominio de la frecuencia compleja.

El nombre de "Transformada Z" procede de la variable del dominio, al igual que se podría llamar "Transformada S" o "Transformada p" a la Transformada de Laplace. Probablemente, un nombre más adecuado para la TZ podría haber sido el de "Transformada de Laurent", ya que está basada en la serie de Laurent[1]. La TZ es a las señales de tiempo discreto lo mismo que la de Laplace a las señales de tiempo continuo.

La transformada Z, al igual que otras transformaciones integrales, puede ser definida como una transformada unilateral o bilateral, como veremos a continuación.

7.2. LA TRANSFORMADA Z BILATERAL

La TZ bilateral de una señal definida en el dominio del tiempo discreto x[n] es una cierta función X(z) que se define así:

[1] The *Laurent series* of a complex function *f(z)* is a representation of that function as a power series which includes terms of negative degree. It may be used to express complex functions in cases where a Taylor series expansion cannot be applied. The Laurent series was named after and first published by Pierre Alphonse Laurent in 1843. Karl Weierstrass may have discovered it first in 1841 but did not publish it at the time. More generally, Laurent series can be used to express holomorphic functions defined on an annulus, much as power series are used to express holomorphic functions defined on a disc. A *Laurent polynomial* is a Laurent series in which only finitely many coefficients are non-zero. Laurent polynomials differ from ordinary polynomials in that they may have terms of negative degree. Laurent series cannot in general be multiplied. Algebraically, the expression for the terms of the product may involve infinite sums which need not converge (one cannot take the convolution of integer sequences). Geometrically, the two Laurent series may have non-overlapping annuli of convergence. Two Laurent series with only *finitely* many negative terms can be multiplied: algebraically, the sums are all finite; geometrically, these have poles at *c*, and inner radius of convergence 0, so they both converge on an overlapping annulus. Thus when defining formal Laurent series, one requires Laurent series with only finitely many negative terms. Similarly, the sum of two convergent Laurent series need not converge, though it is always defined formally, but the sum of two bounded below Laurent series (or any Laurent series on a punctured disk) has a non-empty annulus of convergence. (FRANQUET, 2013).

$$X(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

, donde n es un número entero y z es, en general, un número complejo de la forma: $z = A \cdot e^{i\omega}$. Aquí, A es el módulo de z, y ω podría ser la frecuencia o velocidad angular expresada en radianes por segundo (rad/s) en cierto tipo de problemas.

7.3. LA TRANSFORMADA Z UNILATERAL

De forma alternativa, en los casos en que x[n] está definida únicamente para *n* = 0, la transformada Z *unilateral* se define como:

$$X^{+}(z) = Z^{+}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

En el procesamiento de señales, se usa esta definición cuando la señal es causal. En este caso, la transformada Z resulta ser una serie de Laurent con ROC del tipo |z| > R, es decir, que dicha serie converge “hacia afuera”.

Un ejemplo interesante de la TZ unilateral es la función de generación de probabilidades, donde x[n] es justamente la probabilidad que toma una variable discreta aleatoria en el instante *n*, y la función X(z) suele escribirse como X(s*)*, ya que s = z-1.

Pues bien, como consecuencia de todo ello, las propiedades de las transformadas Z resultan especialmente útiles en la teoría de la probabilidad.

7.4. LA TRANSFORMADA Z INVERSA

La Transformada Z inversa se define del siguiente modo[2]:

$$x[n] = Z^{-1}\{(X(z)\} = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz$$

Aquí, C es un círculo cerrado que envuelve el origen y la región de convergencia (ROC). El contorno C debe contener todos los polos de X(z). Un caso especial y simple de esta integral circular es que cuando C es el círculo

[2] Aquí se utiliza el concepto de *integral de contorno*. Una *integral de línea* o *curvilínea* es aquella integral cuya función es evaluada sobre una curva. En el caso que se trate de una curva es cerrada en dos dimensiones o del plano complejo o plano de Gauss, y se llama también *integral de contorno*. Ejemplos prácticos de su utilización pueden ser los siguientes:

- el cálculo de la longitud de una curva en el espacio,
- el cálculo del volumen de un objeto descrito por una curva, objeto del que se posee una función (campo escalar) que describe su volumen a lo largo de la curva,
- también para el cálculo del trabajo que se realiza para mover algún objeto a lo largo de una trayectoria teniendo en cuenta los campos de fuerzas (descritos por campos vectoriales) que actúen sobre el mismo.

unidad (que también puede usarse cuando la ROC incluye el círculo unidad), obtenemos la transformada inversa de tiempo discreto de Fourier.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

La TZ con un rango finito de *n* y un número finito de *z* separadas de forma uniforme puede ser procesada de forma eficiente con el algoritmo de Bluestein[3]. La transformada discreta de Fourier (DFT) es un caso especial de la TZ, y se obtiene limitando *z* para que coincida con el círculo unidad.

7.5. REGIÓN DE CONVERGENCIA

La región de convergencia, también conocida abreviadamente como ROC, define la región donde la transformada-z existe. La ROC es una región del plano complejo donde la TZ de una señal tiene una suma finita.

La ROC para una x[n] es definida como el rango de z para la cual la transformada-z converge. Ya que la transformada-z es una serie de potencia, converge cuando $x[n]\cdot z^{-n}$ es absolutamente sumable. Y así:

$$ROC = \{z : \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} < \infty\}$$

7.6. MULTIPLICACIÓN POR a^n

Una propiedad interesante consiste en que si X[Z] es la transformada Z de X[n], entonces la transformada Z de $a^n X[n]$ está dada por $X[a^{-1}Z]$.

Demostración:

$$Z(a^n X[n]) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n X[n] z^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} X[n](a^{-1}z)^{-n} = X[a^{-1}z]$$

Siempre estamos suponiendo que X[n] = 0 para n < 0.

7.7. TABLAS CON LOS PARES MÁS HABITUALES DE LA TRANSFORMADA Z

Dada una ecuación en diferencias finitas de orden *n*, utilizamos las propiedades de la transformada Z, en especial las de linealidad y

[3] El algoritmo de Bluestein FFT (1968), comúnmente llamado el *chirrido transformada Z algoritmo* (1969), es una transformada rápida de Fourier (FFT) o algoritmo que calcula la transformada de Fourier discreta (DFT) de tamaños arbitrarios (incluidos los primeros tamaños) por re-expresión de la DFT como una convolución. El otro algoritmo de FFT de tamaños primos, conocido como algoritmo de Rader, también trabaja por la reescritura de la DFT como una convolución. De hecho, el algoritmo de Bluestein se puede utilizar para calcular las transformaciones más generales que la DFT, basado en la transformada Z unilateral.

desplazamiento, para transformarla en una ecuación algebraica. Después, aplicaremos las siguientes tablas:

	Señal, x(n)	Transformada Z, X(z)	ROC
1	$\delta(n)$	1	todo z
2	$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| > 1$
3	$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| > \|a\|$
4	$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| > \|a\|$
5	$-a^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| < \|a\|$

(continúa)

	Señal, x(n)	Transformada Z, X(z)	ROC
6	$-na^n u(-n-1)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| < \|a\|$
7	$\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{1-z^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
8	$\sin(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{z^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
9	$a^n \cos(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{1-az^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$	$\|z\| > \|a\|$
10	$a^n \sin(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{az^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$	$\|z\| > \|a\|$

Por otra parte, la siguiente tabla muestra la correspondiente transformada Z de algunas secuencias discretas, usando la propiedad de desplazamiento:

Función Discreta	Transformada Z
X[n+4]	$Z^4X[Z]-Z^4X[0]-Z^3[1]-Z^2X[2]-ZX[3]$
X[n+3]	$Z^3X[Z]-Z^3X[0]-Z^2X[1]-ZX[2]$
X[n+2]	$Z^2X[Z]-Z^2X[0]-ZX[1]$
X[n+1]	ZX[Z]-ZX[0]
X[n]	X[Z]
X[n-1]	$Z^{-1}X[Z]$
X[n-2]	$Z^{-2}X[Z]$
X[n-3]	$Z^{-3}X[Z]$
X[n-4]	$Z^{-4}X[Z]$
…	…
X[n-k]	$Z^{-k}X[Z]$

7.8. LA SERIE DE POTENCIAS COMO TRANSFORMACIÓN FUNCIONAL

Sea la sucesión: a_0, a_1 …, a_n, … que representaremos por $\{a_n\}$. Vamos a establecer la transformación funcional que hace corresponder a $\{a_n\}$, la siguiente función de variable compleja:

$$X(z) = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \ ,$$

y que, por analogía con la transformación de Laplace ya estudiada para la variable continua (ver Anexo nº: 6), representaremos por:

$$X(z) = f(z) = T\{a_n\} = Z\{a_n\}.$$

Calculemos ahora la transformada de la sucesión: a_k, a_{k+1}, …, a_{k+n} ,

que representaremos por $\{a_{n+k}\}$. Esto es:

$$T\{a_{n+k}\} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} z^n = \frac{1}{z^k}\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \frac{1}{z^k}\left(a_0 + a_1 z + ... + a_{k-1} z^{k-1}\right) =$$
$$= \frac{1}{z^k} f(z) - \frac{1}{z^k}\left(a_0 + a_1 z + ... + a_{k-1} z^{k-1}\right).$$

Obtengamos ahora la transformación de la sucesión:

$a^0, a^1, a^2, \ldots a^n, \ldots = \{a^n\}$. Se tendrá que: $T\{a^n\} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (az)^n$.

Eligiendo z de forma que: $|az| < 1$, resulta en definitiva, que:

$$T\{a^n\} = \frac{1}{1 - az} .$$

8. ECUACIONES EN DIFERENCIAS DE VOLTERRA DEL TIPO CONVOLUCIÓN

Consideremos la ecuación en diferencias de Volterra escalar del tipo convolución, de la forma:

$$x(t+1) = c \cdot x(t) + \sum_{i=0}^{t} k(t-i) \cdot x(i), \forall c \in \{\Re\} .$$

Esta ecuación resulta análoga, en versión discreta, a la ecuación integrodiferencial de Volterra del tipo convolución siguiente:

$$x'(t) = c \cdot x(t) + \int_0^t k(t-s) \cdot x(s) ,$$

al tiempo que constituye un caso particular de la ecuación:

$$x(t+1) = c(t) \cdot x(t) + \sum_{i=t_0}^{t} k(t,i) \cdot x(i) + g(t).$$

Pues bien, se puede usar la transformada Z para resolver y analizar la estabilidad de la solución nula de la ecuación planteada utilizando la definición de convolución, con lo que podemos reescribir dicha ecuación en la forma siguiente:

$$x(t + 1) = c \cdot x(t) + k(t) * x(t).$$

Aplicando ahora la transformada Z a ambos miembros de esta ecuación obtendremos que:

$$z \cdot \tilde{x}(z) - z \cdot x(0) = c \cdot \tilde{x}(z) + \tilde{k}(z) \cdot \tilde{x}(z) ,$$

y despejando $\tilde{x}(z)$ obtenemos: $\tilde{x}(z) = \frac{z \cdot x(0)}{z - c - \tilde{k}(z)}$, con lo que tomando la transformada Z inversa correspondiente a esta última ecuación podemos obtener la solución buscada de la ecuación inicialmente planteada.