ANEXO 6

TABLAS ESTADÍSTICAS. METODOLOGÍA

1. Tablas estadísticas

Tabla 1. Función de distribución t de Student (Gosset)-I.

Tabla 2. Función de distribución t de Student (Gosset)-II.

Tabla 3. Percentiles de la distribución χ^2 de Pearson (I).

Tabla 4. Percentiles de la distribución χ^2 de Pearson (II).

Tabla 5. Percentiles de la distribución χ^2 de Pearson (III).

Tabla 6. Áreas bajo la curva normal tipificada de 0 a z.

Tabla 7. Áreas bajo la curva normal tipificada de -∞ a z.

Tabla 8. Ordenadas (y) de la curva normal tipificada en z.

Tabla 9. Función gamma F(y) incompleta.*

Tabla 10. Representación gráfica de la función de densidad de la distribución beta $\beta(p,q)$.

2. Metodología

2.1. Ajustes a una distribución "gamma" y/o exponencial
2.1.1. Definición de la distribución "gamma"
2.1.2. Características de la distribución "gamma"
2.1.3. Distribución exponencial

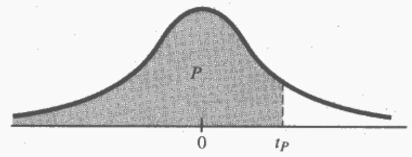
2.2. Ajuste a una distribución "beta"
2.2.1. Conceptualización
2.2.2. Características
2.2.2.1. Función de distribución
2.2.2.2. Media
2.2.2.3. Varianza

1. TABLAS ESTADÍSTICAS

Tabla A6.1. Función de distribución *t* de Student (Gosset)-I.

Esta tabla proporciona los valores t_P, tales que

$$P = P(T \leqslant t_P) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{n\pi}} \int_{-\infty}^{t_P} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{1}{2}(n+1)} dt$$



para $P > 0{,}5$, y siendo T una variable aleatoria t de Student con n-grados de libertad, ($n = 1, 2, ..., 30, ..., \infty$).

Cuando $P \leqslant 0{,}5$, entonces como la función de densidad es simétrica respecto al origen, $t = 0$, tenemos:

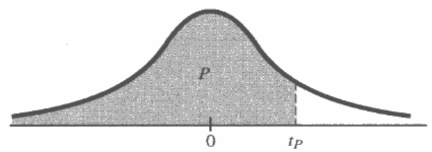
$$P(T \leqslant t_P) = 1 - P(T \leqslant -t_P)$$

n \ P	0,600	0,700	0,750	0,800	0,850	0,900	0,925	0,950	0,975	0,990	0,995	0,999	,9995
1	0,325	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	4,165	6,314	12,71	31,82	63,66	318,3	636,6
2	0,289	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,282	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33	31,60
3	0,277	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	1,924	2,353	3,182	4,541	5,841	10,21	12,92
4	0,271	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	1,778	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	0,267	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	1,699	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,869
6	0,265	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,650	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	0,263	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,617	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408
8	0,262	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,592	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	0,261	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,574	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	0,260	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,559	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	0,260	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,548	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	0,259	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,538	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	0,259	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,530	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221

Tabla A6.2. Función de distribución *t* de Student (Gosset)-II.

Función de distribución *t*-Student (continuación)

$P(T \leqslant t_P) = 1 - P(T \leqslant -t_P)$

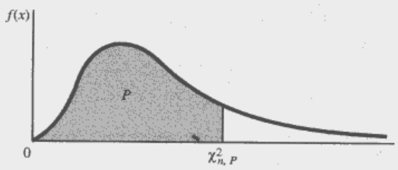


n \ P	0,600	0,700	0,750	0,800	0,850	0,900	0,925	0,950	0,975	0,990	0,995	0,999	,9995
14	0,258	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,523	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	0,258	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,517	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	0,258	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,512	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	0,257	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,508	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	0,257	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,504	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,922
19	0,257	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,500	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	0,257	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,497	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	0,257	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,494	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	0,256	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,492	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	0,256	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,489	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,768
24	0,256	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,487	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	0,256	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,485	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	0,256	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,483	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	0,256	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,482	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	0,256	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,480	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	0,256	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,479	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	0,256	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,477	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
31	0,256	0,530	0,682	0,853	1,054	1,309	1,476	1,696	2,040	2,453	2,744	3,375	3,633
40	0,255	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,468	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
50	0,255	0,528	0,679	0,849	1,047	1,299	1,462	1,676	2,009	2,403	2,678	3,261	3,496
60	0,254	0,527	0,679	0,848	1,045	1,296	1,458	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
70	0,254	0,527	0,678	0,847	1,044	1,294	1,456	1,667	1,994	2,381	2,648	3,211	3,435
80	0,254	0,526	0,678	0,846	1,043	1,292	1,453	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,416
90	0,254	0,526	0,677	0,846	1,042	1,291	1,452	1,662	1,987	2,368	2,632	3,183	3,402
100	0,254	0,526	0,677	0,845	1,042	1,290	1,451	1,660	1,984	2,364	2,626	3,174	3,390
120	0,254	0,526	0,677	0,845	1,041	1,289	1,449	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160	3,373
150	0,254	0,526	0,676	0,844	1,040	1,287	1,447	1,655	1,976	2,351	2,609	3,145	3,357
∞	0,253	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,440	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

Tabla A6.3. Percentiles de la distribución χ^2 de Pearson (I).

Esta tabla proporciona los valores $\chi^2_{n,\,P}$, tales que

$$P = P(X \leqslant \chi^2_{n,\,P}) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} \int_0^{\chi^2_{n,\,P}} x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}x}\, dx$$

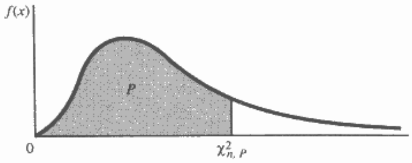


siendo X una variable aleatoria χ^2 de Pearson con n-grados de libertad.

n \ P	0,005	0,010	0,025	0050	0,100	0,250	0,500
1	0,0000	0,0001	0,0009	0,0039	0,0157	0,1015	0,454
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,1026	0,2107	0,5754	1,386
3	0,0717	0,1148	0,2158	0,3518	0,5844	1,213	2,366
4	0,2070	0,2971	0,4844	0,7107	1,064	1,923	3,357
5	0,4117	0,5543	0,8312	1,145	1,610	2,675	4,351
6	0,6757	0,8721	1,2373	1,635	2,204	3,455	5,348
7	0,9893	1,239	1,690	2,167	2,833	4,255	6,346
8	1,344	1,646	2,180	2,733	3,490	5,071	7,344
9	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	5,899	8,343
10	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	6,737	9,342
11	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	7,584	10,34
12	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	8,438	11,34
13	3,565	4,107	5,009	5,892	7,041	9,299	12,34
14	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	10,17	13,34
15	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	11,04	14,34
16	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	11,91	15,34
17	5,697	6,408	7,564	8,672	10,09	12,79	16,34
18	6,265	7,015	8,231	9,390	10,86	13,68	17,34
19	6,844	7,633	8,907	10,117	11,65	14,56	18,34
20	7,434	8,260	9,591	10,850	12,44	15,45	19,34
21	8,034	8,897	10,282	11,591	13,24	16,34	20,34
22	8,643	9,542	10,982	12,338	14,04	17,24	21,34
23	9,260	10,195	11,688	13,090	14,85	18,14	22,34
24	9,886	10,856	12,401	13,848	15,66	19,04	23,34
25	10,519	11,524	13,119	14,611	16,47	19,94	24,34
26	11,160	12,198	13,843	15,379	17,29	20,84	25,34
27	11,807	12,878	14,573	16,151	18,11	21,75	26,34
28	12,461	13,564	13,307	16,927	18,94	22,66	27,34
29	13,121	14,256	16,047	17,708	19,77	23,57	28,34
30	13,786	14,953	16,790	18,492	20,60	24,48	29,34
40	20,706	22,164	24,433	26,509	29,05	33,66	39,34
50	27,990	29,706	32,357	34,764	37,69	42,94	49,33
60	35,534	37,484	40,481	43,187	46,46	52,29	59,33
70	43,275	45,441	48,756	51,739	55,33	61,70	69,33
80	51,172	53,540	57,153	60,391	64,28	71,14	79,33
90	59,196	61,754	65,646	69,126	73,29	80,62	89,33
100	67,327	70,064	74,221	77,929	82,36	90,13	99,33

Tabla A6.4. Percentiles de la distribución χ^2 de Pearson (II).

$$P = P(X \leqslant \chi^2_{n,P}) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{\chi^2_{n,P}} x^{\frac{n}{2}-1}\cdot e^{-\frac{1}{2}x}\,dx$$



n \ P	0,750	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995	0,999
1	1,32	2,70	3,84	5,02	6,63	7,88	10,83
2	2,77	4,60	5,99	7,38	9,21	10,60	13,82
3	4,11	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84	16,27
4	5,38	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86	18,47
5	6,63	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75	20,52
6	7,84	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55	22,46
7	9,04	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28	24,32
8	10,22	13,36	15,51	17,53	20,09	21,96	26,12
9	11,39	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59	27,88
10	12,55	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19	29,59
11	13,70	17,28	19,68	21,92	24,72	26,76	31,26
12	14,85	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30	32,91
13	15,98	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82	34,53
14	17,12	21,06	23,68	16,12	29,14	31,32	36,12
15	18,25	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80	37,70
16	19,37	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27	39,25
17	20,49	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72	40,79
18	21,60	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16	42,31
19	22,72	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58	43,82
20	23,83	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00	45,32
21	24,93	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40	46,80
22	26,04	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80	48,27
23	27,14	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18	49,73
24	28,24	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56	51,18
25	29,34	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93	52,62
26	30,43	35,56	38,89	41,92	45,64	48,29	54,05
27	31,53	36,74	40,11	43,19	46,96	49,64	55,48
28	32,62	37,92	41,34	44,46	48,28	50,99	56,89
29	33,71	39,09	42,56	45,72	49,59	52,34	58,30
30	34,80	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67	59,70
40	45,62	51,80	55,76	59,34	63,69	66,77	73,40
50	56,33	63,17	67,50	71,42	76,15	79,49	86,66
60	66,98	74,40	79,08	83,30	88,38	91,95	99,61
70	77,58	85,53	90,53	95,02	100,42	104,21	112,29
80	88,13	96,58	101,87	106,62	112,32	116,32	124,77
90	98,65	107,56	113,14	118,13	124,11	128,29	137,20
100	109,09	118,49	124,34	129,56	135,80	140,16	149,38

Tabla A6.5. Percentiles de la distribución χ^2 de Pearson (III).

g.l.	Por ciento									
	.5	1	2.5	5	10	90	95	97.5	99	99.5
1	.000039	.00016	.00098	.0039	.0158	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	.0100	.0201	.0506	.1026	.2107	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	.0717	.115	.216	.352	.584	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	.207	.297	.484	.711	1.064	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	.412	.554	.831	1.15	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	.676	.872	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	.989	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.73	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
120	83.85	86.92	91.58	95.70	100.62	140.23	146.57	152.21	158.95	163.64

NOTA: Para valores grandes de los grados de libertad se puede utilizar la fórmula aproximada:

$$\chi^2_\alpha = n\left(1-\frac{2}{9n}+Z_\alpha\sqrt{\frac{2}{9n}}\right)^3,$$

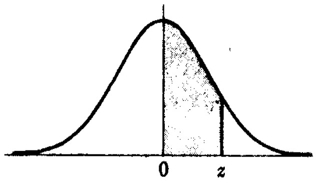
siendo Z_α la desviación normal y **n** el número de grados de libertad. Así, v. gr.:

$$\chi^2_{99} = 60 \cdot (1 - 0.00370 + 2.326 \cdot 0.06086)^3 = 60 \cdot (1.1379)^3 = 88.4$$

para el percentil 99 con 60 grados de libertad (Dixon y Massey, 1969).

Del mismo modo, se tendría que para el percentil 99 con 36 g.l.: χ^2_{99} = 54.324.

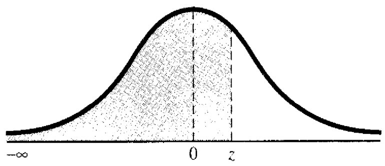
Tabla A6.6. Áreas bajo la curva normal tipificada de 0 a z.



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0754
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2258	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2612	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2996	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.5	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998
3.6	.4998	.4998	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.7	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.8	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.9	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000

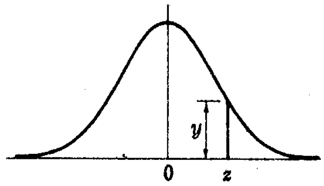
Tabla A6.7. Áreas bajo la curva normal tipificada de -∞ a z.

$$F(z) = P(Z \leqslant z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0.9788	0.9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

Tabla A6.8. Ordenadas (y) de la curva normal tipificada en z.

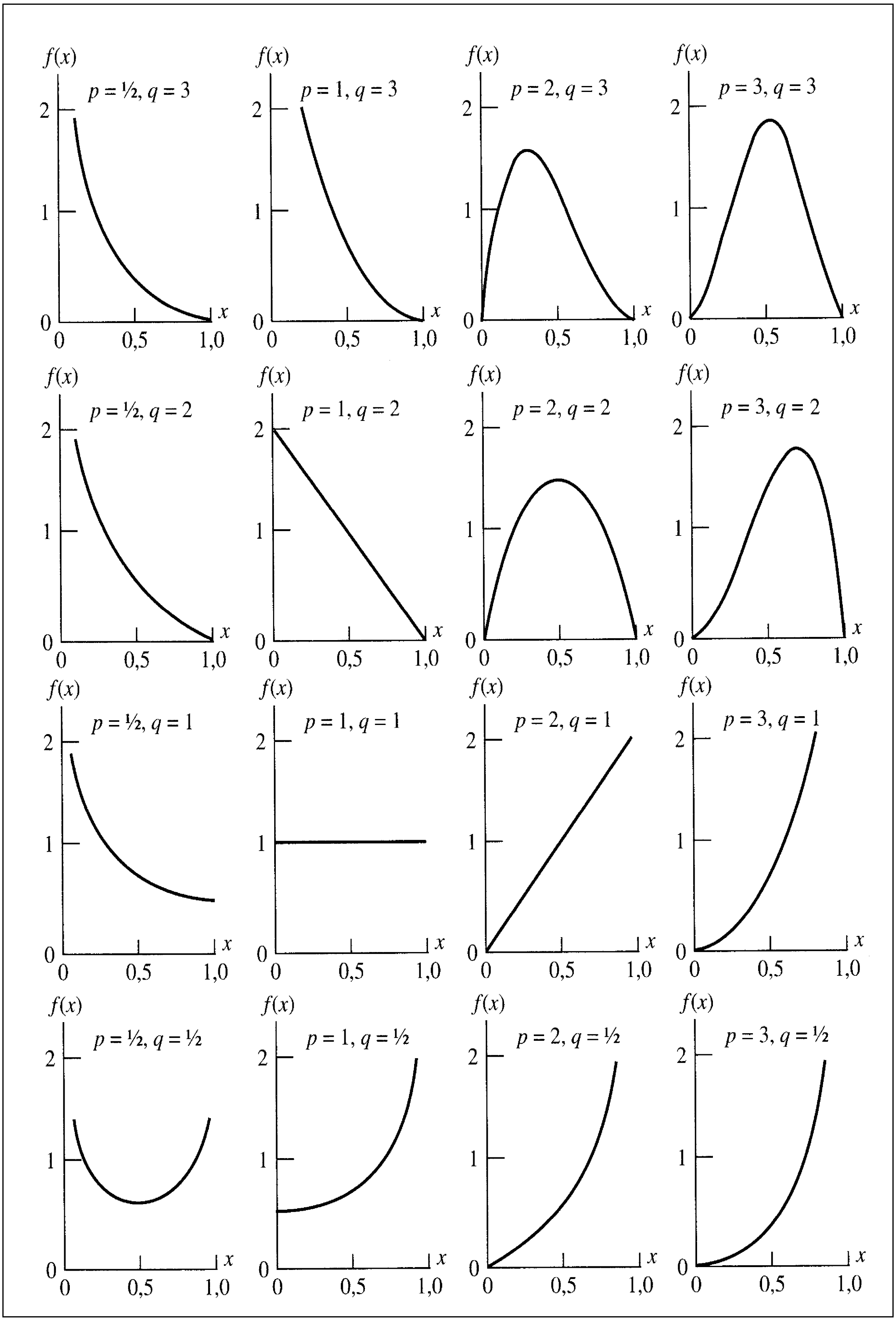


z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.3989	.3989	.3989	.3988	.3986	.3984	.3982	.3980	.3977	.3973
0.1	.3970	.3965	.3961	.3956	.3951	.3945	.3939	.3932	.3925	.3918
0.2	.3910	.3902	.3894	.3885	.3876	.3867	.3857	.3847	.3836	.3825
0.3	.3814	.3802	.3790	.3778	.3765	.3752	.3739	.3725	.3712	.3697
0.4	.3683	.3668	.3653	.3637	.3621	.3605	.3589	.3572	.3555	.3538
0.5	.3521	.3503	.3485	.3467	.3448	.3429	.3410	.3391	.3372	.3352
0.6	.3332	.3312	.3292	.3271	.3251	.3230	.3209	.3187	.3166	.3144
0.7	.3123	.3101	.3079	.3056	.3034	.3011	.2989	.2966	.2943	.2920
0.8	.2897	.2874	.2850	.2827	.2803	.2780	.2756	.2732	.2709	.2685
0.9	.2661	.2637	.2613	.2589	.2565	.2541	.2516	.2492	.2468	.2444
1.0	.2420	.2396	.2371	.2347	.2323	.2299	.2275	.2251	.2227	.2203
1.1	.2179	.2155	.2131	.2107	.2083	.2059	.2036	.2012	.1989	.1965
1.2	.1942	.1919	.1895	.1872	.1849	.1826	.1804	.1781	.1758	.1736
1.3	.1714	.1691	.1669	.1647	.1626	.1604	.1582	.1561	.1539	.1518
1.4	.1497	.1476	.1456	.1435	.1415	.1394	.1374	.1354	.1334	.1315
1.5	.1295	.1276	.1257	.1238	.1219	.1200	.1182	.1163	.1145	.1127
1.6	.1109	.1092	.1074	.1057	.1040	.1023	.1006	.0989	.0973	.0957
1.7	.0940	.0925	.0909	.0893	.0878	.0863	.0848	.0833	.0818	.0804
1.8	.0790	.0775	.0761	.0748	.0734	.0721	.0707	.0694	.0681	.0669
1.9	.0656	.0644	.0632	.0620	.0608	.0596	.0584	.0573	.0562	.0551
2.0	.0540	.0529	.0519	.0508	.0498	.0488	.0478	.0468	.0459	.0449
2.1	.0440	.0431	.0422	.0413	.0404	.0396	.0387	.0379	.0371	.0363
2.2	.0355	.0347	.0339	.0332	.0325	.0317	.0310	.0303	.0297	.0290
2.3	.0283	.0277	.0270	.0264	.0258	.0252	.0246	.0241	.0235	.0229
2.4	.0224	.0219	.0213	.0208	.0203	.0198	.0194	.0189	.0184	.0180
2.5	.0175	.0171	.0167	.0163	.0158	.0154	.0151	.0147	.0143	.0139
2.6	.0136	.0132	.0129	.0126	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110	.0107
2.7	.0104	.0101	.0099	.0096	.0093	.0091	.0088	.0086	.0084	.0081
2.8	.0079	.0077	.0075	.0073	.0071	.0069	.0067	.0065	.0063	.0061
2.9	.0060	.0058	.0056	.0055	.0053	.0051	.0050	.0048	.0047	.0046
3.0	.0044	.0043	.0042	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036	.0035	.0034
3.1	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026	.0025	.0025
3.2	.0024	.0023	.0022	.0022	.0021	.0020	.0020	.0019	.0018	.0018
3.3	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014	.0013	.0013
3.4	.0012	.0012	.0012	.0011	.0011	.0010	.0010	.0010	.0009	.0009
3.5	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007	.0007	.0007	.0006
3.6	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005	.0005	.0005	.0005	.0004
3.7	.0004	.0004	0004	.0004	.0004	.0004	.0003	.0003	.0003	.0003
3.8	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002
3.9	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0001	.0001

Tabla A6.9. Función gamma F*(y) incompleta.

	p																			
y	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5	10,0
1	0,8427	0,6321	0,4276	0,2642	0,1509	0,0803	0,0402	0,0190	0,0085	0,0037	0,0015	0,0006	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	—
2	0,9545	0,8647	0,7385	0,5940	0,4506	0,3233	0,2202	0,1429	0,0886	0,0527	0,0301	0,0166	0,0088	0,0045	0,0023	0,0011	0,0005	0,0002	0,0001	0,0000
3	0,9857	0,9502	0,8884	0,8009	0,6938	0,5768	0,4603	0,3528	0,2601	0,1847	0,1266	0,0839	0,0538	0,0335	0,0203	0,0119	0,0068	0,0038	0,0021	0,0011
4	0,9953	0,9817	0,9540	0,9084	0,8438	0,7619	0,6674	0,5665	0,4659	0,3712	0,2867	0,2149	0,1564	0,1107	0,0762	0,0511	0,0335	0,0214	0,0133	0,0081
5	0,9984	0,9933	0,9814	0,9596	0,9248	0,8753	0,8114	0,7350	0,6495	0,5595	0,4696	0,3840	0,3061	0,2378	0,1803	0,1334	0,0964	0,0681	0,0471	0,0318
6	0,9995	0,9975	0,9926	0,9826	0,9652	0,9380	0,8994	0,8488	0,7867	0,7149	0,6364	0,5543	0,4724	0,3937	0,3210	0,2560	0,1999	0,1528	0,1144	0,0839
7	0,9998	0,9991	0,9971	0,9927	0,9844	0,9704	0,9488	0,9182	0,8777	0,8270	0,7670	0,6993	0,6262	0,5503	0,4745	0,4013	0,3329	0,2709	0,2163	0,1695
8	0,9999	0,9997	0,9989	0,9970	0,9932	0,9862	0,9749	0,9576	0,9331	0,9004	0,8589	0,8088	0,7509	0,6866	0,6179	0,5470	0,4762	0,4075	0,3427	0,2834
9	1,0000	0,9999	0,9996	0,9988	0,9971	0,9938	0,9880	0,9788	0,9648	0,9450	0,9184	0,8843	0,8425	0,7932	0,7373	0,6761	0,6112	0,5443	0,4776	0,4126
10	—	1,0000	0,9998	0,9995	0,9988	0,9972	0,9944	0,9897	0,9821	0,9707	0,9547	0,9329	0,9048	0,8699	0,8281	0,7798	0,7258	0,6672	0,6054	0,5421
11	—	—	0,9999	0,9998	0,9995	0,9988	0,9975	0,9951	0,9911	0,9849	0,9756	0,9625	0,9446	0,9214	0,8922	0,8568	0,8153	0,7680	0,7157	0,6595
12	—	—	1,0000	0,9999	0,9998	0,9995	0,9989	0,9977	0,9951	0,9924	0,9873	0,9797	0,9689	0,9542	0,9349	0,9105	0,8806	0,8450	0,8038	0,7576
13	—	—	—	1,0000	0,9999	0,9998	0,9995	0,9989	0,9980	0,9963	0,9935	0,9893	0,9830	0,9741	0,9620	0,9460	0,9255	0,9002	0,8698	0,8342
14	—	—	—	—	1,0000	0,9999	0,9998	0,9995	0,9990	0,9982	0,9968	0,9945	0,9910	0,9858	0,9784	0,9684	0,9551	0,9379	0,9166	0,8906
15	—	—	—	—	—	1,0000	0,9999	0,9998	0,9996	0,9991	0,9984	0,9972	0,9953	0,9924	0,9881	0,9820	0,9737	0,9626	0,9482	0,9301
16	—	—	—	—	—	—	1,0000	0,9999	0,9998	0,9996	0,9992	0,9986	0,9976	0,9960	0,9936	0,9900	0,9850	0,9780	0,9687	0,9567
17	—	—	—	—	—	—	—	1,0000	0,9999	0,9998	0,9996	0,9993	0,9988	0,9979	0,9966	0,9946	0,9916	0,9874	0,9816	0,9739
18	—	—	—	—	—	—	—	—	1,0000	0,9999	0,9998	0,9997	0,9994	0,9990	0,9982	0,9971	0,9954	0,9929	0,9894	0,9846
19	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1,0000	0,9999	0,9998	0,9997	0,9995	0,9991	0,9985	0,9975	0,9961	0,9941	0,9911
20	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1,0000	0,9999	0,9999	0,9997	0,9995	0,9992	0,9987	0,9979	0,9967	0,9950
21	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1,0000	0,9999	0,9999	0,9998	0,9996	0,9993	0,9989	0,9982	0,9972
22	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1,0000	0,9999	0,9999	0,9998	0,9997	0,9994	0,9991	0,9985
23	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1,0000	0,9999	0,9999	0,9998	0,9997	0,9995	0,9992
24	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9997	0,9996

Tabla A6.10. Representación gráfica de la función de densidad de la distribución beta β(p,q).



2. METODOLOGÍA

2.1. AJUSTES A UNA DISTRIBUCIÓN "GAMMA" Y/O EXPONENCIAL

2.1.1. Definición de la distribución "gamma"

Según el problema que se presente, sería posible buscar una distribución teórica de probabilidad más apropiada que la gaussiana anteriormente explicitada, como por ejemplo la distribución de probabilidad "gamma", cuya variable hidráulica **x** posee una función de densidad del tipo:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1} \cdot e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha} \cdot \Gamma(\alpha)}, & \forall x > 0 \\ 0 & \forall x \leq 0 \end{cases}$$

, siendo $\forall\ \alpha > 0$ y también $\beta > 0$.

De hecho, la cantidad $\Gamma(\alpha)$ es un símbolo que representa el valor de la función "gamma" generalizada de Euler en el punto α. Esta función, como ya se sabe, viene definida por la integral euleriana de 2ª especie:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \cdot e^{-x} \cdot dx .$$

Vamos, ahora, a demostrar que la media y la varianza de la distribución gamma están dadas por $\mu = \alpha \cdot \beta$ y $\sigma^2 = \alpha \cdot \beta^2$, respectivamente. En este caso, la función generatriz de momentos y la función característica están dadas, respectivamente, por:

$$M(t) = (1 - \beta \cdot t)^{-\alpha} \text{ , y } \phi(\omega) = (1 - \beta \cdot i_{\omega})^{-\alpha}$$

Se tiene que:

$$\mu = \int_0^{\infty} x \left[\frac{x^{\alpha-1} \cdot e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha} \cdot \Gamma(\alpha)} \right] \cdot dx = \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha} \cdot e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha} \cdot \Gamma(\alpha)} \cdot dx .$$

Reemplazando ahora: $x/\beta = t$, tenemos la media:

$$\mu = \frac{\beta^{\alpha} \cdot \beta}{\beta^{\alpha} \cdot \Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha} \cdot e^{-t} \cdot dt = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha + 1) = \alpha \cdot \beta .$$

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2 \left[\frac{x^{\alpha-1} \cdot e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha} \cdot \Gamma(\alpha)} \right] \cdot dx = \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha+1} \cdot e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha} \cdot \Gamma(\alpha)} \cdot dx .$$

Por otra parte, reemplazando: $x/\beta = t$, tenemos lo siguiente:

$$E(X^2) = \frac{\beta^{\alpha+1}\cdot\beta}{\beta^{\alpha}\cdot\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} t^{\alpha+1}\cdot e^{-t}\cdot dt = \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha+2) = \beta^2\cdot(\alpha+1)\cdot\alpha\ ,$$

ya que: $\Gamma(\alpha+2) = (\alpha+1)\cdot\Gamma(\alpha+1) = (\alpha+1)\cdot\alpha\cdot\Gamma(\alpha)$. Por tanto, la varianza buscada, será:

$$\sigma^2 = E(X^2)-\mu^2 = \beta^2(\alpha+1)\cdot\alpha-(\alpha\cdot\beta)^2 = \alpha\cdot\beta^2\ .$$

Además, se demuestra fácilmente, integrando por partes, que:

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha).$$

Si α es un número entero positivo (natural), esta relación de recurrencia ofrece el resultado factorial: $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha!$, como comprobaremos más adelante, razón por la que a la función gamma se la llama, a veces, “función factorial”.

Integrando por partes en la expresión:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x}\cdot x^{\alpha-1}\cdot dx\ ;$$
$$u = x^{\alpha-1},\ dv = e^{-x}\cdot dx;\ \ du = (\alpha-1)\cdot x^{\alpha-2}\cdot dx,\ v = -e^{-x}\ ,$$

se obtiene:

$$\Gamma(\alpha) = \left[-e^{-x}\cdot x^{\alpha-1}\right]_0^{\infty} + (\alpha-1)\int_0^{\infty} e^{-x}\cdot x^{\alpha-2}\cdot dx = (\alpha-1)\int_0^{\infty} e^{-x}\cdot x^{\alpha-2}\cdot dx = (\alpha-1)\cdot\Gamma(\alpha-1)\ .$$

Reiterando el procedimiento:

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdot\ \ldots\ \cdot(\alpha-k)\cdot\Gamma(\alpha-k).$$

En el caso particular de que α sea un número natural (entero positivo), la aplicación de la expresión anterior conduce a:

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!\ \ (\forall\alpha\in \mathrm{N}),\ \text{puesto que: } \Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x}\cdot dx\ = 1\ .$$

Una expresión que se presenta con frecuencia, es la que se obtiene mediante el cambio de variable: $x = t^2$. En efecto:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x}\cdot x^{\alpha-1}\cdot dx\ = \int_0^{\infty} e^{-t^2}\cdot t^{2\alpha-2}\cdot 2t\cdot dt\ = 2\int_0^{\infty} e^{-t^2}\cdot t^{2\alpha-1}\cdot dt\ .$$

El cambio $x = m\cdot t$, conduce análogamente a:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x}\cdot x^{\alpha-1}\cdot dx\ = \int_0^{\infty} e^{-mt}\cdot(mt)^{\alpha-1}\cdot m\cdot dt\ = m^{\alpha}\int_0^{\infty} e^{-mt}\cdot t^{\alpha-1}\cdot dt\ .$$

Si ahora hacemos el cambio de variable: $\beta = \frac{1}{a}$, diremos que una variable aleatoria X, de tipo continuo, sigue una distribución gamma de parámetros **α** y **a**, siendo α, a ∈ $\Re^2$ y α > 0 y a > 0, si su *función de densidad* es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-ax}, \forall x > 0 \\ 0 \qquad\qquad\quad , \forall x \leq 0 \end{cases} \tag{1}$$

Abreviadamente lo indicaremos por: $X \rightarrow \Gamma(\alpha,a)$.

Veamos que la expresión (1) está bien definida y por tanto es una función de densidad. En efecto, para x > 0, f(x) es positiva; y además la integral de la función de densidad, en todo el campo de variación, es la unidad, para lo cual bastará con hacer el cambio de variable: a·x = y, en la expresión (1), y tendremos:

$$\int_0^{\infty} \frac{a^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-ax} dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} a^{\alpha} \cdot \left(\frac{y}{a}\right)^{\alpha-1} \cdot e^{-y} \cdot \frac{dy}{a} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} \cdot e^{-y} dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \Gamma(\alpha) = 1.$$

La representación gráfica de varias distribuciones gamma se presenta en la figura siguiente, para diferentes valores de los parámetros α y a. Así:

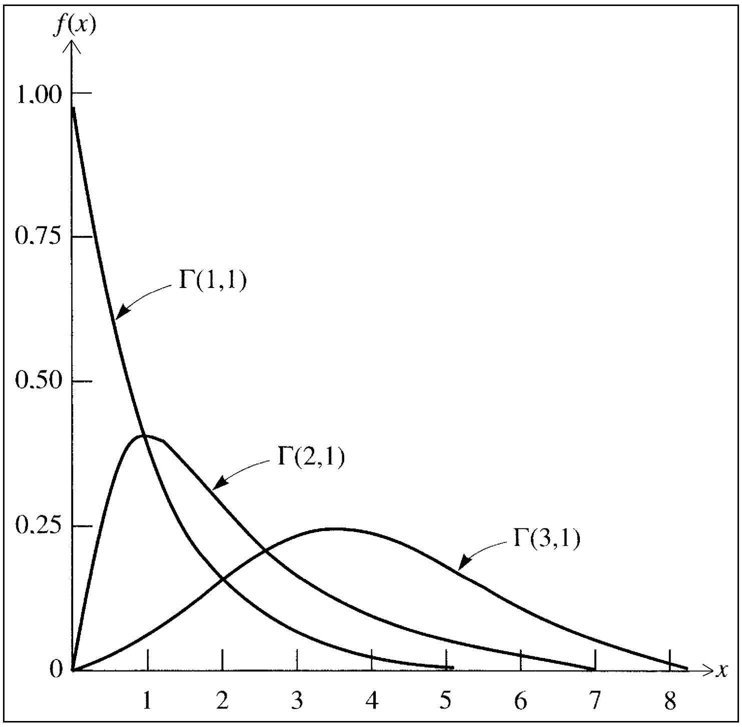


Fig. A6.1. Representación gráfica de la función de densidad de distribuciones Γ(α,a).

Como puede observarse, la función de densidad de la $\Gamma(\alpha,a)$ presenta una forma, para $\alpha \leq 1$, que difiere de la forma que presenta para $\alpha \geq 1$, pues para valores de $\alpha > 1$ presenta los correspondientes máximos en los puntos:

$$x = \frac{\alpha - 1}{a},$$

lo cual se comprueba fácilmente sin más que buscar los máximos de la función de densidad. Al parámetro α se le suele llamar *parámetro forma* y al parámetro a, *parámetro escala*.

2.1.2. Características de la distribución "gamma"

1. *Función de distribución*

La función de distribución correspondiente a una variable aleatoria X, distribuida según una $\Gamma(\alpha,a)$ es:

$$f(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} \dfrac{a^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^x x^{\alpha-1} \cdot e^{-ax} \cdot dx, & \forall x > 0 \\ 0 & , \forall x \leq 0 \end{cases}$$

El valor de esta expresión no es fácil de obtener, aunque cuando α es un número entero positivo, la integral se puede calcular por partes y las probabilidades se obtienen de forma aproximada.

Con el fin de simplificar el cálculo de estas probabilidades, Pearson tabuló la función gamma incompleta para diferentes valores del parámetro α.

La *función gamma incompleta* viene dada por la expresión:

$$F^*(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^y y^{\alpha-1} \cdot e^{-y} \cdot dy, \quad \forall y > 0 ,$$

que aparece tabulada en la tabla A6.9, donde se ha hecho α = p.

El valor de la función de distribución F(x) de la $\Gamma(\alpha,a)$ es igual al de la función gamma incompleta en el punto y = a·x, es decir:

$$F(x) = F^*(ax).$$

2. *Función generatriz de momentos factoriales*

Aplicando la definición de función generatriz de momentos, tenemos:

$$g_x(t) = E\left[e^{tX}\right] = \int_0^\infty e^{tx} \cdot \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-ax} \cdot dx = \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} \cdot e^{-(a-t)x} \cdot dx \ ,$$

y haciendo el cambio de variable: $(a - t)x = u$, $dx = \dfrac{du}{a - t}$, se tiene:

$$= \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{1}{(a - t)^\alpha} \cdot u^{\alpha-1} \cdot e^{-u} \cdot du = \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)}{(a - t)^\alpha} = \frac{a^\alpha}{(a - t)^\alpha} = \left(1 - \frac{t}{a}\right)^{-\alpha} .$$

3. *Propiedad reproductiva*

Si X_1, …, X_n son n variables aleatorias independientes, distribuidas según una $\Gamma(\alpha_i, a)$, para $\forall i = 1, \ldots, n$, entonces la variable aleatoria:

$$Y = X_1 + \ldots + X_n \text{ , sigue una distribución: } \Gamma(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n, a) .$$

Demostración:

Calculamos la función generatriz de momentos de la variable aleatoria Y, con lo que:

$$g_Y(t) = E[e^{tY}] = E[e^{t(X_1+\ldots+X_n)}] = E[e^{tX_1}] \ldots\ldots E[e^{tX_n}] =$$

$$= (1- t/a)^{-\alpha_1} \ldots\ldots (1- t/a)^{-\alpha_n} = (1- t/a)^{-(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)} ,$$

que es la función generatriz de momentos de una distribución: $\Gamma(\alpha_1+\ldots+\alpha_n,a)$.

Y teniendo en cuenta la conocida propiedad de la unicidad de la función generatriz de momentos, resulta que:

$$Y \to \Gamma(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n, a) ,$$

es decir, que la distribución $\Gamma(\alpha,a)$ es reproductiva respecto al parámetro α.

Proposición:

Si la variable aleatoria X se distribuye según una N(0,1), entonces la variable aleatoria $Y = X^2$ se distribuye según una $\Gamma = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

Demostración:

La función de distribución de la variable aleatoria Y en el punto x, para x>0, será:

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(X^2 \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) = F_x(\sqrt{x}) - F_x(-\sqrt{x}) ,$$

en donde F_x es la función de distribución de la variable aleatoria X, N(0,1).

Derivando la expresión de la función de distribución, tendremos la función de densidad; en efecto:

$$f_Y(x) = F'_Y(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} f_x(\sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}} f_x(-\sqrt{x}) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{2n}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{2n}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(-\sqrt{x})^2} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}}{2\sqrt{x}\sqrt{2\pi}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{\sqrt{x}\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}} x^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}x},$$

que, como vemos, es la función de densidad de una $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

<u>Proposición</u>:

Si X_1, …, X_n son n variables aleatorias independientes y distribuidas según una N(0,1), entonces la variable aleatoria:

$$Y = X^2{}_1 + \ldots + X^2{}_n \text{ , sigue una distribución: } \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

La demostración de la presente proposición resulta inmediata, pues basta con tener en cuenta una proposición anteriormente expuesta y la propiedad reproductiva de la distribución gamma respecto al parámetro α.

Cuando el parámetro α es entero, a la distribución $\Gamma(\alpha,a)$ se le conoce también con el nombre de *distribución de Erlang*, y entonces se relaciona con la distribución de Poisson, de manera que si el número de sucesos aleatorios e independientes que ocurren en un intervalo de tiempo es una variable aleatoria de Poisson de parámetro **a** (es decir con media de ocurrencia constante **a**), entonces la variable que representa el tiempo, hasta que ocurra el α-ésimo suceso de Poisson, sigue una distribución $\Gamma(\alpha,a)$.

El ejemplo práctico que se plantea en el último epígrafe del capítulo 11, por lo que se refiere a la distribución de los caudales de las diferentes acequias de riego de una cierta zona regable, podría presentar una distribución de probabilidad del tipo $\Gamma(3,1)$ o similar, si se observa la anterior Fig. A6.1.

2.1.3. Distribución exponencial

También se le suele llamar *distribución exponencial negativa*.

Diremos que una variable aleatoria X, de tipo continuo, sigue una **distribución exponencial** de parámetro **a**, siendo $a \in \Re$ y a > 0, si su *función de densidad* es:

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot e^{-ax} & , \forall x > 0 \\ 0 & , \forall x \leq 0 \end{cases}$$

Abreviadamente lo indicaremos por: $X \to Exp(a)$.

2.2. AJUSTE A UNA DISTRIBUCIÓN "BETA"

2.2.1. Conceptualización

Análogamente a como hicimos para la distribución gamma, definiremos previamente la función beta como una función del análisis matemático que puede resultar útil para la resolución de problemas de "uniformidad hidráulica" u otros relacionados con la Hidráulica en general. Así pues, definimos la *función beta generalizada de p y q, β (p,q)* como dada por la integral euleriana de 1ª especie:

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1} \cdot dx, \ p > 0, \ q > 0 ,$$

que es convergente para valores de x en el intervalo (0,1), siendo p,q números reales positivos, no necesariamente enteros.

Se verifica que: β(p,q) = β(q,p), y para probar esto, basta hacer el cambio de variable: 1 – x = y , dx = - dy . En efecto:

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1} \cdot dx = \int_1^0 - (1-y)^{p-1} \cdot y^{q-1} \cdot dy =$$
$$= \int_0^1 y^{q-1} \cdot (1-y)^{p-1} \cdot dy = \beta(q,p) .$$

También se verifica que:

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \qquad (2)$$

Esta función β(p,q) la utilizaremos para definir la "distribución de probabilidad beta".

Diremos que una variable aleatoria X, de tipo continuo, sigue una **distribución beta** de parámetros p y q, siendo $p,q \in \Re^2$ y p > 0 y q > 0, si su *función de densidad* es:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta(p,q)} x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1} & , \forall x / \ 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{en el resto} \end{cases} \quad (3)$$

O bien, teniendo en cuenta la expresión (2):

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)} x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1} & , \forall x / \ 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{en el resto} \end{cases}$$

Abreviadamente lo indicaremos por: $X \rightarrow \beta(p,q)$.

Observemos que esta función de densidad está definida en el intervalo (0,1), lo cual nos indica que esta familia de distribuciones beta es muy útil para representar modelos probabilísticos que representan proporciones que se pueden presentar en algunos problemas que plantea la Hidráulica, en general. En este sentido, se desarrolla un ejemplo práctico en el epígrafe siguiente.

La expresión (3) está correctamente definida como una función de densidad, pues para $0 < x < 1$, $f(x)$ es positiva y además muy fácilmente se comprueba que:

$$\int_0^1 \frac{1}{\beta(p,q)} x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1} dx = 1.$$

La representación gráfica de la función de densidad, como vemos en la tabla A6.10 toma formas muy diferentes para los distintos valores de los dos parámetros p y q. Esto nos permite seleccionar la forma de la función de densidad, pues bastará elegir adecuadamente los parámetros para ajustarse convenientemente a ella. Así pues:

- Cuando $p = q$ la función de densidad es simétrica, siendo el eje de simetría la recta de ecuación: $x = \frac{1}{2}$.
- Cuando $p = q = 1$ la distribución $\beta(p,q) \equiv U(0,1)$.
- Cuando $p < q$ es asimétrica a la derecha.
- Cuando $p > q$ es asimétrica a la izquierda.
- Cuando $p < 1$ y $q \geq 1$ es decreciente y cóncava.
- Cuando $q < 1$ y $p \geq 1$ es creciente y cóncava.
- Cuando $p > 1$ y $q > 1$ tiene un solo máximo relativo o local.
- Cuando $p < 1$ y $q < 1$ tiene un solo mínimo relativo o local.

Por otra parte, tal como ya se expuso en nuestro libro anterior, el cálculo de los valores de la función β pueda realizarse a partir de los valores de la función Γ a partir de las fórmulas deducidas. En este sentido, por ejemplo, para calcular el valor de la integral euleriana $\beta(p, q) = \beta(q, p)$ para los valores $p = 5/2$, $q = 7/2$, se procedería del siguiente modo:

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}\cdot(1-x)^{q-1}\cdot dx = \left\{\begin{matrix} x = 1-z \\ dx = -dz \end{matrix}\right\} = -\int_1^0 (1-z)^{p-1}\cdot z^{q-1}\cdot dz =$$

$$= \int_0^1 z^{q-1}\cdot(1-z)^{p-1}\cdot dz = \beta(q,p) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{5\cdot3\cdot1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(6)} =$$

$$= \frac{\frac{45}{32}\pi}{5!} = \frac{3}{256}\pi = 0.0368155 \quad .$$

2.2.2. Características

2.2.2.1. Función de distribución

La expresión de la función de distribución es:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & ,\forall x \leq 0 \\ \int_0^x \frac{1}{\beta(p,q)} x^{p-1}\cdot(1-x)^{q-1}dx, & \forall x/\ 0 < x < 1 \\ 0 & ,\forall x \geq 1 \end{cases} \tag{4}$$

De manera análoga a como ocurría en la distribución $\Gamma(\alpha)$, aquí existen también tablas correspondientes a la *función beta incompleta*[1], que nos facilitan el cálculo de valores de la función de distribución.

Las diferentes representaciones gráficas de la función de distribución $\beta(p,q)$ para los valores más usuales de los parámetros **p** y **q** pueden verse en la tabla A6.10 anterior.

2.2.2.2. Media

Calculamos los *momentos de orden r* respecto al origen, para poder obtener fácilmente la media y la varianza. Esto es:

$$E\left[X^r\right] = \int_0^1 x^r\cdot\frac{1}{\beta(p,q)}x^{p-1}\cdot(1-x)^{q-1}\cdot dx = \frac{1}{\beta(p,q)}\int_0^1 x^{p+r-1}\cdot(1-x)^{q-1}\cdot dx =$$
$$= \frac{\beta(p+r,q)}{\beta(p,q)} = \frac{\Gamma(p+r)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+r+q)}\cdot\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)-\Gamma(q)} = \frac{(p+r-1)\ldots.(p+1)\cdot p}{(p+r+q-1)\ldots.(p+q)} \tag{5}$$

Expresión a partir de la cual podemos obtener la *media* o *esperanza matemática* sin más que hacer r = 1:

[1] La función beta incompleta es:

$$\int_0^x x^{p-1}\cdot(1-x)^{q-1}\cdot dx, \forall\, x\,/\,0 < x < 1$$

$$E[X] = \frac{p}{p+q}.$$

2.2.2.3. Varianza

Obteniendo previamente el momento de orden 2, para lo cual hacemos que r = 2, tenemos:

$$E\left[X^2\right] = \frac{(p+1)p}{(p+q+1)(p+q)}.$$

Luego la *varianza* es:

$$\mathrm{Var}(X) = E\left[X^2\right] - (E[X])^2 = \frac{(p+1)\cdot p}{(p+q+1)\cdot(p+q)} - \frac{p^2}{(p+q)^2} =$$

$$= \frac{p\cdot q}{(p+q+1)\cdot(p+q)^2}.$$