ANEXO 9

ECUACIONES INTEGRALES E INTEGRO-DIFERENCIALES. ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

1. TRANSFORMADA LAPLACE DE UNA INTEGRAL

Esta propiedad, de gran utilidad en el cálculo y resolución de las ecuaciones integrales e integro-diferenciales que tratamos en algunos capítulos de nuestro libro, establece que:

$$\text{Si } f(t) \leftrightarrow F(S), \text{ entonces } \int_0^t f(u)\cdot du \leftrightarrow \frac{F(S)}{S}.$$

Si definimos la función: $g(t) = \int_0^t f(u)\cdot du$, entonces, por el teorema fundamental del Cálculo Infinitesimal, se tendrá que:

$$g'(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t f(u)\cdot du = f(t) \quad y \quad g(0) = \int_0^0 f(u)\cdot du = 0.$$

Por lo tanto: $F(S) = L\{f(t)\} = L\{g'(t)\} = S\cdot G(S) - g(0)$.

De donde también: $F(S) = S\cdot G(S)$, y de aquí se obtiene que:

$$G(S) = L\{g(t)\} = L\left\{ \int_0^t f(u)\cdot du \right\} = \frac{F(S)}{S}.$$

Así pues, resulta que la transformada Laplace de la integral indefinida de una función (supuesta existente) es el cociente de la transformada de la función por su variable S.

2. ECUACIONES INTEGRALES E INTEGRO-DIFERENCIALES RESOLUBLES POR TRANSFORMADAS DE LAPLACE

2.1. INTRODUCCIÓN Y DEFINICIONES

La teoría de las ecuaciones integrales fue iniciada por Volterra y desarrollada posteriormente por Freedholm y Hilbert, a comienzos del pasado siglo XX. Problemas de índole muy diversa, que se plantean tanto en EDO como en EDP, se pueden reducir, por la vía de una función de Green apropiada, a ecuaciones integrales, proporcionando éstas una visión unificada de aquellos.

También, la teoría de las ecuaciones integrales (EI), presentada desde un punto de vista moderno, proporciona al alumno la posibilidad de entrar en contacto con el lenguaje y los métodos propios del Análisis funcional (espacios de Hilbert, desarrollos de funciones, operadores de diversa clase, etc.), disciplina clave en la investigación moderna de las ecuaciones diferenciales. Precisamente, la teoría de los espacios de Hilbert y operadores, tiene su origen en problemas planteados en ecuaciones integrales.

Este estudio fue continuado por David Hilbert mediante una serie de artículos publicados entre los años 1904 y 1910, los cuales permitieron no solo avanzar en el conocimiento de las ecuaciones integrales, sino establecer también los fundamentos de la teoría de espacios de Hilbert. Lo más curioso del caso (aunque no extraño, pues este tipo de cosas suceden en Matemáticas con cierta frecuencia), es que la teoría de espacios de Hilbert y operadores ha mostrado su utilidad no solo en el campo de las ecuaciones integrales que aquí nos ocupa, sino que a partir de mediados del siglo XX comenzó a utilizarse también en la resolución de problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales (además, por supuesto, de en otras muchas ramas de la Matemática).

El tema de las ecuaciones integrales de Freedholm lineales y autoadjuntas alcanza su culminación en el desarrollo de Hilbert-Schmidt, que puede marcar el comienzo de una teoría general de desarrollos en serie de Fourier. El tratamiento de los problemas de contorno, cuyo estudio fue iniciado por Sturm y Liouville en el siglo XIX, se realiza con el punto de vista de Hilbert, que mediante el método de la función de Green los redujo a ecuaciones integrales. Esto proporciona una extraordinaria economía de métodos y demostraciones y, al mismo tiempo, supone una buena ilustración de la utilidad de las ecuaciones integrales, también por su aplicación en la Mecánica de Fluidos que es el objeto de nuestro estudio. En particular, se describe de manera muy fácil el conjunto de valores propios y funciones propias, además de algunas propiedades notables, como la complitud de tales funciones en ciertos espacios de funciones, lo que constituye un resultado importante, sin duda, para aplicar el método de separación de variables en el estudio de numerosos problemas de contorno o de tipo mixto para las EDP.

Una *ecuación integral* es una ecuación en que la función incógnita aparece dentro de una integral sin que aparezcan derivadas involucradas en la ecuación. Es decir, la incógnita forma parte también del integrando o función subintegral. Para dar solución a este problema se hace uso del mismo procedimiento empleado para solventar una ecuación diferencial ordinaria, donde debe encontrarse primero la función en términos de s y luego, a través de la correspondiente transformada inversa, encontrar la función en t que es incógnita. Como nos hallamos frente a una integral, debemos hacer uso del teorema de la convolución al objeto de encontrar la transformada de Laplace de dicha integral. En efecto, así como las ecuaciones diferenciales ligan una función incógnita de una o varias variables con sus derivadas totales o parciales, las ecuaciones integrales que aquí presentaremos someramente relacionan la función incógnita con una integral en cuyo integrando aparece la susodicha función. Se presentan tales ecuaciones en un buen número de cuestiones técnicas o económicas, proporcionando métodos que, en ocasiones, resultan harto más ventajosos que los usuales empleados en la teoría de las ecuaciones diferenciales que acabamos de estudiar, especialmente en la resolución de ciertos tipos de problemas en cuyo planteamiento intervienen condiciones de contorno.

Los tipos de ecuaciones integrales más frecuentes son los lineales, es decir, aquellos en que la función incógnita aparece linealmente bajo el signo de integración y se llaman *ecuaciones de Freedholm o de Volterra* (en honor de estos eminentes matemáticos, aunque su auténtico descubridor fue Abel[1]), según que los límites de la integral sean fijos o variables, y se clasifican en ecuaciones de *primera especie o clase* y de *segunda especie o clase* según que dicha función incógnita aparezca solamente en el integrando o también fuera de él. Valga, al respecto, el siguiente cuadro aclaratorio:

Tabla A9.1. Clasificación de las ecuaciones integrales.

AUTOR	ESPECIE	INHOMOGÉNEA	HOMOGÉNEA
FREEDHOLM	1ª	$f(x) = \int_a^b K(x,t)\cdot\varphi(t)\cdot dt$	$\int_a^b K(x,t)\cdot\varphi(t)\cdot dt = 0$
	2ª	$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,t)\cdot\varphi(t)\cdot dt$	$\varphi(x) = \lambda\int_a^b K(x,t)\cdot\varphi(t)\cdot dt$
VOLTERRA	1ª	$f(x) = \int_a^x K(x,t)\cdot\varphi(t)\cdot dt$	$\int_a^x K(x,t)\cdot\varphi(t)\cdot dt = 0$
	2ª	$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^x K(x,t)\cdot\varphi(t)\cdot dt$	$\varphi(x) = \lambda\int_a^x K(x,t)\cdot\varphi(t)\cdot dt$

Existe una conexión estrecha entre las ecuaciones integrales y las ecuaciones diferenciales, y de hecho algunos problemas pueden formularse como ecuación diferencial o equivalentemente como ecuación integral. Ver por ejemplo el modelo de Maxwell[2] de viscoelasticidad.

El tipo de ecuación integral más sencillo es el de una *ecuación de Freedholm* de primera clase o especie y lineal, a saber:

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt.$$

[1] El nombre de Niels Henrik Abel (1802-1829) tiene un lugar privilegiado en el Olimpo Matemático, al lado de otros nombres gloriosos como Newton, Euler, Gauss, Cauchy o Riemann. A lo largo de su corta vida, realizó numerosas contribuciones matemáticas tan importantes como significativas. Aunque sus estudios se centraron fundamentalmente en el álgebra y en el cálculo integral, su nombre será siempre asociado a algunas ramas del análisis, particularmente a la teoría de las ecuaciones integrales, cuyo desarrollo sistemático llevaron a cabo Vito Volterra, Freedholm y Hilbert setenta años después de sus descubrimientos.

[2] **James Clerk Maxwell** (Edimburgo, Escocia, 13 de junio de 1831 – Cambridge, Inglaterra, 5 de noviembre de 1879). Físico escocés conocido principalmente por haber desarrollado la teoría electromagnética clásica, sintetizando todas las anteriores observaciones, experimentos y leyes sobre electricidad, magnetismo y aun sobre óptica, en una teoría consistente. Las ecuaciones de Maxwell demostraron que la electricidad, el magnetismo y hasta la luz, son manifestaciones del mismo fenómeno: el campo electromagnético. Desde ese momento, todas las otras leyes y ecuaciones clásicas de estas disciplinas se convirtieron en casos simplificados de las ecuaciones de Maxwell. Su trabajo sobre electromagnetismo ha sido llamado la "*segunda gran unificación en física*", después de la primera llevada a cabo por Newton. Además se le conoce por la estadística de Maxwell-Boltzmann en la teoría cinética de los gases. Maxwell fue una de las mentes matemáticas más preclaras de su tiempo, y muchos físicos lo consideran el científico del siglo XIX que más influencia tuvo sobre la física del siglo XX, habiendo hecho contribuciones fundamentales en la comprensión de la naturaleza. Muchos consideran que sus contribuciones a la ciencia son de la misma magnitud que las de Isaac Newton y Albert Einstein. En 1931, con motivo de la conmemoración del centenario de su nacimiento, Einstein describió el trabajo de Maxwell como «el más profundo y provechoso que la física ha experimentado desde los tiempos de Newton».

Donde:

φ(t) es una función desconocida o incógnita,
f(x) es una función conocida y
K(x,t) es una función de dos variables también conocida, llamada "núcleo de la ecuación integral" ("kernel"), que se supone continua y, por tanto, acotada en el intervalo completo cerrado de integración [a,b], lo mismo de la variable *x* que de la variable *t*.

El objeto del problema estriba en la determinación de la función desconocida φ(t). Nótese que los límites de integración son constantes; esto precisamente es lo que caracteriza a una *ecuación de Freedholm*. Si la función incógnita aparece también fuera de la integral, entonces se tiene una ecuación integral lineal completa de Freedholm de segunda clase o especie, esto es:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Básicamente, viene a expresar que el valor de una cantidad φ en un punto *x* es igual a un valor señalado f(x) más un promedio ponderado de su valor en los demás puntos. Las variables *x*, *t*, recorren aquí un intervalo prefijado [a,b]. La particularidad ya expresada de esta ecuación es su linealidad, en el sentido de que la función incógnita φ(t) entra en ella de modo lineal. Sin embargo, algunos problemas conducen a la necesidad de considerar también ecuaciones integrales no lineales, como es el caso de la denominada *ecuación de Hammerstein*, a la que nos referiremos posteriormente y que también encontraremos en algún ejercicio suficientemente representativo de este mismo libro.

Las ecuaciones integrales surgen en problemas empíricos en los que se postula que el valor de una función en un punto depende del comportamiento de la función en una gran región de su dominio. Por consiguiente, en la exposición anterior, el valor de φ en *x* depende del integrando: K(x,t)·φ(t) integrado en el intervalo (a,b).

Como sucede con las ecuaciones diferenciales, aquella ecuación se llamará *homogénea* cuando f(x) ≡ 0, y *completa* en caso contrario. El parámetro numérico representado por la letra griega *lambda* de la segunda ecuación es un número real desconocido que desempeña el mismo papel que el de un valor propio en una expresión del álgebra lineal que ya hemos visto, por cierto, en el presente libro.

Si un límite de integración es variable, entonces se tiene una *ecuación de Volterra*. Las ecuaciones de Volterra (nombre acuñado así por el matemático rumano Train Lalesco en el año 1908), de primer y segundo tipo o especie, vienen dadas, respectivamente, por las expresiones:

$$f(x) = \int_a^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt$$

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\, \varphi(t)\, dt.$$

La denominada *ecuación de Abel* pertenece a este tipo de ecuaciones integrales. De hecho, la ecuación de Volterra puede ser considerada como una ecuación de Freedholm en la que la función K(x,t) verifica la condición: “K(x,t) = 0, $\forall t > x$”. Sin embargo, conviene destacar las ecuaciones de tipo Volterra como una clase especial ya que ellas poseen una serie de propiedades que no tienen lugar para ecuaciones arbitrarias de tipo Freedholm.

En todo lo anterior, pues, si la función *f(x)* es idénticamente nula, la ecuación integral se llama *ecuación integral homogénea*. Si *f(x)* no es cero, entonces se trata de una *ecuación integral inhomogénea* o *no homogénea*.

2.2. CLASIFICACIÓN

Las ecuaciones integrales que aquí tratamos se clasifican según tres criterios dicotómicos que, combinados entre sí, dan hasta ocho tipos de ecuaciones diferentes, a saber:

- Límites de integración:
  - Ambos fijos: Ecuación integral de Freedholm.
  - Uno de ellos variable: Ecuación integral de Volterra.

- Lugar donde aparece la función incógnita:
  - Únicamente dentro de la integral: ecuación integral de primera clase o especie.
  - Tanto dentro de la integral como fuera de la misma: ecuación integral de segunda clase o especie.

- Homogeneidad, según que *f* sea o no nula:
  - Si *f* es idénticamente nula: ecuación integral homogénea.
  - Si *f* no es nula: ecuación integral inhomogénea o completa.

Las ecuaciones integrales son importantes, como ya hemos señalado, en numerosas aplicaciones. Los problemas en los que aparecen ecuaciones integrales incluyen los problemas de transferencia de energía por radiación, el problema de vibraciones de una cuerda o una membrana, los problemas de viscoelasticidad, los modelos hidráulicos y algunos problemas de campos electromagnéticos. Algunos de estos otros problemas, como hemos visto, también pueden plantearse en términos de ecuaciones diferenciales ordinarias o en derivadas parciales. Tanto las ecuaciones de Freedholm como las de Volterra, son ejemplos de ecuaciones integrales lineales, debido a la linealidad de la integral respecto a la función incógnita φ(t) situada bajo la integral. Un ejemplo de ecuación integral de Volterra no-lineal de 2ª especie tendría la forma general:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\, F(x,t,\varphi(t))\, dt.$$

, donde *F* es una función conocida y en que su dificultad de tratamiento sube de punto según sea la naturaleza de *F*.

Veamos, en fin, que las ecuaciones integrales suelen aparecer en determinados problemas hidráulicos, como veremos en algún capítulo de nuestro libro. Conviene analizar sus métodos de resolución por dos razones fundamentales:

1. Para resolver ecuaciones diferenciales con determinadas condiciones particulares de contorno. Recordemos que, en las ecuaciones de Bessel, la condición r = 0 determinaba si existía o no la función de Neumann $N_n(r)$ como solución. En las ecuaciones de Bessel modificadas, la condición $r \rightarrow \infty$ determinaba la existencia de la solución $I_n(r)$. Las ecuaciones integrales relacionan a la función incógnita, no sólo con sus valores en la frontera a través de las derivadas, sino también en toda una región con unas condiciones previas, sin tener que añadir al final condiciones adicionales.

2. La forma de los núcleos depende de los valores de contorno. Por lo tanto, las ecuaciones integrales son compactas (autoconsistentes) y pueden ser una forma más poderosa o conveniente para resolver problemas que las ecuaciones diferenciales. Además, existen ciertos problemas hidráulicos que no admiten una forma explícita como ecuación diferencial; de ahí la novedad de su tratamiento extenso, especialmente las lineales, con numerosos ejemplos prácticos, en nuestro libro.

2.3. ECUACIONES INTEGRALES COMO ECUACIONES DE VALORES PROPIOS

Algunas ecuaciones integrales lineales homogéneas pueden entenderse como el límite continuo de un problema de valores propios. Usando la notación de índices, tenemos que una ecuación de valores propios, en un espacio vectorial de dimensión finita, puede escribirse como:

$$\sum_{j=1}^{n} M_{ij} v_j = \lambda v_i, \quad o \qquad \mathbf{M}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

, donde **M** es una matriz y **v** uno de sus vectores propios o autovector asociado al valor propio o autovalor λ.

Haciendo el límite continuo mediante el cambio de los índices discretos *i* y *j* por los índices continuos *x* e *y*, se tiene la siguiente expresión:

$$\int \mathrm{d}y \, K(x,y)\varphi(y) = \lambda\varphi(x)$$

, donde la suma sobre *j* ha sido substituida por una integral sobre *y*, y la matriz M_{ij} y el vector v_i han sido substituidos por el denominado "núcleo integral" *K(x,y)* y la autofunción φ *(y)* (los límites de la integral son fijos de manera análoga a la suma sobre *j*).

En general, el núcleo de la ecuación integral *K(x,y)* puede ser una distribución o función generalizada, más que una función ordinaria. Si la distribución *K* tiene soporte sólo en el punto x = y, entonces la ecuación integral se reduce a una ecuación diferencial de autovalores. Pero también puede suceder al revés en algunos casos, como se contempla en el siguiente epígrafe.

2.4. ECUACIONES DIFERENCIALES REDUCIDAS A ECUACIONES INTEGRALES

La formulación de muchos problemas matemáticos o hidráulicos puede plantearse directamente en forma de ecuación integral. Incluso, en ocasiones, puede interesar convertir una ecuación diferencial, como las que venimos estudiando en nuestro libro, en una ecuación integral equivalente, con la ventaja de que la ecuación integral, aparte de incluir las condiciones de contorno, maneja un operador acotado (de hecho, frecuentemente, un operador compacto), mientras que el operador diferencial era, en general, no acotado. Esto último permite echar mano de varios resultados conocidos para operadores compactos con el fin de resolver un problema planteado en términos de ecuaciones integrales con mayor facilidad.

Ese estrecho parentesco existente entre los problemas relativos a las ecuaciones diferenciales con otros equivalentes en ecuaciones integrales no se desprende de simples transformaciones formales, si no que tiene su raíz en la propia esencia física de los problemas que pueden plantearse directamente en una u otra forma, según el punto de vista que se adopte en cada caso. El principio físico de superposición de efectos de causas concomitantes puede traducirse expresando la suma de efectos infinitesimales, con lo que obtendremos ecuaciones integrales, o bien restando efectos, es decir, hallando incrementos infinitesimales, con lo que obtendremos entonces ecuaciones diferenciales. A la dualidad de planteamientos de un mismo fenómeno corresponderá, pues, una dualidad de lenguaje matemático para expresarlo. Un ejemplo sencillo de ello lo constituye el problema físico de la cuerda vibrante.

Veamos, en fin, que toda función continua de dos variables *K(x,t)* puede aproximarse cuanto se desee mediante un polinomio entero *P(x,t)* el cual constituye siempre un núcleo degenerado, entendiendo como tal el que puede descomponerse en suma de productos de funciones con las variables separadas. El método anterior es, pues, aplicable para resolver una ecuación de Freedholm de 2ª especie. Si la aproximación se efectúa mediante desarrollos en serie de Taylor, precisa exigir la analiticidad del núcleo o, por lo menos, su derivabilidad hasta el orden necesario a la aproximación. Si la aproximación se efectúa en media en el intervalo [a,b] de integración (lo que resulta harto más ventajoso, especialmente para intervalos grandes) se manejarán desarrollos en polinomios ortogonales y se precisará tan solo la integrabilidad del núcleo y de su cuadrado.

Un paso al límite en este proceso conduce a la determinación de los autovalores y autofunciones resolviendo sistemas lineales de infinitas ecuaciones con infinitas incógnitas. La ecuación en λ que define los valores propios viene entonces expresada mediante un determinante infinito. Tales tipos de determinantes se presentaron lo mismo a Freedholm que a Hilbert[3] al querer fundamentar la teoría de las ecuaciones integrales lineales por métodos diversos y que no podemos desarrollar aquí por obvias razones de espacio y complejidad.

Por otra parte, existe un claro nexo de unión entre las ecuaciones diferenciales lineales y las ecuaciones integrales de Volterra. La resolución de la ecuación diferencial lineal no homogénea o completa siguiente:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n(x)y = b(x), \qquad (1)$$

con coeficientes continuos $a_i(x)$ ($\forall i = 1, 2, \ldots, n$) con las condiciones iniciales:

$$y(0) = C_0,\ y'(0) = C_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(0) = C_{n-1}, \qquad (2)$$

puede ser reducida a la resolución de cierta ecuación integral de Volterra de segunda especie. Demostremos esto en el siguiente ejemplo de la ecuación diferencial de segundo orden:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = b(x), \qquad (1')$$

$$y(0) = C_0, \quad y'(0) = C_1. \qquad (2')$$

Hagamos ahora: $\frac{d^2 y}{dx^2} = \varphi(x)$. (3)

De aquí, y teniendo en cuenta las condiciones iniciales (2'), se halla sucesivamente:

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(t)dt + C_1, \qquad y = \int_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt + C_1 x + C_0. \qquad (4)$$

Aquí hemos aplicado la denominada *fórmula de las integrales iteradas*, que constituye un importante resultado de Cauchy[4] que recoge en una integral la generalización de este proceso, a saber:

[3] Durante los años veinte del pasado siglo, la teoría espectral de operadores tuvo sorprendentes aplicaciones a problemas únicamente planteados en espacios de Hilbert. La aparición, en el año 1932, del libro de John von Neumann "Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik" y de "Linear Transformations in Hilbert Spaces and Applications in Analysis" de Marshall Stone mostraron la aparición de la teoría de operadores (en espacios de Hilbert) como una parte propia pero íntimamente relacionada con lo que se conoce ahora por *Análisis Funcional Lineal*. Por aquellos años, dicho Análisis experimentó su primer gran desarrollo. Muchas de las ideas empleadas cristalizaron en principios generales que se formularon y demostraron. Varias técnicas evolucionaron para aplicarlas a problemas lineales más generales que los planteados en los espacios de Hilbert.

[4] La fórmula expresada de Cauchy resulta verificable para los valores n = 1, 2, 3, …, n - 1.

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \ldots \int_{x_0}^{x}}_{n} f(x)\cdot dx = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} (x-z)^{n-1} f(z) dz = J^n f(x) = D^{-n} f(x) .$$

Teniendo en cuenta las expresiones (3) y (4), escribamos la ecuación diferencial (1) así:

$$\phi(x) + \int_0^x a_1(x)\phi(t)dt + C_1 a_1(x) + \int_0^x a_2(x)(x - t)\phi(t)dt + C_1 x a_2(x) + C_0 a_2(x) = b(x),$$

o bien:

$$\phi(x) + \int_0^x [a_1(x) + a_2(x)(x - t)]\phi(t)dt = b(x) - C_1 a_1(x) - C_1 x a_2(x) - C_0 a_2(x) \qquad (5)$$

Haciendo ahora el núcleo integral:

$$K(x, t) = - [a_1(x) + a_2(x)\cdot(x-t)], \qquad (6)$$

$$f(x) = b(x) - C_1 a_1(x) - C_1 x\cdot a_2(x) - C_0 a_2(x), \qquad (7)$$

reducimos la expresión (5) a la forma:

$$\varphi(x) = \int_0^x K(x, t)\varphi(t)dt + f(x), \qquad (8)$$

es decir, se llega a una ecuación integral inhomogénea de Volterra de segunda especie, con $\lambda = 1$.

La existencia de una solución única de la ecuación (8) se sigue de la existencia y unicidad de la solución del problema de Cauchy (1')-(2'), para la ecuación diferencial lineal con coeficientes continuos o variables en un entorno del punto $x = 0$.

Recíprocamente, resolviendo la ecuación integral (8) con K y f, determinadas mediante las fórmulas (6) y (7), y substituyendo la expresión obtenida para $\varphi(x)$ en la última de las ecuaciones (4), se obtiene la solución única de la ecuación (1'), que satisface a las condiciones iniciales (2').

3. OTROS MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES INTEGRALES

3.1. MÉTODO DE LAS APROXIMACIONES SUCESIVAS

Supongamos que se tiene una ecuación integral lineal inhomogénea del tipo Volterra de segunda especie como la que sigue:

$$y(x) = f(x) + \lambda\int_0^x K(x,t)\cdot y(t)\cdot dt\,.$$

Supondremos que f(x) es continua en el intervalo [0, a], y que el núcleo K (x, t) es continuo para $0 \le x \le a$, $0 \le t \le x$.

Tomemos cierta función $y_0(x)$, continua en [0, a]. Substituyendo en el segundo miembro de la ecuación integral anterior la función $y_0(x)$ en lugar de y(x) se obtiene que:

$$y_1(x) = f(x) + \lambda\int_0^x K(x,t)\,y_0(t)dt\,.$$

La función $y_1(x)$ definida de este modo es también continua en el segmento [0, a] de la recta real. Continuando este proceso se obtiene la siguiente sucesión de funciones:

$y_0(x)$, $y_1(x)$, …, $y_i(x)$, ..., $y_n(x)$, …, donde: $y_n(x) = f(x) + \lambda\int_0^x K(x,t)y_{n-1}(t)dt\,.$

Según las hipótesis hechas con respecto a f(x) y a K(x, t), la sucesión $\{y_n(x)\}$ converge para $n \to \infty$ hacia la solución y(x) de la ecuación integral. Si, en particular, se toma f(x) en calidad de $y_0(x)$, entonces $y_n(x)$ serán, precisamente, las sumas parciales de la serie que determina la solución buscada de la ecuación integral. Una elección acertada de la aproximación "nula" $y_0(x)$ puede conducir, sin duda, a una convergencia rápida de la sucesión $\{y_n(x)\}$ hacia la solución deseada de la ecuación integral de tal suerte planteada.

3.2. ECUACIONES INTEGRALES CON NÚCLEO DEGENERADO

El núcleo K(x, t) de la ecuación integral de Freedholm de segunda especie se llama *degenerado*, si éste es la suma de un número finito de productos de una función solo de *x* por una función solo de *t*, es decir, si tiene la forma siguiente:

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)b_k(t)\,; \qquad (1)$$

las funciones $a_k(x)$ y $b_k(t)$ ($\forall k = 1, 2, \ldots, n$) se considerarán continuas en el cuadrado fundamental: $a \le x, t \le b$ y linealmente independientes. La ecuación integral con núcleo degenerado (1):

$$y(x) - \lambda\int_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\cdot b_k(t)\right] y(t)\cdot dt = f(x), \qquad (2)$$

se resuelve del siguiente modo. Escribamos la expresión anterior (2) en la forma:

$$y(x) = f(x) + \lambda\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\int_a^b b_k(t)\cdot y(t)\cdot dt\,, \qquad (3)$$

e introduzcamos las notaciones: $\int_a^b b_k(t)\cdot y(t)\cdot dt = C_k$ ($\forall$k = 1, 2, …, n). (4)

Entonces, la expresión anterior (3) toma la forma:

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k a_k(x), \tag{5}$$

donde C_k son constantes desconocidas (puesto que la función y(x) no es conocida). De este modo, la resolución de una ecuación integral con núcleo degenerado se reduce a hallar las constantes C_k ($\forall$k = 1, 2, …, n). Substituyendo la expresión (5) en la ecuación integral (2), después de efectuar sencillas transformaciones, se obtiene:

$$\sum_{m=1}^{n} \left\{ C_m - \int_a^b b_m(t) \left[f(t) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k a_k(t) \right] dt \right\} a_m(x) = 0 .$$

En virtud de la independencia lineal de las funciones $a_m(x)$, ($\forall$ m = 1, 2, …, n); de aquí se deduce que:

$$C_m - \int_a^b b_m(t) \left[f(t) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k a_k(t) \right] dt = 0 ,$$

o bien: $C_m - \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k \int_a^b a_k(t) b_m(t) dt = \int_a^b b_m(t) f(t) dt$ ($\forall$ m = 1, 2, …, n).

Introduciendo, para simplificar la escritura, las notaciones siguientes:

$a_{km} = \int_a^b a_k(t) b_m(t) dt$, y también: $f_m = \int_a^b b_m(t) f(t) dt$,

se obtiene que: $C_m - \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{km} C_k = f_m$, ($\forall$m = 1, 2, …, n), o bien, en forma desarrollada:

$$\left.\begin{array}{l} (1-\lambda a_{11}) C_1 - \lambda a_{12} C_2 - \cdots - \lambda a_{1n} C_n = f_1, \\ -\lambda a_{21} C_1 + (1-\lambda a_{22}) C_2 - \cdots - \lambda a_{2n} C_n = f_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -\lambda a_{n1} C_1 - \lambda a_{n2} C_2 - \cdots + (1-\lambda a_{nn}) C_n = f_n \end{array}\right\}. \tag{6}$$

Para hallar las incógnitas C_k tenemos un sistema lineal heterogéneo o no homogéneo, compatible y determinado, de *n* ecuaciones algebraicas con *n* incógnitas. El determinante de este sistema es igual a:

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda_{11} & -\lambda a_{12} & \cdots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \cdots & -\lambda a_{2n} \\ . & . & . & . \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \cdots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (7)$$

Si realmente $\Delta(\lambda)\neq 0$, el sistema anterior (6) tiene una solución única C_1, C_2, …, C_n, que se obtiene comúnmente por aplicación de la regla de Cramer, método de triangularización de Gauss-Jordan, método de la matriz inversa, etc. Así, por ejemplo:

$$C_k=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & \cdots & -\lambda a_{1k-1} f_1 -\lambda a_{1k+1} & \cdots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & \cdots & -\lambda a_{2k-1} f_2 -\lambda a_{2k+1} & \cdots & -\lambda a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ -\lambda a_{n1} & \cdots & -\lambda a_{nk-1} f_n -\lambda a_{nk+1} & \cdots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix}, \ (\forall k = 1, 2, \ldots, n). \qquad (8)$$

La solución de la ecuación integral planteada (2) será la función y(x), determinada por la igualdad siguiente:

$$y(x)=f(x)+\lambda\sum_{k=1}^{n} C_k a_k(x),$$

donde los coeficientes C_k ($\forall k$ =1, 2, …, n) se determinan por las fórmulas (8).

Observación. El sistema anterior (6) se puede obtener si ambos miembros de la igualdad (5) se multiplican sucesivamente por $a_1(x)$, $a_2(x)$, …, $a_n(x)$ y se integra desde a hasta b, o bien, si se substituye la expresión (5) para y(x) en la igualdad (4), cambiando las variables *x* por *t*.

3.3. MÉTODO DE BUBNOV-GALIORKIN

La solución aproximada de la ecuación integral siguiente que, planteada de esta forma es lineal de Freedholm de 2ª especie:

$$y(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)\cdot y(t)\cdot dt, \qquad (1)$$

por el método de Bubnov-Galiorkin se busca así. Escojamos un sistema de funciones $\{u_n(x)\}$, completo en L_2 (a, b), tal que para cualquier *n* las funciones $u_1(x)$, $u_2(x)$, …, $u_n(x)$ sean linealmente independientes, y busquemos la solución aproximada $y_n(x)$ en la forma:

$$y_n(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k u_k(x). \qquad (2)$$

Los coeficientes a_k ($\forall$ k = 1, 2, …, n) se determinan del siguiente sistema lineal:

$$(y_n(x),\ u_k(x)) = (f(x),\ u_k(x)) + \lambda\left(\int_a^b K(x,t)\cdot y_n(t)\cdot dt, u_k(x)\right), \qquad (3)$$

donde (f, g) significa que: $\int_a^b f(x)\cdot g(x)\cdot dx$, y en lugar de $y_n(x)$ hay que poner: $\sum_{k=1}^{n} a_k u_k(x)$. Si el valor de λ en (1) no es característico, para valores de *n* suficientemente grandes, el sistema (3) tiene solución única, y para $n \to \infty$, la solución aproximada $y_n(x)$ (2) tiende en la métrica de $L_2(a, b)$ hacia la solución exacta y(x) de la ecuación integral planteada (1).

3.4. ECUACIÓN INTEGRAL NO LINEAL DE HAMMERSTEIN

Muchos problemas de la Física y también de la Economía se pueden reducir, en nuestra opinión, a ecuaciones integrales no lineales del tipo Hammerstein. En efecto, la forma canónica de la ecuación de Hammerstein inhomogénea y del tipo Freedholm de 1ª especie es la siguiente:

$$y(x) = \int_a^b K(x,t)\cdot f\,(t, y(t))\cdot dt\,, \qquad (1)$$

donde K(x, t), f(t, u) son funciones dadas; e y(x) es la función incógnita.

A ecuaciones del tipo (1) se reducen con facilidad las ecuaciones del tipo (2ª especie):

$$y(x) = \int_a^b K(x,t)\cdot f\,(t, y(t))\cdot dt + \Psi(x)\,, \qquad (1')$$

donde $\Psi(x)$ es una función conocida, de tal modo que la diferencia existente entre las ecuaciones homogéneas y no homogéneas, de importancia notable en el caso lineal, en el caso no lineal no tiene casi ningún valor. La función K(x, t) constituye, como sabemos, el núcleo de la ecuación (1).

Sea, pues, K(x, t) un núcleo degenerado, es decir, que:

$$K(x,t) = \sum_{i=1}^{m} a_i(x) b_i(t)\,. \qquad (2)$$

En este caso, la ecuación (1) anterior toma la forma:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i(x) \int_a^b b_i(t) f(t, y(t)) dt, \qquad (3)$$

y a continuación, hagamos:

$$C_i = \int_a^b b_i(t) f(t, y(t)) dt\,,\ (\forall\ i = 1, 2, \ldots, m) \qquad (4)$$

donde C_i son constantes desconocidas por ahora. Entonces, en virtud de (3), tendremos que:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{m} C_i a_i(x). \qquad (5)$$

Substituyendo en las igualdades (4) la expresión (5) para y(x), se obtienen *m* ecuaciones (en general, trascendentes), que contienen *m* magnitudes desconocidas $C_1, C_2, \ldots, C_m$, a saber:

$$C_i = \Psi_i(C_1, C_2, \ldots, C_m) \qquad (\forall\ i = 1, 2, \ldots, m) \qquad (6)$$

En el caso en que f(t, u) sea un polinomio con respecto a *u*, es decir, si:

$$f(t, u) = p_0(t)+p_1(t)u+\ldots+p_n(t)u^n = \sum_{1=0}^{n} p_i(t)\cdot u^i , \qquad (7)$$

donde $p_0(t), \ldots, p_n(t)$ son, por ejemplo, funciones continuas de *t* en el segmento [a, b], el sistema anterior (6) se transforma en un sistema de ecuaciones algebraicas con respecto a $C_1, C_2, \ldots, C_m$.

Por otra parte, si existe una solución al sistema (6), es decir, si existen *m* números: $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_m^0$, tales que, al ser substituidos en el sistema (6), reducen sus ecuaciones a identidades, entonces existe una solución de la ecuación integral (3), que se determina por la igualdad (5), esto es:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{m} C_i^0 a_i(x).$$

Resulta evidente que el número de soluciones (en general, complejas) de la ecuación integral (3) es igual al número de soluciones del sistema (6).

3.5. TEOREMA DE EFROS GENERALIZADO DEL PRODUCTO

La resolución de algunas ecuaciones integrales singulares puede llevarse a cabo mediante la aplicación del teorema de Efros (o teorema generalizado del producto). En efecto, sean:

$$\begin{cases} y(x) = L^{-1}[\phi(p)] \\ u(x,\tau) = L^{-1}[U(p)\cdot e^{-\tau q(p)}] \end{cases}$$

siendo U(p) y q(p) funciones analíticas. Entonces se cumple que:

$$\phi(q(p))\cdot U(p) = L^{-1}[\int_0^{\infty} y(\tau)\cdot u(x,\tau)\cdot d\tau].$$

Este es el *teorema generalizado del producto* (teorema de Efros). Si $u(x,\tau) = u(x-\tau)$, entonces q(p) ≡ p, y se obtiene el *teorema común del producto*, a saber:

$$\phi(p)\cdot U(p) = L^{-1}[\int_0^{\infty} y(\tau)\cdot u(x-\tau)\cdot d\tau].$$

Si $U(p)=\frac{1}{\sqrt{p}}$, $q(p)=\sqrt{p}$, entonces también: $u(x,\tau)=\frac{1}{\sqrt{\pi\cdot x}}e^{-\frac{\tau^2}{4x}}$.

Por esto, si se sabe que: $\phi(p)$ = L[y(x)], por el teorema de Efros se halla la función objeto para $\frac{\phi(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}$, esto es:

$$\frac{\phi(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}=L^{-1}[\frac{1}{\sqrt{\pi\cdot x}}\int_0^{\infty} y(\tau)\cdot e^{-\frac{\tau^2}{4x}}\cdot d\tau].$$

4. APLICACIÓN DEL CÁLCULO DE VARIACIONES

4.1. CONCEPTUALIZACIÓN

El cálculo de variaciones es un problema matemático consistente en buscar máximos y mínimos (o más generalmente extremos relativos) de funcionales continuos definidos sobre algún espacio funcional. Constituyen una generalización del cálculo elemental de máximos y mínimos de funciones reales de una variable. Como es sabido, uno de los problemas típicos en cálculo diferencial es el de encontrar el valor numérico de *x* para el cual la función f(x) alcanza un valor extremo (máximo o mínimo); el campo numérico en el cual hay que buscar estos valores posee propiedades perfectamente conocidas. En cambio, en el cálculo de variaciones el problema es encontrar una cierta función uniforme y = f(x), varias veces derivable, para la cual un funcional A(y) alcance un valor extremo. El funcional antedicho está compuesto por una integral que depende de *x*, de la función f(x) y, en su caso, además, de algunas de sus derivadas. Las incógnitas son aquí infinitas y el campo funcional en el que se buscan las soluciones es de un grado de arbitrariedad tan amplio que se impone restringirlo para hacerlo analíticamente manejable. Se comprende, así mismo, la dificultad de hallar condiciones suficientes que aseguren la existencia de la solución sin efectuar un estudio previo del campo funcional en que se opere.

El cálculo de variaciones se desarrolló a partir del problema de la curva braquistócrona, planteado inicialmente por Johann Bernouilli (1696). Inmediatamente este problema captó la atención de Jakob Bernouilli y del Marqués de L'Hôpital, aunque fue Leonhard Euler el primero que elaboró una teoría del cálculo variacional. Las contribuciones de Euler se iniciaron en 1733 con su *Elementa Calculi Variationum* ('Elementos del cálculo de variaciones') que da nombre a esta disciplina.

Lagrange contribuyó extensamente a la teoría y Legendre (1786) asentó un método, no enteramente satisfactorio para distinguir entre máximos y mínimos. Isaac Newton y Gottfried Leibniz también prestaron atención a este asunto. Otros trabajos destacados fueron los de Vincenzo Brunacci (1810), Carl Friedrich Gauss (1829), Siméon Poisson (1831), Mijaíl Ostrogradski (1834) y Carl Jacobi (1837).

Un trabajo general particularmente importante es el de Sarrus (1842) que fue resumido por Cauchy (1844). Otros trabajos destacados posteriores son los de Strauch (1849), Jellett (1850), Otto Hesse (1857), Alfred Clebsch (1858) y Carll (1885), aunque quizá el más relevante de los trabajos llevados a cabo durante el siglo XIX es el aportado por Weierstrass. Este importante trabajo fue una referencia estándar y es el primero que trata el cálculo de variaciones sobre una base firme y rigurosa.

Los problemas 20 y 23 de Hilbert, planteados en el año 1900, estimularon algunos desarrollos posteriores. Durante el siglo XX, David Hilbert, Emmy Noether, Leonida Tonelli, Henri Lebesgue y Jacques Hadamard, entre otros, hicieron contribuciones notables. Marston Morse aplicó el cálculo de variaciones a lo que actualmente se conoce como “teoría de Morse”. Lev Semenovich Pontryagin, Ralph Rockafellar y Clarke desarrollaron nuevas herramientas matemáticas dentro de la teoría del control óptimo, generalizando el cálculo de variaciones.

4.2. EXTREMOS DE UNA INTEGRAL DEFINIDA

4.2.1. Integrando con derivadas de primer orden

Sea $\varphi(x, y, y')$ una función continua en la región $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, $c' \leq y' \leq d'$, que posee derivadas parciales primeras y segundas también continuas y sea, además $y = f(x)$ una función continua, definida en el intervalo $[a,b]$ y con derivada continua en el intervalo $a \leq x \leq b$ y tal que $f(a) = b$ y $f(b) = d$.

Por tanto, la función $\varphi[x, f(x), f'(x)]$ es función continua de x en el intervalo cerrado [a, b] y la integral definida:

$$A(y) = \int_a^b \varphi[x, f(x), f'(x)]\,dx,$$

tendrá un valor finito, que dependerá de la función *f* elegida, esto es, la integral adquiere un valor perfectamente determinado para cada función *f*, que cumple las condiciones anteriores, por tanto es una funcional de f(x).

El primer problema del cálculo de variaciones es el de investigar si, entre todas las curvas planas que pasando por los puntos (a, c) y (b, d) y cumpliendo las citadas condiciones, existe alguna curva para la que A(y) alcance un valor máximo o un mínimo; una tal curva, si existe, recibe el nombre de “extremal”, y solamente en ella puede alcanzarse un extremo de la funcional. Es fácil ver que el carácter extremal de una curva en [a,b] implica el mismo carácter en todo intervalo parcial [m,n], pues si existiera en [m,n] otro arco de curva que diera mayor (menor) valor a la integral anterior, complementándolo con los arcos de extremal entre a,m y entre n,b, tendríamos una curva que ofrecería, así mismo, mayor (menor) valor a la integral A(y) que la extremal considerada, en contra de la definición.

Ello posee singular interés por sus aplicaciones en la resolución de ecuaciones integrales de Freedholm que expresen funciones hidráuliicas que interese maximizar (de caudal, de presión) o bien minimizar (caso de las funciones de pérdida de carga).

Si la función f(x) es una extremal de la funcional A(y), se verificará que:

$$A(y)=\int_a^b \varphi[x,f(x),f'(x)]\,dx\,,$$

será, en el recinto considerado, constantemente mayor o menor que:

$$A(\lambda)=\int_a^b \varphi[x,f(x)+\lambda\eta(x),f'(x)+\lambda\eta'(x)]\,dx\,,$$

donde $\eta(x)$ es una función continua cualquiera, con derivada continua, tal que: $\eta(a) = \eta(b) = 0$ y λ es un número que se puede tomar tan pequeño como se quiera. Obsérvese, por otra parte, que se cumple que: $A(0) = A$.

La función $A(\lambda)$ se puede desarrollar en serie de Taylor, obteniéndose:

$$A(\lambda)=A(0)+\lambda A_1+\frac{\lambda^2}{2!}A_2+\frac{\lambda^3}{3!}A_3+\ldots\ ,$$

donde A_i representa precisamente el valor que toma la derivada i-ésima de $A(\lambda)$, para $\lambda = 0$.

El cálculo de variaciones tal como aquí se trata introduce la terminología y notación siguientes: λA_1, recibe el nombre de variación primera y se escribe δA; $\lambda^2 A_2$ se designa por variación segunda, notándose $\delta^2 A$, etc. Para que $A(0) = A$ se conserve constantemente mayor o menor que $A(\lambda)$, para un valor suficientemente pequeño de λ, es necesario que $A_1 = 0$, pues sino la diferencia:

$$A(\lambda)-A(0)=\lambda A_1+\frac{\lambda^2}{2!}A_2+\frac{\lambda^3}{3!}A_3+\ldots\ ,$$

no mantendría signo constante.

Por tanto, resulta que es condición necesaria para que f(x) sea extremal de $A(y)=\int_a^b \varphi(x,y,y')\,dx$,que la función f(x) anule a A_1 o, lo que es lo mismo, que anule a la variación primera de A, esto es: $\left[\frac{dA(\lambda)}{d\lambda}\right]_{\lambda=0}=0$ que se puede escribir así: $\int_a^b\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\eta(x)+\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\eta'(x)\right]dx=0$, donde y e y' representan a f(x) y f'(x).

La expresión anterior, integrando por partes el segundo sumando del integrando o función subintegral, resulta ser la siguiente:

$$\int_a^b \frac{\partial\varphi}{\partial y}\eta(x)dx + \int_a^b \frac{\partial\varphi}{\partial y'}\eta'(x)dx = \int_a^b \frac{\partial\varphi}{\partial y}\eta(x)dx + \left.\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\cdot\eta(x)\right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right)\eta(x)dx =$$

$= \int_a^b \eta(x)\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right)\right]dx$, puesto que $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\eta(x)\right]_a^b$ se anula por las condiciones impuestas a $\eta(x)$.

Como para que se anule la última integral para cualquier $\eta(x)$, que cumpla las condiciones exigidas, basta que se cumpla:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right) = 0 \ , \qquad (1)$$

resulta que la condición necesaria de optimalidad para que f(x) sea extremal de A es que f(x) sea solución de la ecuación diferencial (1).

La ecuación diferencial anterior recibe el nombre de ecuación de Euler-Lagrange-Poisson. Su carácter *necesario* indica que sólo entre las soluciones así obtenidas se hallará la buscada. Criterios analíticos de *suficiencia* resultan difíciles de formular y serán sistemáticamente omitidos de nuestro estudio dado que, afortunadamente, en la mayoría de los problemas de aplicación hidráulica su propia naturaleza basta para comprobar la validez de dichas soluciones.

Como además sabemos que:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right)\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right)\cdot\frac{dy'}{dx} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y'} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial y'}y' + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2}y'' \ ,$$

resulta que la ecuación de Euler-Lagrange-Poisson toma la forma:

$$\boxed{\frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2}y'' + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial y'}y' + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y'} - \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0} \ ,$$

que resulta ser una ecuación diferencial lineal de segundo orden.

Insistimos en que la ecuación de Euler-Lagrange-Poisson representa sólo una condición *necesaria* o de primer grado; los criterios de *suficiencia* o de segundo grado son, en general, de gran complicación, por lo que no encuadran en la línea elemental que hemos seguido; ahora bien, en la mayoría de los problemas prácticos, la misma naturaleza del problema hidráulico proporciona elementos suficientes para la determinación de la solución correcta.

Por otra parte, la integración de la ecuación de Euler-Lagrange-Poisson proporcionará una función dependiente de dos constantes arbitrarias que, al menos teóricamente, quedarán determinadas por las condiciones de pasar la curva y = f(x) por los puntos (a, c) y (b, d), problema éste de contorno que, con frecuencia, resulta más difícil de resolver que la propia integración.

La integración de la ecuación de Euler-Lagrange-Poisson puede presentar serias dificultades, pero en los siguientes casos, su integración se consigue con relativa facilidad, a saber:

a) Si la función φ no contiene explícitamente la *y*, se deduce de:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y'}\right) = 0,$$

que: $\frac{\partial \varphi}{\partial y'} = \text{cte.}$ y la integración se logra por una única cuadratura.

b) Si φ no contiene a y', resulta análogamente que: $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$

Este será precisamente el caso usual en el que nos encontraremos en la resolución de las ecuaciones integrales e integro-diferenciales, como tendremos ocasión de comprobar en algunos ejercicios del capítulo siguiente. Se tratará, entonces, de una ecuación algebraica que solo tendrá solución si, por casualidad, se cumplen las condiciones de frontera (la otra variable actúa como una constante).

c) Si φ sólo depende de y', la ecuación:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

se reduce a la siguiente: $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} y'' = 0$, esto es, a y" = 0, y por tanto, todos los extremales serán rectas.

d) Un caso interesante que puede presentarse en las aplicaciones hidráulicas es aquél en el cual la función φ, no contiene la variable *x*. Entonces, su diferencial total es: $d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} dy'$.

Por otra parte, de: $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y'}\right)$, se obtiene que:

$$d\varphi = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y'}\right) dy + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} dy' = y' d\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y'}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} dy' = d\left(y' \frac{\partial \varphi}{\partial y'}\right).$$

Luego resultará que: $\varphi = \int d\left(y' \frac{\partial \varphi}{\partial y'}\right) = y' \frac{\partial \varphi}{\partial y'} + k$, ecuación que se resuelve mediante una única cuadratura y donde k es una constante arbitraria de integración.

4.2.2. Integrando con derivadas de orden superior al primero

Para fijar ideas, supongamos ahora que φ es función de x, y, y', e y''. Entonces la expresión de: $\left[\frac{dA(\lambda)}{d\lambda}\right]_{\lambda=0} = 0$, sería:

$$\int_a^b \left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial\varphi}{\partial y'}\eta'(x) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2}\eta''(x)\right]\cdot dx = 0 .$$

Integrando por partes el segundo sumando una vez, el tercero dos veces, y teniendo en cuenta que η(a) = η(b) = 0, resultará:

$$\int_a^b \left[\eta(x)\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y''}\right)\right]\cdot dx = 0 ,$$

de donde la ecuación de Euler-Lagrange-Poisson, en este caso, adopta la forma:

$$\boxed{\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y''}\right) = 0},$$

que constituye ecuación diferencial de cuarto orden cuya integración proporciona, en general, cuatro constantes que se determinan por las condiciones de pasar la extremal por los puntos dados y tener en dichos puntos tangentes dadas.

La generalización a que el integrando o función subintegral contenga derivadas de orden superior al segundo resulta inmediata.

4.2.3. Integrando con varias funciones

Sea:

$$A(y_1, y_2, ..., y_n) = \int_a^b \varphi(x, y_1, y'_1, y_2, y'_2, ..., y_n, y'_n)\cdot dx .$$

Para determinar las condiciones necesarias de extremos de la funcional A, variemos una sola de las funciones, dejando las demás invariables, estando por tanto, en el caso general. Reiterando el procedimiento descrito, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'_i}\right) = 0 , \qquad \forall\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

cuyas constantes de integración se determinan con las condiciones de contorno. Análogamente se procede si aparecen en el integrando más de dos funciones o bien si las derivadas de las mismas son de orden superior, llegándose entonces a sistemas de más ecuaciones o de mayor orden.

4.2.4. Integrando con funciones ligadas mediante relaciones

Hasta ahora hemos considerado diversos problemas de cálculo de variaciones en los cuales la función o funciones incógnitas podían ser variadas arbitrariamente, y justamente en la arbitrariedad de dichas variaciones fundábamos el razonamiento conducente a la ecuación diferencial o al sistema de ecuaciones entre cuyas soluciones deben hallarse las extremales buscadas, es decir, las curvas que hacen estacionaria la integral. En las aplicaciones hidráulicas ocurre con frecuencia, no obstante, que las curvas extremales no admiten variaciones independientes sino ligadas por ciertas condiciones.

Sea: $A(y,z) = \int_a^b \varphi(x,y,y',z,z')\cdot dx$, estando ligadas z e y por la relación: F(x, y, z) = 0. El método seguido en el apartado anterior, deja aquí de ser válido, puesto que presuponía la independencia de las funciones consideradas.

Siguiendo el método anterior, podríamos escribir:

$$A(\lambda) = \int_a^b \varphi[x, y(x) + \lambda\eta_1(x), y'(x) + \lambda\eta'_1(x), z(x) + \lambda\eta_2(x), z'(x) + \lambda\eta'_2(x)]dx,$$

o bien, en términos de variaciones[5]:

$$\delta A = \int_a^b \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right)\right)\cdot\delta y + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z'}\right)\right)\cdot\delta z \right]\cdot dx = 0,$$

verificándose, a partir de la condición:

$$\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z = 0.$$

Eliminando δy y δz, se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} \lambda\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right) = 0 \\ \lambda\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z'}\right) = 0 \end{aligned}\right\}$$

[5] El símbolo de variación δ representa la diferencia infinitamente pequeña o variación de la función *y* al pasar de la curva extremal a otra infinitamente próxima y se expresa en los tratados clásicos por δy. Este símbolo es, pues, permutable con el de derivación respecto a la variable independiente, lo que permite llegar a la ecuación de Euler-Lagrange-Poisson razonando a la manera clásica del Cálculo de variaciones y que conviene que el amable lector/a conozca por hallarse todavía reproducida en no pocos tratados al respecto.

que con F(x, y, z) = 0 determinan las soluciones buscadas.

Pero las dos primeras ecuaciones anteriores equivalen a:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial(\lambda F + \varphi)}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y'}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial(\lambda F + \varphi)}{\partial z} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial z'}\right) = 0 \end{array}\right\}$$

lo que equivale a aplicar el método general al funcional:

$$A^*(y,z) = \int_a^b [\lambda F + \varphi]dx\,,$$

método éste que recuerda el de los multiplicadores u operadores de Lagrange para la resolución de los extremos (máximos y mínimos) condicionados.

5. ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES

5.1. CONCEPTOS PREVIOS Y DEFINICIONES

En el presente apartado se realiza una introducción básica a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que abreviaremos, como se ha dicho, por las siglas EDP.

- Ecuación diferencial en derivadas parciales es cualquier igualdad del tipo:

$$F\left(\overline{x}, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_1}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots\right) = 0 \qquad (1)$$

que evidentemente conexiona las variables independientes o explicativas x_i, $\forall_i = 1, 2, \ldots, n$, la función buscada *u* y sus derivadas parciales, donde se cumple que: $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega \subset R^n$ con Ω abierto[6] y de sólo una pieza, siendo F la función prefijada de sus argumentos.

También: $F: \Omega \times \Re \times \Re^M \rightarrow \Re$ se supone conocida y M > 0 es un número natural. En el caso n = 2, que será el que mayormente contemplaremos en la presente monografía, resultará más sencillo utilizar la notación habitual: $\overline{x} = (x,y) \in \Omega \subset \Re^2$.

[6] Un **conjunto abierto**, en topología y otras ramas de las matemáticas, es un **conjunto** en el que todos y cada uno de sus elementos están rodeados por elementos que también pertenecen al **conjunto**; o, dicho de una manera más intuitiva, que ningún elemento de dicho **conjunto** pertenece también a la frontera de éste.

- **Orden de una EDP** es el mayor de los órdenes que tienen las derivadas que en ella intervienen. Así, posee derivadas de orden (n) pero no de orden (n+1).

- **Solución o integral particular** de la EDP (1) es toda función u: $\Omega \to R$ suficientemente regular, tal que al sustituirla en la ecuación hace que se cumpla.

- **Solución o integral general** de la EDP (1) es la expresión que teóricamente contiene a todas las soluciones particulares.

- **Solución o integral singular** de la EDP (1) que no puede ser considerada como un caso particular de la integral general ni de la integral completa, y cuya interpretación geométrica es la superficie envolvente de todas las integrales completas.

Veamos ahora, con mayor especificidad, algunas definiciones de particular interés para la mejor conceptualización de este tipo de ecuaciones infinitesimales.

- Definición 1 (Ecuación diferencial en derivadas parciales). Se llama ecuación diferencial en derivadas parciales (EDP) a la ecuación de la forma identitaria (1):

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial^{k_1} x_1 \partial^{k_2} x_2 \ldots \partial^{k_n} x_n}\right) = 0,$$

Se cumple que: k_i, $\forall_i$ = 1, 2, …, n son números enteros no negativos (naturales) tales que: $\sum_{i=1}^{n} k_i = k_1 + k_2 + \ldots + k_n = m$.

- Definición 2 (Orden). Se llama orden de una EDP el orden superior de las derivadas parciales que figuran en la ecuación.

Así, si x,y son variables independientes, u = u(x,y) es la función buscada, entonces:

a) $y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, es una EDP de 1er orden, homogénea y de coeficientes variables.

b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, es una EDP de 2º orden, homogénea y de coeficientes constantes.

Nota: También, como se ha apuntado, utilizaremos las notaciones simplificadas siguientes:

$$u_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y \equiv \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u_{xx} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots \text{quad}\Delta .$$

- Definición 3 (Solución). Sea la EDP definida en la anterior definición 1, de orden *m*. Se llama solución de dicha EDP en cierta región D de variación de las x_i, $\forall_i = 1, 2, \ldots, n$, a una función cualquiera del tipo siguiente: $u = u(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in C^m(D)$ (conjunto de funciones continuas en la región D junto con todas las derivadas de hasta orden *m* inclusive), tal que al sustituir *u* y sus derivadas en su expresión, la última se convierte en la identidad respecto a x_i, $\forall_i = 1, 2, \ldots, n$, en la región D.

5.2. ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL EN DERIVADAS PARCIALES

Una ecuación en derivadas parciales (1), es **lineal** si la función F se puede expresar como suma de una función solamente dependiente de $\overline{x}$, más una función lineal de las variables correspondientes a u, y a las derivadas parciales que intervengan.

Para el caso de dos variables independientes, es decir $\overline{x} = (x,y)$, la expresión general de la ecuación en derivadas parciales lineal y de segundo orden, con una función u(x,y) es de la forma:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = g \qquad (2)$$

donde a, b, c, d, e, f, g son funciones de *x* e *y*. Estas funciones a, b, c, …, pueden ser independientes de *x* e *y*, en cuyo caso la EDP será **lineal de coeficientes constantes**. Veremos este tipo de ecuaciones, con mayor especificidad, en el epígrafe 4 de este mismo capítulo.

Si g = 0 se tiene la expresión general de la ecuación **lineal homogénea** de segundo orden. Por el contrario, si $g \neq 0$, la EDP sería *no homogénea, inhomogénea o heterogénea*, debiéndose obtener su solución en función de la naturaleza de la expresión del 2º miembro, como también sucede con las EDO. Al igual que sucedía con las EDO de orden *n*, el Principio de Superposición resulta válido para la ecuación lineal y el conjunto de soluciones de la ecuación homogénea tiene estructura algebraica de espacio vectorial. Sin embargo, la diferencia fundamental con respecto al caso ordinario radica en que el espacio vectorial de las soluciones para una EDP lineal tiene dimensión infinita, puesto que dada una EDP lineal existen infinitas soluciones linealmente independientes. Esta circunstancia provoca que las combinaciones finitas no sean suficientes como para encontrar todas las soluciones y se hace necesario considerar combinaciones infinitas, surgiendo los correspondientes problemas de convergencia.

5.3. CONDICIONES LATERALES Y DE CONTORNO

En numerosas ocasiones, interesa hallar soluciones que cumplen varias o alguna “condición lateral”. Una condición apropiada puede ser que la función hidráulica u(x,y) tome ciertos valores específicos en los puntos que se encuentran situados sobre una línea recta o curva. Algunos ejemplos de tales condiciones son los siguientes:

- $u(x,0) = g(x), \forall x \in \Re$, se indica el valor de *u* sobre el eje Ox.
- $u(0,y) = g(y), \forall x \in \Re$, se indica el valor de *u* sobre el eje Oy.
- $u(x,2) = g(x), \forall x \in \Re$, se indica el valor de *u* sobre la recta y = 2.
- $u(x,x) = g(x), \forall x \in \Re$, se indica el valor de *u* sobre la recta y = x.
- $u(e^s,s) = g(s), \forall x \in \Re$, se indica el valor de *u* sobre la gráfica de $x = e^y$.
- $u(3x,x+1) = g(x), \forall x \in \Re$, se indica el valor de *u* sobre la recta $y = (x/3) + 1$.

Se llaman **Condiciones de contorno o de frontera** a las restricciones o condiciones adicionales definidas en el dominio de dominación Ω de una EDP, que suelen acompañarlas cuando estas forman parte de un determinado sistema o problema hidráulico. A estos problemas se les llama **Problemas de valores de contorno (PVC)**, o bien **Problemas de valores en la frontera (PVF)**. Así pues, dada una EDP definida sobre Ω, conviene hallar soluciones de la misma que cumplan determinadas condiciones en la frontera y que resultan fundamentales para describir correctamente el fenómeno hidráulico que nos ocupa.

Para las ecuaciones de segundo orden, se tienen las siguientes condiciones de frontera con nombre propio, a saber:

1. **Condición de Dirichlet[7]**. Especifica los valores de la solución tomada sobre la frontera. Es de la forma:
$$u(\overline{x}) = g(\overline{x}), \quad \forall \overline{x} \in \text{frontera de } \Omega .$$

2. **Condición de Newmann[8]**. Especifica los valores de la derivada normal de una solución sobre la frontera. Son de la forma:
$$\frac{\partial u}{\partial n}(\overline{x}) = g(\overline{x}), \quad \forall \overline{x} \in \text{frontera de } \Omega .$$

3. **Condición de Robin[9]**. Es una combinación lineal de las condiciones de Dirichlet y de Newmann. Es de la forma:

[7] Johann Dirichlet (1805-1859) fue un matemático alemán al que se le atribuye la definición "formal" moderna de una función. Fue educado en Alemania, y después en Francia, donde aprendió de muchos de los más renombrados matemáticos del tiempo, relacionándose con algunos como Fourier. Sus métodos proporcionaron una perspectiva completamente nueva y sus resultados se encuentran entre los más importantes de las matemáticas. Hoy en día sus técnicas están más en auge que nunca.

[8] John von Newmann (1903-1957), nació en el seno de una familia de banqueros acomodada. De origen húngaro, fue un gran matemático del siglo XX que realizó contribuciones importantes en la física cuántica, análisis funcional, teoría de conjuntos, ciencias de la comunicación, economía, análisis numérico, cibernética, hidrodinámica de expresiones, estadística y otros campos diversos de las matemáticas.

$$Au(\overline{x}+B)\frac{\partial u}{\partial n}(\overline{x})=g(\overline{x}),\ A,B\in R,\ \forall\overline{x}\in \text{frontera de }\Omega .$$

En todos los casos, si g = 0, las condiciones se llaman **homogéneas** (Bargueño y Alonso, 2012). Si, por el contrario, se cumple que $g \neq 0$, la condición en cuestión sería *no homogénea, inhomogénea o heterogénea.*

Así, por ejemplo, en la ecuación de 2º orden, lineal, de coeficientes constantes e inhomogénea ($g \neq 0$): $u_{xx} - u_{yy} = x$, definida en: $(0,1) \times \Re$, las siguientes condiciones de contorno:

- $u(0,y) = 5$, $\forall y \in \Re$, es una condición de contorno o frontera del tipo Dirichlet.
- $u_x(0,y) = 0$, $\forall y \in \Re$, es una condición de contorno homogénea del tipo Newmann.
- $u(0,y) = y^2$, $\forall y \in \Re$, es una condición de contorno del tipo Newmann.
- $u_x(0,y) = u(0,y)$, $\forall y \in \Re$, es una condición de contorno del tipo Robin.

Como veremos posteriormente (epígrafe 4.2. de este mismo capítulo), la ecuación del presente ejemplo debe ser clasificada como de tipo elíptico, habida cuenta del valor del discriminante: $(b^2 - 4ac) = -4 < 0$.

Desde luego, los problemas de contorno, en algunos casos, pueden resolverse de manera sencilla hallando la solución general de la ecuación e imponiendo, con posterioridad, las condiciones adicionales para buscar la solución particular que se precisa.

5.4. EJEMPLOS

Ejemplo 1. Hallar la solución general u = u(x,y) de la ecuación:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0 .$$

Solución:

Si $\frac{\partial u}{\partial x}=0 \Rightarrow$ u no depende de *x*, pero puede ser una función cualquiera de *y*, o sea: $u = \phi(y)$. Se trata, pues, de una solución de la ecuación propuesta que contiene una función arbitraria.

Ejemplo 2. Hallar la solución general u = u(x,y) de la ecuación:

$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\int_c \frac{i}{z^3+1}dz$, a lo largo de la circunferencia de centro el origen de coordenadas y de radio 2.

[9] Victor Gustave Robin (1855-1897), fue un matemático francés que trabajó provechosamente en el campo de las matemáticas aplicadas y la termodinámica. Fue galardonado por la Academia Francesa de las Ciencias (1893, 1897) y recibió, en 1895, el prestigioso premio Poncelet.

Solución:

La circunferencia dada tiene de ecuación: $x^2 + y^2 = 4$. En este caso, se trata de resolver, en primer lugar, la integral curvilínea que aparece en el 2º miembro de la expresión dada de la EDP como aplicación por integración en el campo complejo. Los polos serán: $z^3 = 1$, $z = \sqrt[3]{-1}$,

$$\begin{cases} z_1 = -1 \\ z_3 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i \\ z_3 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} i \end{cases}$$

El método de los coeficientes indeterminados ofrece:

$$\frac{1}{z^3+1} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i} + \frac{C}{z - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i}, \text{ o sea:}$$

$$i = A\left[\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] + B\,(z+1)\left(z - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) + C\,(z+1)\left(z - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right).$$

Resulta: A + B + C = 0 (términos de 2º grado). Entonces:

$$2\,\pi\,(A + B + C) = 0, \text{ quedando, en definitiva, } \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$$

Si ahora llamamos $v = \dfrac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$, ya que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$, entonces resultará: $v = \varphi(y)$. Como $v = \dfrac{\partial u}{\partial y}$, se tiene que $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \varphi(y)$.

Integrando respecto de y:

$$\int \frac{\partial u}{\partial y} dy = \int \varphi(y) dy \Rightarrow u(x,y) = \int \varphi(y) dy + g(x), \text{ siendo g(x) arbitraria.}$$

Como $\varphi(y)$ es una función arbitraria, la integral de ésta también es una función arbitraria. Llamémosla f(y). Por tanto:

u(x,y) = f(y) + g(x) siendo f(y) y g(x) funciones arbitrarias.

Se llama "solución general" de la ecuación dada en el presente ejemplo, puesto que cualquier otra solución puede obtenerse de la expresión anterior si se eligen de forma adecuada las funciones arbitrarias f(y) y g(x).

Notas:

a) Los ejemplos anteriores ponen de manifiesto que las EDP's tienen familias enteras de soluciones.

b) Existen EDP's que tienen conjuntos de soluciones muy pequeños y en algunos casos se obtiene incluso el ∅ (conjunto vacío).

b.1) La ecuación $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0$, tiene, por conjunto de soluciones, u(x,y) = cte.

b.2) La ecuación $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 1 = 0$, no tiene soluciones reales del todo.

c) Más adelante plantearemos el problema de cómo hallar las soluciones particulares o parciales haciendo intervenir condiciones adicionales (laterales o de contorno) que deben plantearse a la función.

En definitiva dada una EDP de orden *n*, una solución que contenga *n* funciones arbitrarias se denomina, como se ha dicho antes, la "solución o integral general" de la misma, y cualquier solución obtenida de esta solución general por selecciones particulares de las funciones arbitrarias se llama una "solución o integral particular".

Como acontece, en fin, en el caso de las EDO's, con frecuencia necesitamos determinar soluciones de EDP's que satisfagan condiciones dadas. Es el caso de las condiciones de contorno o de frontera a las que nos hemos referido con anterioridad. Son de ver, al respecto, las siguientes cuestiones ilustrativas expuestas mediante ejemplos:

Ejemplo 3. ¿De qué orden son las siguientes ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, donde la función es u(x,y), en dos variables independientes?

a) $u_x + u_y + x = 0$
b) $u_x + u_{xy} + xu_y = 0$
c) $u_x + \sin(u_y) + x = 0$
d) $u_{xy} = u^2$

Solución:

En los casos a) y c) las ecuaciones son de primer orden. En los otros de segundo orden.

Ejemplo 4. Indicar las características básicas (linealidad, homogeneidad, coeficientes), de las siguientes ecuaciones en derivadas parciales, donde la función es u(x,y) en todos los casos.

a) $5u_x + x = 0$
b) $u_x + u_{xy} + xu_y = 5$
c) $u_x + yu = u$
d) $uu_{xx} + (u_y)^2 = u^2$
e) $u_x + \ln(x)u_{yy} + u_{xy} = u$

Solución:

Respectivamente, se tienen las siguientes respuestas:

a) Ecuación lineal, no homogénea, de coeficientes constantes.
b) Lineal, no homogénea, de coeficientes no constantes.
c) Lineal, homogénea, de coeficientes no constantes.
d) Ecuación no lineal, homogénea.
e) Lineal homogénea y de coeficientes no constantes.

6. RESOLUCIÓN DE LAS EDP

6.1. MÉTODO DE LAS CARACTERÍSTICAS

Este método, denominado "de las características", se aplica al caso de las EDP lineales de primer orden o más dimensiones. Por ejemplo, en el caso de dimensión 3, la EDP lineal de primer orden es:

$a(x,y,z)u_x + b(x,y,z)u_y + c(x,y,z)u_z + d(x,y,z)u = f(x,y,z)$, siendo $u = u(x,y,z)$,

para las funciones dadas a, b, c, d y f. Las curvas características o generatrices $x(t)\,\bar{i} + y(t)\,\bar{j} + z(t)\,\bar{k}$, parametrizadas de la manera preferida, son las soluciones del siguiente sistema:

$$\frac{dx}{dt} = a(x(t), y(t), z(t)), \qquad \frac{dy}{dt} = b(x(t), y(t), z(t)), \qquad \frac{dz}{dt} = c(x(t), y(t), z(t)).$$

En la práctica, resulta usualmente más conveniente tratar a *x* como un parámetro en lugar de *t*, en cuyo caso el sistema anterior se transforma en un sistema de dos ecuaciones (si ahora suponemos que $a(x,y,z) \neq 0$):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y(x), z(x))}{a(x, y(x), z(x))}, \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{c(x, y(x), z(x))}{a(x, y(x), z(x))},$$

para las incógnitas: $y = y(x)$, $z = z(x)$.

Se puede utilizar la primera terminología de "problemas de valor inicial y de frontera" para las EDP's. Sin embargo, debido a que generalmente existe una combinación de condiciones de frontera e iniciales, con frecuencia nos referimos extensivamente a tales problemas como *Problemas de Valor de Frontera* (PVF o bien PVDF).

6.2. SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DE LAS SOLUCIONES GENERAL Y PARTICULAR

Sea una EDP genérica de la forma anteriormente definida:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, ..., \frac{\partial^m u}{\partial^{k_1} x_1 \partial^{k_2} x_2 ... \partial^{k_n} x_n}) = 0 .$$

Para fijar ideas, tomamos solamente dos variables independientes, a saber: $x_1 = x$, $x_2 = y$. Si la solución de: $F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, ...) = 0$, es por ejemplo: $u(x,y) = P(x,y) + \phi(y) + \varphi(x)$, utilicemos funciones particulares para $\phi(y)$ y $\varphi(x)$, y reemplacemos las variables *u* por *z*. Entonces, la expresión anterior toma la forma: $z = f(x,y)$.

Se interpreta, por lo tanto, como una superficie en un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares: x, y, z (espacio afín tridimensional euclídeo $\Re^3$).

Para las funciones arbitrarias $\phi(y)$ y $\varphi(x)$, obtenemos una familia de superficies cada miembro de la cual corresponde a una selección particular de $\phi(y)$ y $\varphi(x)$, esto es, una solución particular. La EDP que tenga ésta como solución se llama "Ecuación Diferencial de la Familia de Superficies".

Notas:

a) Obsérvense las analogías existentes con las EDO's en las que la solución general con constantes arbitrarias –en vez de funciones- representa una familia de curvas, donde cada miembro de ella corresponde a una solución particular.

b) Estas ideas se pueden generalizar a los casos donde hay más de dos variables independientes. Así, por ejemplo, tendríamos que si $u = f(x,y,z)$ ya no podríamos visualizar geométricamente: $p = f(x,y,z)$. Se trata de una superficie de cuatro dimensiones o *hipersuperficie*.

   Consideramos ahora que: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ representa una esfera centrada en (0,0,0) y radio R. En consecuencia. la ecuación: $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = R^2$ representa una hiperesfera de centro (0,0,0,0) y radio R en el espacio afín tetradimensional euclídeo $\Re^4$.

6.3. EDP'S QUE SURGEN DE LA ELIMINACIÓN DE FUNCIONES O CONSTANTES ARBITRARIAS

a) Ya que las soluciones de las EDP's hacen intervenir funciones arbitrarias, parece lógico que se obtengan EDP's por el proceso inverso de eliminar tales funciones. En efecto, si derivamos la ecuación funcional:

$$\psi[f(x,y,z), \varphi(x,y,z)] = 0 \tag{1}$$

con respecto a dos variables x,y elegidas como independientes en la ecuación de la superficie, obtenemos, designando como:

$$p = z'_x \ , \ q = z'_y :$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Psi}{\partial f}(f_x + f_z p) + \dfrac{\partial\Psi}{\partial\varphi}(\varphi_x + \varphi_z p) = 0 \end{cases},$$
$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Psi}{\partial f}(f_y + f_z q) + \dfrac{\partial\Psi}{\partial\varphi}(\varphi_y + \varphi_z q) = 0 \end{cases}$$

y la eliminación de $\dfrac{\partial\Psi}{\partial f}$ y $\dfrac{\partial\Psi}{\partial\varphi}$ conduce a: $\begin{vmatrix} f_x + f_z p & \varphi_x + \varphi_z p \\ f_y + f_z q & \varphi_y + \varphi_z q \end{vmatrix} = 0$,

ecuación que, una vez desarrollada, puede escribirse así:

$$\frac{D(f,\varphi)}{D(y,z)}p + \frac{D(f,\varphi)}{D(z,x)}q = \frac{D(f,\varphi)}{D(x,y)} \tag{2}$$

En resumen, que partiendo de la ecuación funcional y por eliminación de la función arbitraria ψ, se ha llegado a obtener una ecuación en derivadas parciales lineal y de primer orden en estas derivadas, de la forma: $X(x,y,z)\cdot p + Y(x,y,z)\cdot q = Z(x,y,z)$, en la que los coeficientes X, Y y Z comparando con la expresión (2) son funciones conocidas de x, y, z. Esta ecuación, a la que satisfacen todas las superficies formadas por curvas de la congruencia, se denomina “ecuación diferencial de la familia de superficies” en cuestión, mientras que la ecuación funcional finita (1) con la función arbitraria ψ se denomina “solución o integral general” de la EDP (2).

Por ser *p* y *q* los coeficientes de la ecuación del plano tangente, la EDP así obtenida expresa una propiedad del plano tangente que resulta común a todas las superficies de la familia.

b) También pueden obtenerse las EDP’s de primer orden por eliminación de constantes arbitrarias. Considerando un conjunto doblemente infinito de superficies dependientes de dos constantes arbitrarias: $f(x,y,z,C_1,C_2) = 0$ y derivando con respecto a *x* y a *y*, se tiene:

$$f_x + f_z \cdot p = 0 \ ; \ f_y + f_z \cdot q = 0.$$

Si es posible la eliminación de C_1 y C_2 obtendremos una EDP de primer orden (generalmente no lineal) del tipo: $F(x,y,z,p,q) = 0$, a la que satisfacen todas las superficies. Este conjunto de superficies se llama “integral completa” de esta EDP (Puig, 1962).

6.4. EDP'S QUE SURGEN DE LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES INTEGRALES O INTEGRO-DIFERENCIALES MULTIVARIANTES

Las EDP's pueden presentarse también como consecuencia de la resolución de ecuaciones integrales o integro-diferenciales multivariantes como las que fueron contempladas en nuestra anterior monografía. Sería, por ejemplo, el caso de la ecuación integral bidimensional de Abel[10], con 2 variables independientes, del tipo:

$$\iint_D \frac{\varphi(x,y)\cdot dx\cdot dy}{\sqrt{(y_0-y)^2-(x_0-x)^2}} = f(x_0,y_0)\,,$$

donde la región o dominio de integración D es un triángulo rectángulo isósceles, con la hipotenusa en el eje OX y vértice en el punto (x_0,y_0).

La resolución de aquella integral doble conduciría a la EDP siguiente:

$\varphi(x,y) = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right)$, donde se tiene la función hidráulica:

$$g(x,y) = \iint_{D_1} \frac{f(u,v)\cdot du\cdot dv}{\sqrt{(y-v)^2-(x-u)^2}}\ ,$$

siendo D_1 un triángulo rectángulo isósceles con vértice en el punto (x,y) e hipotenusa en el eje Ou del plano UOV.

6.5. MÉTODO DE DARBOUX-CAUCHY

Este procedimiento proporciona una interpretación geométrica muy clara del problema y de su solución, pero exige conocer la solución completa del sistema característico, que será un conjunto de cinco funciones de la variable auxiliar *t*, que representan una *banda característica*, es decir, una curva junto con un plano tangente en cada uno de sus puntos: {x(t), y(t), u(t), p(t), q(t)}.

Se han de verificar además las llamadas "condiciones de banda".

También ahora se puede presentar el problema de Cauchy[11]: consiste en encontrar la superficie integral que contiene una cierta curva $\Gamma \equiv$ {f(s), g(s), h(s)}; para ello, lo que se hace es resolver el sistema característico siguiente:

[10] El nombre de Niels Henrik Abel (1802-1829) tiene un lugar privilegiado en el Olimpo Matemático, al lado de otros nombres gloriosos como Newton, Euler, Gauss, Cauchy o Riemann. A lo largo de su corta vida, realizó numerosas contribuciones matemáticas tan importantes como significativas. Aunque sus estudios se centraron fundamentalmente en el álgebra y en el cálculo integral, su nombre será siempre asociado a algunas ramas del análisis, particularmente a la teoría de las ecuaciones integrales, cuyo desarrollo sistemático llevaron a cabo Vito Volterra, Freedholm y Hilbert setenta años después de sus descubrimientos.

[11] Augustin Louis Cauchy (1789-1857) fue un matemático francés pionero en el análisis matemático y la teoría de grupos de permutaciones, contribuyendo de manera medular a su desarrollo. También investigó la convergencia y la divergencia de las series infinitas, ecuaciones diferenciales, determinantes, probabilidad y física matemática.

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{du}{p{\cdot}F_p + q{\cdot}F_q} = -\frac{dp}{F_x + p{\cdot}F_u} = -\frac{dq}{F_y + q{\cdot}F_u} = dt\,.$$

teniendo en cuenta que la superficie buscada u = u(x,y) ha de contener la curva, obteniéndose la superficie solución expresada en forma paramétrica: (x(t,s), y(t,s), u(t,s)).

El sistema característico es autónomo, en el sentido de que los segundos miembros de las ecuaciones diferenciales no dependen de *t*. En algunos casos, este hecho facilita que se puedan construir relaciones que se conserven independientemente de la variable flujo *t* (*integrales primeras*). A veces, estas relaciones reflejan propiedades fundamentales del fenómeno hidráulico a modelar que deben ser respetadas estrictamente si se utiliza una técnica de aproximación, como en el caso de la función de Christiansen (ver Cap. 10).

Por otra parte, cabe señalar que el conocimiento de las integrales primeras simplifica notablemente el cálculo de la solución analítica (Moreno, 1999).

6.6. MÉTODOS DE LAGRANGE-CHARPIT Y DE LA INTEGRAL COMPLETA

Este método se emplea para obtener una integral completa del tipo: $f(x,y,u,C_1,C_2) = 0$, aunque pueden existir múltiples sistemas de integrales completas, por lo que la solución obtenida dista de ofrecer todas las superficies que verifican la ecuación general dada:

$$F(x,y,u,p,q) = 0.$$

Recomendamos al amable lector/a la consulta a la explicación de este método de resolución a la conocida obra de P. Puig Adam (1962) citada en la bibliografía, lección 22.5., refiriéndonos también a este mismo texto clásico para la explicación exhaustiva del método de la integral completa.

7. EDP'S LINEALES DE SEGUNDO ORDEN

7.1. INTRODUCCIÓN

En este apartado se analizan -más específicamente por su particular interés en los modelos hidráulicos- las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales lineales de segundo orden, cuya expresión general es:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = g\,, \quad (x,y) \in \Omega\,, \qquad (1)$$

donde a, b, c, d, e, f, g son funciones de las variables explicativas *x* e *y*, o bien constantes.

7.2. TIPOS DE EDP'S LINEALES DE SEGUNDO ORDEN

Se dice que la ecuación en derivadas parciales lineal de segundo orden (1) es, en función del valor del discriminante ($b^2 - 4ac$):

1. Hiperbólica si ($b^2 - 4ac$) > 0.
2. Parabólica si ($b^2 - 4ac$) = 0.
3. Elíptica si ($b^2 - 4ac$) < 0.

Los nombres empleados surgen por analogía de nuestra ecuación con la ecuación de las secciones cónicas en el plano. La clasificación anterior se puede extender a ecuaciones con coeficientes diversos. El carácter de las ecuaciones lineales con coeficientes variables (en las que a, b, c son funciones de *x* e *y*) puede ser distinto según sea el subconjunto $(x,y) \in R^2$, o de otra forma, según sea la región del plano Oxy.

7.3. ECUACIÓN DE EULER

Se conoce por Ecuación de Euler el caso especial de la ecuación (1) homogénea, de la forma:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$, en la que a, b, c son coeficientes constantes.

Se resuelve dicha EDP buscando una solución expresada en la forma $u = f(\xi)$, donde $\xi = y + mx$, con m = constante. Introduciendo esa solución y sus derivadas, se observa que la solución de la ecuación depende de los valores *m* que hagan: $am^2 + bm + c = 0$. Entonces, según sea la ecuación a resolver, y sean también los valores de *m*, resulta:

1. $a \neq 0$ y las raíces m_1, m_2 de la ecuación son distintas (reales o imaginarias).

1.1. m_1, m_2 reales. Ha de ser ($b^2 - 4ac$) > 0 (ecuaciones hiperbólicas). La solución general será: $u = f(y + m_1x) + g(y + m_2x)$.

1.2. m_1, m_2 imaginarias. Ha de ser ($b^2 - 4ac$) < 0 (ecuaciones elípticas). La solución general será: $u = f(y + (p + qi)x) + g(y + (p - qi)x)$.

2. $a \neq 0$ y la ecuación tiene una raíz *m* doble. La solución general será: $u = f(y + mx) + xg(y + mx)$.

3. $a = 0$.

3.1. $b \neq 0$. Solución general: $u = f\left(y - \frac{c}{b}x\right) + g(x)$.

3.2. $b = 0$. Lógicamente $c \neq 0$. La solución general vendrá dada por: $u = f(x) + yg(x)$.

7.4. EL MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES

Es un método de resolución de problemas con valores en la frontera en los que intervienen ecuaciones diferenciales en derivadas parciales lineales con *n* variables independientes, y que consiste en suponer la existencia de soluciones producto de la forma: X_1, X_2, …, X_n, donde cada factor X_i es función solamente de cada una de esas variables. Así, si la ecuación contiene dos variables independientes *x* y *t*, con función u(x,t), se supone que la ecuación admite soluciones producto de la forma:

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) \, ,$$

con X(x) función sólo de *x*, y T(t) función sólo de *t*. Por lo tanto, si la suposición hecha es cierta, el método conduce a la resolución de dos ecuaciones diferenciales ordinarias, cada una de las cuales ha de verificar las condiciones adicionales que contienen los problemas de contorno que se van a resolver.

Para aplicar el método consideremos, por ejemplo, un problema de contorno compuesto por:

- EDP lineal homogénea, con una función u(x,t) definida para: $x \in (0,L)$, $t \geq 0$.

- Condiciones contorno homogéneas: $u(0,t) = u(L,t) = 0$.

- Condición inicial $u(x,0) = f(x)$.

El procedimiento general para aplicarlo es el siguiente:

1. Se separan variables, suponiendo la solución en la forma siguiente: $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$.

2. Se introduce la solución supuesta, mediante las convenientes derivaciones, en la ED, y se separan a ambos miembros de una igualdad las funciones que resulten dependientes de una u otra variable. El que sean iguales dos funciones dependientes de variables distintas es sólo posible cuando ambas sean una constante λ. Resultan, de este modo, dos ecuaciones ordinarias.

3. Se resuelve la primera ecuación aplicando únicamente las condiciones de contorno, considerando los tres casos en que los valores de λ sean: $\lambda = 0$, $\lambda > 0$, $\lambda < 0$ y con ello encontrando los valores y las soluciones correspondientes para que estas sean no triviales.

4. Se resuelve la otra ecuación ordinaria.

5. Se construyen todas las soluciones de la EDP como producto de las anteriores.

6. Se aplica el principio de superposición y se obtiene una combinación lineal de todas las soluciones producto.

7. Se impone la condición inicial.

8. Se identifican los coeficientes. Esta identificación de coeficientes puede hacerse directamente si la forma de f(x) lo permite, o bien mediante otros métodos, como es el desarrollo en serie de Fourier de f(x), que será tratado en el capítulo 9 de la presente monografía.

9. El procedimiento aludido se generaliza sin mayor dificultad a ecuaciones homogéneas de tres variables independientes x,y,z, para las que se buscan soluciones de la forma: X(x), Y(y), Z(z), e incluso a un mayor número de ellas.

7.5. EJERCICIOS RESUELTOS

Ejemplo 1.

Clasifíquense las siguientes ecuaciones lineales, homogéneas, de 2º orden y de coeficientes constantes, en hiperbólicas, parabólicas o elípticas.

a) $5u_{xx} – u_{xy} + 2u_{yy} + u_x + u_y = 0$
b) $-2u_{xx} + 4u_{xy} – 2u_{yy} + u_x = 0$
c) $u_{xx} – 7u_{xy} + 6u_{yy} = 0$
d) $\pi u_{xx} – u_{xy} + 2u_{yy} + u_y = 0$
e) $u_{xx} – u_{xy} + 2u_{yy} + u_y = 0$
f) $-2u_{xx} – 4u_{xy} -2u_{yy} + u_x = 0$
g) $\pi u_{xy} – 2u_{xx} + u_x + u = 0$

Solución:

La clasificación de la ecuación en hiperbólica, parabólica o elíptica depende del signo del discriminante ($b^2 – 4ac$), siendo a, b, c los coeficientes respectivos de u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} en la expresión general de la ecuación lineal de segundo orden (1).

a) En este caso a = 5, b = -1, c = 2. Por lo tanto ($b^2 – 4ac$) = -39 < 0. Ecuación elíptica.

b) a = -2, b = 4, c = -2. Por lo tanto ($b^2 – 4ac$) = 0. Ecuación parabólica.

c) a = 1, b = -7, c = 6. Por lo tanto ($b^2 – 4ac$) = 25 > 0. Ecuación hiperbólica.

d) a = π, b = -1, c = 2. Por lo tanto ($b^2 – 4ac$) = 1 - 8π < 0. Ecuación elíptica.

e) a = 1, b = -1, c = 2. Por lo tanto ($b^2 – 4ac$) = -7 < 0. Ecuación elíptica.

f) a = -2, b = -4, c = -2. Por lo tanto ($b^2 – 4ac$) = 0. Ecuación parabólica.

g) $a = -2$, $b = \pi$, $c = 0$. Por lo tanto $(b^2 - 4ac) = \pi^2 > 0$. Ecuación hiperbólica.

Ejemplo 2.

Sea la solución de la EDP dada por la función hidráulica siguiente: $u(x,y) = -3y^3\varphi(x) - 6x + y$, con $\varphi(x)$ como una función arbitraria de *x*. Encontrar una EDP de primer orden para esa solución general.

Solución:

$u(x,y) = -3y^3\varphi(x) - 6x + y$. Si diferenciamos respecto a *y*:

$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -9y^2\varphi(x) + 1$, eliminando $\varphi(x)$ entre ambas se obtiene:

$$-3y^3\varphi(x) = u(x,y) + 6x - y \quad \Rightarrow \quad \frac{-3y^3\varphi(x)}{-9y^2\varphi(x)} = \frac{u(x,y)+6x-y}{\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} - 1};$$

$$-9y^2\varphi(x) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} - 1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y}{3} = \frac{u(x,y)+6x-y}{\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} - 1} \Rightarrow y\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} - y = 3u(x,y) + 18x - 3y\,.$$

$$y\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} - 3u(x,y) = 18x - 2y \Rightarrow y \cdot u'_y - 3u = 18x - 2y.$$

Basta con substituir en esta expresión para comprobar que es la solución pedida. En efecto: $u'_y = -9y^2 \cdot \varphi(x) + 1$; entonces:

$$y \cdot u'_y - 3u = -9y^3 \cdot \varphi(x) + y + 9y^3 \cdot \varphi(x) + 18x - 3y = 18x - 2y, \text{ c.s.q.d.}$$

Ejemplo 3.

Comprobar que las siguientes funciones hidráulicas $u(x,y)$, $u(x,t)$, corresponden a soluciones particulares de las ecuaciones diferenciales correspondientes en derivadas parciales.

a) $u(x,y) = x + \sin(x - y)$ es solución de la ecuación $u_x + u_y = 1$.
b) $u(x,t) = x^2 + 4t^2$ es solución de la ecuación $u_{tt} - 4u_{xx} = 0$.
c) Representar gráficamente dichas funciones hidráulicas.

Solución:

a) Se trata de una ecuación lineal, no homogénea, de primer orden y coeficientes constantes. Las derivadas parciales de la función $u(x,y) = x + \sin(x - y)$ son:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 1 + \cos(x-y)\,, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = -\cos(x-y)\,.$$

Substituyendo la función y sus derivadas en la ecuación, se comprueba que la verifica. En efecto:

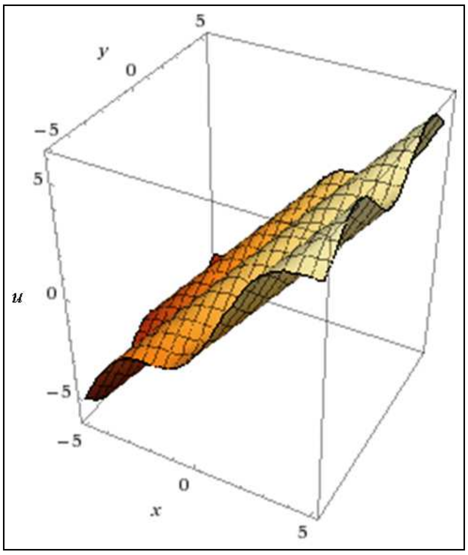
$$u_x + u_y = 1 + \cos(x-y) - \cos(x-y) = 1.$$

b) Se trata de una ecuación lineal, homogénea, de segundo orden y coeficientes constantes. Como a = - 4, b = 0 y c = 1, con el discriminante: $(b^2 - 4ac) = 16 > 0$, es una ecuación del tipo hiperbólico. Las derivadas de la función $u(x,t) = x^2 + 4t^2$ son:

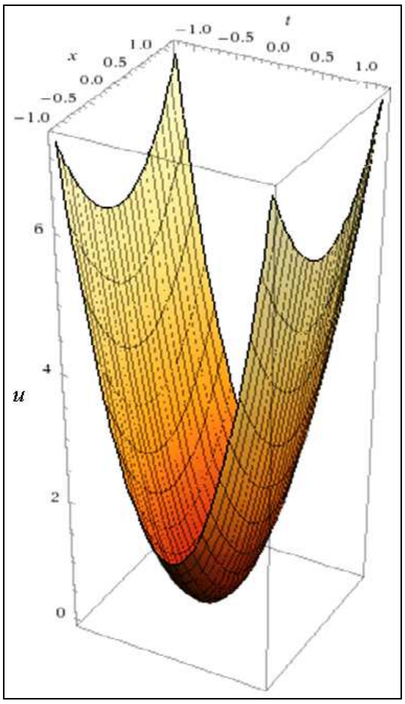
$$\begin{cases} u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x\,, \quad u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t} = 8t \\[2mm] u_{xx} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\,, \quad u_{tt} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 8 \end{cases}$$

Se verifica, efectivamente, que: $u_{tt} - 4 \cdot u_{xx} = 8 - 4 \cdot 2 = 0$.

c) La representación gráfica de $u(x,y) = x + \sin(x - y)$, es:



La representación gráfica de $u(x,t) = x^2 + 4t^2$, es:



Ejemplo 4.

Dada la ecuación:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} = \int_{-2}^{2} \int_{-4\sqrt{1-t^2}}^{4\sqrt{1-t^2}} (4-t)\cdot dx\cdot dt - 8\int_{0}^{1} \int_{0}^{\sqrt{16-t^2}} \frac{4\cdot dx\cdot dt}{\sqrt{16-x^2-t^2}}\text{, se pide:}$$

a) Clasificarla en elíptica, parabólica o hiperbólica.
b) Hallar una solución general que contenga dos funciones arbitrarias.
c) Resolver el siguiente problema condicionado:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} = 0\,; \quad \begin{cases} u(x,0) = -x^2 \\ u(0,t) = t \end{cases}$$

Solución:

a) En primer lugar, conviene resolver el 2º miembro de la ecuación dada, por lo que se calcularán, separadamente, las dos integrales dobles que lo componen. Esto es, respectivamente:

- $\displaystyle\int_{-2}^{2} \int_{-4\sqrt{1-t^2}}^{4\sqrt{1-t^2}} (4-t)\cdot dx\cdot dt = 2\int_{-2}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4-t^2}} (4-t)\cdot dx\cdot dt = 16\pi$.
- $\displaystyle 8\int_{0}^{1} \int_{0}^{\sqrt{16-t^2}} \frac{4\cdot dx\cdot dt}{\sqrt{16-x^2-t^2}} = 32\int_{0}^{1} \left[\arcsin\frac{x}{\sqrt{16-t^2}}\right]_{0}^{\sqrt{16-t^2}} \cdot dt = 32\int_{0}^{1} \frac{\pi\cdot dt}{2} = 16\pi$.

De este modo, la expresión de la EDP propuesta será, definitivamente: $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} = 16\pi - 16\pi = 0$. Es, pues, una ecuación homogénea, lineal y de coeficiente constante.

Ha de estudiarse, seguidamente, el signo del pertinente discriminante: $(b^2 - 4ac)$. Aquí, resulta que es: a = c = 0, b = 1. Luego:

$(b^2 - 4ac) = 1 > 0 \Rightarrow$ Ecuación hiperbólica.

b) $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} = 0$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0$. Integrando respecto a *x*, se obtiene: $\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi(t)$, donde $\varphi(t)$ es una función arbitraria que se supone continua.

Integrando respecto a *t* se obtiene la solución general:

$$u = \int \varphi(t)dt + g(x) \Rightarrow u = f(t) + g(x),$$

donde f(t) es una función primitiva de $\varphi(t)$.

También puede obtenerse considerándola una ecuación de Euler[12]. Es el caso: a = 0, b ≠ 0 (con c = 0).

Una solución es $u = f\left(t - \frac{c}{b}x\right)$, que al ser c = 0 queda u = f(t). Otra es u = g(x). La solución general es, pues, u = f(t) + g(x).

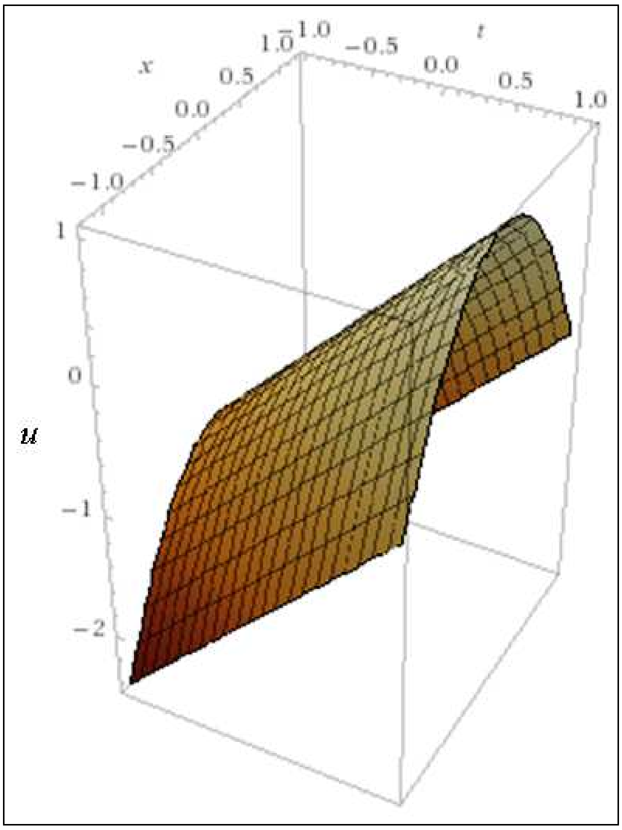
c) Aplicando, ahora, las condiciones dadas, se tiene que:

$u(x,0) = -x^2$: $-x^2 = f(0) + g(x)$; $g(x) = -f(0) - x^2$, y con ello g(0) = -f(0).

u(0,t) = t: t = f(t) + g(0); f(t) = t – g(0); f(t) = t + f(0).

Substituyendo f(t), g(x) en la solución general, resulta, en definitiva, la solución particular buscada, a saber: $u(x,t) = t - x^2$, con la siguiente representación gráfica en E^3:

[12] Leonhard Euler (1707 - 1783). Matemático suizo. Las facultades que desde temprana edad demostró para las matemáticas pronto le ganaron la estima del patriarca de los Bernouilli, Johann, uno de los más eminentes matemáticos de su tiempo y profesor de Euler en la Universidad de Basilea. En 1748 publicó la obra *Introductio in analysim infinitorum*, en la que expuso el concepto de función en el marco del análisis matemático, campo en el que así mismo contribuyó de forma decisiva con resultados como el teorema sobre las funciones homogéneas y la teoría de la convergencia. En el ámbito de la geometría desarrolló conceptos básicos como los del ortocentro, el circuncentro y el baricentro de un triángulo, y revolucionó el tratamiento de las funciones trigonométricas al adoptar ratios numéricos y relacionarlos con los números complejos mediante la denominada identidad de Euler; a él se debe la moderna tendencia a representar cuestiones matemáticas y físicas en términos aritméticos.



Ejemplo 5.

Comprobar si la función hidráulica: $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$ puede ser una solución particular de la EDP: $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{2f}{3}=\lim_{x\to 0} x^2\cdot \sin\dfrac{1}{x}$, y representarla gráficamente.

Solución:

Procede, en primer lugar, resolver el 2º miembro de la EDP dada aplicando infinitésimos equivalentes, con lo que resulta:

$$\lim_{x\to 0} x^2\cdot \sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0} x=0\text{, y entonces: } x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{2}{3}f\,.$$

La EDP es, pues, lineal, de primer orden, homogénea y de coeficientes variables.

Por el teorema de Euler, se sabe que si *f* es homogénea, se tiene que: $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=m\cdot f$, siendo *m* su grado de homogeneidad.

Haciendo en ella: x = tx, y = ty, se obtiene:

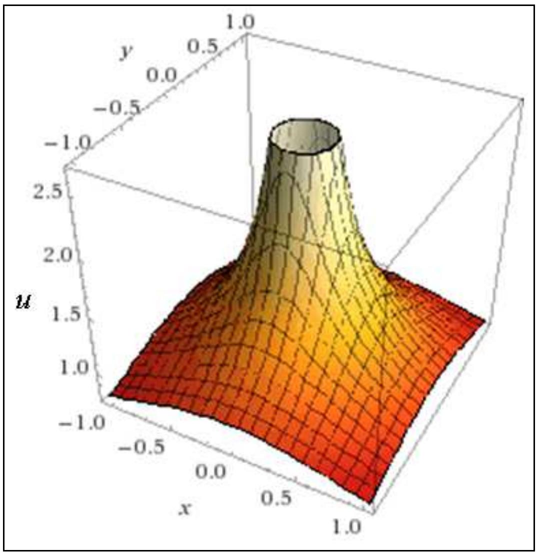
$$f(tx,ty)=\frac{1}{\sqrt[3]{t^2x^2+t^2y^2}}=\frac{1}{t^{2/3}\sqrt[3]{x^2+y^2}}=t^{-2/3}f(x,y),$$

luego la función es homogénea y de grado m = $-\frac{2}{3}$. De este modo:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{2}{3}f=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2+y^2}},$$

lo que también puede comprobarse por derivación directa, por lo que la función hidráulica dada cumple con la EDP y es una solución particular de la misma.

La representación gráfica en E^3 de esta solución es:



Ejemplo 6.

Comprobar si la función hidráulica $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2+y^2}$ puede ser una solución particular de la EDP siguiente:

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{2\,f}{9}=\lim_{x\to 0}(x\cdot \ln x)\ ,$$

y representarla gráficamente.

Solución:

Esta EDP es una ecuación lineal, de segundo orden, homogénea (como se verá) y de coeficientes variables. Para proceder a su clasificación, veamos que: a = x^2 , b = 2xy , c = y^2 , con lo que el discriminante: (b^2 – 4ac) = $4x^2y^2$ – $4x^2y^2$ = 0, luego se trata de una ecuación del tipo parabólico.

Procede, en primer lugar, resolver el 2º miembro de la EDP dada, aunque se trata de una indeterminación de la forma simbólica: 0·(-∞). Se puede escribir:

$$\lim_{x\to 0} x\cdot \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1/x},$$

que es de la forma simbólica $\frac{\infty}{\infty}$, a la cual le podemos aplicar directamente la regla de l'Hôpital, esto es:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0,$$

y entonces, la expresión de la EDP planteada en el enunciado del problema quedará configurada así:

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{2f}{9}.$$

Si *f* es homogénea de grado *m*, se cumple que: $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son homogéneas de grado *m – 1*, luego por el teorema de Euler debe cumplirse también que:

$$\begin{cases} x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (m-1)\frac{\partial f}{\partial x} \\ x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (m-1)\frac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por *x*, la segunda por *y* y sumando, se obtiene:

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (m-1)x\frac{\partial f}{\partial x}(m-1)y\frac{\partial f}{\partial y} \quad .$$

Veamos que haciendo en *f* : x = tx, y = ty, se obtiene:

$$f(tx,ty) = \sqrt[3]{t^2x^2 + t^2y^2} = t^{2/3}\sqrt[3]{x^2+y^2} = t^m\cdot f(x,y),$$

luego *f* es homogénea de grado *m*, y también se cumple que:

$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = m\cdot f$. Substituyendo se obtiene:

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = m(m-1) \cdot f \ .$$

En el caso del problema planteado, como hemos visto que la función *f* es homogénea de grado m = $\frac{2}{3}$, se tiene que:

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3} - 1 \right) \cdot f = -\frac{2}{9} \sqrt[3]{x^2 + y^2} \ .$$

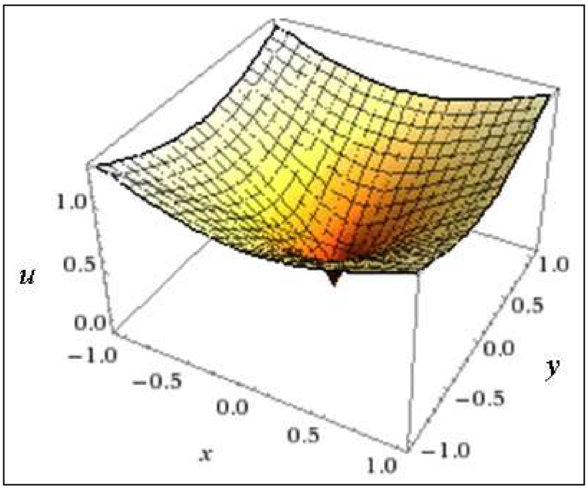
Aplicando directamente la generalización del teorema de Euler se llega al mismo resultado. Como:

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = m\,(m-1)\, f \ , \text{ y como } m = \frac{2}{3}, \text{ entonces:}$$

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3} - 1 \right) f = -\frac{2}{9} f \ ,$$

por lo que la función hidráulica dada cumple con la EDP propuesta y es, efectivamente, una solución particular de la misma.

La representación gráfica en E^3 de esta solución es:



8. FUNCIONES MULTIVARIANTES

8.1. INTRODUCCIÓN

En esta monografía estudiamos funciones reales de varias variables reales. Numerosas cantidades de la vida cotidiana o incluso ciertas cantidades físicas hidráulicas dependen de dos o más variables independientes o explicativas.

El conjunto D de pares ordenados de números reales se denomina *dominio de la función* y el conjunto de todos los valores de la función es el *rango de la función*. Una función real de dos variables reales, como las que emplearemos profusamente en el presente libro, es una regla que asigna a cada par ordenado un único número real.

Normalmente no se específica cual es el dominio de la función. Cuando éste es el caso, tenemos que considerar el dominio implícito. El *dominio implícito* de una función multivariante es el conjunto más amplio donde tiene sentido evaluar la fórmula, y el resultado es un número real. Muchas veces, este dominio se representa gráficamente. En el caso de dos variables la representación es una región en el plano.

En algunos casos enfocamos el estudio y resolución de las ecuaciones infinitesimales (diferenciales, integrales e integro-diferenciales, así como las ecuaciones recurrentes o en diferencias finitas y los sistemas de todas ellas) de una sola variable y sus aplicaciones hidráulicas, lo que, sin duda, constituye una simplificación de los problemas reales que se presentan en la Macánica de Fluidos. Pero también muchos modelos hidráulicos son susceptibles de utilizar funciones multivariantes, así como sus derivadas parciales, elasticidades (funciones derivadas elásticas), integrales múltiples, etc. Las ecuaciones resultantes, con frecuencia, lo son en derivadas parciales (EDP); de ahí el interés de su estudio y el conocimiento de la metodología precisa para su correcta resolución.

8.2. EJERCICIOS RESUELTOS

Ejercicio 1.

Hallar el valor de la función hidráulica *u* dada por la superficie integral de la ecuación de primer orden:

$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 1$, que pasa por la curva: $x = 0$, $z = y^2$, cuando $x = 1$ e $y = 2$.

(adaptado de Moreno, C., UNED, 1999).

Solución:

Se tiene que: $x^2 + y^2 = c^2$, con *c* independiente de *t*.

Si se integra la ecuación diferencial: $\frac{dx}{dt} = \sqrt{c^2 - x^2}$, se deduce que un solución positiva (con posible significado hidráulico) sería:

$x = \frac{c \cdot tg(t-k)}{\sqrt{tg^2(t-k)+1}} = \frac{c \cdot tg(t-k)}{sec(t-k)} = c \cdot sin(t-k)$, o también: $x = c \cdot sin\ (t)$, con $k = 0$, y, en consecuencia, se obtiene que: $c^2 \cdot \sin^2(t) + y^2 = c^2$; $y^2 = c^2 \cdot \cos^2(t)$, con lo que: $y = c \cdot \cos(t)$.

Además, de la tercera ecuación diferencial se desprende que:

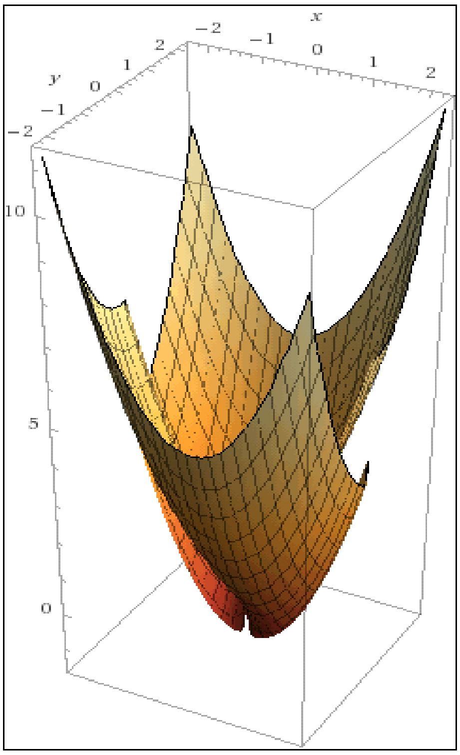
$$z = t + d,$$

donde *d* es una constante. En definitiva, las líneas de campo de esta ecuación son hélices circulares. De la condición inicial se desprende que:

$$\begin{cases} x = s \cdot \cos(t), \\ y = s \cdot \sin(t), \\ z = t + s^2 \end{cases}$$

Finalmente, si se eliminan *s* y *t* se obtiene la expresión:

$u = z = x^2 + y^2 + \text{arc tan}\left(\dfrac{x}{y}\right)$, cuya representación gráfica es:



Veamos, en fin, que en el punto (1,2) se tendrá que la función hidráulica valdrá:

$$u = 1 + 4 + \text{arc tan}\ (1/2) = 5'464.$$

Ejercicio 2.

Hallar el valor de la función hidráulica *u*, con precisión hasta las cienmilésimas, dada por la ecuación: $y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=I_1-I_2$, con la condición inicial: $u(x,0)=(v(x)+1)^x$, cuando x = 3 e y = 2, viniendo v(x) dada por la EDO: v'(x) – v(x) = 1, con v(0) = 0, y siendo: $I_1=\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-x^2}}\int_{2x^2+y^2}^{4-y^2}dz\cdot dy\cdot dx$,

$I_2=\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}\int_0^{\rho^2}\rho\cdot\cos\theta\cdot\rho\cdot dz\cdot d\rho\cdot d\theta$.

Solución:

En primer lugar se deberá obtener el 2º miembro de la EDP planteada por diferencia de las dos integrales triples dadas, estando expresado el minuendo en coordenadas cartesianas rectangulares y el sustraendo en coordenadas cilíndricas. Así, respectivamente:

$$\left\{\begin{array}{l} I_1=\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-x^2}}\int_{2x^2+y^2}^{4-y^2}dz\cdot dy\cdot dx=\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-x^2}}\left[(4-y^2)-(2x^2+y^2)dy\cdot dx\right]= \\ \quad =\int_0^{\sqrt{2}}\left(4y-2x^2y-\frac{2y^3}{3}\right)_0^{\sqrt{2-x^2}}\cdot dx=\frac{4}{3}\int_0^{\sqrt{2}}(2-x^2)^{3/2}\cdot dx=\pi. \\ I_2=\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}\int_0^{\rho^2}\rho\cdot\cos\theta\cdot\rho\cdot dz\cdot d\rho\cdot d\theta=\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}\rho^4\cdot\cos\theta\cdot d\rho\cdot d\theta=\frac{32}{5}\int_0^{\pi/2}\cos^6\theta\cdot d\theta=\pi. \end{array}\right.$$

De este modo, la EDP planteada adoptará la configuración analítica: $y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=I_1-I_2=\pi-\pi=0$, luego se trata de una ecuación lineal de primer orden, homogénea y de coeficientes variables.

En segundo lugar habrá que resolver la función v(x) que aparece en la condición inicial de la EDP. Para ello, aplicando el método de las transformadas de Laplace (véase el anexo nº: 7), se obtiene:

$$\left\{\begin{array}{l} Sv_S-v(0)-v_S=L(1);\quad v_S(S-1)=\frac{1}{S}\Rightarrow v_S=\frac{1}{S(S-1)}\quad , \\ \frac{A}{S}+\frac{B}{S-1}=\frac{1}{S(S-1)},\ A(S-1)+BS=1,\quad A=-1\Rightarrow B=1, \\ v(x)=-L^{-1}\left\{\frac{1}{S}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{1}{S-1}\right\}=-1+e^x. \end{array}\right.$$

Alternativamente, por aplicación del método clásico, se tendrá que la ecuación característica de la homogénea o incompleta, será la siguiente:

$\lambda - 1 = 0$; $\lambda = 1$; con lo que: $v^* = c \cdot e^x$; ensayaremos, ahora, una solución particular de la no homogénea del tipo:

$\begin{cases} v_p = a \\ v'_p = 0 \end{cases}$; y substituimos en la ecuación inicial:

$-a = 1$; $a = -1$; con lo que se tendrá la solución general:

$v(x) = v^* + v_p = c \cdot e^x - 1$; y aplicando la condición inicial, se tiene que:

$v(0) = c - 1 = 0$; $c = 1$, y nos quedará la I.P. buscada:

$$\boxed{v(x) = e^x - 1} \quad \text{c. s. q. d.}$$

De hecho se tata de una ecuación lineal de primer orden, con:

$X = -1$; $X_1 = -1$, y: $\int X \cdot dx = -\int dx = -x$;

$\int X_1 \cdot e^{\int X \cdot dx} \cdot dx = -\int e^{-x} \cdot dx = e^{-x}$; y aplicando la fórmula pertinente:

$v(x) = e^x(c - e^{-x}) = c \cdot e^x - 1$, que es la I.G. a la cual habrá que aplicar la condición inicial para obtener la I.P. buscada (es evidente que con c = 1). De este modo, la expresada condición inicial quedará establecida así:

$$u(x,0) = (e^x)^x = e^{x^2} .$$

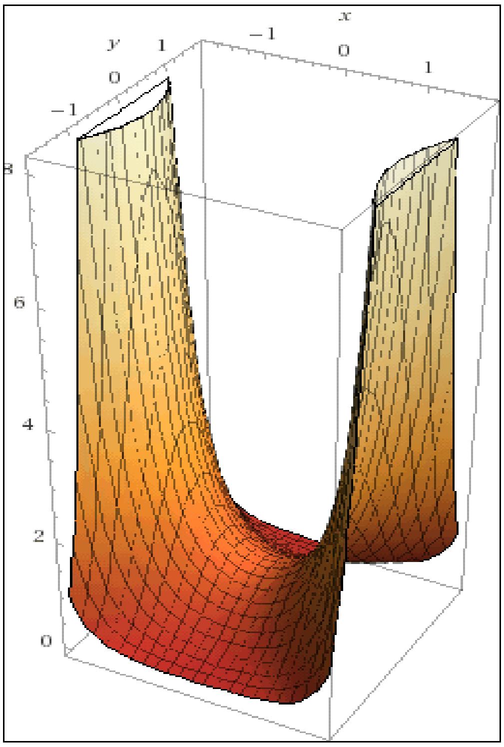
El sistema característico asociado a la ecuación, en forma autónoma, es el siguiente:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0} .$$

De la primera igualdad se deduce fácilmente que: $x^2 - y^2 = c = s^2$ es una integral primera. De la segunda igualdad se deduce que:

$$u = c_3(s) = e^{s^2} .$$

De todo ello se obtiene, en definitiva, que: $u = e^{x^2 - y^2}$, es la solución buscada, con la siguiente representación gráfica:



Veamos, en fin, que en el punto (3,2) se tendrá que la función hidráulica valdrá:

$$u(x,y) = e^{x^2-y^2} = e^5 = 148'41316\,.$$