ANEXO 7

TRANSFORMADAS DE LAPLACE. EXTENSIÓN DEL TEOREMA DE CAUCHY

1. ***Transformadas de Laplace.***
2. ***Extensión del teorema de Cauchy.***

1. TRANSFORMADAS DE LAPLACE

Tabla A7.1. Transformadas de Laplace más usuales.

Función generatriz y(x)	**Transformada L[y(x)]**	**Función generatriz y(x)**	**Transformada L[y(x)]**
K	$\frac{K}{p}$ $(p > 0)$	$\text{Sh}\ \omega x$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$ $(p > \lvert\omega\rvert)$
$x^n (n > -1)$, $(p > 0)$	$\frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}$	$\text{Ch}\ \omega x$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$ $(p > \lvert\omega\rvert)$
x	$\frac{1}{p^2}$ $(p > 0)$	$x\cdot\sin\omega x$	$\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$ $(p > 0)$
$K\cdot e^{ax}$ $(p > -a)$	$\frac{K}{p-a}$	$\sin\omega x\cdot\text{Sh}\ \omega x$	$\frac{2\omega^2 p}{p^4+4\omega^4}$
$\sin Kx$	$\frac{K}{p^2+K^2}$ $(p > 0)$	$\cos\omega x\cdot\text{Ch}\ \omega x$	$\frac{p^3}{p^4+4\omega^4}$
$\cos Kx$	$\frac{p}{p^2+K^2}$ $(p > 0)$	$x^n e^{ax}$	$\frac{\Gamma(n+1)}{(p-a)^{n+1}}$ $(n > -1)$ $(p > a)$
$\frac{1}{2}(e^{Kx}-e^{-Kx})$	$\frac{K}{p^2-K^2}$	$\frac{1-e^{-x}}{x}$	$l\cdot\left(1+\frac{1}{p}\right)$
$\frac{1}{2}(e^{Kx}+e^{-Kx})$	$\frac{p}{p^2-K^2}$	lx	$\frac{\Gamma'(1)}{p}-\frac{lp}{p}$
$x^n e^{ax}$ $(n > -1)$	$\frac{\Gamma(n+1)}{(p-a)^{n+1}}$	$\frac{\cos\alpha\sqrt{x}}{\pi\sqrt{x}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi p}}e^{-\frac{\alpha^2}{4p}}$
$e^{ax}\sin Kx$	$\frac{K}{(p-a)^2+K^2}$ $(p > a)$	$\frac{\sin\alpha\sqrt{x}}{\pi}$	$\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}p^{3/2}}e^{-\frac{\alpha^2}{4p}}$
$e^{ax}\cos Kx$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+K^2}$ $(p > a)$	$\frac{\text{Ch}\alpha\sqrt{x}}{\pi\sqrt{x}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi p}}e^{\frac{\alpha^2}{4p}}$
$\cos(\omega x + K)$	$\frac{p\cdot\cos K-\omega\cdot\sin K}{p^2+\omega^2}$	$\frac{\text{Sh}\alpha\sqrt{x}}{\pi}$	$\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}p^{3/2}}e^{\frac{\alpha^2}{4p}}$
Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$	Función $\eta(p)$	Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$	Función $\eta(p)$

Función generatriz y(x)	**Transformada L[y(x)]**	**Función generatriz y(x)**	**Transformada L[y(x)]**
sin (ωx + K)	$\frac{p \cdot \sin K + \omega \cdot \cos K}{p^2 + \omega^2}$	$\sqrt[n]{x}$ (p > 0)	$p^{-(n+1)/n} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{x}\right)$
$\frac{x^n}{n!}$	$\frac{1}{p^{n+1}}$ $(p > 0)$	$\frac{x^q}{\Gamma(q+1)}$	$\frac{1}{p^{q+1}}$ $(p > 0)$
$\frac{x^n}{n!} \cdot e^{-\alpha x}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^{n+1}}$ $(p > -\alpha)$	$e^{-\alpha x}$	$\frac{1}{p+\alpha}$ $(p > -\alpha)$
$1 - e^{-\alpha x}$	$\frac{\alpha}{p(p+\alpha)}$ $(p > 0)$	$\frac{1}{b-a}(e^{-ax} - e^{-bx})$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$ $(p>-a)$ $(p>-b)$
$\ln \frac{x}{x_0}$ (p > 0)	$-\frac{x_0}{p}[\ln(x_0 \cdot p) + \gamma]$	$\frac{1}{2a^3}$(sin at - at·cos at)	$\frac{1}{(p^2+a^2)^2}$
x^{n-1} (n = 1, 2, …)	$\frac{(n-1)!}{p^n}$ $(p > 0)$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}p^{-3/2}$ $(p > 0)$
$1\sqrt{x}$	$\sqrt{\pi}p^{-1/2}$ $(p > 0)$	$x^{n-1/2}$ (n = 1, 2, …)	$\frac{(1)(3)(5)\ldots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n}p^{-n-1/2}$ $(p>0)$
x·cos ax	$\frac{p^2 - a^2}{(p^2+a^2)^2}$ $(p > 0)$	$x^{n-1}e^{ax}$ (n = 1, 2, …)	$\frac{(n-1)!}{(p-a)^n}$ $(p > a)$
sin ax – ax·cos ax	$\frac{2a^3}{(p^2+a^2)^2}$ $(p > 0)$	$\frac{1}{a}e^{-x/a}$	$\frac{1}{1+ap}$
$\frac{1}{a}(e^{ax} - 1)$	$\frac{1}{p(p-a)}$	$1 - e^{-x/a}$	$\frac{1}{p(1+ap)}$
$\frac{1}{a^2}$ x 3 $e^{-x/a}$	$\frac{1}{(1+ap)^2}$	$\frac{e^{ax} - e^{bx}}{a-b}$	$\frac{1}{(p-a)(p-b)}$
$\frac{e^{-x/a} - e^{-x/b}}{a-b}$	$\frac{1}{(1+ap)(1+bp)}$	$(1 + ax)e^{ax}$	$\frac{p}{(p-a)^2}$
$\frac{1}{a^3}(a-x)e^{-x/a}$	$\frac{p}{(1+ap)^2}$	$\frac{ae^{ax} - be^{bx}}{a-b}$	$\frac{p}{(p-a)(p-b)}$
$\frac{ae^{-x/b} - be^{-x/a}}{ab(a-b)}$	$\frac{p}{(1+ap)(1+bp)}$	$\frac{1}{a^2}(e^{ax} - 1 - ax)$	$\frac{1}{p^2(p-a)}$
Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$	Función η(p)	Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$	Función η(p)

Función generatriz y(x)	**Transformada L[y(x)]**	**Función generatriz y(x)**	**Transformada L[y(x)]**
$\sin^2 ax$	$\dfrac{2a^2}{p(p^2+4a^2)}$	$\sinh^2 ax$	$\dfrac{2a^2}{p(p^2-4a^2)}$
$\sin\dfrac{ax}{\sqrt{2}}\sinh\dfrac{ax}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{a^2p}{p^4+a^4}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cosh\dfrac{ax}{\sqrt{2}}\sin\dfrac{ax}{\sqrt{2}}-\sinh\dfrac{ax}{\sqrt{2}}\cos\dfrac{ax}{\sqrt{2}}\right)$	$\dfrac{a^3}{p^4+a^4}$
$\cos\dfrac{ax}{\sqrt{2}}\cosh\dfrac{ax}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{p^3}{p^4+a^4}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{ax}{\sqrt{2}}\sinh\dfrac{ax}{\sqrt{2}}+\sin\dfrac{ax}{\sqrt{2}}\cos\dfrac{ax}{\sqrt{2}}\right)$	$\dfrac{ap^2}{p^4+a^4}$
$\dfrac{1}{2}(\sinh ax-\sin ax)$	$\dfrac{a^3}{p^4-a^4}$	$\dfrac{1}{2}(\cosh ax-\cos ax)$	$\dfrac{a^2p}{p^4-a^4}$
$\dfrac{1}{2}(\sinh ax+\sin ax)$	$\dfrac{as^2}{p^4-a^4}$	$\dfrac{1}{2}(\cosh ax+\cos ax)$	$\dfrac{p^3}{p^4-a^4}$
$\cos ax \cdot \sinh ax$	$\dfrac{a(p^2-2a^2)}{p^4+4a^4}$	$\sin ax \cdot \cosh ax$	$\dfrac{a(p^2+2a^2)}{p^4+4a^4}$
$\dfrac{1}{2}(\sin ax+ax\cos ax)$	$\dfrac{ap^2}{(p^2+a^2)^2}$	$\cos ax-\dfrac{ax}{2}\sin ax$	$\dfrac{p^3}{(p^2+a^2)^2}$
$\dfrac{1}{2}(ax\cdot\cosh ax-\sinh ax)$	$\dfrac{a^3}{(p^2-a^2)^2}$	$\dfrac{x}{2}\sinh ax$	$\dfrac{ap}{(p^2-a^2)^2}$
$\dfrac{1}{2}(\sinh ax+ax\cosh ax)$	$\dfrac{ap^2}{(p^2-a^2)^2}$	$\cosh ax+\dfrac{ax}{2}\sin ax$	$\dfrac{p^3}{(p^2-a^2)^2}$
$\dfrac{a\cdot\sin bx-b\cdot\sin ax}{a^2-b^2}$	$\dfrac{ab}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\dfrac{\cos bx-\cos ax}{a^2-b^2}$	$\dfrac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$
$\dfrac{a\cdot\sin ax-b\cdot\sin bx}{a^2-b^2}$	$\dfrac{p^2}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\dfrac{a^2\cdot\cos ax-b^2\cdot\cos bx}{a^2-b^2}$	$\dfrac{p^3}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$
$\dfrac{b\cdot\sinh ax-a\cdot\sinh bx}{a^2-b^2}$	$\dfrac{ab}{(p^2-a^2)(p^2-b^2)}$	$\dfrac{\cos ax-\cosh bx}{a^2-b^2}$	$\dfrac{p}{(p^2-a^2)(p^2-b^2)}$
$\dfrac{a\cdot\sinh ax-b\cdot\sin bx}{a^2-b^2}$	$\dfrac{p^2}{(p^2-a^2)(p^2-b^2)}$	$\dfrac{a^2\cos ax-b^2\cosh bx}{a^2-b^2}$	$\dfrac{p^3}{(p^2-a^2)(p^2-b^2)}$
Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$	Función $\eta(p)$	Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$	Función $\eta(p)$

Función generatriz y(x)	**Transformada L[y(x)]**	**Función generatriz y(x)**	**Transformada L[y(x)]**
$x-\frac{1}{2}\sin ax$	$\frac{a^2}{p^2(p^2+a^2)}$	$\frac{1}{a}\sinh ax - x$	$\frac{a^2}{p^2(p^2-a^2)}$
$1-\cos ax-\frac{ax}{2}\sin ax$	$\frac{a^4}{p(p^2+a^2)^2}$	$1-\cosh ax+\frac{ax}{2}\sinh ax$	$\frac{a^4}{p(p^2-a^2)^2}$
$1+\frac{b^2\cos ax-a^2\cosh bx}{a^2-b^2}$	$\frac{a^2b^2}{p(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$1+\frac{b^2\cos ax-a^2\cosh bx}{a^2-b^2}$	$\frac{a^2b^2}{p(p^2-a^2)(p^2-b^2)}$
$\frac{x}{8}[\sin ax-ax\cdot\cos ax]$	$\frac{a^3p}{(p^2+a^2)^3}$	$\frac{1}{8}[(3-a^2x^2)\sin ax-3ax\cdot\cos ax]$	$\frac{a^5}{(p^2+a^2)^3}$
$\frac{x}{8}(ax\cdot\cosh ax-\sinh ax)$	$\frac{a^3p}{(p^2-a^2)^3}$	$\frac{1}{8}[(1+a^2x^2)\sin ax-ax\cdot\cos ax]$	$\frac{a^3p^2}{(p^2+a^2)^3}$
$\frac{1}{n!}(1-e^{-x/a})^n$	$\frac{1}{p(ap+1)(ap+2)\ldots(ap+n)}$	$\frac{1}{8}[(3+a^2x^2)\sinh ax-3ax\cdot\cosh ax]$	$\frac{a^5}{(p^2-a^2)^3}$
$\sin(ax+b)$	$\frac{p\cdot\sin b+a\cdot\cos b}{p^2+a^2}$	$\frac{1}{8}[ax\cdot\cosh ax-(1-a^2x^2)\sinh ax]$	$\frac{a^3p^2}{(p^2-a^2)^3}$
$\cos(ax+b)$	$\frac{p\cdot\cos b-a\cdot\sin b}{p^2+a^2}$	$e^{-ax}-e^{ax/2}\left[\cos\frac{ax\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\cdot\sin\frac{ax\sqrt{3}}{2}\right]$	$\frac{3a^2}{p^3+a^3}$
$\frac{1+2ax}{\sqrt{\pi x}}$	$\frac{p+a}{p\sqrt{p}}$	$e^{-ax}/\sqrt{\pi x}$	$\frac{1}{\sqrt{p+a}}$
$\frac{1}{2x\sqrt{\pi x}}(e^{bx}-e^{ax})$	$\sqrt{p-a}-\sqrt{p-b}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\cos 2\sqrt{ax}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-a/p}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\cosh 2\sqrt{ax}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{a/p}$	$\frac{1}{\sqrt{a\pi}}\sin 2\sqrt{ax}$	$p^{-3/2}e^{-a/p}$
$\frac{1}{\sqrt{a\pi}}\sinh 2\sqrt{ax}$	$p^{-3/2}e^{a/p}$	$J_0(2\sqrt{ax})$	$\frac{1}{p}e^{-a/p}$
$\sqrt{x/a}\cdot J_1(2\sqrt{ax})$	$\frac{1}{p^2}e^{-a/p}$	$(x/a)^{(s-1)/2}\cdot J_{s-1}(2\sqrt{ax})\ (s>0)$	$p^{-s}e^{-a/p}$
Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$	Función $\eta(p)$	Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$	Función $\eta(p)$

Función generatriz y(x)	**Transformada L[y(x)]**	**Función generatriz y(x)**	**Transformada L[y(x)]**
$J_0(x)$	$\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$	$J_1(x)$	$\frac{\sqrt{p^2+1}-p}{\sqrt{p^2+1}}$
$J_s(x)$ (s > -1)	$\frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^s}{\sqrt{p^2+1}}$	$x^s J_s(ax)$ $\left(s>-\frac{1}{2}\right)$	$\frac{(2a)^s\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}(p^2+a^2)^{s+(1/2)}}$
$\frac{x^{s-1}}{\Gamma(s)}$ $(s>0)$	$\frac{1}{p^s}$	$\frac{4^n n!}{(2n)!\sqrt{\pi}}\cdot x^{n-(1/2)}$	$\frac{1}{p^n\sqrt{s}}$
$\frac{x^{s-1}}{\Gamma(s)}e^{-ax}$ $(s>0)$	$\frac{1}{(p+a)^s}$	$\frac{1-e^{ax}}{x}$	$\ln\frac{p-a}{p}$
$\frac{e^{bx}-e^{ax}}{x}$	$\ln\frac{p-a}{p-b}$	$\frac{2}{x}\sinh ax$	$\ln\frac{p+a}{p-a}$
$\frac{2}{x}(1-\cos\cdot ax)$	$\ln\frac{p^2+a^2}{p^2}$	$\frac{2}{x}(\cos bx-\cos ax)$	$\ln\frac{p^2+a^2}{p^2+b^2}$
$\frac{\sin ax}{x}$	$\arctan\frac{a}{p}$	$\frac{2}{x}\sin ax\cdot\cos bx$	$\arctan\frac{2ap}{p^2-a^2+b^2}$
$\sin\lvert ax\rvert$	$\left(\frac{a}{p^2+a^2}\right)\left(\frac{1+e^{-(\pi/a)p}}{1-e^{-(\pi/a)p}}\right)$	---	---
Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$	Función $\eta(p)$	Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$	Función $\eta(p)$

NOTAS EXPLICATIVAS DE LA TABLA PRECEDENTE:

1. γ es la constante de Euler-Mascheroni. La **constante de Euler-Mascheroni**, (también conocida *como constante de Euler*), a la que ya nos hemos referido con anterioridad, es una constante matemática que aparece principalmente en la teoría de números, y se denota con la letra griega minúscula γ (Gamma). Se define como el límite de la diferencia entre la serie armónica y el logaritmo natural o neperiano, a saber:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)\right]=\int_1^{\infty}\left(\frac{1}{\lfloor x\rfloor}-\frac{1}{x}\right)dx$$

Su valor aproximado es:

$$\gamma \approx 0.577\,215\,664\,901\,532\,860\,606\,\ldots$$

Esta constante apareció publicada por primera vez en el año 1734, en un artículo escrito por Leonhard Euler, denominado *De Progressionibus harmonicis observationes*, calculando los 6 primeros dígitos para la constante y llamándola *C*. En 1781 calcularía otros 10 decimales más. En 1790, Lorenzo Mascheroni calcularía los primeros 19 decimales y la denotaría como *A*. Ya más tarde se denotaría de la forma moderna como γ, debido a su conexión con la función gamma, a la que nos referiremos inmediatamente.

El número γ no se ha probado que sea algebraico o transcendente; de hecho, ni siquiera se conoce si γ es irracional o no. El análisis de fracciones continuas revela que, de ser racional, su denominador debe ser muy elevado (actualmente del orden de 10^{242080}). Debido a que está presente en un gran número de ecuaciones y relaciones, la racionalidad o irracionalidad de γ se halla, sin duda, entre los problemas abiertos más importantes de las matemáticas.

2. $\Gamma(q)$ representa la función gamma o integral euleriana de segunda especie. Integrando por partes en dicha función, se obtiene: $\Gamma(q) = \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{q-1} \cdot dx$; $u = x^{q-1}$; $dv = e^{-x} \cdot dx$; $du = (q-1) \cdot x^{q-2} \cdot dx$; $v = -e^{-x}$; con lo que:

$$\Gamma(q) = \left[-e^{-x} \cdot x^{q-1}\right]_0^\infty + (q-1)\int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{q-2} \cdot dx = (q-1)\int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{q-2} \cdot dx = (q-1) \cdot \Gamma(q-1).$$

Reiterando el procedimiento, se tendrá que:

$$\Gamma(q) = (q-1)(q-2)\,\ldots\,(q-k) \cdot \Gamma(q-k).$$

En el caso particular de que *q* sea un número natural (o sea, entero positivo), la aplicación de la expresión anterior conduce a la siguiente:

$$\Gamma(q) = (q-1)! \quad (\forall q \in \mathbf{N}),$$

puesto que: $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} \cdot dx = 1$. Una expresión que se presenta con frecuencia, es la que se obtiene mediante el cambio de variable: $x = t^2$. En efecto:

$$\Gamma(q) = \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{q-1} \cdot dx = \int_0^\infty e^{-t^2} \cdot t^{2q-2} \cdot 2t = 2\int_0^\infty e^{-t^2} \cdot t^{2p-1} \cdot dt.$$

Así mismo, el cambio $x = mt$, conduce análogamente a:

$$\Gamma(q) = \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{q-1} \cdot dx = \int_0^\infty e^{-mt} \cdot (mt)^{q-1} \cdot m \cdot dt = m^q \int_0^\infty e^{-mt} \cdot t^{q-1} \cdot dt.$$

3. Las funciones de Bessel de primera especie y orden α que aparecen en la tabla anterior son las soluciones de la ecuación diferencial de Bessel que son

finitas en el origen (x = 0) para enteros no negativos α y divergen en el límite x $\to$ 0 para α negativo no entero. El tipo de solución y la normalización de $J_\alpha(x)$ están definidos por sus propiedades. Es posible definir la función $J_\alpha(x)$ por su expansión en serie de Taylor en torno a x = 0. Las **funciones de Bessel**, primero definidas por el matemático Daniel Bernouilli (1700-1782) y más tarde generalizadas por Friedrich Bessel (1784-1846), son soluciones canónicas *y(x)* de la ecuación diferencial de Bessel, a saber:

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2)y = 0$$

, donde α es un número real o complejo. El caso más común es cuando α es un número entero *n*, aunque la solución para α no entero es similar. El número α se denomina *orden* de las funciones de Bessel asociadas a dicha ecuación. Dado que la ecuación anterior es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden y coeficientes variables, tiene dos soluciones linealmente independientes. Aunque α y $-\alpha$ dan como resultado la misma función, es conveniente definir diferentes funciones de Bessel para estos dos parámetros, pues las funciones de Bessel en función del parámetro α son funciones suaves casi doquiera. Las funciones de Bessel se denominan también *funciones cilíndricas*, o bien *armónicos cilíndricos* porque son solución de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas.

2. EXTENSIÓN DEL TEOREMA DE CAUCHY

Mi competente compañero en las tareas docentes universitarias, Profesor Jordi Gas Riera, ha efectuado una generalización inédita del teorema clásico de Cauchy para 2 funciones a un número de ellas igual o superior a 3. Como se ha podido comprobar anteriormente, ello puede poseer provechosas aplicaciones en el campo de la Hidráulica, cuando son numerosas las funciones explicativas del comportamiento de ciertos fenómenos hidráulicos e intervienen parámetros distintivos. En resumen, que si:

$$\left.\begin{array}{l} f_1, f_2, f_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, f_n \ \text{continuas en } [a,b] \\ f_1, f_2, f_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, f_n \ \text{derivables en }]a,b[\\ \qquad\qquad n \geq 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists\, c \in \,]a,b[\ / \sum_{i=1,\, f_{n+1}=f_1}^{n} [f_i(b) - f_i(a)]\, f'_{i+1}(c) = \sum_{i=1,\, f_{n+1}=f_1}^{n} [f_{i+1}(b) - f_{i+1}(a)]\, f'_i(c)$$

Demostración**:**

Consideremos la función: $G(x) = \sum_{i=1,\, f_{n+1}=f_1}^{n} \big[[f_i(b) - f_i(a)]\, f_{i+1}(x) - [f_{i+1}(b) - f_{i+1}(a)]\, f_i(x)\big]$;

$G(x)$ es una función auxiliar, continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ por serlo f_1, f_2, f_3, ..., f_n y, de igual manera, es derivable en el intervalo abierto $]a,b[$ por serlo f_1, f_2, f_3, ..., f_n. Además, veamos que $G(a) = G(b)$, con lo cual podremos aplicar el teorema de Rolle. En efecto:

$$G(a) = \sum_{i=1,\, f_{n+1}=f_1}^{n} \big[[f_i(b) - f_i(a)]\, f_{i+1}(a) - [f_{i+1}(b) - f_{i+1}(a)]\, f_i(a)\big] =$$

$$\begin{aligned}
&= [f_1(b) - f_1(a)]\, f_2(a) - [f_2(b) - f_2(a)]\, f_1(a) \ + \\
&+ [f_2(b) - f_2(a)]\, f_3(a) - [f_3(b) - f_3(a)]\, f_2(a) \ + \\
&+ [f_3(b) - f_3(a)]\, f_4(a) - [f_4(b) - f_4(a)]\, f_3(a) \ + \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ + \\
&+ [f_{n-2}(b) - f_{n-2}(a)]\, f_{n-1}(a) - [f_{n-1}(b) - f_{n-1}(a)]\, f_{n-2}(a) \ + \\
&+ [f_{n-1}(b) - f_{n-1}(a)]\, f_n(a) - [f_n(b) - f_n(a)]\, f_{n-1}(a) \ + \\
&+ [f_n(b) - f_n(a)]\, f_1(a) - [f_1(b) - f_1(a)]\, f_n(a) \ = \\
&= f_1(b).f_2(a) - f_1(a).f_2(a) - f_1(a).f_2(b) + f_1(a).f_2(a) \ + \\
&+ f_2(b).f_3(a) - f_2(a).f_3(a) - f_2(a).f_3(b) + f_2(a).f_3(a) \ + \\
&+ f_3(b).f_4(a) - f_3(a).f_4(a) - f_3(a).f_4(b) + f_3(a).f_4(a) \ + \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ + \\
&+ f_{n-2}(b).f_{n-1}(a) - f_{n-2}(a).f_{n-1}(a) - f_{n-2}(a).f_{n-1}(b) + f_{n-2}(a).f_{n-1}(a) \ + \\
&+ f_{n-1}(b).f_n(a) - f_{n-1}(a).f_n(a) - f_{n-1}(a).f_n(b) + f_{n-1}(a).f_n(a) \ + \\
&+ f_n(b).f_1(a) - f_n(a).f_1(a) - f_n(a).f_1(b) + f_n(a).f_1(a) \ =
\end{aligned}$$

$= \sum_{i=1,\, f_{n+1}=f_1}^{n} [f_i(b).f_{i+1}(a) - f_i(a).f_{i+1}(b)]$. Así mismo:

$$G(b) = \sum_{i=1,\, f_{n+1}=f_1}^{n} \left[\left[f_i(b) - f_i(a) \right] f_{i+1}(b) - \left[f_{i+1}(b) - f_{i+1}(a) \right] f_i(b) \right] =$$

$$= \left[f_1(b) - f_1(a) \right] f_2(b) - \left[f_2(b) - f_2(a) \right] f_1(b) \ +$$
$$+ \left[f_2(b) - f_2(a) \right] f_3(b) - \left[f_3(b) - f_3(a) \right] f_2(b) \ +$$
$$+ \left[f_3(b) - f_3(a) \right] f_4(b) - \left[f_4(b) - f_4(a) \right] f_3(b) \ +$$
$$+ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ +$$
$$+ \left[f_{n-2}(b) - f_{n-2}(a) \right] f_{n-1}(b) - \left[f_{n-1}(b) - f_{n-1}(a) \right] f_{n-2}(b) \ +$$
$$+ \left[f_{n-1}(b) - f_{n-1}(a) \right] f_n(b) - \left[f_n(b) - f_n(a) \right] f_{n-1}(b) \ +$$
$$+ \left[f_n(b) - f_n(a) \right] f_1(b) - \left[f_1(b) - f_1(a) \right] f_n(b) \ =$$
$$= f_1(b).f_2(b) - f_1(a).f_2(b) - f_1(b).f_2(b) + f_1(b).f_2(a) \ +$$
$$+ f_2(b).f_3(b) - f_2(a).f_3(b) - f_2(b).f_3(b) + f_2(b).f_3(a) +$$
$$+ f_3(b).f_4(b) - f_3(a).f_4(b) - f_3(b).f_4(b) + f_3(b).f_4(a) +$$
$$+ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ +$$
$$+ f_{n-2}(b).f_{n-1}(b) - f_{n-2}(a).f_{n-1}(b) - f_{n-2}(b).f_{n-1}(b) + f_{n-2}(b).f_{n-1}(a) +$$
$$+ f_{n-1}(b).f_n(b) - f_{n-1}(a).f_n(b) - f_{n-1}(b).f_n(b) + f_{n-1}(b).f_n(a) \ +$$
$$+ f_n(b).f_1(b) - f_n(a).f_1(b) - f_n(b).f_1(b) + f_n(b).f_1(a) \ =$$
$$= \sum_{i=1,\ f_{n+1}=f_1}^{n} \left[f_i(b).f_{i+1}(a) - f_i(a).f_{i+1}(b) \right] .$$

Por tanto, G(a) = G(b) y por el teorema de Rolle: $\exists\, c \in \left]a,b\right[\,/\, G'(c) = 0$. Ahora bien:

$$G'(x) = \sum_{i=1,\, f_{n+1}=f_1}^{n} \left[\left[f_i(b) - f_i(a) \right] . f'_{i+1}(x) - \left[f_{i+1}(b) - f_{i+1}(a) \right] . f'_i(x) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G'(c) = \sum_{i=1,\, f_{n+1}=f_1}^{n} \left[\left[f_i(b) - f_i(a) \right] . f'_{i+1}(c) - \left[f_{i+1}(b) - f_{i+1}(a) \right] . f'_i(c) \right]$$

$$G'(c) = 0 \ \Rightarrow \ \sum_{i=1,\, f_{n+1}=f_1}^{n} \left[\left[f_i(b) - f_i(a) \right] . f'_{i+1}(c) - \left[f_{i+1}(b) - f_{i+1}(a) \right] . f'_i(c) \right] = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \sum_{i=1,\, f_{n+1}=f_1}^{n} \left[f_i(b) - f_i(a) \right] f'_{i+1}(c) = \sum_{i=1,\, f_{n+1}=f_1}^{n} \left[f_{i+1}(b) - f_{i+1}(a) \right] f'_i(c).$$

Observación: Si aplicamos este teorema para n = 3 funciones, tomando $f_3(x)=k$ (función constante), resulta el teorema de Cauchy:

$$\left. \begin{array}{l} f_1, f_2 \ \text{ continuas en } \left[a,b\right] \\ f_1, f_2 \ \text{ derivables en } \left]a,b\right[\end{array} \right\} \Rightarrow \exists\, c \in \left]a,b\right[\,/\, \left[f_1(b) - f_1(a) \right] f'_2(c) = \left[f_2(b) - f_2(a) \right] f'_1(c)$$

Si en lugar de la función constante, $f_3(x) = k$, tomamos como tercera función la suma de las otras dos, $f_3(x) = f_1(x) + f_2(x)$, también se obtiene el teorema de Cauchy, como fácilmente se puede comprobar.

Veamos, en fin, que en las funciones de la forma $f_i(x) = K_i \cdot F(x)$, la fórmula del teorema de Cauchy anteriormente expuesta se cumple $\forall x$ (en nuestro caso, para cualquier valor de la pendiente motriz I), es decir, es una identidad. En efecto:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) &= K_1 \cdot F(x) \\ f_2(x) &= K_2 \cdot F(x) \end{aligned}\right\} \text{ y entonces:}$$

$$[f_1(b) - f_1(a)]\, f'_2(x) = [f_2(b) - f_2(a)]\, f'_1(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [K_1F(b) - K_1F(a)]\, K_2F'(x) = [K_2F(b) - K_2F(a)]\, K_1F'(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [F(b) - F(a)]\, K_1 \cdot K_2 \cdot F'(x) = [F(b) - F(a)]\, K_2 \cdot K_1 \cdot F'(x),$$

que, como puede verse, se trata de una identidad.

Lo mismo sucede para la generalización del teorema de Cauchy. En efecto, sean las funciones:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) &= K_1 \cdot F(x) \\ f_2(x) &= K_2 \cdot F(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots &\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots \\ f_i(x) &= K_i \cdot F(x) \end{aligned}\right\}$$

$$\sum_{i=1,\, f_{n+1}=f_1}^{n} \left[f_i(b) - f_i(a)\right] f'_{i+1}(x) = \sum_{i=1,\, f_{n+1}=f_1}^{n} \left[f_{i+1}(b) - f_{i+1}(a)\right] f'_i(c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum \left[K_i \cdot F(b) - K_i \cdot F(a)\right] K_{i+1} \cdot F'(x) = \sum \left[K_{i+1} \cdot F(b) - K_{i+1} \cdot F(a)\right] K_i \cdot F'(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum \left[F(b) - F(a)\right] K_i \cdot K_{i+1} \cdot F'(x) = \sum \left[F(b) - F(a)\right] K_{i+1} \cdot K_i \cdot F'(x),$$

que es también una identidad.

No obstante, digamos por último que para otro tipo cualquiera de funciones hidráulicas con distinta configuración analítica a la relacionada, el tema expuesto puede resultar de gran aplicabilidad e interés.