

LA PANDEMIA COVID-19 EN ESPAÑA. ANÁLISIS MATEMÁTICO RECURRENTE

Josep Maria Franquet Bernis

Dr. Ingeniero Agrónomo, Eur-Ing. Dr. Ciencias Económicas y Empresariales. Diplomado en Investigación Operativa. Ex Profesor-Tutor UNED.

jfbernis@iies.es.

RESUMEN

Con la propuesta que aquí se presenta se pretende avanzar en la obtención de esquemas en diferencias finitas y otros que pueden ser de interés en las aplicaciones para la modelización de procesos pandémicos en las poblaciones humanas, en los que se producen efectos retardados y amortiguados. El objetivo general planteado para el trabajo ha sido el estudio de métodos directos para la obtención de soluciones numéricas de este tipo de modelos con retardo, abriendo también posibilidades de extender en el futuro estos resultados a modelos aún más generales, ya sea en los parámetros de los modelos, en variaciones sobre los modelos empleados o bien en la geometría de los dominios considerados.

Palabras clave: modelo, ecuación, variable, pandemia, ajuste, regresión, serie, datos, ola, contagios, defunciones.

RESUM

Amb la proposta que aquí es presenta es pretén avançar en l'obtenció d'esquemes en diferències finites i d'altres que poden resultar d'interès en les aplicacions per a la modelització de processos pandèmics a les poblacions humanes, en què es produeixen efectes retardats i esmorteïts. L'objectiu general plantejat per al treball ha estat l'estudi de mètodes directes per tal d'obtenir solucions numèriques d'aquest tipus de models amb retard, obrint també possibilitats d'estendre en el futur aquests resultats a models encara més generals, ja sigui als paràmetres dels models, en variacions sobre els models emprats o bé a la geometria dels dominis considerats.

Paraules clau: model, equació, variable, pandèmia, ajust, regressió, sèrie, dades, ona, contagis, defuncions.

SUMMARY / ABSTRACT

The proposal presented here is intended to advance in obtaining finite difference schemes and others that may be of interest in applications for modeling pandemic processes in human populations, in which delayed and damped effects occur. The general objective set for the work has been the study of direct methods for obtaining numerical solutions of this type of models with delay, also opening possibilities of extending these results to even more general models in the future, either in the parameters of the models, in variations on the considered models or in the geometry of the considered domains.

Keywords: model, equation, variable, pandemic, fit, regression, series, data, wave, contagions, deaths.

ÍNDICE

	<u>Pág.</u>
1. INTRODUCCIÓN.....	3
2. METODOLOGÍA Y BASE TEÓRICA.....	4
3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN (EDF)	7
4. FUNCIONES PERIÓDICAS.....	22
4.1. Introducción	22
4.2. Desarrollo en serie de Fourier.....	24
5. OTROS POSIBLES MODELOS EXPLICATIVOS	26
5.1. Idea previa.....	26
5.2. Ecuación diferencial ordinaria (EDO)	27
5.3. Ecuación integro-diferencial (EID).....	29
5.4. Funciones de Bessel.....	31
5.5. Ajustes por regresión no lineal	40
6. CONCLUSIONES	45
LISTADO DE ABREVIATURAS Y SÍMBOLOS EMPLEADOS	46
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	47
RELACIÓN DE TABLAS Y FIGURAS.....	48
DIRECCIÓN INSTITUCIONAL DEL AUTOR	48
ANEXO 1	50
ANEXO 2.....	60

* * * * *

1. INTRODUCCIÓN

Es normal que, desde los primeros inicios en el estudio de la estadística matemática, se aborden los diversos temas desde las funciones continuas, ya sea por facilitar su comprensión o bien, simplemente, porque es costumbre inveterada hacerlo así. Esto ocasiona en los tratadistas, con frecuencia, una inclinación primigenia hacia la continuidad, en franca contraposición con la mayoría de los fenómenos físicos o fisiológicos que, finalmente, son modelados por funciones discontinuas o discretas. Realmente, es en materias como las estadísticas de salud, como en el caso de la evolución de la pandemia Covid-19 que aquí nos ocupa, donde empieza a notarse esta inclinación, que conlleva a no pocas dificultades en el manejo matemático de estas áreas. Igual ocurre en el momento de resolver una ecuación diferencial ordinaria (EDO) o en derivadas parciales (EDP), o una ecuación integral (EI) o integro-diferencial (EID), donde las técnicas de solución en forma exacta parecieran indicar que esto siempre es posible, en tanto que la realidad muestra que las soluciones de ecuaciones diferenciales en términos de funciones elementales son muy pocas y que los métodos de solución aproximada resultan cada vez más usados y responden adecuadamente a la realidad de los hechos.

La teoría de *ecuaciones diferenciales*, como sabemos, se basa en modelos continuos, donde la variable independiente o explicativa de referencia suele ser el tiempo. Pero el tiempo también se puede considerar como una variable discreta ya que, para controlar su transcurso en una experiencia cualquiera, exige la toma de medidas en determinados instantes (días, meses, años), y en intervalos determinados por las fuentes de información, que constituyen un conjunto finito, o infinito numerable, de valores de la variable independiente o explicativa (Franquet, 2014). Los modelos determinísticos discretos, constituidos por las *ecuaciones recurrentes o en diferencias finitas*, están referidos normalmente a la variable tiempo, pero bajo una óptica discreta. Esto es:

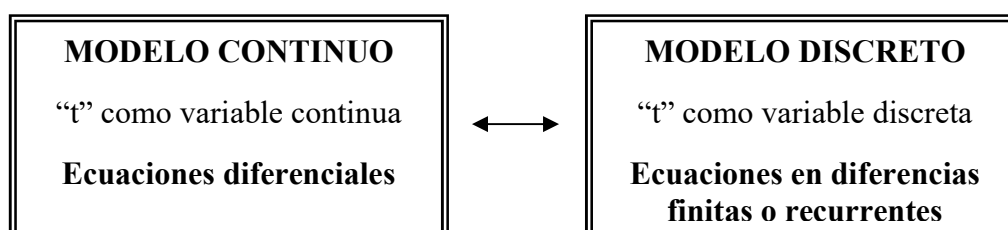


Fig. 1. Modelos continuos y discretos.

Las ecuaciones en diferencias finitas (EDF) o recurrentes aparecen, pues, ligadas a la descripción matemática de fenómenos dinámicos, es decir, que varían con el tiempo. No es de extrañar, por tanto, que dichas ecuaciones, junto con otras herramientas matemáticas (como las ecuaciones integro-diferenciales o las cadenas de Markov) constituyan uno de los tópicos fundamentales de la matemática que se aplica al estudio de los fenómenos de evolución en el tiempo, como en el estudio de la evolución temporal de la pandemia que nos ocupa. En términos generales, hablamos de *recurrencia*

cuando cada estado de un fenómeno determinado puede explicarse en términos de algún o algunos estados anteriores. Las ecuaciones recurrentes son, entonces, las expresiones matemáticas de esta explicación de cada estado del sistema en función de otros anteriores.

2. METODOLOGÍA Y BASE TEÓRICA

Si la variable independiente toma los valores naturales (enteros positivos) siguientes: $t = 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots$, para la variable dependiente x o funcional tendremos los valores: $x(0) = x_0, x(1) = x_1, x(2) = x_2, \dots, x(n) = x_n, \dots$, es decir:

t	1	2	3	...	n	...
x	x_1	x_2	x_3	...	x_n	...

Una ecuación en diferencias finitas es, pues, una expresión algebraica que relaciona los valores que toma una variable dependiente x (en nuestro caso, la población P_t directamente afectada) a través de una función, en determinados puntos de un dominio discreto. Resolver una ecuación en diferencias es hallar una expresión genérica para x_n en términos de n , sin que aparezcan otros términos en x .

Es obvia la estrecha relación existente entre la ecuación diferencial y la ecuación en diferencias finitas, siendo también estas últimas un recurso útil en la resolución de las primeras. Desde luego, aplicaciones frecuentes de las ecuaciones diferenciales y de las ecuaciones en diferencias se encuentran en todas las ciencias aplicadas, y también podrían serlo en la Medicina.

En general, una ecuación en diferencias finitas o ecuación recurrente es una expresión de la forma (Franquet, 2013):

$$F[x, f(x), f(x+1), f(x+2), \dots, f(x+k)] = 0,$$

, siendo $f(x)$ una función desconocida de variable entera. Si, en nuestro caso, hacemos como *variable independiente* o *argumento* el tiempo $x = t$, emplearemos en nuestra propuesta las notaciones en subíndices: $f(t) = P_t$, que representan la trayectoria temporal de las ondas de infección o defunción generadas por una pandemia, con lo que:

$$F(t, P_t, P_{t+1}, P_{t+2}, \dots, P_{t+k}) = 0,$$

siendo la población afectada P por la pandemia la *variable dependiente*, donde $F : \Omega \subseteq \mathfrak{R}^{k+2} \rightarrow \mathfrak{R}$ es una función definida sobre un subconjunto Ω de \mathfrak{R}^{k+1} . El número k recibe el nombre de "orden" de la ecuación, y es la diferencia existente entre el mayor y el menor de los subíndices (argumentos) que aparecen en una ecuación determinada, o sea: $(t + k) - t = k$. Por ejemplo, las ecuaciones siguientes:

$$P_{t+2} - P_t = 0,$$

$$t \cdot P_{t+3} - e^{P_{t+3}} \cdot P_t = P_{t+1},$$

son de órdenes 2 y 3, respectivamente. Aparte del orden mencionado, existe una gran diferencia entre las ecuaciones anteriores. En la primera se puede despejar el término P_{t+2} , quedando la ecuación: $P_{t+2} = P_t$, mientras que en la segunda ecuación tal operación no puede realizarse, es decir, no se va a poder despejar explícitamente el término P_{t+3} , que también se halla, por cierto, en el exponente.

Nosotros vamos a centrarnos en el primer tipo de ecuaciones, que llamaremos *resueltas* respecto del mayor término de la sucesión P_t . A partir de este momento, consideraremos ecuaciones en diferencias de la forma:

$$P_{t+k} = f(t, P_t, P_{t+1}, \dots, P_{t+k-1}) \quad (1)$$

siendo $f : \Lambda \subseteq \mathfrak{R}^k \rightarrow \mathfrak{R}$ una función. Por una solución de la ecuación (1) entenderemos una sucesión x_t de números reales de manera tal que verifique:

$$x_{t+k} = f(t, x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+k-1}).$$

Una solución de una ecuación en diferencias finitas es una función que verifica dicha ecuación. La solución general P_t de una ecuación de orden k es una solución que contiene k constantes arbitrarias. Si en la solución general se particularizan las k constantes mencionadas se obtiene una solución particular P_p . Así, por ejemplo, la sucesión constante $x_t = 1$ es solución de la ecuación: $P_{t+2} = P_t$. También lo es la sucesión $x_t = (-1)^t$. Como vemos, una ecuación puede tener distintas soluciones, pero ésta es única si imponemos una serie de k condiciones iniciales. Así, $x_t = (-1)^t$ es la única solución de la ecuación recurrente: $P_{t+2} = P_t$, con: $P_1 = -1, P_2 = 1$.

Llamaremos a estos problemas “de condiciones iniciales”, por su analogía con las ecuaciones diferenciales ordinarias. Generalmente, las k constantes arbitrarias se determinan mediante k condiciones complementarias denominadas también “condiciones de contorno”.

Cuando las condiciones iniciales son distintas de cero, la forma más obvia de calcular la respuesta del sistema es a partir de la ecuación en diferencias finitas y determinar los sucesivos valores de P_t paso a paso. Mediante este procedimiento se superpone cualquier salida residual con la respuesta a la nueva señal de entrada. No obstante, otra forma alternativa de actuar consiste en separar la señal de salida P_t en dos componentes una de las cuales es la solución P_t^* cuando el 2º miembro de la ecuación es nulo, conocida como solución de la “ecuación homogénea”, y la otra, la solución particular de la ecuación completa P_p . Aplicando, entonces, el principio de superposición, la respuesta total es la siguiente: $P_t = P_t^* + P_p$.

Dentro de las ecuaciones en diferencias finitas, poseen un especial interés, para el estudio del fenómeno pandémico, las llamadas “ecuaciones lineales”, que poseen la configuración analítica:

$$P_{t+k} + a^1_t P_{t+k-1} + \dots + a^k_t P_t = b_t,$$

en las que todas las formas de P son lineales sin importar lo que puedan ser los argumentos (de otro modo se les clasifica como “no lineales”), y donde las a^1_t, \dots, a^k_t, b_t , son sucesiones de números reales.

En el caso de que las sucesiones a^1_t, \dots, a^k_t sean constantes, esto es, si: $a^i_t = a_i$ para todo $t \geq 0$ y para todo $i \in \{1, \dots, k\}$, la ecuación lineal se dirá “de coeficientes constantes”. En general, también distinguiremos entre *ecuaciones homogéneas* si $b_t = 0$ para todo $t \geq 0$, y *no homogéneas, inhomogéneas o completas* en caso contrario, como ocurre también con las ecuaciones diferenciales. Así, las ecuaciones:

$$\begin{aligned} P_{t+3} + t \cdot P_{t+1} - P_t &= 1 + t^3, \\ P_{t+2} - P_{t+1} - P_t &= 0, \end{aligned}$$

son ecuaciones en diferencias lineales, siendo la primera no homogénea y de coeficientes variables y la segunda homogénea y con coeficientes constantes.

El método que aquí se expone presenta la utilización de las EDF (variable discreta) para la determinación de la ecuación definitoria de la trayectoria temporal de las ondas pandémicas, y se basa en las mediciones efectuadas desde los distintos centros territoriales (hospitales, comunidades autónomas, ...) constituyendo el tiempo una variable discreta. Resultando de ello una mayor sencillez operativa que la metodología basada en las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales o EDP (variable continua) consistente en un método numérico generalmente empleado para resolver el sistema de ecuaciones resultante que es el denominado “método de las características”, en el que las ecuaciones antedichas se reducen a ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) con una variable (t) pero que son válidas cuando se cumplen ciertas relaciones.

Con este método se pueden graficar los resultados obtenidos, tanto mediante representación discreta como continua, tal como puede apreciarse en los ejemplos de aplicación que se desarrollan a continuación. Así mismo, la simulación efectuada puede conllevar, eventualmente, la aparición de modelos mixtos o híbridos de variables discretas y continuas en los que aparezcan integrales definidas (simples o múltiples, según el número de variables clínicas actuantes) de inmediata resolución.

Es de notar que en el eje de abscisas o temporal de aquellas representaciones aparecen tomas de datos sucesivas o resultados de cálculo que no necesariamente indican el instante de tiempo en el que se ha dado el dato de contagios o defunciones, puesto que en el análisis recurrente estos datos o cálculos extremos (máximos y mínimos relativos) no tienen por qué coincidir con las cifras enteras positivas o naturales del instante de tiempo en el que se han producido. Así, v. gr., $t = 3.4$ implicará un valor de la P_t que tiene lugar entre la 3ª y la 4ª lectura de la evolución temporal del fenómeno (éstas sí son extremas). El hecho de que dichos “picos”, en la práctica, puedan aparecer en instantes de tiempo diferentes a la sucesión natural de los mismos, invita a

realizar también la representación continua de dicha trayectoria temporal, tanto a nivel analítico como gráfico.

Por otra parte, una de las herramientas clásicas para la obtención de soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDP) es la utilización de esquemas en diferencias finitas, que permiten obtener una solución aproximada del problema mediante la resolución de ecuaciones en diferencias finitas o recurrentes (Franquet, 2016). Entre los métodos de solución numérica más comunes para las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales se encuentra el método de las diferencias finitas y el método de los elementos finitos, que se acercan a la solución real a través de un algoritmo de convergencia de manera eficiente y acertada.

Con la propuesta que aquí presentamos se pretende, en definitiva, avanzar en la obtención de esquemas en diferencias finitas y otros que pueden ser de interés en las aplicaciones en la modelización de procesos pandémicos en las poblaciones humanas, en los que se producen efectos retardados y amortiguados. El objetivo general planteado para el trabajo ha sido la obtención de métodos directos para la obtención de soluciones numéricas de este tipo de modelos con retardo, abriendo también posibilidades de extender en el futuro estos resultados a modelos aún más generales, ya sea en los parámetros de los modelos, en variaciones sobre los modelos considerados o bien en la geometría de los dominios considerados.

Veamos, en fin, que las diferentes funciones pandémicas obtenidas (amortiguadas, crecientes o constantes, según los casos) explican los diferentes rebrotes que se pueden producir tendiendo a un cierto equilibrio o nivel medio permanente de individuos afectados (contagiados o muertos) en una determinada comunidad territorial.

3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN (EDF)

- Ejemplo 1

Determinar la evolución temporal de las olas pandémicas de contagios anuales en una determinada ciudad donde se ha observado que vienen dadas por las siguientes ecuaciones: $Q = 5 - 3P_t$; $Q = -2 + P_{t-1}$. Considérese que ha resultado una infección máxima anual de $P_0 = 4.00$ miles de casos.

Solución:

Las funciones observadas son, respectivamente:

$$Q = 5 - 3P_t , \quad Q = -2 + P_{t-1}.$$

Resolviendo el sistema dado, se tendrá que: $5 - 3P_t = -2 + P_{t-1}$. Por tanto, se tiene que:

$P_t + 1/3 \cdot P_{t-1} = 7/3$, que resulta ser una ecuación en diferencias de primer orden equivalente a: $3P_{t+1} + P_t = 7$, cuya ecuación característica de la homogénea es: $3r + 1 = 0$; $r = -(1/3)$.

Al ser: $0 < |r| < 1$ y $r < 0$, la solución converge de forma oscilante al punto de equilibrio estable; es decir, la infección tiende a la de equilibrio, con un valor P_e que podríamos considerar como subyacente en la población por causa de la pandemia analizada. De hecho, la ecuación anterior se puede escribir de la forma siguiente:

$$P_{t+1} = a \cdot P_t + c = -\frac{1}{3}P_t + \frac{7}{3}, \text{ en que se cumple que: } a = -(1/3) \text{ y } c = 7/3.$$

Al ser: $-1 < (a = r = -0.333) < 0$, todas las soluciones son oscilantes, y los términos de índice par tienen signo diferente que los de índice impar.

La solución de la ecuación homogénea es: $P^*_t = k \left(-\frac{1}{3} \right)^t$, con k como constante arbitraria, ya que el polinomio característico es: $3r + 1$.

Como solución particular busquemos: $P_p = k'$, y substituyendo en la ecuación inicial, se obtiene que:

$$k' + \frac{1}{3}k' = \frac{7}{3}; \quad \frac{4}{3}k' = \frac{7}{3}; \quad k' = \frac{7}{4}.$$

La solución general de la ecuación no homogénea o completa es:

$$P_t = P^*_t + P_p = \frac{7}{4} + k \left(-\frac{1}{3} \right)^t, \quad \forall t \in \{\mathbf{N}\}.$$

Del mismo modo, si hacemos $P_t = P_{t-1} = P_e$, resultará una infección de equilibrio de: $P_e = 7/4 = 1.75$ miles de casos, con lo que la infección que tiene lugar es del orden de: $\Delta P = P_0 - P_e = 4.00 - 1.75 = 2.25$ miles de casos.

Puesto que la condición inicial dada exige que: $P_0 = 4.00$ bar, se tendrá que:

$$\frac{7}{4} + k \left(-\frac{1}{3} \right)^0 = 4; \quad \frac{7}{4} + k = 4; \quad k = 4 - \frac{7}{4} = \frac{9}{4}.$$

Así pues, la solución particular es: $P_t = \frac{7}{4} + \frac{9}{4} \left(-\frac{1}{3} \right)^t, \quad \forall t \in \{\mathbf{N}\},$

y, a largo plazo, sucederá que: $\lim_{t \rightarrow +\infty} P_t = \frac{7}{4} + \frac{9}{4} \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{3} \right)^t = \frac{7}{4} = 1.75$ miles de casos, es decir, que la infección de equilibrio se estabilizará en $(7/4)$ miles de

casos, y la sucesión indefinida convergente de Cauchy¹ de los “picos” de la infección (números reales) originados sigue la ley de formación o término general alternativo:

$$P_t = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3} \right)^t (7(-3)^t + 9).$$

Gráficamente, lo expuesto hasta ahora se puede representar mediante las siguientes figuras:

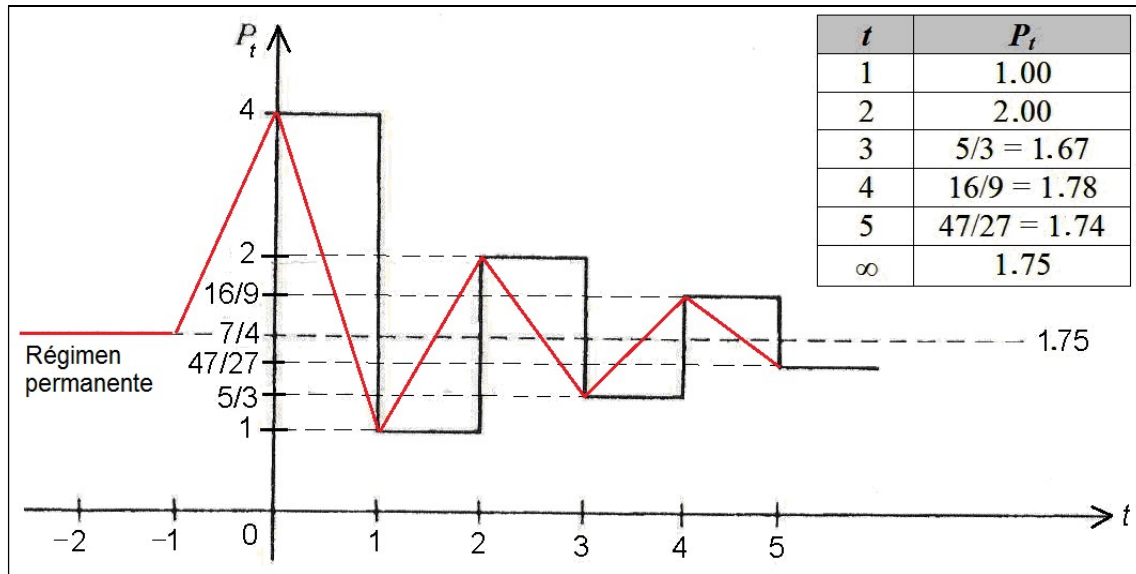


Fig. 2. Evolución temporal discreta de las ondas de infección (I).

¹ Una “sucesión de Cauchy” es una sucesión tal que, para cualquier distancia dada, por muy pequeña que sea, siempre se puede encontrar un término de la sucesión tal que la distancia existente entre dos términos cualesquiera posteriores es menor que la dada. Es importante no confundirlo con las sucesiones en las que la distancia entre dos términos consecutivos es cada vez menor, pues éstas no son convergentes necesariamente. Se llama así en honor al matemático francés Augustin Louis Cauchy (1805). El interés de las sucesiones de Cauchy radica en que en un espacio métrico completo todas las sucesiones de Cauchy son convergentes, siendo en general más fácil verificar que una sucesión es de Cauchy que obtener el punto de convergencia.

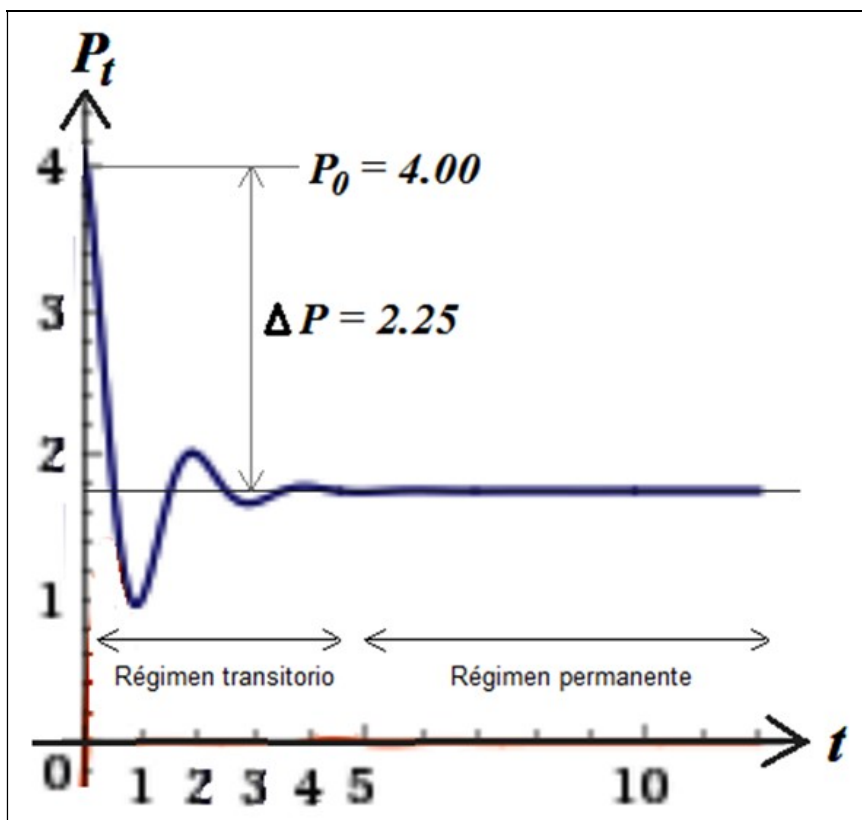


Fig. 3. Evolución temporal continua de las ondas de infección (I).

- Ejemplo 2

Determinar la evolución temporal de las olas pandémicas de contagios mensuales en una determinada ciudad, donde se ha observado que viene dada por las siguientes ecuaciones, con P expresado en miles de casos:

$$\begin{cases} Q = 3 - 5P_t \\ Q = -2 + 4P_{t-1} \end{cases}$$

Solución:

Igualando ambas ecuaciones, se tiene que: $3 - 5P_t = -2 + 4P_{t-1}$; esto es: $5P_{t+1} + 4P_t - 5 = 0$, que es una ecuación equivalente en diferencias finitas, lineal y de primer orden, cuya ecuación característica de la homogénea viene dada por: $5r + 4 = 0$, de donde: $r = -\frac{4}{5}$.

Al ser: $0 < |r| < 1$, y $-1 < r < 0$, la solución converge de forma oscilante al punto de equilibrio. Es decir, la infección tiende a alcanzar la infección de equilibrio. La solución de la ecuación homogénea es, pues: $P_t^* = k\left(-\frac{4}{5}\right)^t$, siendo k una constante arbitraria. Como solución particular de la ecuación completa ensayemos: $P_p = k'$, y substituyendo en la ecuación inicial, se tiene que:

$$5k' + 4k' = 5, \text{ de donde: } k' = 5/9,$$

y la solución general de la ecuación no homogénea o completa será:

$$P_t = P_t^* + P_p = k\left(-\frac{4}{5}\right)^t + \frac{5}{9}, \quad \forall t \in \{\mathbf{N}\}$$

O también, para $t = 0$, se tendrá que: $P_0 = k + \frac{5}{9} = 0.60$, o sea:

$$P_t = \left(P_0 - \frac{5}{9}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)^t + \frac{5}{9} = \frac{2}{45} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)^t + \frac{5}{9}, \quad \forall t \in \{\mathbf{N}\}$$

Dando valores temporales se obtiene que:

t	P_t
0	$3/5 = 0.60$
1	$13/25 = 0.52$
2	$73/125 = 0.58$
3	$333/625 = 0.53$
4	$1793/3125 = 0.57$
5	$8453/15625 = 0.54$
...	...
$+\infty$	$5/9 = 0.56$

A largo plazo sucederá, efectivamente, que:

$$P_e = \lim_{t \rightarrow +\infty} P_t = \frac{5}{9} + k \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{4}{5}\right)^t = \frac{5}{9} = 0.56,$$

con lo que la infección se estabilizará necesariamente en 560 casos mensuales, y la sucesión indefinida convergente de Cauchy de los "picos" de infección (números reales) originados sigue la ley de formación o término general alternativo $\forall t \geq 1$:

$$P_t = \frac{-432t^3 + 4032t^2 + 4153t - 33753}{3125(9t - 25)}.$$

De hecho, también la infección de equilibrio vendría dada por la condición ($P_{t+1} = P_t = P_e$), o sea: $5P_e + 4P_e - 5 = 0$, de donde se deduce igualmente que: $P_e = 0.56 \times 10^3$ casos, con lo que:

$$\Delta P = P_0 - P_e = 0.60 - 0.56 = 0.04 \text{ (40 casos)}.$$

Por último, las representaciones gráficas de la trayectoria temporal de las olas de infección serán las siguientes, habiendo señalado en la segunda de

ellas el efecto amortiguador que provoca la generación de una cierta envolvente² o “empaquetamiento” de las ondas:

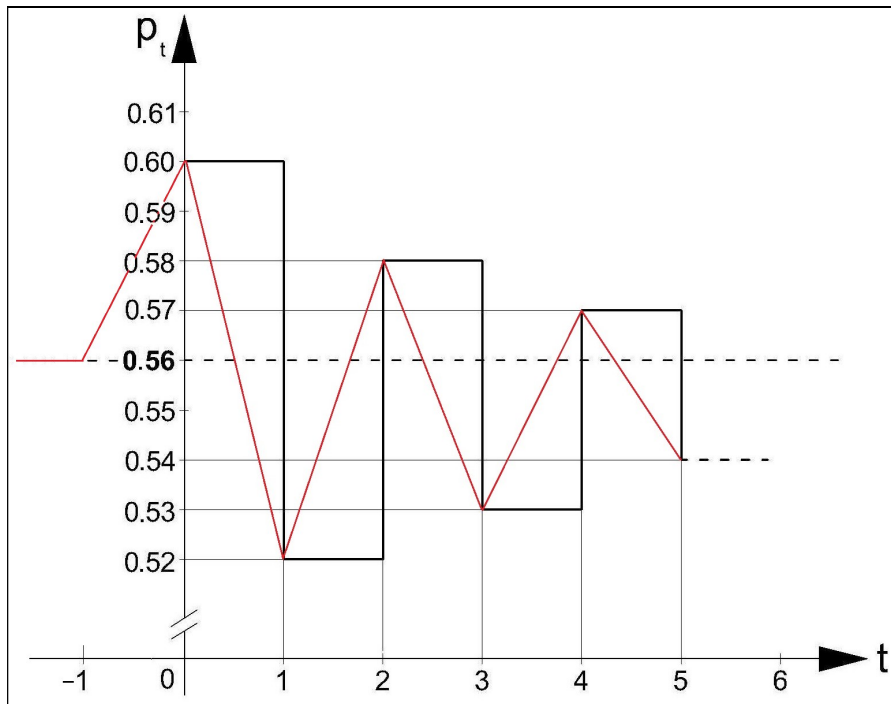


Fig. 4. Evolución temporal discreta de las ondas de infección (II).

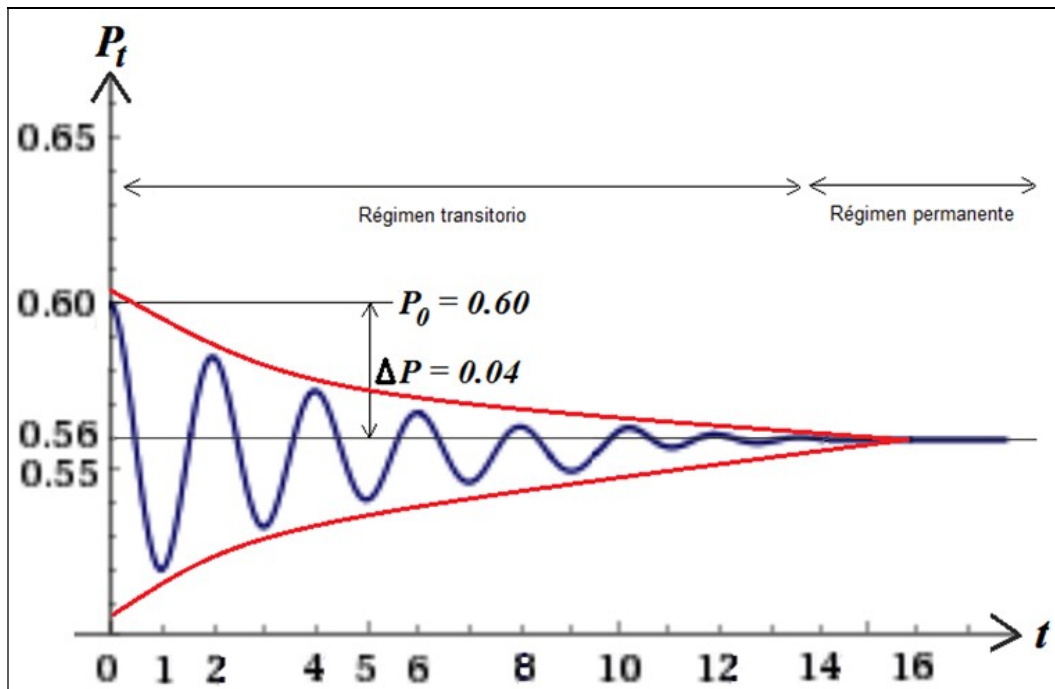


Fig. 5. Evolución temporal continua de las ondas de infección (II).

² La elongación máxima o altura de la cresta de la onda se denomina “amplitud” de la misma. Las unidades de amplitud dependen del tipo de onda. La amplitud puede ser constante, o puede variar con el tiempo y/o posición; en nuestro caso, como se ve, conforma una serie decreciente con el tiempo. La forma de la variación de la amplitud es la llamada *envolvente* de la onda.

- Ejemplo 3

Se ha observado, en una región determinada, el siguiente modelo epidemiológico de una pandemia con una infección máxima de $P_0 = 100$ miles de casos mensuales:

$$P_t = (P_0 - 80) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^t + 10 \cdot \int_3^5 \frac{2t \cdot dt}{\sqrt{t^2 - 9}} .$$

Estúdiense y clasifíquese el fenómeno con las representaciones gráficas correspondientes.

Solución:

Conviene resolver, en primer lugar, la integral definida del 2º miembro de la ecuación dada, teniendo en cuenta que la función subintegral que allí aparece no está definida para $t = \pm 3$ s, con lo que haciendo el cambio de variable: $z = t^2 - 9 \Rightarrow dz = 2t \cdot dt$, se tiene que:

$$\int_3^5 \frac{2t \cdot dt}{\sqrt{t^2 - 9}} = \int_3^5 \frac{dz}{\sqrt{z}} = \left[2\sqrt{z}\right]_3^5 = \left[2\sqrt{(t^2 - 9)}\right]_3^5 = 8 .$$

De este modo, resultará la expresión: $P_t = 20 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^t + 80$. Veamos que, en este caso, el número de contagios oscila en el tiempo pero acercándose al nivel de equilibrio cuando t tiende a $+\infty$, siendo: $P_e = \lim_{t \rightarrow +\infty} P_t = 80$ mca, $|r| < 1$, y además: $-1 < (r = -0.5) < 0$, con las siguientes representaciones gráficas donde se observa que todas las soluciones son oscilantes³ amortiguadas, así:

³ Las sucesiones “oscilantes” son las que no tienen límite, es decir que no son convergentes ni divergentes. Son sucesiones con más de un punto de acumulación. Sus términos alternan de mayor a menor o viceversa. Existe un criterio de clasificación de dichas sucesiones en base a la distancia existente entre sus términos consecutivos. De este modo, si dicha distancia permanece constante la sucesión será *oscilante regular*; si la distancia decrece la sucesión será *oscilante amortiguada* y si, por el contrario, se incrementa, se tratará de una sucesión *oscilante explosiva*.

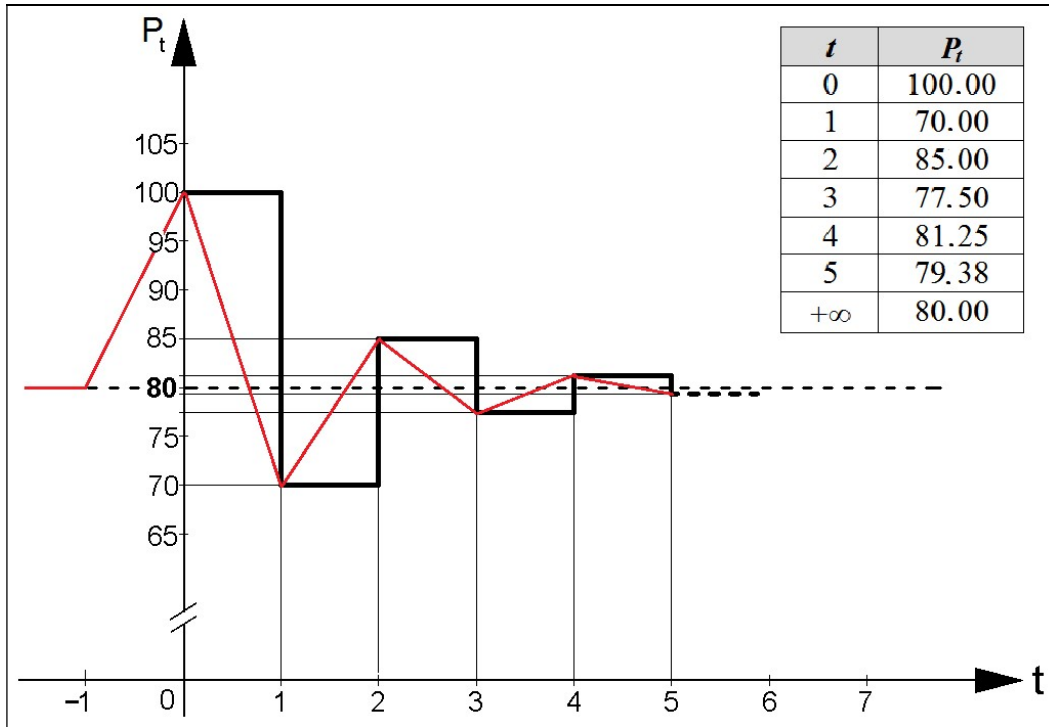


Fig. 6. Evolución temporal discreta de las ondas de infección (III).

y la sucesión indefinida convergente de Cauchy de los “picos” de presión (números reales) originados sigue la ley de formación o término general alternativo:

$$P_t = \frac{5(2111t - 4253)}{3t^2 + 115t - 244}, \forall t \geq 1.$$

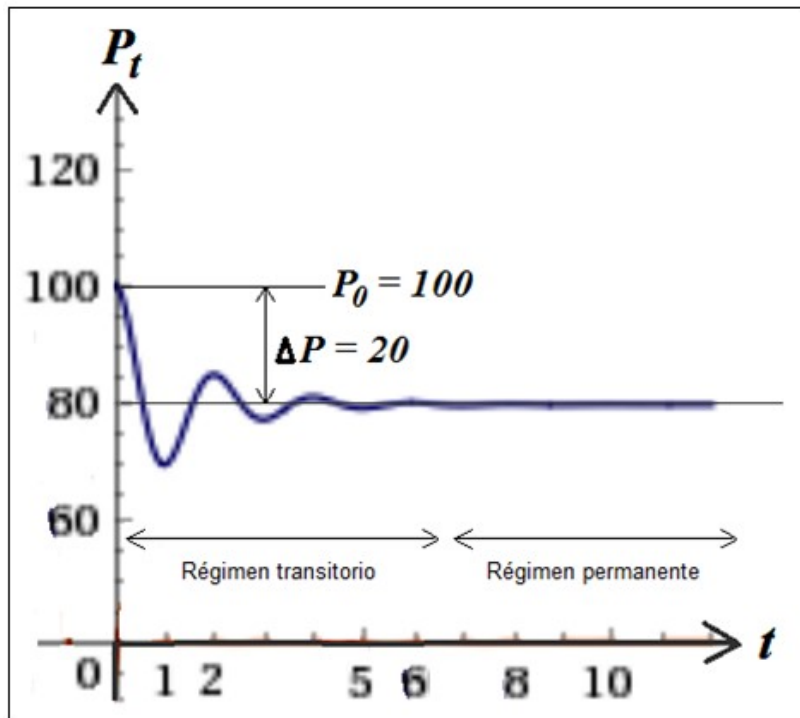


Fig. 7. Evolución temporal continua de las ondas de infección (III).

Sucedirá que:

$$\Delta P = P_0 - P_e = (100 - 80) \times 10^3 = 20.000 \text{ casos.}$$

- Ejemplo 4

Se tienen las siguientes funciones deducidas de la recopilación de datos epidemiológicos de individuos fallecidos mensualmente, como consecuencia de la pandemia, en una nación determinada:

$$\begin{cases} Q = 4 - 3P_t \\ Q = -1 + 2P_{t-1} \end{cases}$$

Sabiendo que $P_0 = 3/2$ miles de casos, obténgase la trayectoria temporal de las ondas de mortandad.

Solución:

Por lo tanto, de acuerdo con el anterior sistema de ecuaciones observadas, obtenemos que: $4 - 3P_t = -1 + 2P_{t-1}$. Reordenando y reescribiendo la ecuación para el período siguiente resulta la ecuación en diferencias finitas equivalente:

$$P_{t+1} = -\frac{2}{3}P_t + \frac{5}{3}, \text{ o bien: } 3P_{t+1} + 2P_t - 5 = 0$$

se cumplirá que ($P_e = P_t = P_{t-1}$), y resulta la ecuación equivalente y la defunción de equilibrio siguiente:

$$3P_e + 2P_e = 5; 5P_e = 5; P_e = 1.00 \text{ (1.000 individuos).}$$

Se demuestra que la ecuación en diferencias genérica de primer orden: $y_{x+1} = a \cdot y_x + b$, donde a y b son constantes y además $a \neq 1$, tiene como solución general:

$$y_x = \frac{b}{1-a} + \left(y_0 - \frac{b}{1-a} \right) a^x.$$

De este modo, para el caso que nos ocupa la solución buscada es:

$$P_t = \frac{5/3}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} + \left(P_0 - \frac{5/3}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} \right) (-2/3)^t.$$

Particularizamos para la condición inicial dada: $P_0 = 3/2$ miles de casos, de tal modo que:

$$P_t = \frac{5/3}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} + \left(3/2 - \frac{5/3}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)}\right) (-2/3)^t,$$

y operando se obtiene finalmente la expresión: $P_t = \frac{1}{2}(-2/3)^t + 1$, que nos proporciona la trayectoria temporal de las ondas de defunción generadas por la pandemia en estudio.

A esta misma conclusión llegaríamos resolviendo la ecuación en diferencias finitas dada planteando, en primer lugar, la ecuación característica de la homogénea, esto es: $3r + 2 = 0$, de donde: $r = -(2/3)$. De este modo, se tendrá la solución: $P_t^* = k\left(-\frac{2}{3}\right)^t$. Por otra parte, al ser: $|r| < 1$, todas las soluciones convergen a un punto de equilibrio estable, y también sucede que: $-1 < (r = -2/3) < 0$, por lo que las soluciones serán oscilantes, como tendremos ocasión de comprobar seguidamente.

A continuación, ensayaremos una solución particular de la completa del tipo: $P_p = A$, con lo que substituyendo en la ecuación inicial se tiene que:

$3 \cdot A + 2 \cdot A = 5 = 5 \cdot A$, de donde: $A = 1$, por lo que se tendrá la solución general: $P_t = P_t^* + P_p = k\left(-\frac{2}{3}\right)^t + 1$, y aplicando la condición inicial dada:

$(3/2) = k + 1$, de donde: $k = 1/2$, y la solución particular buscada será:

$$P_t = \frac{1}{2}(-2/3)^t + 1 \text{ c.s.q.d.}$$

Con ello, puede elaborarse la siguiente tabla:

t	P_t
0	1.50
1	0.67
2	1.22
3	0.85
4	1.10
5	0.93
6	1.04
7	0.97
8	1.02
9	0.99
...	...
$+\infty$	1.00

y la sucesión indefinida convergente de Cauchy de los “picos” de mortandad (números reales) originados sigue la ley de formación o término general

$$\text{alternativo: } P_t = \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{2}{3} \right)^t + 2 \right].$$

La tendencia al equilibrio la discutiremos analizando así:

$P_e = \lim_{t \rightarrow +\infty} P_t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[1/2(-2/3)^t + 1 \right] = 1.00$, que se corresponde con la defunción de equilibrio anteriormente hallada. Tenemos, por tanto, que la mortandad ocasionada por la pandemia, a largo plazo, tienda a estabilizarse en 1.000 individuos, como también puede comprobarse en las figuras siguientes:

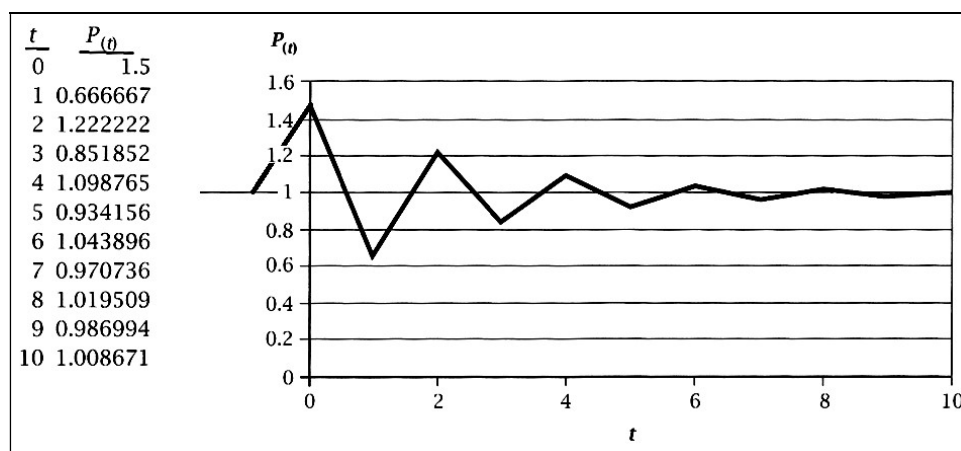


Fig. 8. Evolución temporal discreta de las ondas de defunción (I).

con lo que: $\Delta P = P_0 - P_e = 1.50 - 1.00 = 0.50$ (500 casos).

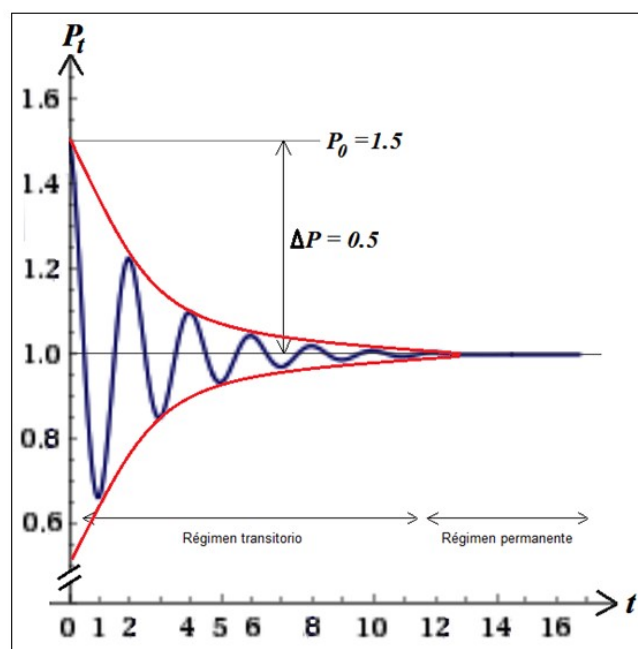


Fig. 9. Evolución temporal continua de las ondas de defunción (I).

- Ejemplo 5

Se observa que la evolución temporal de una pandemia sigue la relación: $Q = 10 + \frac{1}{5} \cdot P_{t-1}$, donde P_{t-1} indica el valor del pico de infección en el instante $t-1$. Si en otro recuento efectuado se ha observado que $Q = 20 - P_t$, encuéntrese la infección de equilibrio y la trayectoria temporal de las ondas de infección, si la infección máxima alcanzada es de 10 millares de casos.

Solución:

a) En consecuencia, deberá cumplirse que:

$$10 + \frac{1}{5} \cdot P_{t-1} = 20 - P_t, \text{ de donde: } P_t = 10 - \frac{1}{5} \cdot P_{t-1}. \text{ Por lo tanto,}$$

$\Delta P_t = P_{t+1} - P_t = 10 - \frac{1}{5} \cdot P_t - P_t = 10 - \frac{6}{5} \cdot P_t$, de donde: $\Delta P_t + \frac{6}{5} \cdot P_t = 10$, o lo que es lo mismo: $5P_{t+1} + P_t = 50$, lo que implica una infección de equilibrio de valor ($P_{t+1} = P_t = P_e$): $6P_e = 50$, de donde: $P_e = (25/3)$ miles de casos.

Se trata de una ecuación en diferencias finitas lineal de primer orden completa, con coeficientes y término independiente constantes, con: $P = \frac{6}{5}$. Calculemos, en primer lugar, la solución general de la ecuación en diferencias finitas lineal reducida asociada. En efecto, como sucede que, $\forall t \in T \subset \{\mathbf{N}\}$, se tendrá:

$$0 = \Delta P_t + \frac{6}{5} \cdot P_t = P_{t+1} - P_t + \frac{6}{5} \cdot P_t = P_{t+1} + \frac{1}{5} \cdot P_t, \text{ entonces: } P_{t+1} = -\frac{1}{5} \cdot P_t.$$

Dando valores concretos al subíndice t , tenemos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Para } t=0, \quad P_1 = -\frac{1}{5} \cdot P_0. \\ \text{Para } t=1, \quad P_2 = -\frac{1}{5} \cdot P_1 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot P_0. \\ \text{Para } t=2, \quad P_3 = -\frac{1}{5} \cdot P_2 = -\left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot P_0. \\ \text{Para } t=3, \dots \end{array} \right.$$

, y así sucesivamente. Por lo tanto, $\forall t \in T \subset \{\mathbf{N}\}$, tenemos:

$$P_t = (-1)^t \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^t \cdot P_0 = (-1)^t \cdot 5^{-t} \cdot P_0,$$

siendo P_0 un parámetro que depende de las condiciones iniciales dadas del problema y que representa la infección máxima que se ha observado.

La solución general P_t de la ecuación en diferencias finitas lineales completa se obtiene introduciendo en su expresión el cambio de variable:

$$P_t = u_t \cdot v_t,$$

siendo u_t la solución general de la ecuación en diferencias finitas lineal reducida asociada. La ecuación en diferencias finitas que nos permite obtener la expresión de v_t es la siguiente:

$$\Delta v_t = \frac{q(t)}{u_{t+1}} = \frac{10}{(-1)^{t+1} \cdot 5^{-(t+1)} + u_t} = \frac{1}{u_0} \cdot (-1)^{t+1} \cdot 10 \cdot 5^{t+1}, \text{ de donde:}$$

$$v_{t+1} = \frac{1}{u_0} \cdot (-1)^{t+1} \cdot 10 \cdot 5^{t+1} + v_t.$$

Dando valores concretos al subíndice t , tenemos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Para } t=0, \quad v_1 = \frac{1}{u_0} \cdot (-1)^1 \cdot 10 \cdot 5^1 + v_0. \\ \text{Para } t=1, \quad v_2 = \frac{1}{u_0} \cdot (-1)^2 \cdot 10 \cdot 5^2 + v_1 = \frac{1}{u_0} \cdot 10 \cdot 5^2 - \frac{1}{u_0} \cdot 10 \cdot 5^1 + v_0. \\ \text{Para } t=2, \quad v_3 = \frac{1}{u_0} \cdot (-1)^3 \cdot 10 \cdot 5^3 + v_2 = -\frac{1}{u_0} \cdot 10 \cdot 5^3 + \frac{1}{u_0} \cdot 10 \cdot 5^2 - \frac{1}{u_0} \cdot 10 \cdot 5^1 + v_0. \end{array} \right.$$

..., y así sucesivamente.

Por lo tanto, $\forall t \in T \subset \{\mathbf{N}\}$ con $t \geq 1$, se tiene que:

$$v_t = v_0 + \sum_{s=1}^t \frac{1}{u_0} \cdot (-1)^s \cdot 10 \cdot 5^s = v_0 + \frac{10}{u_0} \cdot \sum_{s=1}^t (-1)^s \cdot 5^s =$$

{se trata de la suma de los t primeros términos de una progresión geométrica de razón -5 y de primer término -5 }

$$= v_0 + \frac{10}{u_0} \cdot \left(\frac{-5 - (-1)^{t+1} \cdot 5^{t+1}}{1+5} \right) = v_0 - \frac{5}{u_0} \cdot \left(\frac{5 + (-1)^{t+1} \cdot 5^{t+1}}{3} \right).$$

En su consecuencia, la solución general P_t de la ecuación en diferencias finitas lineal completa de primer orden, $\forall t \in T \subset \{\mathbf{N}\}$, es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 P_t &= u_t \cdot v_t = (-1)^t \cdot 5^{-t} \cdot u_0 \cdot \left[v_0 - \frac{5}{u_0} \cdot \left(\frac{5 + (-1)^{t+1} \cdot 5^{t+1}}{3} \right) \right] = \\
 &= (-1)^t \cdot 5^{-t} \cdot \left[P_0 - 5 \cdot \left(\frac{5 + (-1)^{t+1} \cdot 5^{t+1}}{3} \right) \right]
 \end{aligned}$$

, siendo P_0 un parámetro que depende directamente de las condiciones iniciales dadas en el enunciado del problema aquí planteado.

Finalmente, como se sabe que: $P_0 = 10.000$ casos, considerando $\forall t \in T \subset \{\mathbf{N}\}$, podremos dibujar la pertinente trayectoria temporal de las ondas de infección.

$$\begin{aligned}
 P_t &= (-1)^t \cdot 5^{-t} \cdot \left[10 - 5 \cdot \left(\frac{5 + (-1)^{t+1} \cdot 5^{t+1}}{3} \right) \right] = (-1)^t \cdot 5^{-t} \cdot 5 \cdot \left[2 - \frac{5}{3} - \frac{(-1)^{t+1} \cdot 5^{t+1}}{3} \right] = \\
 &= (-1)^t \cdot 5^{-t} \cdot 5 \cdot \left[2 - \frac{5}{3} \right] - (-1)^t \cdot 5^{-t} \cdot 5 \cdot \left[\frac{(-1)^{t+1} \cdot 5^{t+1}}{3} \right] = \\
 &= (-1)^t \cdot 5^{-t} \cdot \frac{5}{3} + \frac{25}{3} = \frac{5}{3} \cdot \left[5 + (-1)^t \cdot 5^{-t} \right] = \frac{5}{3} \left(-\frac{1}{5} \right)^t + \frac{25}{3},
 \end{aligned}$$

y la infección de equilibrio o estática tenderá, efectivamente, al valor:

$$P_e = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{5}{3} \left(-\frac{1}{5} \right)^t + \frac{25}{3} \right] = \frac{25}{3},$$

como se ha calculado con anterioridad, con las siguientes representaciones gráficas:

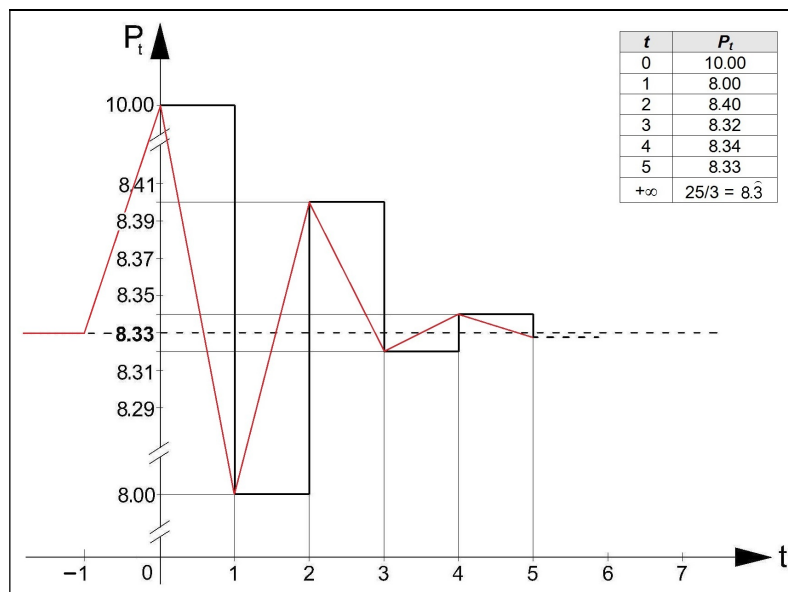


Fig. 10. Evolución temporal discreta de las ondas de infección (IV).

con lo que: $\Delta P = P_0 - P_e = 10.00 - 8.33 = 1.67$ (1.670 casos).

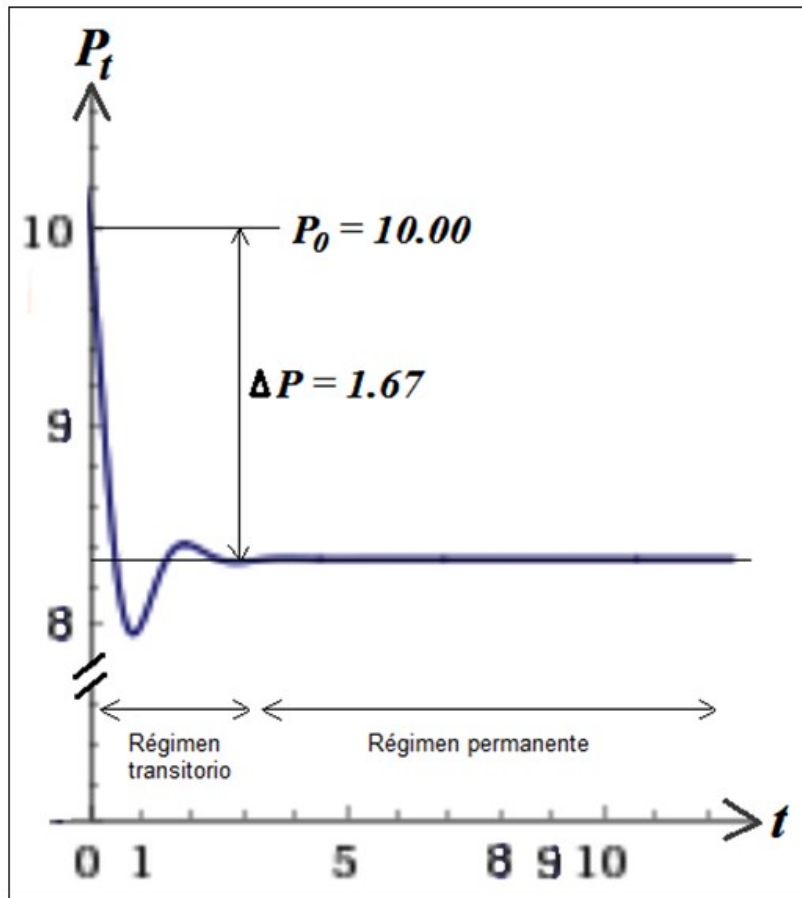


Fig. 11. Evolución temporal continua de las ondas de infección (IV).

y la sucesión indefinida convergente de Cauchy de los “picos” de infección (números reales) originados sigue la ley de formación o término general alternativo: $P_t = \frac{5^{1-t}}{3} [(-1)^t + 5^{t+1}]$.

Veamos que $r = -1/5$, por lo que: $|r| < 1$ y también se cumple que:

$-1 < (r = -1/5) < 0$, por lo que todas las soluciones oscilantes convergen a un punto de equilibrio estable, puesto que se trata de una sucesión amortiguada.

En este caso, pues, a largo plazo, se tiene que la infección de equilibrio o estática es:

$$P_e = \lim_{t \rightarrow +\infty} P_t = \frac{25}{3} = 8.33$$

De hecho, considerando como siempre que: $P_t = P_{t-1} = P_e$ para la búsqueda de la infección de equilibrio de la instalación, se tendría efectivamente que: $5P_e = 50 - P_e$, de donde: $P_e = 25/3$ (8.333 casos).

4. FUNCIONES PERIÓDICAS

4.1. INTRODUCCIÓN

En diversos problemas se presenta el estudio de los llamados “fenómenos periódicos”, esto es, aquellos fenómenos cuya cuantificación produce series de valores que se repiten a intervalos iguales de tiempo, lo que sucede frecuentemente en Economía o en Ingeniería. También pueden tener lugar en Medicina. La representación de estos fenómenos de amplitud constante viene definida por las denominadas *funciones periódicas* que son aquellas funciones que, para todo valor de x , verifican:

$$f(x + p) = f(x),$$

donde p es una constante, llamada *período*. Es evidente, de la definición anterior, que:

$$f(x) = f(x + p) = f(x + 2p) = \dots = f(x + np), \forall x,$$

o sea, todo múltiplo de p es también un período. El menor número positivo que sea período de una función, recibe el nombre de *período propio o fundamental* de la referida función y cuando no se indique lo contrario, será al que denominaremos simplemente “período”.

En nuestro libro titulado “Aplicaciones a la Economía de las ecuaciones infinitesimales y recurrentes”, citado en la bibliografía (Franquet, 2014), aparecen diversos ejemplos de este tipo de funciones periódicas o trigonométricas.

La función circular directa $y = \sin x$ es tal que cumple (véase el ejercicio 19, pág. 492 del texto citado):

$$\sin x = \sin (x + 2\pi) = \sin (x + 4\pi) = \dots$$

es una función que admite como períodos a 2π , 4π , 6π .

El valor $2\pi = 6'2832$, es el “período propio” o simplemente “período”.

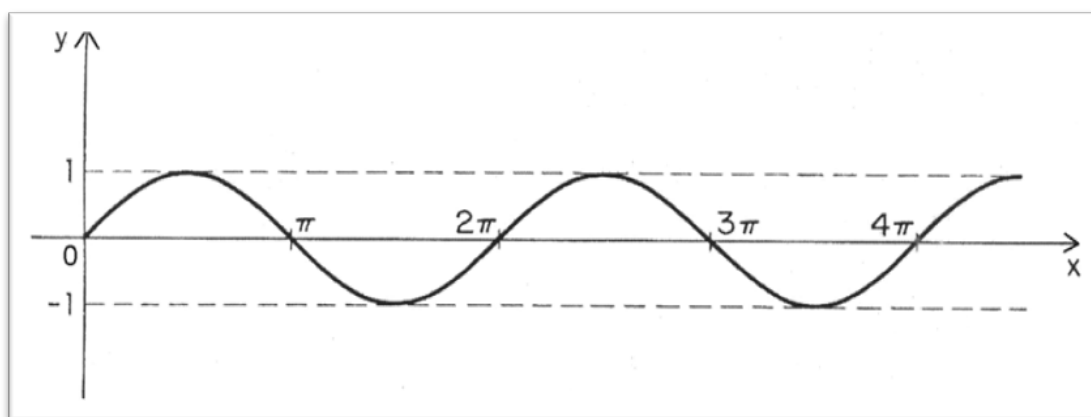


Fig. 12. Función $y = \sin x$ (I).

Que también puede representarse así:

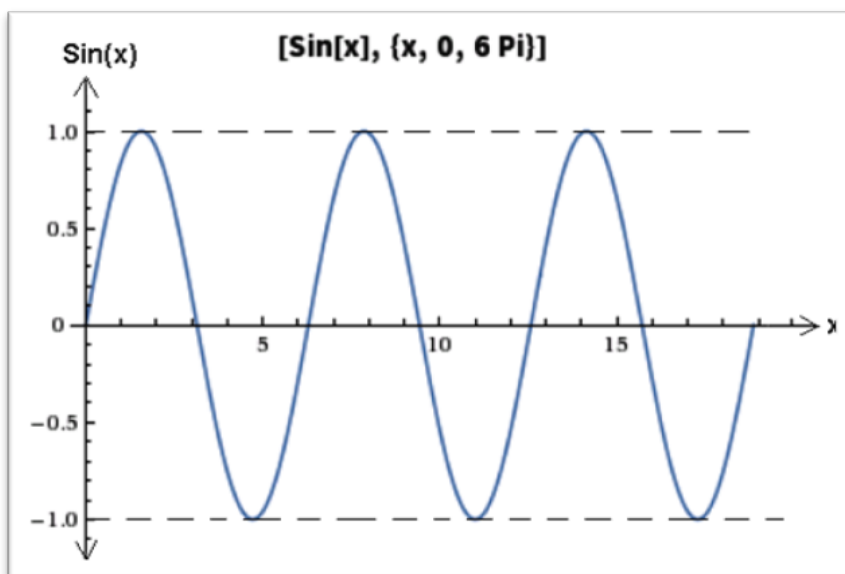


Fig. 13. Función $y = \sin x$ (II).

También es de período 2π la función $y = \cos x$, por tanto, toda función de la forma: $a \cdot \cos x + b \cdot \sin x$, también será periódica, de período 2π . Otras funciones que tienen como período 2π son, entre otras, las siguientes:

- $\cos t - 8\sin t$ y $2\cos t - 3\sin t$
- $\sin x \left(1 - \frac{x}{2}\right)$
- $\frac{1}{4} - \frac{\cos t}{3} + \frac{25}{12} \times \cos 2t$

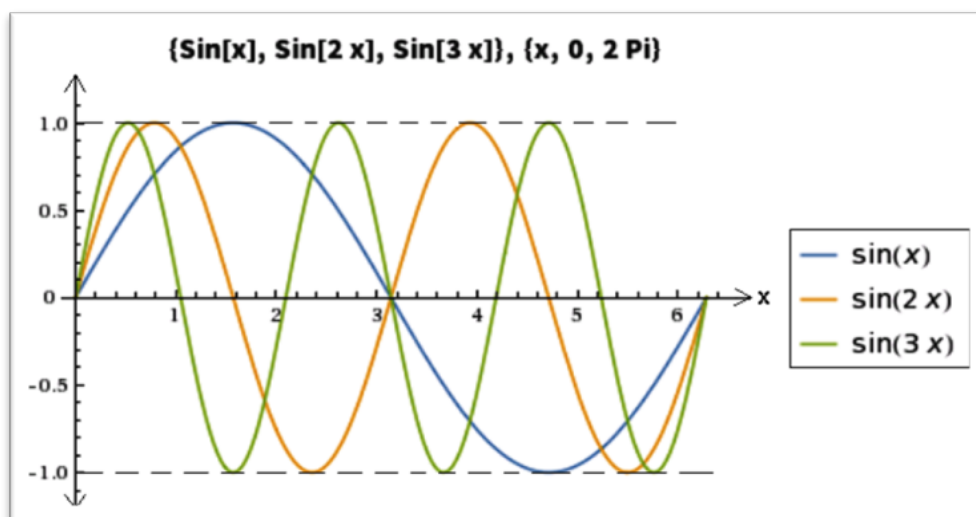
La función $y = \sin nx$, también es periódica; su período p , se puede calcular como sigue:

$$\sin nx = \sin n(x + p),$$

y como el seno tiene como período 2π , $nx + 2\pi = nx + np$, de donde:

$$p = \frac{2\pi}{n}$$

Las representaciones gráficas correspondientes para $n \in (1, 2, 3)$, serán las siguientes:

Fig. 14. Funciones $y = \sin x$, $\sin 2x$, $\sin 3x$.

Análogamente, toda función de la forma $b \cdot \sin(nx + k)$ o $a \cdot \cos(nx + k)$, es también —como fácilmente se comprueba— una función periódica de período $2\pi/n$. Todas las funciones indicadas reciben el nombre genérico de *armónicos*. Es muy importante observar que todo armónico de período p , se puede, mediante un adecuado cambio variable, transformar en un armónico de período 2π y viceversa.

En efecto, sea la función: $y = \sin nx$ de período $p = \frac{2\pi}{n}$, de donde: $n = \frac{2\pi}{p}$. Haciendo $nx = t$, resulta: $\frac{2\pi x}{p} = t$, o bien: $x = \frac{pt}{2\pi}$, que transforma la expresión $\sin nx$ en $\sin t$, de período, evidentemente 2π .

4.2. DESARROLLO EN SERIE DE FOURIER

Muchas ecuaciones de las ciencias económicas y físicas se formulan con derivadas parciales, y se resuelven, en ocasiones, descomponiendo la incógnita en series (sumas infinitas). Las series más interesantes son las de potencias y por supuesto las de Fourier. Dado el carácter periódico de tales sumas, las series de Fourier se pueden aplicar, por ejemplo, donde surgen procesos oscilantes, como ocurre en las series temporales de naturaleza clínica o epidemiológica. Los problemas teóricos relacionados con la convergencia de las series de Fourier han impulsado avances fundamentales en distintos ámbitos de las matemáticas y siguen siendo considerados hoy como problemas muy difíciles de resolver. Tal vez una de las propiedades más importantes de las series de Fourier y, en particular, de las integrales de Fourier, se presenta en la solución de ecuaciones diferenciales, ya que transforman operadores diferenciales con coeficientes constantes en multiplicación por polinomios, de más sencilla resolución.

Las series de Fourier pueden resultar de gran importancia en el estudio de los ciclos pandémicos. La idea básica de las series de Fourier es que toda

función periódica de periodo p puede ser expresada como una suma trigonométrica de senos y cosenos del mismo periodo p (Franquet, 2020).

Entendemos por “variaciones cíclicas” las variaciones regulares que se producen en las series temporales con periodo superior a un año. De hecho, una serie temporal o histórica puede estar originada por diversos ciclos: un ciclo de medio plazo, otro ciclo de largo plazo, etc. Un ciclo pandémico tiene dos componentes básicos: la *amplitud* o la distancia que media entre el cero y el máximo valor que alcanza el ciclo, y el *periodo* o el tiempo que tarda en ocurrir un ciclo completo. En teoría, cabe entender una serie temporal como una suma de un número indeterminado de ciclos de amplitud y período diferentes, y puede demostrarse que la varianza que muestra en el tiempo una serie temporal se obtiene a partir de la suma de las amplitudes de los diferentes ciclos en que se descompone la serie temporal (relación de Parseval).

El problema del análisis armónico, que interesa al estudioso de las funciones pandémicas, consiste en que, dada *a priori* la función periódica $f(t)$, se trata de hallar una serie de Fourier que la represente. En el apartado anterior se ha supuesto que la serie formada definía una función continua, o al menos integrable en $[0, 2\pi]$. El problema inverso será el siguiente: dada $f(t)$, ¿qué condiciones debe cumplir tal función para que su desarrollo de Fourier, mediante las fórmulas de Euler, represente dicha función?

Este problema, de gran dificultad, fue resuelto por Dirichlet que demostró que toda función continua o con número finito de discontinuidades no evitables de primera especie en $[0, 2\pi]$ y con número finito de extremos relativos en dicho intervalo, admite desarrollo en serie de Fourier, tal que en todo punto temporal $t = a$, donde la función sea continua, la suma de la serie es igual a $f(a)$ y para todo punto $t = b$ donde la función es discontinua, la suma de la serie es igual a la semisuma de los límites a derecha e izquierda del punto $t = b$.

A continuación, se desarrollan varios ejemplos para la mejor comprensión de la teoría expuesta. Aconsejamos al amable lector/a que desarrolle todos los cálculos, que intencionadamente no se han incluido, pues resultarán, sin duda, un provechoso repaso de cálculo integral (Puig, 1969).

Veamos, por último, que para evitar confusiones al aplicar las fórmulas anteriores cuando el período de la función no es 2, deberá tenerse en cuenta que:

$$P_t = f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$$

donde $\omega = 2\pi/p$, para un período p cualquiera.

5. OTROS POSIBLES MODELOS EXPLICATIVOS

5.1. IDEA PREVIA

El fenómeno en estudio del comportamiento pandémico puede ser explicado, así mismo, no sólo a partir de los modelos matemáticos tradicionales basados en las ecuaciones en diferencias finitas (EDF) que aquí se propugnan y que hemos visto desarrollados en los epígrafes precedentes, sino también a partir de otros tipos de ecuaciones infinitesimales, como las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), las integrales (EI) o bien las integro-diferenciales (EID) o sus sistemas. En este sentido, se proponen los ejemplos ilustrativos de los apartados siguientes.

En algún epígrafe anterior, hemos realizado una doble simplificación: a) que la amplitud y/o el período eran constantes, lo cual no suele coincidir con la realidad del estudio de los fenómenos pandémicos, y b) que el régimen transitorio originado por la pandemia comienza, prácticamente, en el instante en que se produce la amplitud máxima de la oscilación, aunque también sería posible, en algunos casos, su inicio algo anterior, tal como aparece reflejado en la figura adjunta siguiente.

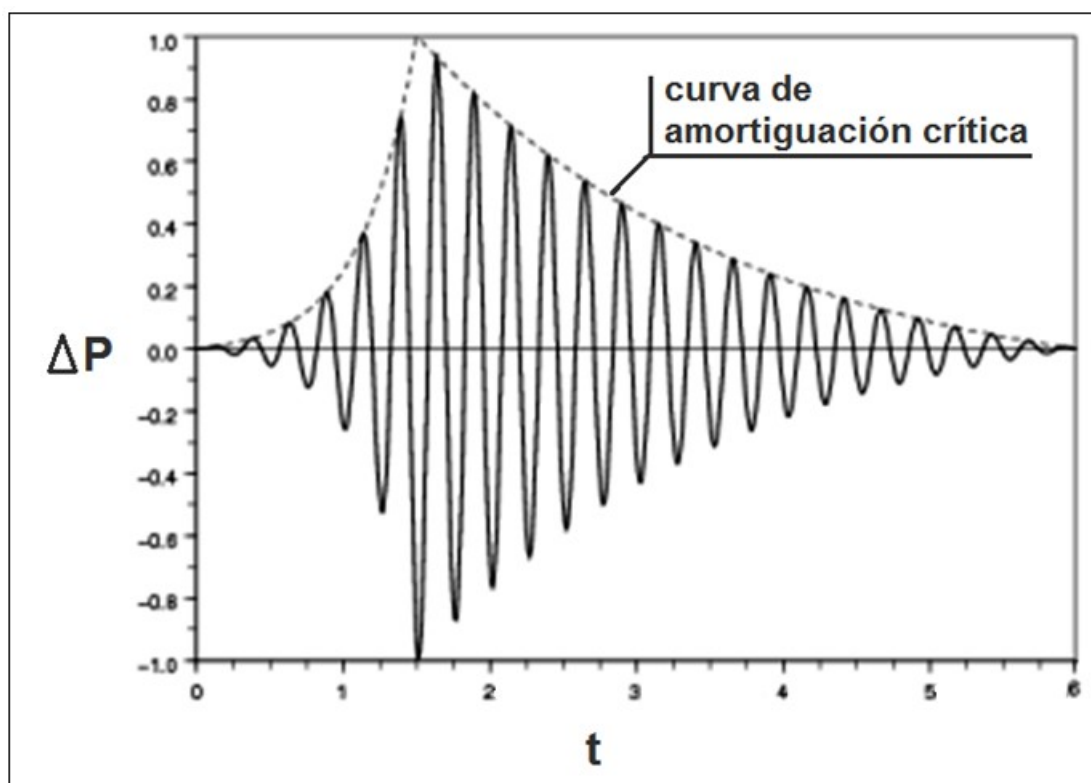


Fig. 15. Trayectoria temporal de las ondas de infección o defunción con inicio del régimen transitorio anterior al pico máximo.

En estas circunstancias tendrían lugar sendas trayectorias definitorias del fenómeno transitorio en estudio (o, si se quiere, una trayectoria mixta), que se encontrarían en el punto de máximo valor de los datos obtenidos: una

primera alternada creciente o divergente y una segunda amortiguada o convergente infinitesimal.

5.2. ECUACION DIFERENCIAL ORDINARIA (EDO)

Sea un modelo epidemiológico en el que se ha observado la existencia de las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} Q(t) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t \cdot dt}{\sqrt{1 - \sin t}} - P(t) \int_0^{\pi} \left| \sin \left(t + \frac{\pi}{2} \right) \right| \cdot dt + 2 \frac{dP(t)}{dt} + \frac{d^2P(t)}{dt^2} \\ Q(t) = - \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t \cdot dt}{\sqrt{1 - \sin t}} + 3P(t) + [14 \int_0^1 \int_{t^2}^{\sqrt{t}} (t^2 + 4y^2) dy \cdot dt] \frac{dP(t)}{dt} + 2 \frac{d^2P(t)}{dt^2} \end{cases}$$

siendo y una variable epidemiológica del modelo, con $P(0) = 2'00$ (2.000 casos) y $dP(0)/dt = 1$. Obténgase $P(t)$ y estúdiense la trayectoria temporal de las ondas de infección.

Solución:

Procede, en primer lugar, resolver la 1ª integral definida que aparece en el enunciado del problema. Se trata de una integral de 2ª especie y convergente (Puig, 1969), esto es:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t \cdot dt}{\sqrt{1 - \sin t}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{(\pi/2) - \varepsilon} \frac{\cos t \cdot dt}{\sqrt{1 - \sin t}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[-2\sqrt{1 - \sin t} \right]_0^{(\pi/2) - \varepsilon} = -2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\sqrt{1 - \sin \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right)} - 1 \right] = 2.$$

Por lo que se refiere a la 2ª integral definida (Ayres, 1964), se tiene que:

$$\int_0^{\pi} \left| \sin \left(t + \frac{\pi}{2} \right) \right| \cdot dt = \int_0^{\pi} |\cos t| \cdot dt = 2 .$$

En tercer lugar, procede hallar el valor de la integral doble que aparece también en el enunciado, esto es (Woods, 1934):

$$y = 14 \int_0^1 \int_{t^2}^{\sqrt{t}} (t^2 + 4y^2) \cdot dy \cdot dt = 14 \int_0^1 \left[t^2 y + \frac{4y^3}{3} \right]_{t^2}^{\sqrt{t}} \cdot dt = 6.$$

De este modo, los datos obtenidos del problema se sintetizan así:

$$\begin{cases} Q(t) = 2 - 2P(t) + 2 \frac{dP(t)}{dt} + \frac{d^2P(t)}{dt^2} \\ Q(t) = -2 + 3P(t) + 6 \frac{dP(t)}{dt} + 2 \frac{d^2P(t)}{dt^2} \end{cases}$$

De la igualación de las ecuaciones observadas, se tendrá que:

$$2 - 2P + 2P' + P'' = -2 + 3P + 6P' + 2P'' ;$$

de donde se obtiene la EDO no homogénea y de segundo orden siguiente:

$$P'' + 4P' + 5P = 4.$$

La ecuación característica de la homogénea, será: $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$;

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = -2 + i \\ \lambda_2 = -2 - i \end{cases}, \text{ (con } \alpha = -2 \text{ y } \beta = 1),$$

y la solución de la homogénea será: $P^*(t) = e^{-2t}(A \cdot \cos t + B \cdot \sin t)$.

Para hallar una solución de la completa o inhomogénea, ensayaremos la solución particular:

$$\begin{cases} P_p = a \\ P'_p = P''_p = 0 \end{cases}$$

con lo que substituyendo en la ecuación inicial resulta que: $5a = 4 \rightarrow a = 4/5$, y entonces la integral general será (Simmons, 1998):

$$P(t) = P^*(t) + P_p = e^{-2t}(A \cdot \cos t + B \cdot \sin t) + \frac{4}{5}.$$

Para las condiciones dadas en el enunciado, correspondientes al valor de la infección máximo, se tendrá que:

$$P(0) = A + \frac{4}{5} = 2; \quad A = \frac{10}{5} - \frac{4}{5} = \frac{6}{5};$$

$$P'(t) = -2 \cdot e^{-2t}(A \cdot \cos t + B \cdot \sin t) + e^{-2t}(B \cdot \cos t - A \cdot \sin t) = \\ = e^{-2t}(-2A \cdot \cos t - 2B \cdot \sin t + B \cdot \cos t - A \cdot \sin t)$$

$$P'(0) = -2A + B = 1; \quad B = 1 + \frac{12}{5} = \frac{17}{5};$$

y la integral particular resultante, que es la solución pedida del modelo, es la siguiente, que supondría una amortiguación de tipo exponencial (ver NOTA 1 al final del apartado 5.4):

$$P(t) = e^{-2t} \left(\frac{6}{5} \cdot \cos t + \frac{17}{5} \cdot \sin t \right) + \frac{4}{5}, \text{ esto es:}$$

t	P_t
0	2.00
1	1.27
2	0.85
...	...
$+\infty$	0.80

En este caso, se tendrá una infección de equilibrio, a largo plazo (régimen permanente), de: $P_e = \lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \frac{4}{5} = 0.80$ (800 casos), y los picos de las ondas de infección originadas oscilarán convergentemente alrededor de este valor.

La representación gráfica de la trayectoria temporal pedida es:

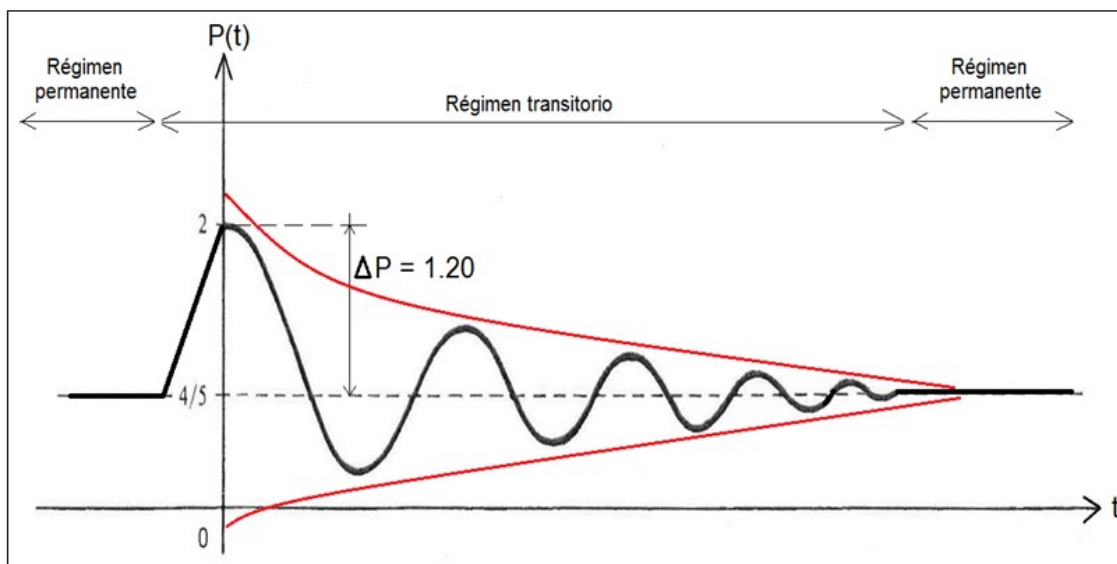


Fig. 16. Evolución temporal continua de las ondas de infección (V).

con lo que: $\Delta P = P_0 - P_e = 2.00 - 0.80 = 1.20$ (1.200 casos).

5.3. ECUACIÓN INTEGRO-DIFERENCIAL (EID)

Se trata de definir la trayectoria temporal de una pandemia cuyo modelo matemático viene dado por la ecuación integro-diferencial, del tipo Volterra (Franquet, 2014), siguiente: $P'(t) = -\int_0^1 \ln t \cdot dt - \sin t - \int_0^t P(\tau) \cdot d\tau$, significando la variable $\Delta P(t)$ las cifras de la población afectada, expresadas en miles de casos, medidas sobre los valores de equilibrio, tomando como final práctico de la perturbación transitoria el instante $t = 0$ y haciendo la representación gráfica correspondiente del fenómeno epidemiológico, con el tiempo expresado en meses.

Solución:

Procede resolver, en primer lugar, la integral definida del 2º miembro de la ecuación dada, con lo que: $\int_0^1 \ln t \cdot dt = [t \cdot \ln t - t]_0^1 = -1$, y entonces, la ecuación

ID dada quedará configurada así: $\frac{dP(t)}{dt} = 1 - \sin t - \int_0^t P(\tau) \cdot d\tau$.

El final de la perturbación tendrá lugar cuando se cumpla la condición $P(0)=0$. Aplicando las transformadas de Laplace en ambos miembros de la ecuación dada, se tiene:

$$sP_s - P(0) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{P_s}{s}$$

$$P_s \left(s + \frac{1}{s} \right) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2 + 1} \Rightarrow P_s = \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{s}{(s^2 + 1)^2}$$

y la solución buscada o función generatriz será, utilizando las transformadas de la tabla básica (ver Anexo nº: 2):

$$P(t) = \sin t - \frac{1}{2} t \sin t = \sin t \left(1 - \frac{t}{2} \right) \text{ . Esto es:}$$

t	ΔP_t
0	0
-10	3.26
-20	-10.04
-30	15.81
-36	18.84
-38	5.93
...	...

La representación gráfica de esta solución de los picos positivos y negativos, que siguen una sucesión convergente infinitesimal, se expone a continuación:

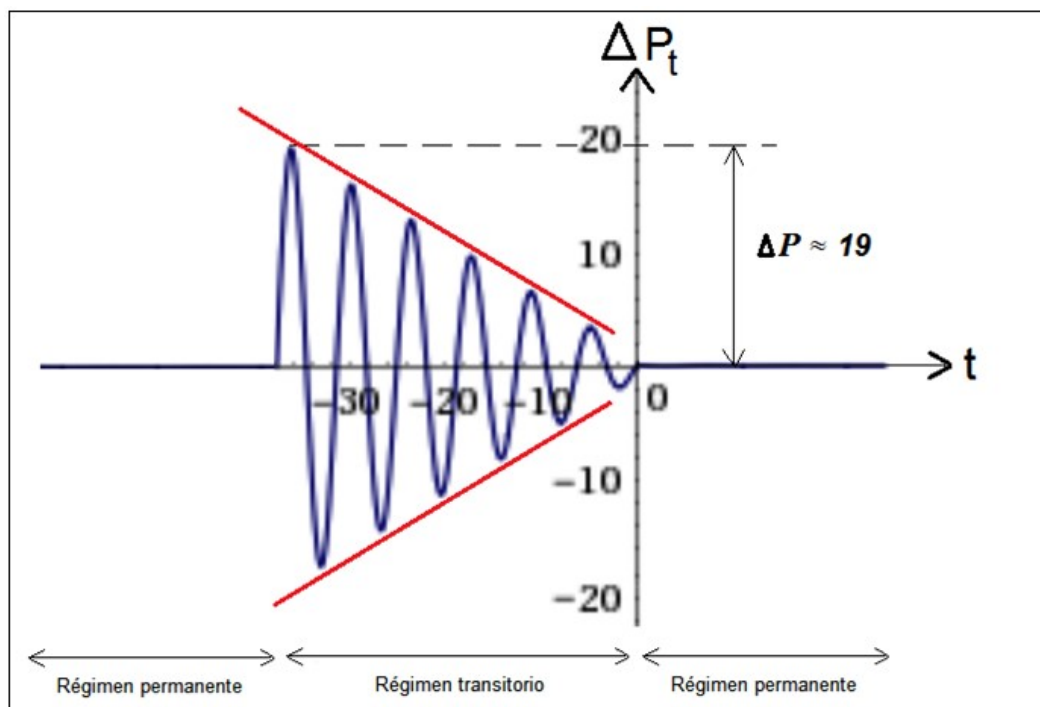


Fig. 17. Evolución temporal continua de las ondas pandémicas.

Por otra parte, cuando $\Delta P = 0$ no se notarían los efectos de la pandemia en el territorio estudiado, estado al que se tendería de modo oscilante y decreciente hasta el final de la perturbación pandémica. El valor positivo máximo $\Delta P \approx 19$ (19.000 casos) tiene lugar aproximadamente 36 meses antes de la estabilización a régimen permanente, pudiéndose considerar unos 38 meses (concretamente: $12 \cdot \pi = 37.7$ meses), o sea, algo más de tres años, como el tiempo de duración de la perturbación transitoria analizada.

5.4. FUNCIONES DE BESSEL

La primera ecuación diferencial del tipo Bessel⁴ de que se tiene noticia en la historia de las matemáticas se presentó en 1732 a uno de los matemáticos de la famosa familia Bernoulli (Daniel), en el estudio de una cadena colgada por un extremo. Posteriormente, han sido múltiples las cuestiones tratadas por los físico-matemáticos (Euler, Lagrange, Fourier, Poisson, ...) que han conducido a ecuaciones de este tipo o reducibles a él. Fue entre los años 1817 y 1824 cuando el astrónomo alemán Bessel realizó un estudio sistemático de tales ecuaciones, de gran importancia y aplicabilidad en la técnica, en relación con un problema de movimientos planetarios, lo que motivó el nombre con el que se bautizaron (Puig, 1965).

La solución de ciertas ecuaciones diferenciales de coeficientes variables puede venir dada por el desarrollo en serie de dicha solución. Para ello puede emplearse el método de los coeficientes indeterminados o el método de Frobenius, que resulta aplicable a la ecuación de Bessel, que se presenta en el estudio de fenómenos con simetría cilíndrica como el transitorio pandémico que aquí nos ocupa. En este sentido, la función de Bessel de 1ª especie y orden cero viene dada por la expresión:

$$J_0(t) = 1 - \left(\frac{t}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^6 + \dots ,$$

cuya representación gráfica puede verse a continuación:

⁴ Las funciones de Bessel, primero definidas por el matemático Daniel Bernoulli y más tarde generalizadas por Friedrich Bessel (1784-1846), son soluciones canónicas $J(t)$ de la ecuación diferencial de Bessel. Éstas son funciones oscilatorias (como las funciones seno o coseno) que decaen proporcionalmente a $(1/\sqrt{t})$, aunque los ceros de estas funciones no son, en general, periódicos, excepto de forma asintótica para grandes valores de t . Dichas funciones aparecen cuando se buscan soluciones a la ecuación de Laplace o a la ecuación de Helmholtz por el método de separación de variables, en coordenadas cilíndricas o esféricas. Por ello, creemos que las funciones de Bessel pueden ser especialmente importantes en muchos problemas de propagación de ondas de infección o mortalidad, como los que aquí nos ocupan acerca de los fenómenos transitorios pandémicos.

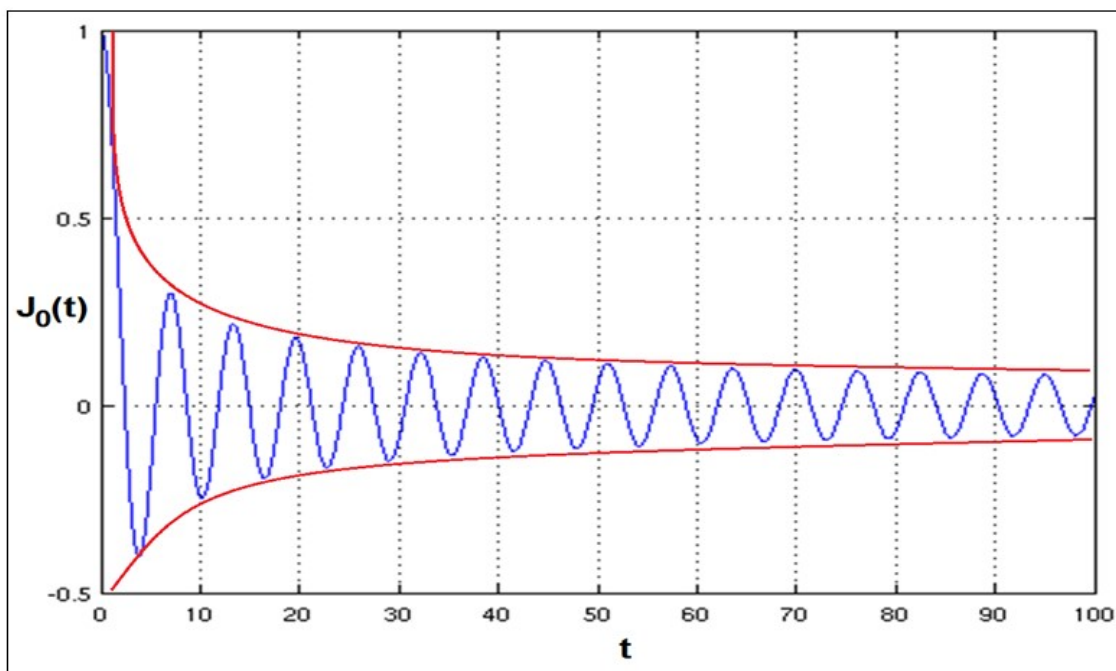


Fig. 18. Función de Bessel $J_0(t)$.

Cabe tener en cuenta, también, según los casos, la aplicación de otras diferentes funciones de Bessel, como las $J_2(t)$, $J_3(t)$, ..., $J_n(t)$, o sea, de 1ª especie y otros diversos órdenes o valores de n , que se ajustaran mejor a cada circunstancia, especialmente en aquellos casos de tipo o apariencia sinusoidal en que se produzca que $\Delta P_0 = 0$. También debe tenerse en cuenta el valor de la función derivada: $\frac{dJ_n(t)}{dt} = n \frac{J_n(t)}{t} - J_{n+1}(t)$, y la condición necesaria o de primer grado de los extremos relativos o locales exige su anulación, o sea:

$$\frac{n \cdot J_n(t)}{t} = J_{n+1}(t) = \frac{2n}{t} J_n(t) - J_{n-1}(t), \text{ con lo que: } J_n(t) = \frac{t \cdot J_{n-1}(t)}{n} .$$

Si ahora consideramos el mayor valor ΔP_0 de los observados, se tendrá una expresión de la trayectoria temporal del fenómeno que será un múltiplo de la expresión anterior, dada por:

$$\begin{aligned} \Delta P_t &= \Delta P_0 \cdot J_0(t) = \Delta P_0 \left[1 - \left(\frac{t}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^6 + \dots \right] = \\ &= \Delta P_0 - \frac{\Delta P_0 \cdot t^2}{4} + \frac{\Delta P_0 \cdot t^4}{64} - \frac{\Delta P_0 \cdot t^6}{2304} + \dots \end{aligned}$$

Cuando t se hace grande ($t \rightarrow \infty$), la función $J_n(t)$ tiende hacia la siguiente aproximación asintótica (ver NOTA 2 al final del presente apartado de nuestro estudio):

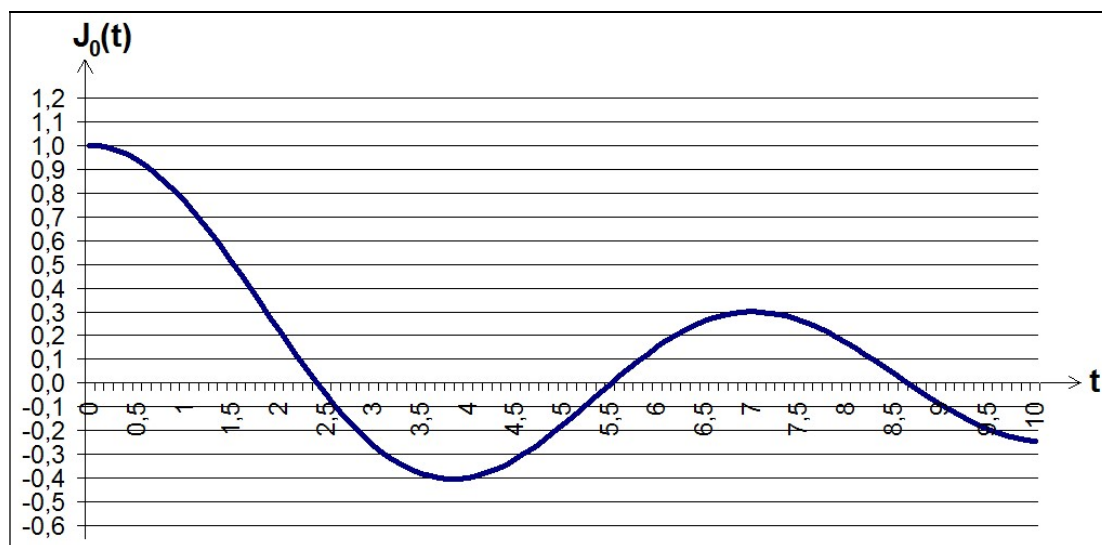
$$J_n(t) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos\left(t - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \text{ que para } n = 0 \text{ ofrece: } J_0(t) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) .$$

A continuación, se presenta una tabla de la función $J_0(t)$ para los valores de t comprendidos entre 0 y 10, variando la variable tiempo de décima en décima de la unidad de tiempo de que se trate.

Tabla 1. Valores de $J_0(t)$.

t	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
0	1.0000	0.9975	0.9900	0.9776	0.9604	0.9385	0.9120	0.8812	0.8463	0.8075
1	0.7652	0.7196	0.6711	0.6201	0.5669	0.5118	0.4554	0.3980	0.3400	0.2818
2	0.2239	0.1666	0.1104	0.0555	0.0025	-0.0484	-0.0968	-0.1424	-0.1850	-0.2243
3	-0.2601	-0.2921	-0.3202	-0.3443	-0.3643	-0.3801	-0.3918	-0.3992	-0.4026	-0.4018
4	-0.3971	-0.3887	-0.3766	-0.3610	-0.3423	-0.3205	-0.2961	-0.2693	-0.2404	-0.2097
5	-0.1776	-0.1443	-0.1103	-0.0758	-0.0412	-0.0068	0.0270	0.0599	0.0917	0.1220
6	0.1506	0.1773	0.2017	0.2238	0.2433	0.2601	0.2740	0.2851	0.2931	0.2981
7	0.3001	0.2991	0.2951	0.2882	0.2786	0.2663	0.2516	0.2346	0.2154	0.1944
8	0.1717	0.1475	0.1222	0.0960	0.0692	0.0419	0.0146	-0.0125	-0.0392	-0.0653
9	-0.0903	-0.1142	-0.1367	-0.1577	-0.1768	-0.1939	-0.2090	-0.2218	-0.2323	-0.2403
10	-0.2460	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Y también su correspondiente representación gráfica:

Fig. 19. Trayectoria temporal de la función de Bessel $J_0(t)$.

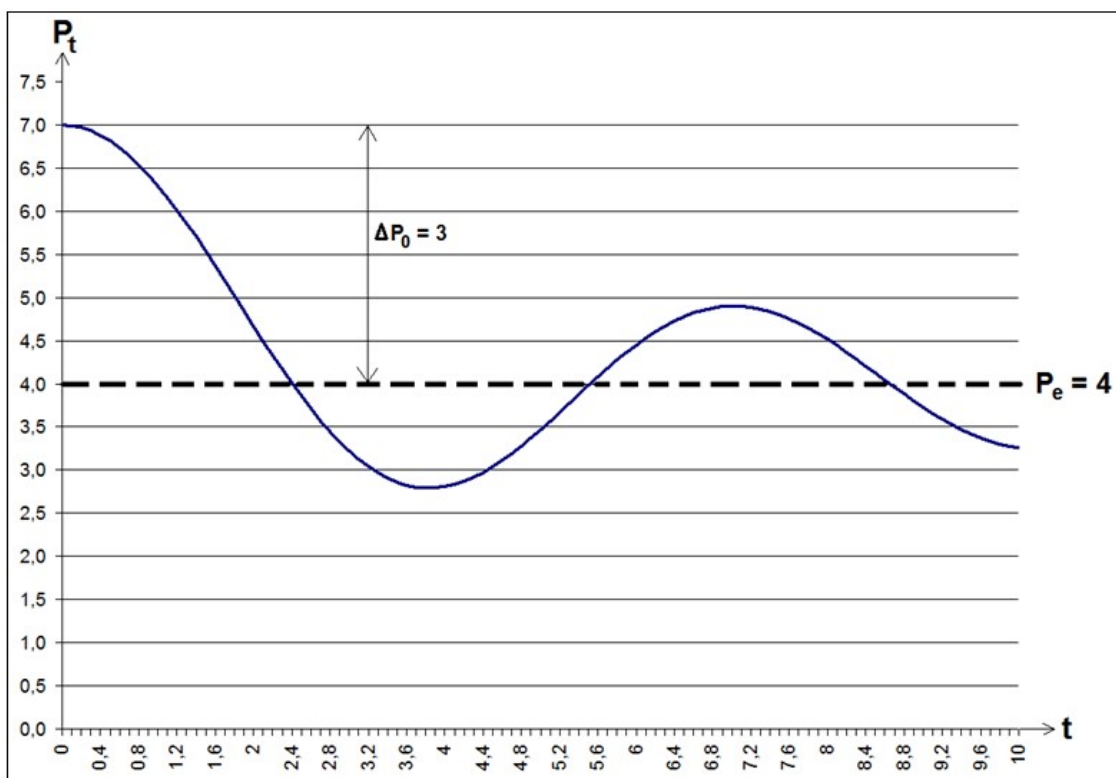
Si ahora desarrollamos un ejemplo cualquiera de este tipo de fenómenos transitorios, con un valor de equilibrio en régimen permanente de $P_e = 4.00$ (4.000 casos), y un valor máximo observado de $\Delta P_0 = 3.00$ (3.000 casos), resultaría la siguiente tabla, teniendo en cuenta, en su elaboración, que los valores que alcanzaría la variable epidemiológica en estudio (contagios, defunciones, ...) en cada instante, están sujetos a la expresión:

$$P_t = P_e + \Delta P_t = P_e + \Delta P_0 \cdot J_0(t)$$

Tabla 2. Valores de P_t .

t	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
0	7.0000	6.9925	6.9700	6.9328	6.8812	6.8155	6.7360	6.6436	6.5389	6.4225
1	6.2956	6.1588	6.0133	5.8603	5.7007	5.5354	5.3662	5.1940	5.0200	4.8454
2	4.6717	4.4998	4.3312	4.1665	4.0075	3.8548	3.7096	3.5728	3.4450	3.3271
3	3.2197	3.1237	3.0394	2.9671	2.9071	2.8597	2.8246	2.8024	2.7922	2.7946
4	2.8087	2.8339	2.8702	2.9170	2.9731	3.0385	3.1117	3.1921	3.2788	3.3709
5	3.4672	3.5671	3.6691	3.7726	3.8764	3.9796	4.0810	4.1797	4.2751	4.3660
6	4.4518	4.5319	4.6051	4.6714	4.7299	4.7803	4.8220	4.8553	4.8793	4.8943
7	4.9003	4.8973	4.8853	4.8646	4.8358	4.7989	4.7548	4.7038	4.6462	4.5832
8	4.5151	4.4425	4.3666	4.2880	4.2076	4.1257	4.0438	3.9625	3.8824	3.8041
9	3.7291	3.6574	3.5899	3.5269	3.4696	3.4183	3.3730	3.3346	3.3031	3.2791
10	3.2620	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Y también le correspondería la siguiente representación gráfica de la trayectoria temporal de las ondas epidemiológicas, en sucesión convergente, por el fenómeno transitorio pandémico en estudio durante los primeros 10 meses (v. gr.) desde la aparición del expresado fenómeno:

Fig. 20. Trayectoria temporal de P_t .

cuyos extremos (máximos y mínimos) se encuentran en la siguiente tabla:

t	P_t
0	7.00
3.8	2.79
7.0	4.90
...	...
$+\infty$	4.00

* * * * *

NOTA 1 (amortiguación exponencial):

La característica esencial de las oscilaciones amortiguadas es que la amplitud de la oscilación disminuye exponencialmente con el tiempo, de tal modo que el sistema oscila con amplitud constantemente decreciente. La “amortiguación crítica” es aquella por encima de la cual ya no se produce oscilación alguna. Si en el caso de una oscilación libre nada perturbara al sistema en oscilación, éste seguiría vibrando indefinidamente.

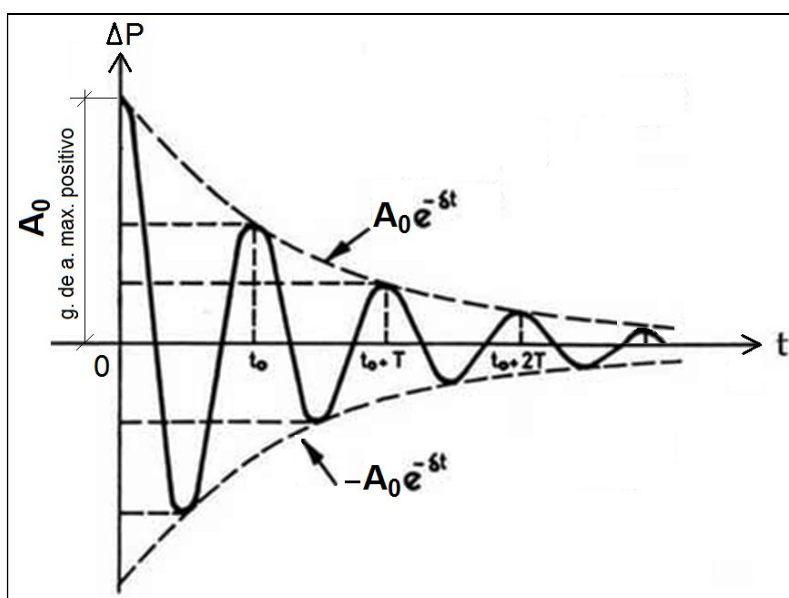


Fig. 21. Oscilación exponencial amortiguada de la variable pandémica.

En la oscilación amortiguada la amplitud de la misma $A(t)$ varía en el tiempo (según una curva exponencial), haciéndose cada vez más pequeña hasta llegar a anularse. Es decir, el sistema se detiene finalmente en su posición de reposo o estática (régimen permanente), que se correspondería con un nivel de la enfermedad habitual en la población, generalmente reconocido y aceptado, incluso al margen de los períodos de pandemia.

Cuando se produce una trayectoria de este tipo, tiene lugar una EDO de 2º orden que define movimientos cuya integral general es:

$$\Delta P = e^{-\delta t} \cdot (C_1 \cdot \cos \omega t + C_2 \cdot \sin \omega t).$$

Una representación matemática que pudiera ser válida, en ciertos casos, del presente fenómeno es la función sinusoidal:

$$\Delta P = A_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega t + \varphi), \text{ con } \omega = 2\pi,$$

donde δ es el “coeficiente o constante de amortiguación o decaimiento”, mientras que su inverso $\tau = 1/\delta$ representa el tiempo que tarda en decaer la amplitud (en este modelo, la amplitud de la oscilación se reduce en un factor igual a e (o sea, a un $1/e = 36.79\%$ de la que tuviera anteriormente). Dicha función se representa por una senoide deformada, de tal suerte que sus oscilaciones se hallan comprendidas entre la curva exponencial $\Delta P = A_0 \cdot e^{-\delta t}$ y su simétrica en relación al eje de abscisas en el cuarto cuadrante del círculo, o sea: $\Delta P = -A_0 \cdot e^{-\delta t}$. La rapidez de decrecimiento de estas oscilaciones depende del valor de δ ; si su valor es elevado, el amortiguamiento es muy rápido a causa de la rapidez de decrecimiento de la función exponencial antedicha. La “pulsación” ω , cuando se produce amortiguamiento, es más pequeña que si no lo hubiera, por lo tanto, la resistencia hace disminuir la frecuencia ($\omega/2\pi$) y aumentar el periodo.

Notemos que la amplitud variable $A_0 \cdot e^{-\delta t}$ es también una función del tiempo (es decir, que varía con el tiempo, decayendo exponencialmente así: $A(t) = \pm A_0 \cdot e^{-\delta t}$, que es la ecuación de la curva de la “amortiguación crítica”, constituyéndose el eje de abscisas Ot en asíntota horizontal), mientras que A_0 y φ son constantes que dependen de las condiciones de inicio del movimiento.

En el ejemplo propuesto a continuación, se toman los valores siguientes: $A_0 = 1$, con $\delta = 1/2$ y $\varphi = 0$. No obstante, la frecuencia de oscilación del sistema (que depende de propiedades intrínsecas del propio sistema, es decir, es característica del mismo) no varía, manteniéndose constante a lo largo de todo el proceso, salvo que se estuviera ante una amortiguación muy grande o sobreamortiguada, que podría tener lugar como consecuencia de la adopción de medidas drásticas de control de la transmisión de la enfermedad por parte de las autoridades sanitarias (aislamiento, vacunación intensiva,...). El “empaquetamiento” de las ondas pandémicas, en ocasiones, puede conllevar la conveniencia de la averiguación de la ecuación de la curva envolvente de dichas ondas (aunque no de un haz de curvas planas diferentes) o de amortiguación crítica que las limita. La curva envolvente así obtenida tiene la propiedad de ser tangente a los extremos relativos (máximos y mínimos) de las ondas de la pandemia que se suceden a lo largo del tiempo.

Veamos, a continuación, un sencillo ejemplo al respecto. Sea una pandemia cuyo modelo definitorio de la trayectoria temporal de alguna de sus variables, una vez realizadas las observaciones oportunas, viene dado por la ecuación de la oscilación amortiguada siguiente: $\Delta P = e^{-t/2} \cdot \sin(2\pi t)$, siendo $t = 0$ el instante en que comienza a manifestarse el fenómeno transitorio en cuestión. Se tendrán, entonces, los siguientes valores:

t	ΔP_t
0	0
1/4	0.88
1/2	0
3/4	-0.69
1	0
5/4	0.54
3/2	0
7/4	-0.42
...	...
$+\infty$	0

puesto que: $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Delta P_t = \lim_{t \rightarrow +\infty} [e^{-t/2} \cdot \sin(2\pi t)] = 0$, en que ya no se notarían los efectos de la pandemia en la zona estudiada, estado al que se tendería de modo oscilante y decreciente hasta el final de la perturbación transitoria, con la siguiente representación gráfica sinusoidal:

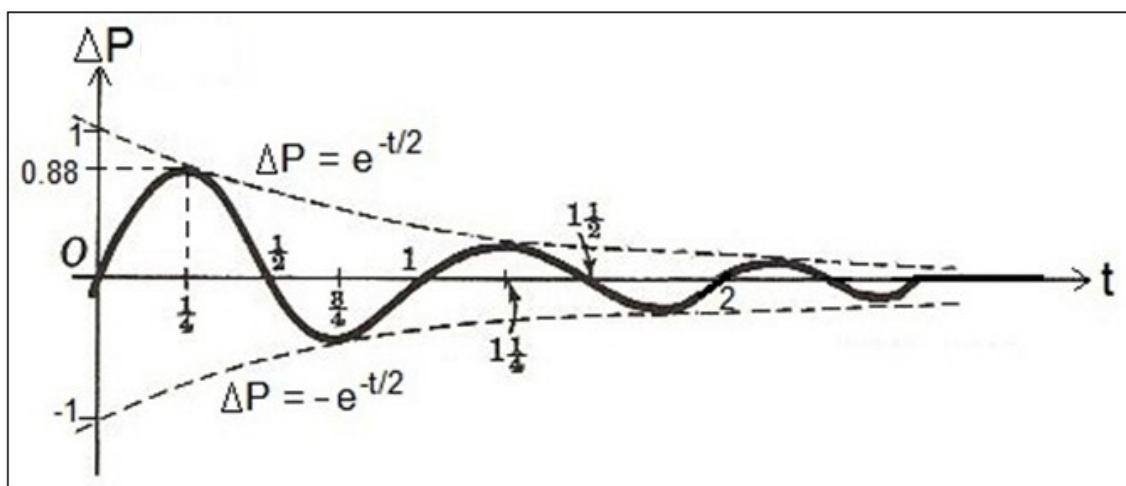


Fig. 22. Determinación de la envolvente de la trayectoria temporal.

teniendo lugar un valor máximo (positivo) de $\Delta P = 0.88$ (880 defunciones, por ejemplo) a los 0.25 años (91 días) del inicio de la perturbación pandémica.

Se cumple que:

- Cuando $\Delta P = 0 \Rightarrow \sin(2\pi t) = 0$ y $t = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$
- Cuando $t = \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{9}{4}, \frac{13}{4}, \dots \Rightarrow \sin(2\pi t) = 1$ y $\Delta P = e^{-t/2}$
- Cuando $t = \frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{11}{4}, \frac{15}{4}, \dots \Rightarrow \sin(2\pi t) = -1$ y $\Delta P = -e^{-t/2}$

La trayectoria temporal analizada oscila entre las dos curvas: $\Delta P = \pm e^{-t/2}$, que son las envolturas buscadas que, cuando $t = 0$, ofrecen $\Delta P = \pm 1$, y sus primeras y segundas derivadas llevarían a determinar los diferentes puntos críticos (extremos absolutos o relativos y puntos de inflexión), así como los intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad, esto es:

$$\begin{cases} \Delta P' = e^{-t/2} \left(2\pi \cos 2\pi t - \frac{1}{2} \sin 2\pi t \right) \\ \Delta P'' = e^{-t/2} \left[\left(\frac{1}{4} - 4\pi^2 \right) \cdot \sin 2\pi t - 2\pi \cdot \cos 2\pi t \right] \end{cases}$$

- Cuando $\Delta P' = 0 \Rightarrow 2\pi \cos 2\pi t - \frac{1}{2} \sin 2\pi t = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} 2\pi t = 4\pi = 12.56637$.
- Cuando $\Delta P'' = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} 2\pi t = \frac{2\pi}{1/4 - 4\pi^2} = \frac{8\pi}{1 - 16\pi^2} = -0.16017$.

Obsérvese, por último, que en el caso de comenzar analizando el transitorio pandémico considerando el instante inicial $P(0)$ como la magnitud del valor máximo positivo observado o calculado, la curva descriptiva del fenómeno se ajustará a una cosinusoide (caso de la figura 21), aunque, de hecho, las funciones trigonométricas seno y coseno son la misma sinusoide desfasada (desplazada) en $(\pi/2)$ radianes, teniendo en cuenta la relación trigonométrica: $\cos t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$, donde dicha función continua aparece como una función compuesta, a su vez, de sendas funciones continuas.

NOTA 2 (aproximaciones asintóticas):

Los ceros de las funciones de Bessel de 1ª especie $J_n(t)$ tienden a ser equidistantes a intervalos de amplitud π al crecer t . La razón de esta circunstancia se comprende al estudiar las llamadas “expresiones asintóticas” de dichas funciones. Los desarrollos de las $J_n(t)$ en serie son rápidamente convergentes para valores pequeños de t , o sea, al principio de la aparición del fenómeno transitorio pandémico. No obstante, para grandes valores de t su lenta convergencia los hace impropios para el cálculo numérico y pueden ser substituidos por expresiones asintóticas, es decir, otras funciones que se aproximan suficientemente a $J_n(t)$ al crecer t , a efectos prácticos, y que resultan más cómodas de calcular (Puig, 1965). Del mismo modo, se pueden expresar las funciones de Bessel de 1ª especie mediante integrales definidas, de tal modo que resulta:

$$J_n(t) = \frac{\int_0^{+\pi} \cos n\varphi \cdot \cos(t \cdot \sin \varphi) \cdot d\varphi - \int_0^{+\pi} \sin n\varphi \cdot \sin(t \cdot \sin \varphi) \cdot d\varphi}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\varphi + t \cdot \sin \varphi) \cdot d\varphi.$$

Entonces, para $n = 0$, se tendrá la función de Bessel buscada:

$$J_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(t \cdot \sin \varphi) \cdot d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(t \cdot \sin \varphi) \cdot d\varphi, \quad \forall t \in \{\mathfrak{R}\},$$

que enlaza con el concepto de “promedio integral”, “ordenada media” o “valor medio teórico”.

Las primeras y segundas derivadas de $J_0(t)$ nos permiten localizar los puntos críticos (extremos relativos o “picos de las ondas”, puntos de inflexión, intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad), mientras que la función de Bessel de 2ª especie $Y_0(t)$, también conocida como de Weber-Neumann, puede adaptarse aceptablemente al estudio del transitorio de valor inicialmente negativo.

Otra expresión analítica que pudiera resultar útil a los efectos pretendidos de representación del transitorio en estudio es la función esférica de Bessel de 1ª especie, que para $n = 0$ ofrece: $j_0(t) = (\sin t)/t$, puesto que de un modo más general: $j_n(t) = (-t)^n \left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt} \right)^n \frac{\sin t}{t}$, con la siguiente representación gráfica que consideramos interesante por su sencillez y aplicabilidad a los fenómenos pandémicos, también tendente a 0 hasta retornar al régimen permanente, o sea:

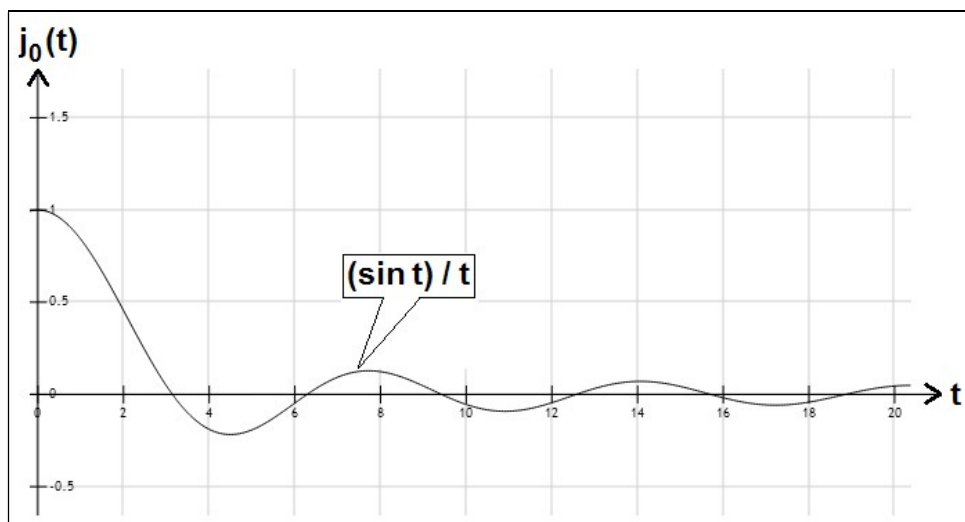


Fig. 23. Trayectoria temporal de la función $(\sin t)/t$, para transitorio inicialmente positivo y máximo.

Y lo mismo cabe afirmar de la función esférica de Bessel de 2ª especie y orden 0, que ofrece: $y_0(t) = -(\cos t)/t$, puesto que: $y_n(t) = -(-t)^n \left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt} \right)^n \frac{\cos t}{t}$, que presenta el inconveniente teórico de la existencia de una rama infinita (asíntota vertical para $t = 0$) coincidente con el eje de ordenadas, por lo que tiene sentido su activación a partir del primer valor positivo ($t = \pi/2 = 1,571$) y que ofrece la representación gráfica:

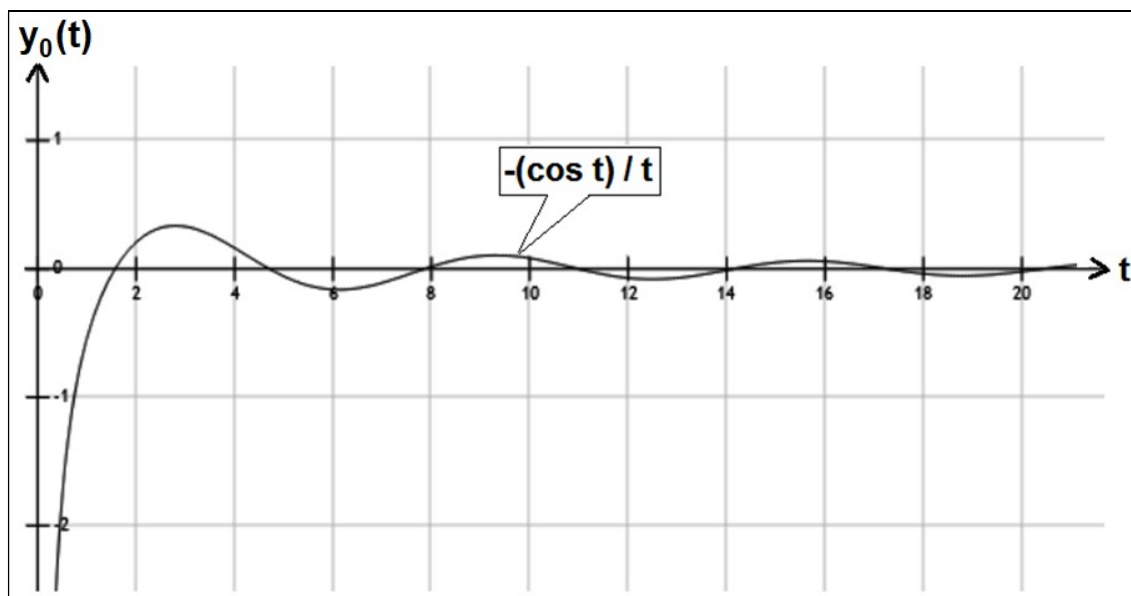


Fig. 24. Trayectoria temporal de la función $-(\cos t)/t$, para transitorio inicialmente negativo.

5.5. AJUSTES POR REGRESIÓN NO LINEAL

La evolución de la epidemia del Covid-19 en España podía seguirse según la estadística que publicaba cada martes y cada viernes el Centro de Coordinación de Alertas y Emergencias Sanitarias del Ministerio de Sanidad. A su vez, la evolución experimentada en cada Comunidad Autónoma, se realizaba con los datos notificados por ellas a la Red de Vigilancia Epidemiológica (al sistema SiViEs), con datos de asistencia de los hospitales y pruebas diagnósticas notificadas. Así mismo, se han realizado las interpolaciones precisas para obtener una mejor continuidad de los valores de las variables analizadas (contagios y defunciones) en aquellos casos en que no se notificaban o registraban, como por ejemplo los fines de semana.

Cabe señalar que el recuento de casos ha estado sujeto a varias modificaciones de criterio a lo largo del período de estudio. El 19 de abril de 2020, en plena primera ola, el Ministerio de Sanidad cambió de criterio para contabilizar a los contagiados por coronavirus, recogiendo solo los que habían sido confirmados con una prueba PCR y no los positivos por test de anticuerpos, debido a que las pruebas de anticuerpos "a juicio de expertos, no pueden ser contabilizados como nuevos casos" al "identificar casos que se produjeron anteriormente". El reajuste del 25 de mayo también se tradujo en la contabilidad de casos acumulados, con 372 casos menos aquel día. Posteriormente, con la aparición de los test de antígenos, este tipo de pruebas comenzaron a incorporarse en los balances diarios.

Posteriormente, se incluyeron los casos notificados confirmados con una prueba diagnóstica positiva de infección activa (PDIA). Además, se incluyeron los casos notificados antes del 11 de mayo de 2020 que requirieron hospitalización, ingreso en UCI o fallecieron con diagnóstico clínico de Covid-19, de acuerdo a las definiciones de caso vigentes en cada momento.

En el Anexo nº: 1 se acompaña una tabla con las variables pandémicas estudiadas correspondientes al período bianual que transcurre desde el 1/03/2020 al 28/02/2022 (730 días). Por otra parte, en sus dos últimas columnas aparecen las cifras en relación a la población total de España en los subperíodos analizados según los datos oficiales del INE, teniendo en cuenta que:

Año	Población
2020	47.332.614
2021	47.398.695
2022	47.432.805
Media	47.388.038

Así pues, en base a los datos de la evolución de la pandemia Covid-19 en España obtenidos del Ministerio de Sanidad, Servicios Sociales e Igualdad, de las Consejerías correspondientes de las Comunidades Autónomas, de la Universidad Johns Hopkins (Baltimore, Maryland, USA) y de la página web⁵ www.epdata.es, se ha elaborado la estadística diaria de las cifras de contagios y defunciones acaecidos en España por dicha causa en el período bianual comprendido entre el 01/03/2020 y el 28/02/2022. Con ellas, y para ambas variables absolutas y relativas, se han podido realizar algunos ajustes minimocuadráticos por regresión no lineal a funciones polinómicas o parábolas de 6º grado, que han ofrecido los resultados siguientes:

A) Contagios acumulados:

Se corresponde a la siguiente ecuación ajustada:

$$P = 1E-09t^6 - 2E-06t^5 + 0,0004t^4 + 0,1t^3 - 19,949t^2 + 2.113,6t + 53.992,$$

con $R^2 = 0,988$ y $R = 0,994$.

⁵ *EpData* es la plataforma creada por la agencia Europa Press para facilitar el uso de datos públicos por parte de los periodistas, con el objetivo tanto de enriquecer las noticias con gráficos y análisis de contexto como de contrastar las cifras ofrecidas por las diversas fuentes. La base de datos de la que se alimenta EpData está mantenida por un equipo multidisciplinar de informáticos y periodistas que se valen de las nuevas tecnologías y el análisis de datos para mejorar la eficiencia en el consumo de datos y encontrar patrones relevantes e informativos en los datos. Sobre dicha base, se ha creado una herramienta de visualización de datos que permite la creación de gráficos que se actualizan automáticamente y otra aplicación para la creación de plantillas que intercalan estos gráficos con textos dinámicos generados a partir de la base de datos. El proyecto cuenta con financiación de la *Digital News Initiative* de Google y forma parte de la apuesta de Europa Press por el periodismo de datos.

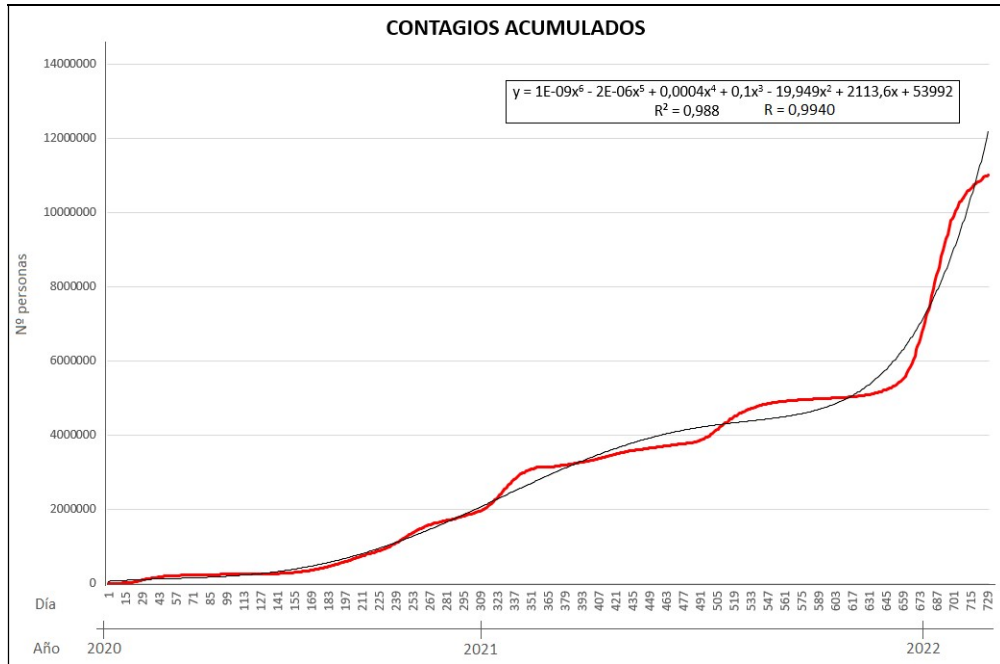


Fig. 25. Evolución temporal de los contagios acumulados.

B) Contagios diarios:

Se corresponde a la siguiente ecuación ajustada:

$$P = -1E-10t^6 + 3E-07t^5 - 0,0002t^4 + 0,0694t^3 - 10,568t^2 + 630,57t - 6.452,6,$$

con $R^2 = 0,4859$ y $R = 0,6971$.

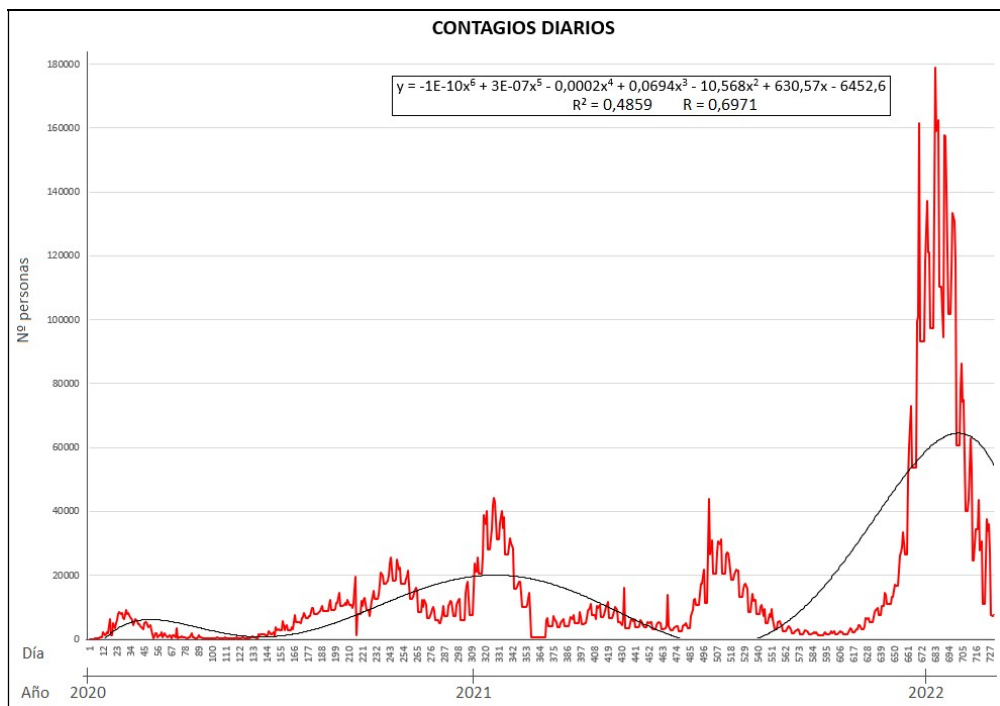


Fig. 26. Evolución temporal de los contagios diarios.

C) Muertes acumuladas:

Se corresponde a la siguiente ecuación ajustada:

$$P = -5E-11t^6 + 1E-07t^5 - 0,0001t^4 + 0,0538t^3 - 11,168t^2 + 1.070,1t - 11.018,$$

con $R^2 = 0,9961$ y $R = 0,9981$.

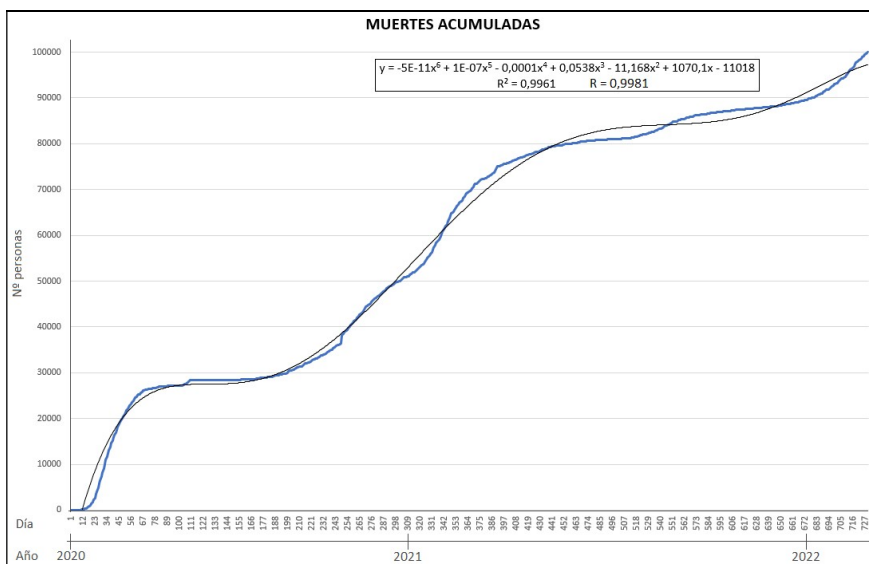


Fig. 27. Evolución temporal de las defunciones acumuladas.

D) Muertes diarias:

Se corresponde a la siguiente ecuación ajustada:

$$P = -9E-13t^6 + 2E-09t^5 - 1E-06t^4 + 0,0005t^3 - 0,0558t^2 - 0,2628t + 369,62,$$

con $R^2 = 0,3031$ y $R = 0,5505$.

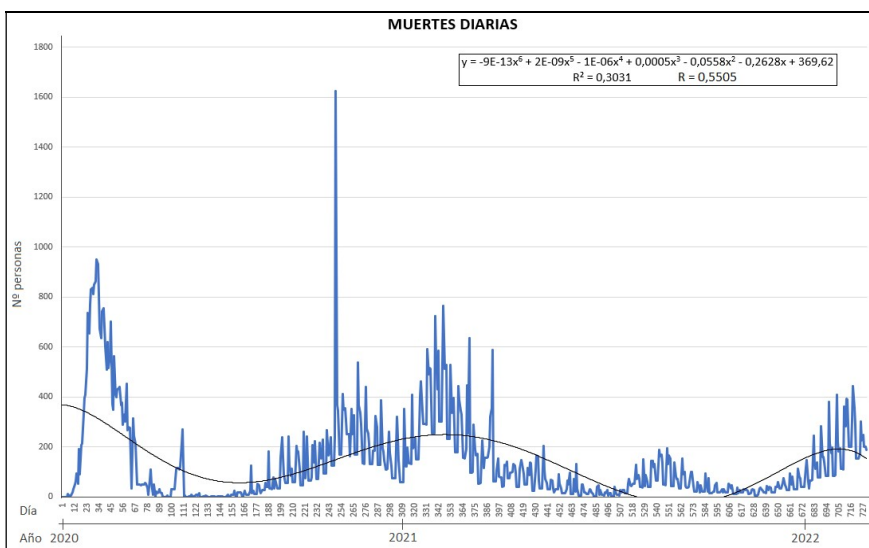


Fig. 28. Evolución temporal de las defunciones diarias.

Nota: se observa la presencia de un “outlier” correspondiente al día 4 de noviembre de 2020 debido a una corrección de la serie cronológica efectuada por el Ministerio de Sanidad.

E) Muertes acumuladas / contagios acumulados (%):

Se corresponde a la siguiente ecuación ajustada:

$$P = -1E-14t^6 + 3E-11t^5 - 3E-08t^4 + 2E-05t^3 - 0,004t^2 + 0,3932t - 0,6288,$$

con $R^2 = 0,9864$ y $R = 0,9932$.

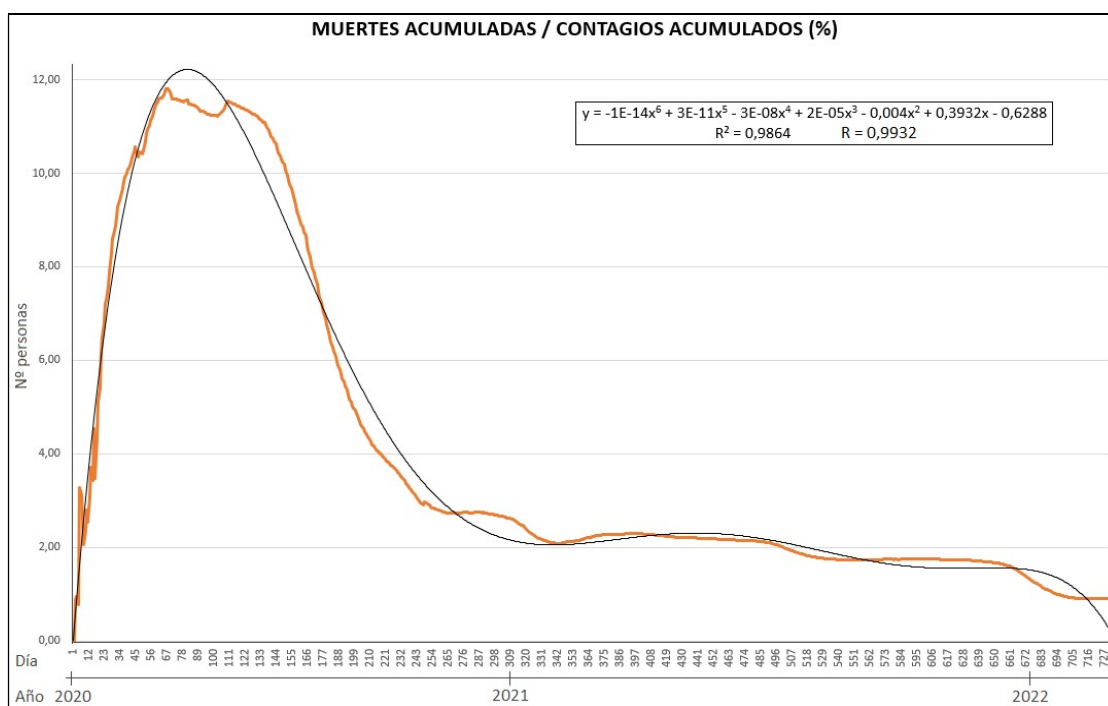


Fig. 29. Evolución temporal del porcentaje de muertes acumuladas sobre contagios acumulados.

De la contemplación de dichos ajustes se deduce su mayor eficacia o bondad (que también puede ser corroborada mediante el pertinente test χ^2) en los casos anteriores A, C y E, mientras que en los B y D se presentan funciones cíclicas cuyo estudio resulta más adecuado llevar a efecto a través de ecuaciones recurrentes, diferenciales, integrales, de Bessel o exponenciales amortiguadas, algunos de cuyos ejemplos de aplicación se han expuesto en los epígrafes anteriores.

Su correspondencia con la realidad deberá analizarse posteriormente al objeto de introducir en ellas las modificaciones analíticas que procedan. El conocimiento de la función de ajuste más aproximada exigirá, probablemente, disponer de una serie cronológica de datos más extensa.

6. CONCLUSIONES

Con el método propuesto se pueden graficar los resultados obtenidos, tanto mediante representación discreta como continua, tal como puede apreciarse en los ejemplos de aplicación que se desarrollan. Así mismo, la simulación efectuada puede conllevar, eventualmente, la aparición de modelos mixtos o híbridos de variables discretas y continuas en los que aparezcan integrales definidas (simples o múltiples, según el número de variables clínicas actuantes) de inmediata resolución.

Las diferentes funciones pandémicas obtenidas como ecuaciones recurrentes, diferenciales ordinarias, integro-diferenciales o periódicas (amortiguadas, crecientes o constantes, según los casos) explican los diferentes rebrotes que se pueden producir tendiendo a un cierto equilibrio o nivel medio permanente de individuos afectados (contagios o muertos) en una determinada comunidad territorial.

Por último, en base a los datos de la evolución de la pandemia Covid-19 en España obtenidos del Ministerio de Sanidad, Servicios Sociales e Igualdad, de las Consejerías correspondientes de las Comunidades Autónomas, de la Universidad Johns Hopkins y de la página web www.epdata.es, se ha elaborado la estadística diaria de las cifras de contagios y defunciones acaecidos en España por dicha causa en el período bianual comprendido entre el 01/03/2020 y el 28/02/2022. Con ellas, y para ambas variables absolutas y relativas, se han podido realizar algunos ajustes minimocuadráticos por regresión no lineal a funciones polinómicas o parábolas de 6º grado. Su correspondencia con la realidad deberá analizarse posteriormente al objeto de introducir en ellas las modificaciones analíticas que procedan. El conocimiento de la función de ajuste más aproximada exigirá, probablemente, disponer de una serie cronológica de datos más extensa.

LISTADO DE ABREVIATURAS Y SÍMBOLOS EMPLEADOS

Dr.	Doctor
UNED	Universidad Nacional de Educación a Distancia
J	Función de Bessel de 1ª especie
δ	Constante de amortiguación
τ	Inverso de δ
j	Función esférica de Bessel de 1ª especie
Y	Función de Bessel de 2ª especie (Weber-Neumann)
y	Función esférica de Bessel de 2ª especie
SiViEs	Red de Vigilancia Epidemiológica
IG	Integral General
IP	Integral Particular
PCR	Reacción en Cadena de Polimerasa
PDIA	Prueba Diagnóstica positiva de Infección Activa
UCI	Unidad de Cuidados Intensivos
INE	Instituto Nacional de Estadística
USA	<i>United States of America</i>
COVID	<i>Coronavirus disease</i>
R	Coefficiente de correlación no lineal
R ²	Coefficiente de determinación o crítico
χ^2	Test estadístico chi-cuadrado (ji-dos)
EDF	Ecuación en Diferencias Finitas
EDO	Ecuación Diferencial Ordinaria
EID	Ecuación Integro-Diferencial
EDP	Ecuación en Derivadas Parciales
EI	Ecuación Integral
P _t	Población afectada
t	Tiempo
p	Período
{ \mathbb{R} }	Conjunto de los números reales
{ N }	Conjunto de los números naturales
Δ	Incremento
P ₀	Población inicial
P _e	Población de equilibrio o permanente
\forall	Para todo
\in	Pertenece
\subset	Está contenido
ω	Pulsación
Lim	Límite
α	Coefficiente de la parte real
β	Coefficiente de la parte imaginaria
λ	Parámetro de la ecuación característica de EDO
r	Parámetro de la ecuación característica de EDF

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. AYRES, FRANK, JR. *Theory and problems of Differential and Integral calculus*. Schaum Publishing Company. New York, 1964. 346 p.
2. EpData. *La evolución del coronavirus en España*. Disponible on line en: <http://www.epdata.es>. 2022.
3. FRANQUET BERNIS, J. M. *Ecuaciones diferenciales ordinarias y en diferencias finitas. Curso práctico*. Ed.: Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED). Tortosa, 2013. 752 p.
4. FRANQUET BERNIS, J. M. *Aplicaciones a la Economía de las ecuaciones infinitesimales y recurrentes*. Ed.: Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED). Tortosa, 2014. 904 p.
5. FRANQUET BERNIS, J. M. *Ecuaciones diferenciales microeconómicas en derivadas parciales*. Ed.: Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED). Tortosa, 2016. 508 p.
6. FRANQUET BERNIS, J. M. *Curso práctico de Análisis Matemático superior (con aplicaciones a la Teoría Económica y la Ingeniería)*. Ed.: Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED). Tortosa, 2020. 729 p.
7. PUIG ADAM, P. *Curso Teórico Práctico de Ecuaciones Diferenciales aplicado a la física y técnica*. Ed.: Nuevas Gráficas, S.A. Madrid, 1962. 432 p.
8. PUIG ADAM, P. *Curso Teórico Práctico de Cálculo Integral aplicado a la física y técnica*. Ed.: Biblioteca matemática, S.L. Madrid, 1969. 324 p.
9. SIMMONS, G. F. *Ecuaciones Diferenciales. Con aplicaciones y notas históricas*. Ed.: McGraw-Hill. Madrid, 1998. 658 p.
10. WOODS, F.S. *Advanced calculus*. Nueva edición, Boston, Ginn, 1934.



Relación de Tablas y Figuras:

Tabla 1. Valores de $J_0(t)$.

Tabla 2. Valores de P_t .

Fig. 1. Modelos continuos y discretos.

Fig. 2. Evolución temporal discreta de las ondas de infección (I).

Fig. 3. Evolución temporal continua de las ondas de infección (I).

Fig. 4. Evolución temporal discreta de las ondas de infección (II).

Fig. 5. Evolución temporal continua de las ondas de infección (II).

Fig. 6. Evolución temporal discreta de las ondas de infección (III).

Fig. 7. Evolución temporal continua de las ondas de infección (III).

Fig. 8. Evolución temporal discreta de las ondas de defunción (I).

Fig. 9. Evolución temporal continua de las ondas de defunción (I).

Fig. 10. Evolución temporal discreta de las ondas de infección (IV).

Fig. 11. Evolución temporal continua de las ondas de infección (IV).

Fig. 12. Función $y = \sin x$ (I).

Fig. 13. Función $y = \sin x$ (II).

Fig. 14. Funciones $y = \sin x, \sin 2x, \sin 3x$.

Fig. 15. Trayectoria temporal de las ondas de infección o defunción con inicio del régimen transitorio anterior al pico máximo.

Fig. 16. Evolución temporal continua de las ondas de infección (V).

Fig. 17. Evolución temporal continua de las ondas pandémicas.

Fig. 18. Función de Bessel $J_0(t)$.

Fig. 19. Trayectoria temporal de la función de Bessel $J_0(t)$.

Fig. 20. Trayectoria temporal de P_t .

Fig. 21. Oscilación exponencial amortiguada de la variable pandémica.

Fig. 22. Determinación de la envolvente de la trayectoria temporal.

Fig. 23. Trayectoria temporal de la función $(\sin t)/t$, para transitorio inicialmente positivo y máximo.

Fig. 24. Trayectoria temporal de la función $-(\cos t)/t$, para transitorio inicialmente negativo.

Fig. 25. Evolución temporal de los contagios acumulados.

Fig. 26. Evolución temporal de los contagios diarios.

Fig. 27. Evolución temporal de las defunciones acumuladas.

Fig. 28. Evolución temporal de las defunciones diarias.

Fig. 29. Evolución temporal del porcentaje de muertes acumuladas sobre contagios acumulados.

Dirección institucional del autor:

Josep Maria Franquet Bernis

Dr. Ingeniero Agrónomo, Eur-Ing.

Dr. Ciencias Económicas y Empresariales

Avenida Generalitat, 73, ent.

43500 Tortosa (Tarragona)

jfbernis@iies.es

ANEXOS

**Anexo nº: 1 : TABLAS AFECTACIÓN COVID-19 (período
1/03/2020 al 28/02/2022)**

Anexo nº: 2 : TABLA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

A N E X O N Ú M. 1

TABLAS AFECTACIÓN
COVID-19
(período 1/03/2020 al
28/02/2022)

FECHA	CONTAGIOS ACUMULADOS	CONTAGIOS DIARIOS	MUERTES ACUMULADAS	MUERTES DIARIAS	MUERTES ACUM. / CONTAGIOS ACUM. (%)	MUERTES DIA. / CONTAGIOS DIA. (%)	Contagios / Población (%)	Muertes / Población (‰)
01/03/2020	50	50	0	0	0,00	0,00	0,00	0,00
02/03/2020	84	34	0	0	0,00	0,00	0,00	0,00
03/03/2020	114	30	1	1	0,88	3,33	0,00	0,00
04/03/2020	210	96	2	1	0,95	1,04	0,00	0,00
05/03/2020	383	173	3	1	0,78	0,58	0,00	0,00
06/03/2020	520	137	17	14	3,27	10,22	0,00	0,00
07/03/2020	673	153	21	4	3,12	2,61	0,00	0,00
08/03/2020	1073	400	28	7	2,61	1,75	0,00	0,00
09/03/2020	1695	622	35	7	2,06	1,13	0,00	0,00
10/03/2020	2277	582	54	19	2,37	3,26	0,00	0,00
11/03/2020	3004	727	84	30	2,80	4,13	0,01	0,00
12/03/2020	5232	2228	133	49	2,54	2,20	0,01	0,00
13/03/2020	6391	1159	195	62	3,05	5,35	0,01	0,00
14/03/2020	7798	1407	289	94	3,71	6,68	0,02	0,01
15/03/2020	9942	2144	342	53	3,44	2,47	0,02	0,01
16/03/2020	11748	1806	533	191	4,54	10,58	0,02	0,01
17/03/2020	17963	6215	623	90	3,47	1,45	0,04	0,01
18/03/2020	19250	1287	830	207	4,31	16,08	0,04	0,02
19/03/2020	20410	1160	1043	213	5,11	18,36	0,04	0,02
20/03/2020	25374	4964	1375	332	5,42	6,69	0,05	0,03
21/03/2020	28768	3394	1772	397	6,16	11,70	0,06	0,04
22/03/2020	33689	4921	2182	410	6,48	8,33	0,07	0,05
23/03/2020	39673	5984	2696	514	6,80	8,59	0,08	0,06
24/03/2020	47610	7937	3434	738	7,21	9,30	0,10	0,07
25/03/2020	56188	8578	4089	655	7,28	7,64	0,12	0,09
26/03/2020	64059	7871	4858	769	7,58	9,77	0,14	0,10
27/03/2020	72248	8189	5690	832	7,88	10,16	0,15	0,12
28/03/2020	78797	6549	6528	838	8,28	12,80	0,17	0,14
29/03/2020	85195	6398	7340	812	8,62	12,69	0,18	0,16
30/03/2020	94417	9222	8189	849	8,67	9,21	0,20	0,17
31/03/2020	102136	7719	9053	864	8,86	11,19	0,22	0,19
01/04/2020	110238	8102	10003	950	9,07	11,73	0,23	0,21
02/04/2020	117710	7472	10935	932	9,29	12,47	0,25	0,23
03/04/2020	124736	7026	11744	809	9,42	11,51	0,26	0,25
04/04/2020	130759	6023	12418	674	9,50	11,19	0,28	0,26
05/04/2020	135032	4273	13055	637	9,67	14,91	0,29	0,28
06/04/2020	140510	5478	13798	743	9,82	13,56	0,30	0,29
07/04/2020	146690	6180	14555	757	9,92	12,25	0,31	0,31
08/04/2020	152446	5756	15238	683	10,00	11,87	0,32	0,32
09/04/2020	157022	4576	15843	605	10,09	13,22	0,33	0,33
10/04/2020	161852	4830	16353	510	10,10	10,56	0,34	0,35
11/04/2020	166019	4167	16972	619	10,22	14,85	0,35	0,36
12/04/2020	169496	3477	17489	517	10,32	14,87	0,36	0,37
13/04/2020	172541	3045	18056	567	10,46	18,62	0,36	0,38
14/04/2020	177633	5092	18759	703	10,56	13,81	0,38	0,40
15/04/2020	182816	5183	19130	371	10,46	7,16	0,39	0,40
16/04/2020	188068	5252	19478	348	10,36	6,63	0,40	0,41
17/04/2020	191726	3658	20043	565	10,45	15,45	0,41	0,42
18/04/2020	195944	4218	20453	410	10,44	9,72	0,41	0,43
19/04/2020	200210	4266	20852	399	10,42	9,35	0,42	0,44
20/04/2020	202990	2780	21282	430	10,48	15,47	0,43	0,45
21/04/2020	203224	234	21717	435	10,69	185,90	0,43	0,46
22/04/2020	204178	954	22157	440	10,85	46,12	0,43	0,47
23/04/2020	205905	1727	22524	367	10,94	21,25	0,44	0,48
24/04/2020	207817	1912	22902	378	11,02	19,77	0,44	0,48
25/04/2020	208389	572	23190	288	11,13	50,35	0,44	0,49
26/04/2020	209465	1076	23521	331	11,23	30,76	0,44	0,50
27/04/2020	210773	1308	23822	301	11,30	23,01	0,45	0,50
28/04/2020	212917	2144	24275	453	11,40	21,13	0,45	0,51
29/04/2020	213435	518	24543	268	11,50	51,74	0,45	0,52
30/04/2020	215216	1781	24824	281	11,53	15,78	0,45	0,52
01/05/2020	216582	1366	25100	276	11,59	20,20	0,46	0,53
02/05/2020	217466	884	25264	164	11,62	18,55	0,46	0,53
03/05/2020	218011	545	25298	34	11,60	6,24	0,46	0,53
04/05/2020	219329	1318	25613	315	11,68	23,90	0,46	0,54
05/05/2020	220325	996	25857	244	11,74	24,50	0,47	0,55
06/05/2020	220693	368	26070	213	11,81	57,88	0,47	0,55
07/05/2020	222045	1352	26199	129	11,80	9,54	0,47	0,55
08/05/2020	223218	1173	26250	51	11,76	4,35	0,47	0,55
09/05/2020	223961	743	26301	51	11,74	6,86	0,47	0,56
10/05/2020	227377	3416	26351	50	11,59	1,46	0,48	0,56
11/05/2020	227770	393	26399	48	11,59	12,21	0,48	0,56
12/05/2020	228252	482	26449	50	11,59	10,37	0,48	0,56
13/05/2020	228691	439	26500	51	11,59	11,62	0,48	0,56
14/05/2020	229540	849	26551	51	11,57	6,01	0,48	0,56
15/05/2020	230183	643	26609	58	11,56	9,02	0,49	0,56
16/05/2020	230698	515	26663	54	11,56	10,49	0,49	0,56
17/05/2020	231350	652	26700	37	11,54	5,67	0,49	0,56
18/05/2020	231606	256	26709	9	11,53	3,52	0,49	0,56
19/05/2020	232037	431	26778	69	11,54	16,01	0,49	0,57
20/05/2020	232555	518	26888	110	11,56	21,24	0,49	0,57
21/05/2020	233037	482	26940	52	11,56	10,79	0,49	0,57
22/05/2020	234824	1787	26950	10	11,48	0,56	0,50	0,57

FECHA	CONTAGIOS ACUMULADOS	CONTAGIOS DIARIOS	MUERTES ACUMULADAS	MUERTES DIARIAS	MUERTES ACUM. / CONTAGIOS ACUM. (%)	MUERTES DIA. / CONTAGIOS DIA. (%)	Contagios / Población (%)	Muertes / Población (‰)
23/05/2020	235290	466	27001	51	11,48	10,94	0,50	0,57
24/05/2020	235772	482	27003	2	11,45	0,41	0,50	0,57
25/05/2020	236000	228	27024	21	11,45	9,21	0,50	0,57
26/05/2020	236259	259	27040	16	11,45	6,18	0,50	0,57
27/05/2020	236769	510	27060	20	11,43	3,92	0,50	0,57
28/05/2020	237906	1137	27090	30	11,39	2,64	0,50	0,57
29/05/2020	238564	658	27110	20	11,36	3,04	0,50	0,57
30/05/2020	239228	664	27125	15	11,34	2,26	0,51	0,57
31/05/2020	239429	201	27127	2	11,33	1,00	0,51	0,57
01/06/2020	239638	209	27127	0	11,32	0,00	0,51	0,57
02/06/2020	239932	294	27127	0	11,31	0,00	0,51	0,57
03/06/2020	240326	394	27128	1	11,29	0,25	0,51	0,57
04/06/2020	240660	334	27133	5	11,27	1,50	0,51	0,57
05/06/2020	240978	318	27134	1	11,26	0,31	0,51	0,57
06/06/2020	241310	332	27135	1	11,24	0,30	0,51	0,57
07/06/2020	241550	240	27136	1	11,23	0,42	0,51	0,57
08/06/2020	241717	167	27166	30	11,24	17,96	0,51	0,57
09/06/2020	241966	249	27196	30	11,24	12,05	0,51	0,57
10/06/2020	242280	314	27226	30	11,24	9,55	0,51	0,58
11/06/2020	242707	427	27256	30	11,23	7,03	0,51	0,58
12/06/2020	243209	502	27366	110	11,25	21,91	0,51	0,58
13/06/2020	243605	396	27481	115	11,28	29,04	0,51	0,58
14/06/2020	243928	323	27598	117	11,31	36,22	0,52	0,58
15/06/2020	244109	181	27708	110	11,35	60,77	0,52	0,59
16/06/2020	244328	219	27828	120	11,39	54,79	0,52	0,59
17/06/2020	244683	355	28042	214	11,46	60,28	0,52	0,59
18/06/2020	245268	585	28313	271	11,54	46,32	0,52	0,60
19/06/2020	245575	307	28315	2	11,53	0,65	0,52	0,60
20/06/2020	245938	363	28322	7	11,52	1,93	0,52	0,60
21/06/2020	246272	334	28323	1	11,50	0,30	0,52	0,60
22/06/2020	246504	232	28324	1	11,49	0,43	0,52	0,60
23/06/2020	246752	248	28325	1	11,48	0,40	0,52	0,60
24/06/2020	247086	334	28327	2	11,46	0,60	0,52	0,60
25/06/2020	247486	400	28330	3	11,45	0,75	0,52	0,60
26/06/2020	247905	419	28338	8	11,43	1,91	0,52	0,60
27/06/2020	248469	564	28341	3	11,41	0,53	0,52	0,60
28/06/2020	248770	301	28343	2	11,39	0,66	0,53	0,60
29/06/2020	248970	200	28346	3	11,39	1,50	0,53	0,60
30/06/2020	249271	301	28355	9	11,38	2,99	0,53	0,60
01/07/2020	249659	388	28363	8	11,36	2,06	0,53	0,60
02/07/2020	250103	444	28368	5	11,34	1,13	0,53	0,60
03/07/2020	250545	442	28385	17	11,33	3,85	0,53	0,60
04/07/2020	250959	414	28386	1	11,31	0,24	0,53	0,60
05/07/2020	251373	414	28387	1	11,29	0,24	0,53	0,60
06/07/2020	251789	416	28388	1	11,27	0,24	0,53	0,60
07/07/2020	252130	341	28392	4	11,26	1,17	0,53	0,60
08/07/2020	252513	383	28396	4	11,25	1,04	0,53	0,60
09/07/2020	253056	543	28401	5	11,22	0,92	0,53	0,60
10/07/2020	253908	852	28403	2	11,19	0,23	0,54	0,60
11/07/2020	254610	702	28404	1	11,16	0,14	0,54	0,60
12/07/2020	255210	600	28405	1	11,13	0,17	0,54	0,60
13/07/2020	255953	743	28406	1	11,10	0,13	0,54	0,60
14/07/2020	256019	66	28409	3	11,10	4,55	0,54	0,60
15/07/2020	257494	1475	28413	4	11,03	0,27	0,54	0,60
16/07/2020	258855	1361	28416	3	10,98	0,22	0,55	0,60
17/07/2020	260255	1400	28419	3	10,92	0,21	0,55	0,60
18/07/2020	261826	1571	28419	0	10,85	0,00	0,55	0,60
19/07/2020	263401	1575	28419	0	10,79	0,00	0,56	0,60
20/07/2020	264836	1435	28421	2	10,73	0,14	0,56	0,60
21/07/2020	266194	1358	28424	3	10,68	0,22	0,56	0,60
22/07/2020	267551	1357	28426	2	10,62	0,15	0,57	0,60
23/07/2020	270166	2615	28429	3	10,52	0,11	0,57	0,60
24/07/2020	272421	2255	28431	2	10,44	0,09	0,58	0,60
25/07/2020	273931	1510	28431	0	10,38	0,00	0,58	0,60
26/07/2020	275607	1676	28431	0	10,32	0,00	0,58	0,60
27/07/2020	277801	2194	28431	0	10,23	0,00	0,59	0,60
28/07/2020	278782	981	28433	2	10,20	0,20	0,59	0,60
29/07/2020	282641	3859	28441	8	10,06	0,21	0,60	0,60
30/07/2020	285430	2789	28443	2	9,96	0,07	0,60	0,60
31/07/2020	288522	3092	28445	2	9,86	0,06	0,61	0,60
01/08/2020	291366	2844	28454	9	9,77	0,32	0,62	0,60
02/08/2020	294210	2844	28463	9	9,67	0,32	0,62	0,60
03/08/2020	297054	2844	28472	9	9,58	0,32	0,63	0,60
04/08/2020	302814	5760	28498	26	9,41	0,45	0,64	0,60
05/08/2020	305767	2953	28499	1	9,32	0,03	0,65	0,60
06/08/2020	309855	4088	28503	4	9,20	0,10	0,65	0,60
07/08/2020	314362	4507	28521	18	9,07	0,40	0,66	0,60
08/08/2020	317235	2873	28539	18	9,00	0,63	0,67	0,60
09/08/2020	320108	2873	28557	18	8,92	0,63	0,68	0,60
10/08/2020	322980	2872	28576	19	8,85	0,66	0,68	0,60
11/08/2020	326612	3632	28579	3	8,75	0,08	0,69	0,60
12/08/2020	329789	3177	28581	2	8,67	0,06	0,70	0,60
13/08/2020	337334	7545	28605	24	8,48	0,32	0,71	0,60

FECHA	CONTAGIOS ACUMULADOS	CONTAGIOS DIARIOS	MUERTES ACUMULADAS	MUERTES DIARIAS	MUERTES ACUM. / CONTAGIOS ACUM. (%)	MUERTES DIA. / CONTAGIOS DIA. (%)	Contagios / Población (%)	Muertes / Población (‰)
14/08/2020	342813	5479	28617	12	8,35	0,22	0,72	0,60
15/08/2020	348236	5423	28627	10	8,22	0,18	0,74	0,60
16/08/2020	353659	5423	28637	10	8,10	0,18	0,75	0,61
17/08/2020	359082	5423	28646	9	7,98	0,17	0,76	0,61
18/08/2020	364196	5114	28670	24	7,87	0,47	0,77	0,61
19/08/2020	370867	6671	28797	127	7,76	1,90	0,78	0,61
20/08/2020	377906	7039	28813	16	7,62	0,23	0,80	0,61
21/08/2020	386054	8148	28838	25	7,47	0,31	0,82	0,61
22/08/2020	392515	6461	28849	11	7,35	0,17	0,83	0,61
23/08/2020	398976	6461	28860	11	7,23	0,17	0,84	0,61
24/08/2020	405436	6460	28872	12	7,12	0,19	0,86	0,61
25/08/2020	412553	7117	28924	52	7,01	0,73	0,87	0,61
26/08/2020	419849	7296	28971	47	6,90	0,64	0,89	0,61
27/08/2020	429507	9658	28996	25	6,75	0,26	0,91	0,61
28/08/2020	439286	9779	29011	15	6,60	0,15	0,93	0,61
29/08/2020	447143	7857	29039	28	6,49	0,36	0,94	0,61
30/08/2020	455000	7857	29067	28	6,39	0,36	0,96	0,61
31/08/2020	462858	7858	29094	27	6,29	0,34	0,98	0,61
01/09/2020	470973	8115	29152	58	6,19	0,71	1,00	0,62
02/09/2020	479554	8581	29194	42	6,09	0,49	1,01	0,62
03/09/2020	488513	8959	29234	40	5,98	0,45	1,03	0,62
04/09/2020	498989	10476	29418	184	5,90	1,76	1,05	0,62
05/09/2020	507842	8853	29451	33	5,80	0,37	1,07	0,62
06/09/2020	516695	8853	29484	33	5,71	0,37	1,09	0,62
07/09/2020	525549	8854	29516	32	5,62	0,36	1,11	0,62
08/09/2020	534513	8964	29594	78	5,54	0,87	1,13	0,63
09/09/2020	543379	8866	29628	34	5,45	0,38	1,15	0,63
10/09/2020	554143	10764	29699	71	5,36	0,66	1,17	0,63
11/09/2020	566326	12183	29747	48	5,25	0,39	1,20	0,63
12/09/2020	575461	9135	29781	34	5,18	0,37	1,22	0,63
13/09/2020	584596	9135	29815	34	5,10	0,37	1,24	0,63
14/09/2020	593730	9134	29848	33	5,03	0,36	1,25	0,63
15/09/2020	603167	9437	30004	156	4,97	1,65	1,27	0,63
16/09/2020	614360	11193	30243	239	4,92	2,14	1,30	0,64
17/09/2020	625651	11291	30405	162	4,86	1,43	1,32	0,64
18/09/2020	640040	14389	30495	90	4,76	0,63	1,35	0,64
19/09/2020	650516	10476	30551	56	4,70	0,53	1,37	0,65
20/09/2020	660992	10476	30607	56	4,63	0,53	1,40	0,65
21/09/2020	671468	10476	30663	56	4,57	0,53	1,42	0,65
22/09/2020	682267	10799	30904	241	4,53	2,23	1,44	0,65
23/09/2020	693556	11289	31034	130	4,47	1,15	1,47	0,66
24/09/2020	704209	10653	31118	84	4,42	0,79	1,49	0,66
25/09/2020	716481	12272	31232	114	4,36	0,93	1,51	0,66
26/09/2020	727076	10595	31292	60	4,30	0,57	1,54	0,66
27/09/2020	737671	10595	31352	60	4,25	0,57	1,56	0,66
28/09/2020	748266	10595	31411	59	4,20	0,56	1,58	0,66
29/09/2020	758172	9906	31614	203	4,17	2,05	1,60	0,67
30/09/2020	769188	11016	31791	177	4,13	1,61	1,63	0,67
01/10/2020	788607	19419	31973	182	4,05	0,94	1,67	0,68
02/10/2020	789932	1325	32086	113	4,06	8,53	1,67	0,68
03/10/2020	797759	7827	32132	46	4,03	0,59	1,69	0,68
04/10/2020	805586	7827	32178	46	3,99	0,59	1,70	0,68
05/10/2020	813412	7826	32225	47	3,96	0,60	1,72	0,68
06/10/2020	825410	11998	32486	261	3,94	2,18	1,74	0,69
07/10/2020	835901	10491	32562	76	3,90	0,72	1,77	0,69
08/10/2020	848324	12423	32688	126	3,85	1,01	1,79	0,69
09/10/2020	861112	12788	32929	241	3,82	1,88	1,82	0,70
10/10/2020	870397	9285	32994	65	3,79	0,70	1,84	0,70
11/10/2020	879682	9285	33059	65	3,76	0,70	1,86	0,70
12/10/2020	888968	9286	33124	65	3,73	0,70	1,88	0,70
13/10/2020	896086	7118	33204	80	3,71	1,12	1,89	0,70
14/10/2020	908056	11970	33413	209	3,68	1,75	1,92	0,71
15/10/2020	921374	13318	33553	140	3,64	1,05	1,95	0,71
16/10/2020	936560	15186	33775	222	3,61	1,46	1,98	0,71
17/10/2020	949190	12630	33847	72	3,57	0,57	2,01	0,72
18/10/2020	961820	12630	33919	72	3,53	0,57	2,03	0,72
19/10/2020	974449	12629	33992	73	3,49	0,58	2,06	0,72
20/10/2020	988322	13873	34210	218	3,46	1,57	2,09	0,72
21/10/2020	1005295	16973	34366	156	3,42	0,92	2,12	0,73
22/10/2020	1026281	20986	34521	155	3,36	0,74	2,17	0,73
23/10/2020	1046132	19851	34752	231	3,32	1,16	2,21	0,73
24/10/2020	1063528	17396	34845	93	3,28	0,53	2,25	0,74
25/10/2020	1080924	17396	34938	93	3,23	0,53	2,28	0,74
26/10/2020	1098320	17396	35031	93	3,19	0,53	2,32	0,74
27/10/2020	1116738	18418	35298	267	3,16	1,45	2,36	0,75
28/10/2020	1136503	19765	35466	168	3,12	0,85	2,40	0,75
29/10/2020	1160083	23580	35639	173	3,07	0,73	2,45	0,75
30/10/2020	1185678	25595	35878	239	3,03	0,93	2,50	0,76
31/10/2020	1204018	18340	36004	126	2,99	0,69	2,54	0,76
01/11/2020	1222358	18340	36130	126	2,96	0,69	2,58	0,76
02/11/2020	1240697	18339	36257	127	2,92	0,69	2,62	0,77
03/11/2020	1259366	18669	36495	238	2,90	1,27	2,66	0,77
04/11/2020	1284408	25042	38118	1623	2,97	6,48	2,71	0,81

FECHA	CONTAGIOS ACUMULADOS	CONTAGIOS DIARIOS	MUERTES ACUMULADAS	MUERTES DIARIAS	MUERTES ACUM. / CONTAGIOS ACUM. (%)	MUERTES DIA. / CONTAGIOS DIA. (%)	Contagios / Población (%)	Muertes / Población (‰)
05/11/2020	1306316	21908	38486	368	2,95	1,68	2,76	0,81
06/11/2020	1328832	22516	38833	347	2,92	1,54	2,81	0,82
07/11/2020	1346294	17462	39004	171	2,90	0,98	2,84	0,82
08/11/2020	1363756	17462	39175	171	2,87	0,98	2,88	0,83
09/11/2020	1381218	17462	39345	170	2,85	0,97	2,92	0,83
10/11/2020	1398613	17395	39756	411	2,84	2,36	2,95	0,84
11/11/2020	1417709	19096	40105	349	2,83	1,83	3,00	0,85
12/11/2020	1437220	19511	40461	356	2,82	1,82	3,04	0,85
13/11/2020	1458591	21371	40769	308	2,80	1,44	3,08	0,86
14/11/2020	1471349	12758	41020	251	2,79	1,97	3,11	0,87
15/11/2020	1484107	12758	41271	251	2,78	1,97	3,14	0,87
16/11/2020	1496864	12757	41523	252	2,77	1,98	3,16	0,88
17/11/2020	1510023	13159	41688	165	2,76	1,25	3,19	0,88
18/11/2020	1525341	15318	42039	351	2,76	2,29	3,22	0,89
19/11/2020	1541574	16233	42291	252	2,74	1,55	3,26	0,89
20/11/2020	1556730	15156	42619	328	2,74	2,16	3,29	0,90
21/11/2020	1565359	8629	42790	171	2,73	1,98	3,31	0,90
22/11/2020	1573988	8629	42961	171	2,73	1,98	3,33	0,91
23/11/2020	1582616	8628	43131	170	2,73	1,97	3,34	0,91
24/11/2020	1594844	12228	43668	537	2,74	4,39	3,37	0,92
25/11/2020	1605066	10222	44037	369	2,74	3,61	3,39	0,93
26/11/2020	1617355	12289	44374	337	2,74	2,74	3,42	0,94
27/11/2020	1628208	10853	44668	294	2,74	2,71	3,44	0,94
28/11/2020	1634868	6660	44802	134	2,74	2,01	3,45	0,95
29/11/2020	1641528	6660	44936	134	2,74	2,01	3,47	0,95
30/11/2020	1648187	6659	45069	133	2,73	2,00	3,48	0,95
01/12/2020	1656444	8257	45511	442	2,75	5,35	3,50	0,96
02/12/2020	1665775	9331	45784	273	2,75	2,93	3,52	0,97
03/12/2020	1675902	10127	46038	254	2,75	2,51	3,54	0,97
04/12/2020	1684647	8745	46252	214	2,75	2,45	3,56	0,98
05/12/2020	1690541	5894	46383	131	2,74	2,22	3,57	0,98
06/12/2020	1696435	5894	46514	131	2,74	2,22	3,58	0,98
07/12/2020	1702328	5893	46646	132	2,74	2,24	3,60	0,99
08/12/2020	1707215	4887	46832	186	2,74	3,81	3,61	0,99
09/12/2020	1712101	4886	47019	187	2,75	3,83	3,62	0,99
10/12/2020	1720056	7955	47344	325	2,75	4,09	3,63	1,00
11/12/2020	1730575	10519	47624	280	2,75	2,66	3,66	1,01
12/12/2020	1737678	7103	47754	130	2,75	1,83	3,67	1,01
13/12/2020	1744781	7103	47884	130	2,74	1,83	3,69	1,01
14/12/2020	1751884	7103	48013	129	2,74	1,82	3,70	1,01
15/12/2020	1762212	10328	48401	388	2,75	3,76	3,72	1,02
16/12/2020	1773290	11078	48596	195	2,74	1,76	3,75	1,03
17/12/2020	1785421	12131	48777	181	2,73	1,49	3,77	1,03
18/12/2020	1797236	11815	48926	149	2,72	1,26	3,80	1,03
19/12/2020	1804574	7338	49037	111	2,72	1,51	3,81	1,04
20/12/2020	1811912	7338	49148	111	2,71	1,51	3,83	1,04
21/12/2020	1819249	7337	49260	112	2,71	1,53	3,84	1,04
22/12/2020	1829903	10654	49520	260	2,71	2,44	3,87	1,05
23/12/2020	1842289	12386	49698	178	2,70	1,44	3,89	1,05
24/12/2020	1854951	12662	49824	126	2,69	1,00	3,92	1,05
25/12/2020	1861067	6116	49899	75	2,68	1,23	3,93	1,05
26/12/2020	1867182	6115	49973	74	2,68	1,21	3,94	1,06
27/12/2020	1873298	6116	50048	75	2,67	1,23	3,96	1,06
28/12/2020	1879413	6115	50122	74	2,67	1,21	3,97	1,06
29/12/2020	1893502	14089	50442	320	2,66	2,27	4,00	1,07
30/12/2020	1910218	16716	50689	247	2,65	1,48	4,04	1,07
31/12/2020	1928265	18047	50837	148	2,64	0,82	4,07	1,07
01/01/2021	1935910	7645	50897	60	2,63	0,78	4,08	1,08
02/01/2021	1943555	7645	50957	60	2,62	0,78	4,10	1,08
03/01/2021	1951200	7645	51017	60	2,61	0,78	4,12	1,08
04/01/2021	1958844	7644	51078	61	2,61	0,80	4,13	1,08
05/01/2021	1982544	23700	51430	352	2,59	1,49	4,18	1,09
06/01/2021	2003724	21180	51553	123	2,57	0,58	4,23	1,09
07/01/2021	2024904	21180	51675	122	2,55	0,58	4,27	1,09
08/01/2021	2050360	25456	51874	199	2,53	0,78	4,33	1,10
09/01/2021	2070834	20474	52008	134	2,51	0,65	4,37	1,10
10/01/2021	2091308	20474	52142	134	2,49	0,65	4,41	1,10
11/01/2021	2111782	20474	52275	133	2,48	0,65	4,46	1,10
12/01/2021	2137220	25438	52683	408	2,47	1,60	4,51	1,11
13/01/2021	2176089	38869	52878	195	2,43	0,50	4,59	1,12
14/01/2021	2211967	35878	53079	201	2,40	0,56	4,67	1,12
15/01/2021	2252164	40197	53314	235	2,37	0,58	4,75	1,13
16/01/2021	2280260	28096	53466	152	2,34	0,54	4,81	1,13
17/01/2021	2308356	28096	53618	152	2,32	0,54	4,87	1,13
18/01/2021	2336451	28095	53769	151	2,30	0,54	4,93	1,14
19/01/2021	2370742	34291	54173	404	2,29	1,18	5,00	1,14
20/01/2021	2412318	41576	54637	464	2,26	1,12	5,09	1,15
21/01/2021	2456675	44357	55041	404	2,24	0,91	5,18	1,16
22/01/2021	2499560	42885	55333	292	2,21	0,68	5,27	1,17
23/01/2021	2530834	31274	55625	292	2,20	0,93	5,34	1,18
24/01/2021	2562108	31274	55917	292	2,18	0,93	5,41	1,18
25/01/2021	2593382	31274	56208	291	2,17	0,93	5,47	1,19
26/01/2021	2629817	36435	56799	591	2,16	1,62	5,55	1,20

FECHA	CONTAGIOS ACUMULADOS	CONTAGIOS DIARIOS	MUERTES ACUMULADAS	MUERTES DIARIAS	MUERTES ACUM. / CONTAGIOS ACUM. (%)	MUERTES DIA. / CONTAGIOS DIA. (%)	Contagios / Población (%)	Muertes / Población (‰)
27/01/2021	2670102	40285	57291	492	2,15	1,22	5,63	1,21
28/01/2021	2705001	34899	57806	515	2,14	1,48	5,71	1,22
29/01/2021	2743119	38118	58319	513	2,13	1,35	5,79	1,23
30/01/2021	2769681	26562	58573	254	2,11	0,96	5,84	1,24
31/01/2021	2796243	26562	58827	254	2,10	0,96	5,90	1,24
01/02/2021	2822805	26562	59081	254	2,09	0,96	5,96	1,25
02/02/2021	2851869	29064	59805	724	2,10	2,49	6,02	1,26
03/02/2021	2883465	31596	60370	565	2,09	1,79	6,08	1,28
04/02/2021	2913425	29960	60802	432	2,09	1,44	6,15	1,28
05/02/2021	2941990	28565	61386	584	2,09	2,04	6,21	1,30
06/02/2021	2957688	15698	61689	303	2,09	1,93	6,24	1,30
07/02/2021	2973386	15698	61992	303	2,08	1,93	6,27	1,31
08/02/2021	2989085	15699	62295	303	2,08	1,93	6,31	1,32
09/02/2021	3005487	16402	63061	766	2,10	4,67	6,34	1,33
10/02/2021	3023601	18114	63704	643	2,11	3,55	6,38	1,35
11/02/2021	3041454	17853	64217	513	2,11	2,87	6,42	1,36
12/02/2021	3056035	14581	64747	530	2,12	3,63	6,45	1,37
13/02/2021	3066119	10084	64981	234	2,12	2,32	6,47	1,37
14/02/2021	3076203	10084	65215	234	2,12	2,32	6,49	1,38
15/02/2021	3086286	10083	65449	234	2,12	2,32	6,51	1,38
16/02/2021	3096343	10057	65979	530	2,13	5,27	6,53	1,39
17/02/2021	3107172	10829	66316	337	2,13	3,11	6,56	1,40
18/02/2021	3121687	14515	66704	388	2,14	2,67	6,59	1,41
19/02/2021	3130184	8497	67101	397	2,14	4,67	6,60	1,42
20/02/2021	3130695	511	67279	178	2,15	34,83	6,61	1,42
21/02/2021	3131207	512	67457	178	2,15	34,77	6,61	1,43
22/02/2021	3131718	511	67636	179	2,16	35,03	6,61	1,43
23/02/2021	3132230	512	68079	443	2,17	86,52	6,61	1,44
24/02/2021	3132741	511	68468	389	2,19	76,13	6,61	1,45
25/02/2021	3133253	512	68813	345	2,20	67,38	6,61	1,45
26/02/2021	3133764	511	69142	329	2,21	64,38	6,61	1,46
27/02/2021	3134276	512	69298	156	2,21	30,47	6,61	1,46
28/02/2021	3134787	511	69454	156	2,22	30,53	6,61	1,47
01/03/2021	3135299	512	69609	155	2,22	30,27	6,61	1,47
02/03/2021	3135810	511	69801	192	2,23	37,57	6,62	1,47
03/03/2021	3136321	511	70247	446	2,24	87,28	6,62	1,48
04/03/2021	3142358	6037	70501	254	2,24	4,21	6,63	1,49
05/03/2021	3149012	6654	71138	637	2,26	9,57	6,64	1,50
06/03/2021	3152998	3986	71237	99	2,26	2,48	6,65	1,51
07/03/2021	3156984	3986	71336	99	2,26	2,48	6,66	1,51
08/03/2021	3160970	3986	71436	100	2,26	2,51	6,67	1,51
09/03/2021	3164983	4013	71727	291	2,27	7,25	6,68	1,52
10/03/2021	3172101	7118	71919	192	2,27	2,70	6,69	1,52
11/03/2021	3178356	6255	72085	166	2,27	2,65	6,71	1,52
12/03/2021	3183704	5348	72258	173	2,27	3,23	6,72	1,53
13/03/2021	3187490	3786	72313	55	2,27	1,45	6,72	1,53
14/03/2021	3191276	3786	72368	55	2,27	1,45	6,73	1,53
15/03/2021	3195062	3786	72424	56	2,27	1,48	6,74	1,53
16/03/2021	3200024	4962	72565	141	2,27	2,84	6,75	1,53
17/03/2021	3206116	6092	72793	228	2,27	3,74	6,76	1,54
18/03/2021	3212332	6216	72910	117	2,27	1,88	6,78	1,54
19/03/2021	3216450	4118	73068	158	2,27	3,84	6,79	1,54
20/03/2021	3220568	4118	73226	158	2,27	3,84	6,79	1,55
21/03/2021	3224686	4118	73384	158	2,28	3,84	6,80	1,55
22/03/2021	3228803	4117	73543	159	2,28	3,86	6,81	1,55
23/03/2021	3234319	5516	73744	201	2,28	3,64	6,82	1,56
24/03/2021	3241345	7026	74064	320	2,28	4,55	6,84	1,56
25/03/2021	3247738	6393	74420	356	2,29	5,57	6,85	1,57
26/03/2021	3255324	7586	75010	590	2,30	7,78	6,87	1,58
27/03/2021	3260491	5167	75073	63	2,30	1,22	6,88	1,59
28/03/2021	3265658	5167	75136	63	2,30	1,22	6,89	1,59
29/03/2021	3270825	5167	75199	63	2,30	1,22	6,90	1,59
30/03/2021	3275819	4994	75305	106	2,30	2,12	6,91	1,59
31/03/2021	3284353	8534	75459	154	2,30	1,80	6,93	1,59
01/04/2021	3291394	7041	75541	82	2,30	1,16	6,94	1,60
02/04/2021	3296180	4786	75620	79	2,29	1,65	6,95	1,60
03/04/2021	3300965	4785	75698	78	2,29	1,63	6,96	1,60
04/04/2021	3306145	5180	75740	42	2,29	0,81	6,98	1,60
05/04/2021	3311325	5180	75783	43	2,29	0,83	6,99	1,60
06/04/2021	3317948	6623	75911	128	2,29	1,93	7,00	1,60
07/04/2021	3326736	8788	76037	126	2,29	1,43	7,02	1,61
08/04/2021	3336637	9901	76179	142	2,28	1,43	7,04	1,61
09/04/2021	3347512	10875	76253	74	2,28	0,68	7,06	1,61
10/04/2021	3355093	7581	76328	75	2,27	0,99	7,08	1,61
11/04/2021	3362674	7581	76426	98	2,27	1,29	7,09	1,61
12/04/2021	3370256	7582	76525	99	2,27	1,31	7,11	1,62
13/04/2021	3376548	6292	76625	100	2,27	1,59	7,12	1,62
14/04/2021	3387022	10474	76756	131	2,27	1,25	7,15	1,62
15/04/2021	3396685	9663	76882	126	2,26	1,30	7,17	1,62
16/04/2021	3407283	10598	76981	99	2,26	0,93	7,19	1,63
17/04/2021	3414307	7024	77021	40	2,26	0,57	7,20	1,63
18/04/2021	3421331	7024	77061	40	2,25	0,57	7,22	1,63
19/04/2021	3428354	7023	77102	41	2,25	0,58	7,23	1,63

FECHA	CONTAGIOS ACUMULADOS	CONTAGIOS DIARIOS	MUERTES ACUMULADAS	MUERTES DIARIAS	MUERTES ACUM. / CONTAGIOS ACUM. (%)	MUERTES DIA. / CONTAGIOS DIA. (%)	Contagios / Población (%)	Muertes / Población (‰)
20/04/2021	3435830	7476	77216	114	2,25	1,52	7,25	1,63
21/04/2021	3446072	10242	77364	148	2,24	1,45	7,27	1,63
22/04/2021	3456886	10814	77496	132	2,24	1,22	7,29	1,64
23/04/2021	3468617	11731	77591	95	2,24	0,81	7,32	1,64
24/04/2021	3475234	6617	77640	49	2,23	0,74	7,33	1,64
25/04/2021	3481851	6617	77689	49	2,23	0,74	7,35	1,64
26/04/2021	3488469	6618	77738	49	2,23	0,74	7,36	1,64
27/04/2021	3496134	7665	77855	117	2,23	1,53	7,38	1,64
28/04/2021	3504799	8665	77943	88	2,22	1,02	7,39	1,65
29/04/2021	3514942	10143	78080	137	2,22	1,35	7,42	1,65
30/04/2021	3524077	9135	78216	136	2,22	1,49	7,43	1,65
01/05/2021	3529528	5451	78241	25	2,22	0,46	7,45	1,65
02/05/2021	3534979	5451	78267	26	2,21	0,48	7,46	1,65
03/05/2021	3540430	5451	78293	26	2,21	0,48	7,47	1,65
04/05/2021	3544945	4515	78399	106	2,21	2,35	7,48	1,66
05/05/2021	3551262	6317	78566	167	2,21	2,64	7,49	1,66
06/05/2021	3567408	16146	78726	160	2,21	0,99	7,53	1,66
07/05/2021	3570904	3496	78792	66	2,21	1,89	7,53	1,66
08/05/2021	3574400	3496	78826	34	2,21	0,97	7,54	1,67
09/05/2021	3577896	3496	78860	34	2,20	0,97	7,55	1,67
10/05/2021	3581392	3496	78895	35	2,20	1,00	7,56	1,67
11/05/2021	3586333	4941	79100	205	2,21	4,15	7,57	1,67
12/05/2021	3592751	6418	79208	108	2,20	1,68	7,58	1,67
13/05/2021	3598452	5701	79281	73	2,20	1,28	7,59	1,67
14/05/2021	3604799	6347	79339	58	2,20	0,91	7,61	1,68
15/05/2021	3608486	3687	79370	31	2,20	0,84	7,61	1,68
16/05/2021	3612173	3687	79401	31	2,20	0,84	7,62	1,68
17/05/2021	3615860	3687	79432	31	2,20	0,84	7,63	1,68
18/05/2021	3619848	3988	79502	70	2,20	1,76	7,64	1,68
19/05/2021	3625928	6080	79568	66	2,19	1,09	7,65	1,68
20/05/2021	3631661	5733	79601	33	2,19	0,58	7,66	1,68
21/05/2021	3636453	4792	79620	19	2,19	0,40	7,67	1,68
22/05/2021	3640142	3689	79650	30	2,19	0,81	7,68	1,68
23/05/2021	3643831	3689	79680	30	2,19	0,81	7,69	1,68
24/05/2021	3647520	3689	79711	31	2,19	0,84	7,70	1,68
25/05/2021	3652879	5359	79801	90	2,18	1,68	7,71	1,69
26/05/2021	3657886	5007	79855	54	2,18	1,08	7,72	1,69
27/05/2021	3663176	5290	79888	33	2,18	0,62	7,73	1,69
28/05/2021	3668658	5482	79905	17	2,18	0,31	7,74	1,69
29/05/2021	3671902	3244	79921	16	2,18	0,49	7,75	1,69
30/05/2021	3675146	3244	79937	16	2,18	0,49	7,75	1,69
31/05/2021	3678390	3244	79953	16	2,17	0,49	7,76	1,69
01/06/2021	3682778	4388	79983	30	2,17	0,68	7,77	1,69
02/06/2021	3687762	4984	80049	66	2,17	1,32	7,78	1,69
03/06/2021	3693012	5250	80099	50	2,17	0,95	7,79	1,69
04/06/2021	3697987	4975	80196	97	2,17	1,95	7,80	1,69
05/06/2021	3701166	3179	80209	13	2,17	0,41	7,81	1,69
06/06/2021	3704345	3179	80222	13	2,17	0,41	7,82	1,69
07/06/2021	3707523	3178	80236	14	2,16	0,44	7,82	1,70
08/06/2021	3711027	3504	80309	73	2,16	2,08	7,83	1,70
09/06/2021	3715454	4427	80332	23	2,16	0,52	7,84	1,70
10/06/2021	3729458	14004	80465	133	2,16	0,95	7,87	1,70
11/06/2021	3733600	4142	80501	36	2,16	0,87	7,88	1,70
12/06/2021	3736322	2722	80506	5	2,15	0,18	7,88	1,70
13/06/2021	3739044	2722	80511	5	2,15	0,18	7,89	1,70
14/06/2021	3741767	2723	80517	6	2,15	0,22	7,89	1,70
15/06/2021	3745199	3432	80566	49	2,15	1,43	7,90	1,70
16/06/2021	3749031	3832	80615	49	2,15	1,28	7,91	1,70
17/06/2021	3753228	4197	80634	19	2,15	0,45	7,92	1,70
18/06/2021	3757442	4214	80652	18	2,15	0,43	7,93	1,70
19/06/2021	3759845	2403	80664	12	2,15	0,50	7,93	1,70
20/06/2021	3762248	2403	80676	12	2,14	0,50	7,94	1,70
21/06/2021	3764651	2403	80689	13	2,14	0,54	7,94	1,70
22/06/2021	3768691	4040	80719	30	2,14	0,74	7,95	1,71
23/06/2021	3773032	4341	80748	29	2,14	0,67	7,96	1,71
24/06/2021	3777539	4507	80766	18	2,14	0,40	7,97	1,71
25/06/2021	3782463	4924	80779	13	2,14	0,26	7,98	1,71
26/06/2021	3785856	3393	80782	3	2,13	0,09	7,99	1,71
27/06/2021	3789249	3393	80785	3	2,13	0,09	7,99	1,71
28/06/2021	3792642	3393	80789	4	2,13	0,12	8,00	1,71
29/06/2021	3799733	7091	80829	40	2,13	0,56	8,02	1,71
30/06/2021	3808960	9227	80875	46	2,12	0,50	8,04	1,71
01/07/2021	3821305	12345	80883	8	2,12	0,06	8,06	1,71
02/07/2021	3833868	12563	80911	28	2,11	0,22	8,09	1,71
03/07/2021	3844737	10869	80919	8	2,10	0,07	8,11	1,71
04/07/2021	3855606	10869	80927	8	2,10	0,07	8,13	1,71
05/07/2021	3866475	10869	80934	7	2,09	0,06	8,16	1,71
06/07/2021	3880612	14137	80952	18	2,09	0,13	8,19	1,71
07/07/2021	3897996	17384	80969	17	2,08	0,10	8,22	1,71
08/07/2021	3915313	17317	80997	28	2,07	0,16	8,26	1,71
09/07/2021	3937192	21879	81003	6	2,06	0,03	8,31	1,71
10/07/2021	3948503	11311	81018	15	2,05	0,13	8,33	1,71
11/07/2021	3959814	11311	81033	15	2,05	0,13	8,35	1,71

FECHA	CONTAGIOS ACUMULADOS	CONTAGIOS DIARIOS	MUERTES ACUMULADAS	MUERTES DIARIAS	MUERTES ACUM. / CONTAGIOS ACUM. (%)	MUERTES DIA. / CONTAGIOS DIA. (%)	Contagios / Población (%)	Muertes / Población (‰)
12/07/2021	3971124	11310	81036	3	2,04	0,03	8,38	1,71
13/07/2021	4015084	43960	81039	3	2,02	0,01	8,47	1,71
14/07/2021	4041474	26390	81043	4	2,01	0,02	8,53	1,71
15/07/2021	4069162	27688	81084	41	1,99	0,15	8,58	1,71
16/07/2021	4100222	31060	81096	12	1,98	0,04	8,65	1,71
17/07/2021	4120764	20542	81104	8	1,97	0,04	8,69	1,71
18/07/2021	4141307	20543	81112	8	1,96	0,04	8,74	1,71
19/07/2021	4161850	20543	81119	7	1,95	0,03	8,78	1,71
20/07/2021	4189136	27286	81148	29	1,94	0,11	8,84	1,71
21/07/2021	4219723	30587	81166	18	1,92	0,06	8,90	1,71
22/07/2021	4249258	29535	81194	28	1,91	0,09	8,96	1,72
23/07/2021	4280429	31171	81221	27	1,90	0,09	9,03	1,72
24/07/2021	4300971	20542	81237	16	1,89	0,08	9,07	1,72
25/07/2021	4321513	20542	81253	16	1,88	0,08	9,12	1,72
26/07/2021	4342054	20541	81268	15	1,87	0,07	9,16	1,72
27/07/2021	4368453	26399	81323	55	1,86	0,21	9,22	1,72
28/07/2021	4395602	27149	81396	73	1,85	0,27	9,27	1,72
29/07/2021	4422291	26689	81442	46	1,84	0,17	9,33	1,72
30/07/2021	4447044	24753	81486	44	1,83	0,18	9,38	1,72
31/07/2021	4465690	18646	81538	52	1,83	0,28	9,42	1,72
01/08/2021	4484336	18646	81590	52	1,82	0,28	9,46	1,72
02/08/2021	4502983	18647	81643	53	1,81	0,28	9,50	1,72
03/08/2021	4523310	20327	81773	130	1,81	0,64	9,54	1,73
04/08/2021	4545184	21874	81844	71	1,80	0,32	9,59	1,73
05/08/2021	4566571	21387	81931	87	1,79	0,41	9,63	1,73
06/08/2021	4588132	21561	82006	75	1,79	0,35	9,68	1,73
07/08/2021	4601345	13213	82046	40	1,78	0,30	9,71	1,73
08/08/2021	4614558	13213	82086	40	1,78	0,30	9,74	1,73
09/08/2021	4627770	13212	82125	39	1,77	0,30	9,76	1,74
10/08/2021	4643450	15680	82277	152	1,77	0,97	9,80	1,74
11/08/2021	4660473	17023	82320	43	1,77	0,25	9,83	1,74
12/08/2021	4677883	17410	82407	87	1,76	0,50	9,87	1,74
13/08/2021	4693540	15657	82470	63	1,76	0,40	9,90	1,74
14/08/2021	4702115	8575	82512	42	1,75	0,49	9,92	1,74
15/08/2021	4710690	8575	82554	42	1,75	0,49	9,94	1,74
16/08/2021	4719266	8576	82595	41	1,75	0,48	9,96	1,74
17/08/2021	4733602	14336	82739	144	1,75	1,00	9,99	1,75
18/08/2021	4745558	11956	82883	144	1,75	1,20	10,01	1,75
19/08/2021	4758003	12445	83004	121	1,74	0,97	10,04	1,75
20/08/2021	4770453	12450	83136	132	1,74	1,06	10,06	1,76
21/08/2021	4778419	7966	83203	67	1,74	0,84	10,08	1,76
22/08/2021	4786385	7966	83270	67	1,74	0,84	10,10	1,76
23/08/2021	4794352	7967	83337	67	1,74	0,84	10,11	1,76
24/08/2021	4804424	10072	83527	190	1,74	1,89	10,14	1,76
25/08/2021	4815205	10781	83690	163	1,74	1,51	10,16	1,77
26/08/2021	4822320	7115	83861	171	1,74	2,40	10,17	1,77
27/08/2021	4831809	9489	84000	139	1,74	1,46	10,19	1,77
28/08/2021	4836972	5163	84049	49	1,74	0,95	10,20	1,78
29/08/2021	4842135	5163	84098	49	1,74	0,95	10,22	1,78
30/08/2021	4847298	5163	84146	48	1,74	0,93	10,23	1,78
31/08/2021	4855065	7767	84340	194	1,74	2,50	10,24	1,78
01/09/2021	4861883	6818	84472	132	1,74	1,94	10,26	1,78
02/09/2021	4871444	9561	84640	168	1,74	1,76	10,28	1,79
03/09/2021	4877755	6311	84795	155	1,74	2,46	10,29	1,79
04/09/2021	4880968	3213	84839	44	1,74	1,37	10,30	1,79
05/09/2021	4884181	3213	84883	44	1,74	1,37	10,30	1,79
06/09/2021	4887394	3213	84928	45	1,74	1,40	10,31	1,79
07/09/2021	4892640	5246	85066	138	1,74	2,63	10,32	1,80
08/09/2021	4898258	5618	85147	81	1,74	1,44	10,33	1,80
09/09/2021	4903021	4763	85218	71	1,74	1,49	10,34	1,80
10/09/2021	4907461	4440	85290	72	1,74	1,62	10,35	1,80
11/09/2021	4910062	2601	85324	34	1,74	1,31	10,36	1,80
12/09/2021	4912663	2601	85358	34	1,74	1,31	10,36	1,80
13/09/2021	4915265	2602	85393	35	1,74	1,35	10,37	1,80
14/09/2021	4918526	3261	85548	155	1,74	4,75	10,38	1,81
15/09/2021	4922249	3723	85638	90	1,74	2,42	10,38	1,81
16/09/2021	4926324	4075	85739	101	1,74	2,48	10,39	1,81
17/09/2021	4929546	3222	85783	44	1,74	1,37	10,40	1,81
18/09/2021	4931542	1996	85822	39	1,74	1,95	10,40	1,81
19/09/2021	4933538	1996	85861	39	1,74	1,95	10,41	1,81
20/09/2021	4935534	1996	85901	40	1,74	2,00	10,41	1,81
21/09/2021	4937984	2450	85983	82	1,74	3,35	10,42	1,82
22/09/2021	4940824	2840	86085	102	1,74	3,59	10,42	1,82
23/09/2021	4943855	3031	86185	100	1,74	3,30	10,43	1,82
24/09/2021	4946601	2746	86229	44	1,74	1,60	10,44	1,82
25/09/2021	4948281	1680	86252	23	1,74	1,37	10,44	1,82
26/09/2021	4949961	1680	86275	23	1,74	1,37	10,44	1,82
27/09/2021	4951640	1679	86298	23	1,74	1,37	10,45	1,82
28/09/2021	4953930	2290	86358	60	1,74	2,62	10,45	1,82
29/09/2021	4956691	2761	86397	39	1,74	1,41	10,46	1,83
30/09/2021	4959091	2400	86415	18	1,74	0,75	10,46	1,83
01/10/2021	4961128	2037	86463	48	1,74	2,36	10,47	1,83
02/10/2021	4962552	1424	86484	21	1,74	1,47	10,47	1,83

FECHA	CONTAGIOS ACUMULADOS	CONTAGIOS DIARIOS	MUERTES ACUMULADAS	MUERTES DIARIAS	MUERTES ACUM. / CONTAGIOS ACUM. (%)	MUERTES DIA. / CONTAGIOS DIA. (%)	Contagios / Población (%)	Muertes / Población (‰)
03/10/2021	4963976	1424	86505	21	1,74	1,47	10,47	1,83
04/10/2021	4965399	1423	86527	22	1,74	1,55	10,48	1,83
05/10/2021	4967200	1801	86621	94	1,74	5,22	10,48	1,83
06/10/2021	4969503	2303	86678	57	1,74	2,48	10,48	1,83
07/10/2021	4971310	1807	86701	23	1,74	1,27	10,49	1,83
08/10/2021	4973619	2309	86778	77	1,74	3,33	10,49	1,83
09/10/2021	4974895	1276	86794	16	1,74	1,25	10,50	1,83
10/10/2021	4976171	1276	86810	16	1,74	1,25	10,50	1,83
11/10/2021	4977448	1277	86827	17	1,74	1,33	10,50	1,83
12/10/2021	4978827	1379	86848	21	1,74	1,52	10,50	1,83
13/10/2021	4980206	1379	86869	21	1,74	1,52	10,51	1,84
14/10/2021	4982138	1932	86917	48	1,74	2,48	10,51	1,84
15/10/2021	4984386	2248	86974	57	1,74	2,54	10,52	1,84
16/10/2021	4985883	1497	86993	19	1,74	1,27	10,52	1,84
17/10/2021	4987380	1497	87012	19	1,74	1,27	10,52	1,84
18/10/2021	4988878	1498	87030	18	1,74	1,20	10,53	1,84
19/10/2021	4990767	1889	87051	21	1,74	1,11	10,53	1,84
20/10/2021	4993295	2528	87082	31	1,74	1,23	10,53	1,84
21/10/2021	4995176	1881	87102	20	1,74	1,06	10,54	1,84
22/10/2021	4997732	2556	87132	30	1,74	1,17	10,54	1,84
23/10/2021	4999227	1495	87150	18	1,74	1,20	10,55	1,84
24/10/2021	5000722	1495	87168	18	1,74	1,20	10,55	1,84
25/10/2021	5002217	1495	87186	18	1,74	1,20	10,55	1,84
26/10/2021	5004143	1926	87238	52	1,74	2,70	10,56	1,84
27/10/2021	5006675	2532	87289	51	1,74	2,01	10,56	1,84
28/10/2021	5008887	2212	87322	33	1,74	1,49	10,57	1,84
29/10/2021	5011148	2261	87368	46	1,74	2,03	10,57	1,85
30/10/2021	5012603	1455	87382	14	1,74	0,96	10,58	1,85
31/10/2021	5014058	1455	87396	14	1,74	0,96	10,58	1,85
01/11/2021	5015513	1455	87409	13	1,74	0,89	10,58	1,85
02/11/2021	5016968	1455	87423	14	1,74	0,96	10,58	1,85
03/11/2021	5019255	2287	87462	39	1,74	1,71	10,59	1,85
04/11/2021	5022546	3291	87477	15	1,74	0,46	10,60	1,85
05/11/2021	5025639	3093	87504	27	1,74	0,87	10,60	1,85
06/11/2021	5027778	2139	87522	18	1,74	0,84	10,61	1,85
07/11/2021	5029917	2139	87540	18	1,74	0,84	10,61	1,85
08/11/2021	5032056	2139	87558	18	1,74	0,84	10,62	1,85
09/11/2021	5035287	3231	87588	30	1,74	0,93	10,62	1,85
10/11/2021	5038517	3230	87617	29	1,74	0,90	10,63	1,85
11/11/2021	5042803	4286	87647	30	1,74	0,70	10,64	1,85
12/11/2021	5047156	4353	87673	26	1,74	0,60	10,65	1,85
13/11/2021	5050422	3266	87687	14	1,74	0,43	10,66	1,85
14/11/2021	5053688	3266	87701	14	1,74	0,43	10,66	1,85
15/11/2021	5056954	3266	87716	15	1,73	0,46	10,67	1,85
16/11/2021	5061045	4091	87745	29	1,73	0,71	10,68	1,85
17/11/2021	5067712	6667	87775	30	1,73	0,45	10,69	1,85
18/11/2021	5074027	6315	87804	29	1,73	0,46	10,70	1,86
19/11/2021	5080663	6636	87810	6	1,73	0,09	10,72	1,86
20/11/2021	5085955	5292	87817	7	1,73	0,13	10,73	1,86
21/11/2021	5091247	5292	87824	7	1,72	0,13	10,74	1,86
22/11/2021	5096538	5291	87832	8	1,72	0,15	10,75	1,86
23/11/2021	5103315	6777	87866	34	1,72	0,50	10,77	1,86
24/11/2021	5111842	8527	87904	38	1,72	0,45	10,78	1,86
25/11/2021	5121100	9258	87931	27	1,72	0,29	10,80	1,86
26/11/2021	5131012	9912	87955	24	1,71	0,24	10,83	1,86
27/11/2021	5138649	7637	87973	18	1,71	0,24	10,84	1,86
28/11/2021	5146286	7637	87991	18	1,71	0,24	10,86	1,86
29/11/2021	5153923	7637	88008	17	1,71	0,22	10,87	1,86
30/11/2021	5164184	10261	88052	44	1,71	0,43	10,90	1,86
01/12/2021	5174720	10536	88080	28	1,70	0,27	10,92	1,86
02/12/2021	5189220	14500	88122	42	1,70	0,29	10,95	1,86
03/12/2021	5202953	13733	88159	37	1,69	0,27	10,98	1,86
04/12/2021	5213906	10953	88178	19	1,69	0,17	11,00	1,86
05/12/2021	5224859	10953	88198	20	1,69	0,18	11,02	1,86
06/12/2021	5235812	10953	88217	19	1,68	0,17	11,05	1,86
07/12/2021	5246766	10954	88237	20	1,68	0,18	11,07	1,86
08/12/2021	5259972	13206	88279	42	1,68	0,32	11,10	1,87
09/12/2021	5273178	13206	88321	42	1,67	0,32	11,13	1,87
10/12/2021	5290190	17012	88381	60	1,67	0,35	11,16	1,87
11/12/2021	5306791	16601	88415	34	1,67	0,20	11,20	1,87
12/12/2021	5323392	16601	88449	34	1,66	0,20	11,23	1,87
13/12/2021	5339992	16600	88484	35	1,66	0,21	11,27	1,87
14/12/2021	5366128	26136	88542	58	1,65	0,22	11,32	1,87
15/12/2021	5393268	27140	88619	77	1,64	0,28	11,38	1,87
16/12/2021	5422168	28900	88667	48	1,64	0,17	11,44	1,87
17/12/2021	5455527	33359	88708	41	1,63	0,12	11,51	1,87
18/12/2021	5482095	26568	88736	28	1,62	0,11	11,57	1,87
19/12/2021	5508663	26568	88764	28	1,61	0,11	11,62	1,88
20/12/2021	5535231	26568	88793	29	1,60	0,11	11,68	1,88
21/12/2021	5585054	49823	88887	94	1,59	0,19	11,78	1,88
22/12/2021	5645095	60041	88937	50	1,58	0,08	11,91	1,88
23/12/2021	5718007	72912	89019	82	1,56	0,11	12,06	1,88
24/12/2021	5771662	53655	89049	30	1,54	0,06	12,18	1,88

FECHA	CONTAGIOS ACUMULADOS	CONTAGIOS DIARIOS	MUERTES ACUMULADAS	MUERTES DIARIAS	MUERTES ACUM. / CONTAGIOS ACUM. (%)	MUERTES DIA. / CONTAGIOS DIA. (%)	Contagios / Población (%)	Muertes / Población (‰)
25/12/2021	5825317	53655	89079	30	1,53	0,06	12,29	1,88
26/12/2021	5878972	53655	89109	30	1,52	0,06	12,40	1,88
27/12/2021	5932626	53654	89139	30	1,50	0,06	12,52	1,88
28/12/2021	6032297	99671	89253	114	1,48	0,11	12,73	1,89
29/12/2021	6133057	100760	89331	78	1,46	0,08	12,94	1,89
30/12/2021	6294745	161688	89405	74	1,42	0,05	13,28	1,89
31/12/2021	6387937	93192	89447	42	1,40	0,05	13,48	1,89
01/01/2022	6481128	93191	89489	42	1,38	0,05	13,66	1,89
02/01/2022	6574320	93192	89531	42	1,36	0,05	13,86	1,89
03/01/2022	6667511	93191	89573	42	1,34	0,05	14,06	1,89
04/01/2022	6785286	117775	89689	116	1,32	0,10	14,31	1,89
05/01/2022	6922466	137180	89837	148	1,30	0,11	14,59	1,90
06/01/2022	7043686	121220	89900	63	1,28	0,05	14,85	1,90
07/01/2022	7164906	121220	89934	34	1,26	0,03	15,11	1,90
08/01/2022	7262371	97465	90001	67	1,24	0,07	15,31	1,90
09/01/2022	7359836	97465	90068	67	1,22	0,07	15,52	1,90
10/01/2022	7457300	97464	90136	68	1,21	0,07	15,72	1,90
11/01/2022	7592242	134942	90383	247	1,19	0,18	16,01	1,91
12/01/2022	7771367	179125	90508	125	1,16	0,07	16,38	1,91
13/01/2022	7930528	159161	90620	112	1,14	0,07	16,72	1,91
14/01/2022	8093036	162508	90759	139	1,12	0,09	17,06	1,92
15/01/2022	8203525	110489	90837	78	1,11	0,07	17,30	1,92
16/01/2022	8314014	110489	90915	78	1,09	0,07	17,53	1,92
17/01/2022	8424503	110489	90993	78	1,08	0,07	17,76	1,92
18/01/2022	8518975	94472	91277	284	1,07	0,30	17,96	1,93
19/01/2022	8676916	157941	91437	160	1,05	0,10	18,29	1,93
20/01/2022	8834363	157447	91599	162	1,04	0,10	18,63	1,94
21/01/2022	8975458	141095	91741	142	1,02	0,10	18,92	1,94
22/01/2022	9077269	101811	91825	84	1,01	0,08	19,14	1,94
23/01/2022	9179080	101811	91909	84	1,00	0,08	19,35	1,94
24/01/2022	9280890	101810	91994	85	0,99	0,08	19,57	1,94
25/01/2022	9395767	114877	92376	382	0,98	0,33	19,81	1,95
26/01/2022	9529320	133553	92591	215	0,97	0,16	20,09	1,96
27/01/2022	9660208	130888	92767	176	0,96	0,13	20,37	1,96
28/01/2022	9779130	118922	92966	199	0,95	0,17	20,62	1,96
29/01/2022	9839838	60708	93052	86	0,95	0,14	20,74	1,97
30/01/2022	9900546	60708	93138	86	0,94	0,14	20,87	1,97
31/01/2022	9961253	60707	93225	87	0,94	0,14	21,00	1,97
01/02/2022	10039126	77873	93633	408	0,93	0,52	21,16	1,98
02/02/2022	10125348	86222	93857	224	0,93	0,26	21,35	1,98
03/02/2022	10199716	74368	94040	183	0,92	0,25	21,50	1,99
04/02/2022	10274653	74937	94235	195	0,92	0,26	21,66	1,99
05/02/2022	10314926	40273	94347	112	0,91	0,28	21,75	1,99
06/02/2022	10355199	40273	94459	112	0,91	0,28	21,83	2,00
07/02/2022	10395471	40272	94570	111	0,91	0,28	21,92	2,00
08/02/2022	10439302	43831	94931	361	0,91	0,82	22,01	2,01
09/02/2022	10502141	62839	95213	282	0,91	0,45	22,14	2,01
10/02/2022	10555196	53055	95606	393	0,91	0,74	22,25	2,02
11/02/2022	10579698	24502	95995	389	0,91	1,59	22,30	2,03
12/02/2022	10604200	24502	96195	200	0,91	0,82	22,36	2,03
13/02/2022	10638553	34353	96395	200	0,91	0,58	22,43	2,04
14/02/2022	10672906	34353	96596	201	0,91	0,59	22,50	2,04
15/02/2022	10707286	34380	96906	310	0,91	0,90	22,57	2,05
16/02/2022	10750901	43615	97350	444	0,91	1,02	22,67	2,06
17/02/2022	10778607	27706	97710	360	0,91	1,30	22,72	2,06
18/02/2022	10809222	30615	97998	288	0,91	0,94	22,79	2,07
19/02/2022	10820348	11126	98153	155	0,91	1,39	22,81	2,07
20/02/2022	10831474	11126	98308	155	0,91	1,39	22,84	2,08
21/02/2022	10842601	11127	98462	154	0,91	1,38	22,86	2,08
22/02/2022	10880194	37593	98635	173	0,91	0,46	22,94	2,08
23/02/2022	10914105	33911	98936	301	0,91	0,89	23,01	2,09
24/02/2022	10949997	35892	99162	226	0,91	0,63	23,09	2,10
25/02/2022	10977524	27527	99410	248	0,91	0,90	23,14	2,10
26/02/2022	10985024	7500	99610	200	0,91	2,67	23,16	2,10
27/02/2022	10992400	7376	99810	200	0,91	2,71	23,17	2,11
28/02/2022	11000000	7600	100000	190	0,91	2,50	23,19	2,11
	TOTAL	11000000	TOTAL	100000				

A N E X O N Ú M. 2

TABLA DE
TRANSFORMADAS DE
LAPLACE

Tabla de las transformadas de Laplace más usuales.

Función generatriz y(x)	Transformada L[y(x)]	Función generatriz y(x)	Transformada L[y(x)]
K	$\frac{K}{p} \quad (p > 0)$	Sh ωx	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2} \quad (p > \omega)$
$x^n (n > -1),$ $(p > 0)$	$\frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}$	Ch ωx	$\frac{p}{p^2 - \omega^2} \quad (p > \omega)$
x	$\frac{1}{p^2} \quad (p > 0)$	$x \cdot \sin \omega x$	$\frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2} \quad (p > 0)$
$K \cdot e^{ax} \quad (p > -a)$	$\frac{K}{p-a}$	$\sin \omega x \cdot \text{Sh } \omega x$	$\frac{2\omega^2 p}{p^4 + 4\omega^4}$
$\sin Kx$	$\frac{K}{p^2 + K^2} \quad (p > 0)$	$\cos \omega x \cdot \text{Ch } \omega x$	$\frac{p^3}{p^4 + 4\omega^4}$
$\cos Kx$	$\frac{p}{p^2 + K^2} \quad (p > 0)$	$x^n e^{ax}$	$\frac{\Gamma(n+1)}{(p-a)^{n+1}} \quad (n > -1)$ $(p > a)$
$\frac{1}{2}(e^{Kx} - e^{-Kx})$	$\frac{K}{p^2 - K^2}$	$\frac{1 - e^{-x}}{x}$	$\Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right)$
$\frac{1}{2}(e^{Kx} + e^{-Kx})$	$\frac{p}{p^2 - K^2}$	Γx	$\frac{\Gamma'(1)}{p} - \frac{\Gamma p}{p}$
$x^n e^{ax} \quad (n > -1)$	$\frac{\Gamma(n+1)}{(p-a)^{n+1}}$	$\frac{\cos \alpha \sqrt{x}}{\pi \sqrt{x}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi p}} e^{-\frac{\alpha^2}{4p}}$
$e^{ax} \sin Kx$	$\frac{K}{(p-a)^2 + K^2} \quad (p > a)$	$\frac{\sin \alpha \sqrt{x}}{\pi}$	$\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi p^{3/2}}} e^{-\frac{\alpha^2}{4p}}$
$e^{ax} \cos Kx$	$\frac{p-a}{(p-a)^2 + K^2} \quad (p > a)$	$\frac{\text{Ch } \alpha \sqrt{x}}{\pi \sqrt{x}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi p}} e^{-\frac{\alpha^2}{4p}}$
$\cos (\omega x + K)$	$\frac{p \cdot \cos K - \omega \cdot \sin K}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{\text{Sh } \alpha \sqrt{x}}{\pi}$	$\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi p^{3/2}}} e^{-\frac{\alpha^2}{4p}}$
Transformada inversa L⁻¹[η(p)]	Función η(p)	Transformada inversa L⁻¹[η(p)]	Función η(p)

Función generatriz y(x)	Transformada L[y(x)]	Función generatriz y(x)	Transformada L[y(x)]
$\sin(\omega x + K)$	$\frac{p \cdot \sin K + \omega \cdot \cos K}{p^2 + \omega^2}$	$\sqrt[p]{x} \quad (p > 0)$	$p^{-(n+1)/n} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{x}\right)$
$\frac{x^n}{n!}$	$\frac{1}{p^{n+1}} \quad (p > 0)$	$\frac{x^q}{\Gamma(q+1)}$	$\frac{1}{p^{q+1}} \quad (p > 0)$
$\frac{x^n}{n!} \cdot e^{-\alpha x}$	$\frac{1}{(p + \alpha)^{n+1}} \quad (p > -\alpha)$	$e^{-\alpha x}$	$\frac{1}{p + \alpha} \quad (p > -\alpha)$
$1 - e^{-\alpha x}$	$\frac{\alpha}{p(p + \alpha)} \quad (p > 0)$	$\frac{1}{b-a}(e^{-ax} - e^{-bx})$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)} \quad (p > -a)$ $(p > -b)$
$\ln \frac{x}{x_0} \quad (p > 0)$	$-\frac{x_0}{p} [\ln(x_0 \cdot p) + \gamma]$	$\frac{1}{2a^3}(\sin at - at \cdot \cos at)$	$\frac{1}{(p^2 + a^2)^2}$
x^{n-1} (n = 1, 2, ...)	$\frac{(n-1)!}{p^n} \quad (p > 0)$	\sqrt{x}	$\frac{1}{2} \sqrt{\pi} p^{-3/2} \quad (p > 0)$
$1\sqrt{x}$	$\sqrt{\pi} p^{-1/2} \quad (p > 0)$	$x^{n-1/2}$ (n = 1, 2, ...)	$\frac{(1)(3)(5)\dots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n} p^{-n/2}$ (p > 0)
$x \cdot \cos ax$	$\frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2} \quad (p > 0)$	$x^{n-1} e^{ax}$ (n = 1, 2, ...)	$\frac{(n-1)!}{(p-a)^n} \quad (p > a)$
$\sin ax - ax \cdot \cos ax$	$\frac{2a^3}{(p^2 + a^2)^2} \quad (p > 0)$	$\frac{1}{a} e^{-x/a}$	$\frac{1}{1+ap}$
$\frac{1}{a}(e^{ax} - 1)$	$\frac{1}{p(p-a)}$	$1 - e^{-x/a}$	$\frac{1}{p(1+ap)}$
$\frac{1}{a^2} x^3 e^{-x/a}$	$\frac{1}{(1+ap)^2}$	$\frac{e^{ax} - e^{bx}}{a-b}$	$\frac{1}{(p-a)(p-b)}$
$\frac{e^{-x/a} - e^{-x/b}}{a-b}$	$\frac{1}{(1+ap)(1+bp)}$	$(1+ax)e^{ax}$	$\frac{p}{(p-a)^2}$
$\frac{1}{a^3}(a-x)e^{-x/a}$	$\frac{p}{(1+ap)^2}$	$\frac{ae^{ax} - be^{bx}}{a-b}$	$\frac{p}{(p-a)(p-b)}$
$\frac{ae^{-x/b} - be^{-x/a}}{ab(a-b)}$	$\frac{p}{(1+ap)(1+bp)}$	$\frac{1}{a^2}(e^{ax} - 1 - ax)$	$\frac{1}{p^2(p-a)}$
Transformada inversa L⁻¹[η(p)]	Función η(p)	Transformada inversa L⁻¹[η(p)]	Función η(p)

Función generatriz y(x)	Transformada L[y(x)]	Función generatriz y(x)	Transformada L[y(x)]
$\sin^2 ax$	$\frac{2a^2}{p(p^2 + 4a^2)}$	$\sinh^2 ax$	$\frac{2a^2}{p(p^2 - 4a^2)}$
$\sin \frac{ax}{\sqrt{2}} \sinh \frac{ax}{\sqrt{2}}$	$\frac{a^2 p}{p^4 + a^4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cosh \frac{ax}{\sqrt{2}} \sin \frac{ax}{\sqrt{2}} - \sinh \frac{ax}{\sqrt{2}} \cos \frac{ax}{\sqrt{2}} \right)$	$\frac{a^3}{p^4 + a^4}$
$\cos \frac{ax}{\sqrt{2}} \cosh \frac{ax}{\sqrt{2}}$	$\frac{p^3}{p^4 + a^4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{ax}{\sqrt{2}} \sinh \frac{ax}{\sqrt{2}} + \sin \frac{ax}{\sqrt{2}} \cosh \frac{ax}{\sqrt{2}} \right)$	$\frac{ap^2}{p^4 + a^4}$
$\frac{1}{2}(\sinh ax - \sin ax)$	$\frac{a^3}{p^4 - a^4}$	$\frac{1}{2}(\cosh ax - \cos ax)$	$\frac{a^2 p}{p^4 - a^4}$
$\frac{1}{2}(\sinh ax + \sin ax)$	$\frac{as^2}{p^4 - a^4}$	$\frac{1}{2}(\cosh ax + \cos ax)$	$\frac{p^3}{p^4 - a^4}$
$\cos ax \cdot \sinh ax$	$\frac{a(p^2 - 2a^2)}{p^4 + 4a^4}$	$\sin ax \cdot \cosh ax$	$\frac{a(p^2 + 2a^2)}{p^4 + 4a^4}$
$\frac{1}{2}(\sin ax + ax \cos ax)$	$\frac{ap^2}{(p^2 + a^2)^2}$	$\cos ax - \frac{ax}{2} \sin ax$	$\frac{p^3}{(p^2 + a^2)^2}$
$\frac{1}{2}(ax \cdot \cosh ax - \sinh ax)$	$\frac{a^3}{(p^2 - a^2)^2}$	$\frac{x}{2} \sinh ax$	$\frac{ap}{(p^2 - a^2)^2}$
$\frac{1}{2}(\sinh ax + ax \cosh ax)$	$\frac{ap^2}{(p^2 - a^2)^2}$	$\cosh ax + \frac{ax}{2} \sin ax$	$\frac{p^3}{(p^2 - a^2)^2}$
$\frac{a \cdot \sin bx - b \cdot \sin ax}{a^2 - b^2}$	$\frac{ab}{(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$	$\frac{\cos bx - \cos ax}{a^2 - b^2}$	$\frac{p}{(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$
$\frac{a \cdot \sin ax - b \cdot \sin bx}{a^2 - b^2}$	$\frac{p^2}{(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$	$\frac{a^2 \cdot \cos ax - b^2 \cdot \cos bx}{a^2 - b^2}$	$\frac{p^3}{(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$
$\frac{b \cdot \sinh ax - a \cdot \sinh bx}{a^2 - b^2}$	$\frac{ab}{(p^2 - a^2)(p^2 - b^2)}$	$\frac{\cos ax - \cosh bx}{a^2 - b^2}$	$\frac{p}{(p^2 - a^2)(p^2 - b^2)}$
$\frac{a \cdot \sinh ax - b \cdot \sin bx}{a^2 - b^2}$	$\frac{p^2}{(p^2 - a^2)(p^2 - b^2)}$	$\frac{a^2 \cos ax - b^2 \cosh bx}{a^2 - b^2}$	$\frac{p^3}{(p^2 - a^2)(p^2 - b^2)}$
Transformada inversa L⁻¹[η(p)]	Función η(p)	Transformada inversa L⁻¹[η(p)]	Función η(p)

Función generatriz y(x)	Transformada L[y(x)]	Función generatriz y(x)	Transformada L[y(x)]
$x - \frac{1}{2} \sin ax$	$\frac{a^2}{p^2(p^2 + a^2)}$	$\frac{1}{a} \sinh ax - x$	$\frac{a^2}{p^2(p^2 - a^2)}$
$1 - \cos ax - \frac{ax}{2} \sin ax$	$\frac{a^4}{p(p^2 + a^2)^2}$	$1 - \cosh ax + \frac{ax}{2} \sinh ax$	$\frac{a^4}{p(p^2 - a^2)^2}$
$1 + \frac{b^2 \cos ax - a^2 \cosh bx}{a^2 - b^2}$	$\frac{a^2 b^2}{p(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$	$1 + \frac{b^2 \cos ax - a^2 \cosh bx}{a^2 - b^2}$	$\frac{a^2 b^2}{p(p^2 - a^2)(p^2 - b^2)}$
$\frac{x}{8} [\sin ax - ax \cdot \cos ax]$	$\frac{a^3 p}{(p^2 + a^2)^3}$	$\frac{1}{8} [(3 - a^2 x^2) \sin ax - 3ax \cdot \cos ax]$	$\frac{a^5}{(p^2 + a^2)^3}$
$\frac{x}{8} (ax \cdot \cosh ax - \sinh ax)$	$\frac{a^3 p}{(p^2 - a^2)^3}$	$\frac{1}{8} [(1 + a^2 x^2) \sin ax - ax \cdot \cos ax]$	$\frac{a^3 p^2}{(p^2 + a^2)^3}$
$\frac{1}{n!} (1 - e^{-x/a})^n$	$\frac{1}{p(ap + 1)(ap + 2) \dots (ap + n)}$	$\frac{1}{8} [(3 + a^2 x^2) \sinh ax - 3ax \cdot \cosh ax]$	$\frac{a^5}{(p^2 - a^2)^3}$
$\sin(ax + b)$	$\frac{p \cdot \sin b + a \cdot \cos b}{p^2 + a^2}$	$\frac{1}{8} [ax \cdot \cosh ax - (1 - a^2 x^2) \sinh ax]$	$\frac{a^3 p^2}{(p^2 - a^2)^3}$
$\cos(ax + b)$	$\frac{p \cdot \cos b - a \cdot \sin b}{p^2 + a^2}$	$e^{-ax} - e^{ax/2} \left[\cos \frac{ax\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \sin \frac{ax\sqrt{3}}{2} \right]$	$\frac{3a^2}{p^3 + a^3}$
$\frac{1 + 2ax}{\sqrt{\pi x}}$	$\frac{p + a}{p\sqrt{p}}$	$e^{-ax} / \sqrt{\pi x}$	$\frac{1}{\sqrt{p + a}}$
$\frac{1}{2x\sqrt{\pi x}} (e^{bx} - e^{ax})$	$\sqrt{p - a} - \sqrt{p - b}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi x}} \cos 2\sqrt{ax}$	$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-a/p}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi x}} \cosh 2\sqrt{ax}$	$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{a/p}$	$\frac{1}{\sqrt{a\pi}} \sin 2\sqrt{ax}$	$p^{-3/2} e^{-a/p}$
$\frac{1}{\sqrt{a\pi}} \sinh 2\sqrt{ax}$	$p^{-3/2} e^{a/p}$	$J_0(2\sqrt{ax})$	$\frac{1}{p} e^{-a/p}$
$\sqrt{x/a} \cdot J_1(2\sqrt{ax})$	$\frac{1}{p^2} e^{-a/p}$	$(x/a)^{(s-1)/2} \cdot J_{s-1}(2\sqrt{ax}) \quad (s > 0)$	$p^{-s} e^{-a/p}$
Transformada inversa L⁻¹[η(p)]	Función η(p)	Transformada inversa L⁻¹[η(p)]	Función η(p)

Función generatriz $y(x)$	Transformada $L[y(x)]$	Función generatriz $y(x)$	Transformada $L[y(x)]$
$J_0(x)$	$\frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}$	$J_1(x)$	$\frac{\sqrt{p^2 + 1} - p}{\sqrt{p^2 + 1}}$
$J_s(x) \quad (s > -1)$	$\frac{(\sqrt{p^2 + 1} - p)^s}{\sqrt{p^2 + 1}}$	$x^s J_s(ax) \quad \left(s > -\frac{1}{2}\right)$	$\frac{(2a)^s \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}(p^2 + a^2)^{s+(1/2)}}$
$\frac{x^{s-1}}{\Gamma(s)} \quad (s > 0)$	$\frac{1}{p^s}$	$\frac{4^n n!}{(2n)! \sqrt{\pi}} x^{n-(1/2)}$	$\frac{1}{p^n \sqrt{s}}$
$\frac{x^{s-1}}{\Gamma(s)} e^{-ax} \quad (s > 0)$	$\frac{1}{(p+a)^s}$	$\frac{1 - e^{-ax}}{x}$	$\ln \frac{p-a}{p}$
$\frac{e^{bx} - e^{ax}}{x}$	$\ln \frac{p-a}{p-b}$	$\frac{2}{x} \sinh ax$	$\ln \frac{p+a}{p-a}$
$\frac{2}{x} (1 - \cos ax)$	$\ln \frac{p^2 + a^2}{p^2}$	$\frac{2}{x} (\cos bx - \cos ax)$	$\ln \frac{p^2 + a^2}{p^2 + b^2}$
$\frac{\sin ax}{x}$	$\arctan \frac{a}{p}$	$\frac{2}{x} \sin ax \cdot \cos bx$	$\arctan \frac{2ap}{p^2 - a^2 + b^2}$
$\sin ax $	$\left(\frac{a}{p^2 + a^2}\right) \left(\frac{1 + e^{-(\pi/a)p}}{1 - e^{-(\pi/a)p}}\right)$	---	---
Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$	Función $\eta(p)$	Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$	Función $\eta(p)$

NOTAS EXPLICATIVAS DE LA TABLA PRECEDENTE:

1. γ es la constante de Euler-Mascheroni. La **constante de Euler-Mascheroni**, (también conocida como *constante de Euler*), a la que ya nos hemos referido con anterioridad, es una constante matemática que aparece principalmente en la teoría de números, y se denota con la letra griega minúscula γ (Gamma). Se define como el límite de la diferencia entre la serie armónica y el logaritmo natural o neperiano, a saber:

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right] = \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x} \right) dx$$

Su valor aproximado es:

$$\gamma \approx 0.577\ 215\ 664\ 901\ 532\ 860\ 606 \dots$$

Esta constante apareció publicada por primera vez en el año 1734, en un artículo escrito por Leonhard Euler, denominado *De Progressionibus harmonicis observationes*, calculando los 6 primeros dígitos para la constante y llamándola C. En 1781 calcularía otros 10 decimales más. En 1790, Lorenzo Mascheroni calcularía los primeros 19 decimales y la denotaría como A. Ya más tarde se denotaría de la forma moderna como γ , debido a su conexión con la función gamma, a la que nos referiremos inmediatamente.

El número γ no se ha probado que sea algebraico o trascendente; de hecho, ni siquiera se conoce si γ es irracional o no. El análisis de fracciones continuas revela que, de ser racional, su denominador debe ser muy elevado (actualmente del orden de 10^{242080}). Debido a que está presente en un gran número de ecuaciones y relaciones, la racionalidad o irracionalidad de γ se halla, sin duda, entre los problemas abiertos más importantes de las matemáticas.

2. $\Gamma(q)$ representa la función gamma o integral euleriana de segunda especie. Integrando por partes en dicha función, se obtiene: $\Gamma(q) = \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^{q-1} \cdot dx$; $u = x^{q-1}$; $dv = e^{-x} \cdot dx$; $du = (q-1) \cdot x^{q-2} \cdot dx$; $v = -e^{-x}$; con lo que:

$$\Gamma(q) = [-e^{-x} \cdot x^{q-1}]_0^{\infty} + (q-1) \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^{q-2} \cdot dx = (q-1) \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^{q-2} \cdot dx = (q-1) \cdot \Gamma(q-1).$$

Reiterando el procedimiento, se tendrá que:

$$\Gamma(q) = (q-1)(q-2) \dots (q-k) \cdot \Gamma(q-k).$$

En el caso particular de que q sea un número natural (o sea, entero positivo), la aplicación de la expresión anterior conduce a la siguiente:

$$\Gamma(q) = (q-1)! \quad (\forall q \in \mathbf{N}),$$

puesto que: $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot dx = 1$. Una expresión que se presenta con frecuencia, es la que se obtiene mediante el cambio de variable: $x = t^2$. En efecto:

$$\Gamma(q) = \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^{q-1} \cdot dx = \int_0^{\infty} e^{-t^2} \cdot t^{2q-2} \cdot 2t \cdot dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} \cdot t^{2p-1} \cdot dt.$$

Así mismo, el cambio $x = mt$, conduce análogamente a:

$$\Gamma(q) = \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^{q-1} \cdot dx = \int_0^{\infty} e^{-mt} \cdot (mt)^{q-1} \cdot m \cdot dt = m^q \int_0^{\infty} e^{-mt} \cdot t^{q-1} \cdot dt.$$

3. Las funciones de Bessel de primera especie y orden α que aparecen en la tabla anterior son las soluciones de la ecuación diferencial de Bessel que son finitas en el origen ($x = 0$) para enteros no negativos α y divergen en el límite x

→ 0 para α negativo no entero. El tipo de solución y la normalización de $J_\alpha(x)$ están definidos por sus propiedades. Es posible definir la función $J_\alpha(x)$ por su expansión en serie de Taylor en torno a $x = 0$. Las **funciones de Bessel**, primero definidas por el matemático Daniel Bernoulli (1700-1782) y más tarde generalizadas por Friedrich Bessel (1784-1846), son soluciones canónicas $y(x)$ de la ecuación diferencial de Bessel, a saber:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2)y = 0$$

, donde α es un número real o complejo. El caso más común es cuando α es un número entero n , aunque la solución para α no entero es similar. El número α se denomina *orden* de las funciones de Bessel asociadas a dicha ecuación. Dado que la ecuación anterior es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden y coeficientes variables, tiene dos soluciones linealmente independientes. Aunque α y $-\alpha$ dan como resultado la misma función, es conveniente definir diferentes funciones de Bessel para estos dos parámetros, pues las funciones de Bessel en función del parámetro α son funciones suaves casi doquiera. Las funciones de Bessel se denominan también *funciones cilíndricas*, o bien *armónicos cilíndricos* porque son solución de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas.