



TESIS DOCTORAL

**DISEÑO DE CONTROLADORES DE SISTEMAS
MULTIVARIABLES BASADOS EN TÉCNICAS DE
ASIGNACIÓN DE AUTOESTRUCTURAS APLICADOS A
VEHÍCULOS ESPACIALES RÍGIDO-FLEXIBLES**

**Javier Crespo Moreno
Licenciado en Ciencias Físicas
Departamento de Informática y Automática
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática**

UNED 2011

Departamento de Informática y Automática
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática

**DISEÑO DE CONTROLADORES DE SISTEMAS
MULTIVARIABLES BASADOS EN TÉCNICAS DE
ASIGNACIÓN DE AUTOESTRUCTURAS APLICADOS A
VEHÍCULOS ESPACIALES RÍGIDO-FLEXIBLES**

Autor: Javier Crespo Moreno – Licenciado en Ciencias Físicas
Director de la tesis: D. Joaquín Aranda Almansa

A mis padres por serlo,
y a Elisa, Javier y Sara por su paciencia

AGRADECIMIENTOS

Me gustaría agradecer personalmente a todas aquellas personas que me han ayudado en los momentos en que aparecieron dudas y problemas en la elaboración de esta tesis. Para no olvidarme de ninguno lo voy a hacer de forma global.

Para los profesores de la Escuela Universitaria de Ingeniería Aeronáutica (EUITA):

Mi agradecimiento a los profesores del Departamento de Aerotecnia que me han orientado sobre el modelo del sistema.

A mis compañeros, profesores del Departamento de Infraestructura, Sistemas Aeroespaciales y Aeropuertos, por el día a día, por su ayuda y por su interés.

Y en la UNED:

A mi tutor y director de tesis, D. Joaquín Arantda, por el buen trato que me ha dado y por aconsejarme las líneas de actuación cuando el camino se hacía difícil.

En definitiva, gracias a todos.

ÍNDICE

LISTA DE SÍMBOLOS	vii
LISTA DE ACRÓNIMOS	x
CAPÍTULO 1	1
INTRODUCCIÓN.....	1
1.1 PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA.....	2
1.2 MOTIVACIÓN	2
1.3 OBJETIVO Y CONTRIBUCIONES DE LA TESIS	3
1.4 ESTRUCTURA DE LA TESIS.....	4
CAPÍTULO 2	6
ESTADO DEL ARTE	6
2.1. INTRODUCCIÓN.....	6
2.2. CONTROLADORES APLICADOS EN SISTEMAS DE CONTROL DE ACTITUD.....	6
2.3. MÉTODO DE CONTROL BASADO EN LA ASIGNACIÓN DE AUTOESTRUCTURAS.....	9
2.3.1. DESARROLLO DE LA TÉCNICA DE ASIGNACIÓN DE AUTOESTRUCTURAS.....	9
2.3.2. APLICACIONES DE LA TÉCNICA DE ASIGNACIÓN DE AUTOESTRUCTURAS AL SECTOR AEROESPACIAL.....	11
2.3.3. ROBUSTEZ EN SISTEMAS AEROESPACIALES	14
2.3.4. ELASTICIDAD Y VIBRACIÓN EN VEHÍCULOS AEROESPACIALES	16
2.4. CONCLUSIONES.....	18
CAPÍTULO 3	19
EL CONTROL DE ACTITUD EN SISTEMAS ESPACIALES	19
3.1. INTRODUCCIÓN.....	19
3.2. CARACTERÍSTICAS DE LOS SISTEMAS ESPACIALES.....	20
3.3. CONCEPTOS RELACIONADOS CON LA ACTITUD DEL VEHÍCULO	21
3.3.1. DETERMINACIÓN DE ACTITUD.....	22
3.3.2. SENSORES	23
3.3.3. ACTUADORES	24
3.3.4. REPRESENTACIÓN DE ACTITUD	24
3.3.5. CONTROL DE ACTITUD	25
3.3.6. MÉTODOS DE ESTABILIZACIÓN.....	26
3.4. INFLUENCIA DE LA ÓRBITA.....	29
3.5. ESPECIFICACIONES DE UN SISTEMA DE CONTROL DE ACTITUD.	30
3.5.1. ESPECIFICACIONES GENERALES.....	30
3.5.2. ESPECIFICACIONES DEL SISTEMA DE CONTROL EN TÉRMINOS DE POLOS Y CEROS.....	32
3.6. ANÁLISIS MODAL DEL SISTEMA LINEAL EN LAZO ABIERTO.....	33
3.6.1. CONTROLABILIDAD Y OBSERVABILIDAD.....	34
3.6.2. VALORES SINGULARES.....	38
3.7. DISEÑO DE UN CONTROLADOR ÓPTIMO.....	40
3.7.1. CRITERIO DE SELECCIÓN DE LAS MATRICES R Y Q	41
3.7.2. ANÁLISIS DEL SISTEMA	42
CAPÍTULO 4	46
MODELO MATEMÁTICO.....	46

4.1.	INTRODUCCIÓN.....	46
4.2.	SISTEMAS DE REFERENCIA.....	46
4.2.1.	SISTEMA DE REFERENCIA INERCIAL CENTRADO EN TIERRA (ECI)	46
4.2.2.	SISTEMA DE REFERENCIA LIGADO Y CENTRADO EN TIERRA (ECEF)	47
4.2.3.	SISTEMA DE REFERENCIA ORBITAL.....	48
4.2.4.	SISTEMA DE REFERENCIA LIGADO AL CUERPO DEL SATÉLITE	48
4.3.	TRANSFORMACIONES ENTRE SISTEMAS DE REFERENCIA	49
4.4.	PERTURBACIONES	50
4.4.1.	PERTURBACIONES AERODINÁMICAS	50
4.4.2.	PRESIÓN SOLAR	52
4.4.3.	CAMPO MAGNÉTICO	52
4.4.4.	ACHATAMIENTO TERRESTRE	54
4.4.5.	DEGRADACIÓN DE LA ORBITA	55
4.5.	MODELO MATEMÁTICO DEL SATELITE RÍGIDO.....	57
4.5.1.	CINEMÁTICA DEL MOVIMIENTO	57
4.5.1.1.	VELOCIDAD ANGULAR	58
4.5.2.	DINÁMICA DEL SISTEMA.....	59
4.5.3.	LINEALIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DEL MOVIMIENTO ...	61
4.6.	ENERGÍA CINÉTICA DEL MOVIMIENTO	63
4.7.	ENERGÍA POTENCIAL DEL MOVIMIENTO	63
4.7.1.	ENERGÍA POTENCIAL GRAVITACIONAL	64
4.7.2.	ENERGÍA POTENCIAL ELÁSTICA	64
4.8.	MODOS FLEXIBLES DEL SISTEMA.....	65
4.9.	FORMULACIÓN LAGRANGIANA DEL SATELITE RIGIDO CON ELEMENTOS FLEXIBLES	66
4.9.1.	ECUACIONES DE LAGRANGE PARA EL MOVIMIENTO DEL SISTEMA	66
4.9.2.	DEFORMACIÓN DE LOS PANELES SOLARES.....	68
4.9.3.	ENERGÍA CINÉTICA DE DEFORMACIÓN	74
4.9.3.1.	FLEXIÓN DE LOS PANELES.....	74
4.9.3.2.	TORSIÓN DE LOS PANELES SOLARES.....	75
4.9.3.3.	ENERGÍA CINÉTICA TOTAL.....	77
4.9.4.	ENERGÍA POTENCIAL	78
4.9.4.1.	ENERGÍA DE DEFORMACIÓN DEBIDA A FLEXION DE LOS PANELES	78
4.9.4.2.	ENERGÍA DE DEFORMACIÓN DEBIDA A TORSIÓN DE LOS PANELES	79
4.9.4.3.	ENERGÍA TOTAL DE DEFORMACIÓN.....	79
4.9.5.	FUERZAS GENERALIZADAS	80
4.9.6.	ECUACIONES LINEALIZADAS DEL MOVIMIENTO.....	80
4.9.7.	AMORTIGUAMIENTO DEL SISTEMA	83
4.10.	SÍNTESIS DE CONTROL.....	84
4.11.	MODELO NO LINEAL.....	85
4.11.1.	DETERMINACIÓN DE LA ESTABILIDAD DEL SISTEMA.....	86
4.11.2.	EFFECTO DE LOS MOMENTOS DE INERCIA SOBRE LA ESTABILIDAD.....	87
4.12.	ANÁLISIS DEL SISTEMA NO LINEAL EN LAZO ABIERTO	89

4.12.1.	ESTUDIO EN EL PLANO DE FASE	90
4.12.2.	ANÁLISIS EN LAZO ABIERTO.....	91
4.13.	LINEALIZACIÓN DEL MODELO	93
4.13.1.	CARACTERÍSTICAS DE ESTABILIDAD DEL MODELO LINEALIZADO	95
CAPÍTULO 5		96
FUNDAMENTO TEÓRICO DE LOS MÉTODOS DE ASIGNACIÓN DE AUTOESTRUCTURAS.....		96
5.1.	INTRODUCCIÓN.....	96
5.2.	ASPECTOS BÁSICOS DEL MÉTODO DE ASIGNACIÓN DE AUTOESTRUCTURAS.....	97
5.3.	ESTRUCTURA DEL CONTROLADOR.....	100
5.4.	ASIGNACIÓN DE LA AUTOESTRUCTURA	102
5.4.1.	ASIGNACIÓN DE AUTOVALORES	102
5.4.2.	ASIGNACIÓN DE AUTOVECTORES	103
5.4.3.	LIBERTAD EN LA ASIGNACIÓN DE LA AUTOESTRUCTURA	104
5.4.4.	ESPECIFICACIÓN DE LA AUTOESTRUCTURA DESEADA	104
5.4.5.	IDENTIFICACIÓN DE LOS MODOS DEL SISTEMA.....	106
5.4.5.1.	RELACIÓN ENTRE LA SALIDA Y LOS MODOS DEL SISTEMA	108
5.4.5.2.	RELACIÓN ENTRE LA ENTRADA Y LOS MODOS DEL SISTEMA	109
5.4.5.3.	RELACIÓN ENTRE LA ENTRADA Y LA SALIDA DEL SISTEMA	109
5.4.6.	SENSIBILIDAD DE LA AUTOESTRUCTURA.....	110
5.5.	SÍNTESIS DEL CONTROLADOR.....	112
5.5.1.	REALIMENTACIÓN DE ESTADOS	112
5.5.2.	REALIMENTACIÓN DE LA SALIDA	113
5.6.	MÉTODOS DE ASIGNACIÓN DE LA AUTOESTRUCTURA.....	114
5.6.1.	ASIGNACIÓN BÁSICA.....	115
5.6.2.	MÉTODOS DE PROYECCIÓN DE AUTOVECTORES.....	115
5.6.3.	MÉTODOS DE PROYECCIÓN PARA LA ASIGNACIÓN DE LA AUTOESTRUCTURA POR REALIMENTACIÓN DE LA SALIDA	118
5.6.4.	MÉTODOS DE ASIGNACIÓN DIRECTA (DEA – Direct Eigenstructure Assignment)	120
5.6.5.	MÉTODOS DE ASIGNACIÓN RECURSIVA	121
5.6.5.1.	MÉTODO DE ACTUALIZACIÓN DE RANGO n	122
5.6.5.2.	MÉTODO DE ACTUALIZACIÓN DE RANGO 1.....	122
5.6.5.3.	MÉTODOS KNV: MÉTODO 0 Y MÉTODO 1.....	123
5.6.6.	CONTROL CON AUTOESTRUCTURAS ORTOGONALES.....	125
5.7.	REQUISITOS DE DISEÑO	126
CAPÍTULO 6		128
ANÁLISIS Y SÍNTESIS DEL SISTEMA CON CONTROLADORES DISEÑADOS POR MÉTODOS DE ASIGNACIÓN DE AUTOESTRUCTURAS - EA		128
6.1.	INTRODUCCIÓN.....	128
6.2.	OBTENCIÓN NÚMÉRICA DEL MODELO MATEMÁTICO	128
6.2.1.	MATRICES DE MASA, GIROSCÓPICA Y DE RIGIDEZ	130
6.2.2.	MATRICES DEL SISTEMA DINÁMICO.....	135
6.3.	ANÁLISIS DEL SISTEMA LINEAL EN LAZO ABIERTO	136
6.3.1.	ANÁLISIS MODAL DEL SISTEMA	136

6.3.2.	DETERMINACIÓN DEL ACOPLAMIENTO ENTRE LOS MODOS DEL SISTEMA	139
6.4.	DISEÑO Y DESARROLLO DE CONTROLADORES CON MÉTODOS EA	141
6.4.1.	REQUISITOS DE DESACOPLO DE LOS MODOS DEL SISTEMA	142
6.4.2.	REQUISITOS DE DISEÑO PARA LOS AUTOVALORES DESEADOS	143
6.5.	CONTROLADORES LQR	145
6.5.1.	CONTROLADOR LQR1	145
6.5.2.	CONTROLADOR LQR2	147
6.5.3.	CONTROLADOR LQR3	148
6.6.	DISEÑO DE CONTROLADORES REALIZADOS CON TÉCNICAS EA	149
6.6.1.	DISEÑO DE CONTROLADORES BASADOS EN TÉCNICAS DE PROYECCION.....	150
6.6.1.1.	CONTROLADOR OBTENIDO CON LA FUNCIÓN $sfb_proj.$	150
6.6.1.2.	CONTROLADOR OBTENIDO CON LA FUNCIÓN $projea.$	154
6.6.2.	DISEÑO DE CONTROLADORES BASADOS EN TÉCNICAS DE ASIGNACIÓN RECURSIVA Y DE DESCOMPOSICIÓN EN VALORES SINGULARES	158
6.6.2.1.	CONTROLADOR OBTENIDO CON LA FUNCIÓN $ofeasvd.$.	159
6.6.2.2.	CONTROLADOR OBTENIDO CON LA FUNCIÓN $gpofea.$...	162
6.6.2.3.	CONTROLADOR OBTENIDO CON LA FUNCIÓN $pofea.$	167
6.6.3.	DISEÑO DE CONTROLADORES CON TÉCNICAS DE ASIGNACIÓN ROBUSTA POR DESCOMPOSICIÓN QR	169
6.7.	<i>SIMULACIONES CON EL SISTEMA LINEAL Y NO LINEAL</i>	172
6.7.1.	DATOS OBTENIDOS DEL SISTEMA LINEAL	172
6.7.2.	SIMULACIONES CON CONTROLADORES EA CON LOS SISTEMAS LINEAL Y NO LINEAL. CASOS DE ESTUDIO	173
6.7.3.	CASO 1: AMORTIGUAMIENTO NOMINAL.....	174
6.7.3.1.	CONTROLADOR $K4$ (función sfb_proj)	174
6.7.3.2.	CONTROLADOR $K5$ (Función $projea$)	175
6.7.3.3.	CONTROLADOR $K7$ (Función $gpofea$).....	177
6.7.4.	CASO 2: AMORTIGUAMIENTO FORZADO EN FLEXIÓN	179
6.7.4.1.	CONTROLADOR $K5$ (Función $projea$)	180
6.7.4.2.	CONTROLADOR $K7$ (Función $gpofea$).....	182
6.7.5.	CASO 3: AMORTIGUAMIENTO FORZADO EN TORSIÓN.....	184
6.7.5.1.	CONTROLADOR $K5$ (Función $projea$)	184
6.7.5.2.	CONTROLADOR $K7$ (Función $gpofea$).....	186
6.8.	ANÁLISIS GLOBAL DE RESULTADOS	188
6.9.	CONCLUSIONES	191
CAPÍTULO 7		192
ANÁLISIS DE ROBUSTEZ		192
7.1.	INTRODUCCIÓN.....	192
7.2.	FUNDAMENTO TEÓRICO DE LOS MÉTODOS DE ANÁLISIS DE ROBUSTEZ	192
7.2.1.	MÉTODO BASADO EN LOS MÁRGENES DE GANANCIA Y FASE	193
7.2.2.	MÉTODO BASADO EN LAS FUNCIONES DE SENSIBILIDAD ..	193
7.2.3.	MÉTODO BASADO EN EL ANÁLISIS μ (MU).....	196
7.2.3.1.	INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS μ	197

7.2.3.2.	TRANSFORMACIONES LFT Y VALOR SINGULAR ESTRUCTURADO μ	197
7.2.3.3.	TEOREMAS APLICABLES EN EL ANÁLISIS μ	199
7.2.3.4.	BLOQUE DE PERTURBACIONES.....	199
7.2.3.5.	INCERTIDUMBRES.....	200
7.3.	ANÁLISIS DE ROBUSTEZ.....	201
7.3.1.	ANÁLISIS PARAMETRICO DEL SISTEMA.....	201
7.3.2.	REPERCUSIÓN DEL AMORTIGUAMIENTO SOBRE EL COMPORTAMIENTO DEL SISTEMA.....	203
7.3.3.	ANÁLISIS DE ROBUSTEZ POR MÉTODOS DE MARGEN DE FASE Y DE GANANCIA.....	205
7.3.4.	ANÁLISIS μ DEL SISTEMA.....	208
7.3.5.	FUNCIONES DE PONDERACIÓN.....	211
7.3.6.	ESTABILIDAD ROBUSTA.....	212
7.3.7.	COMPORTAMIENTO ROBUSTO.....	217
7.3.8.	COMPORTAMIENTO NOMINAL.....	220
7.3.9.	ESTUDIO DEL CONTROLADOR K_5	222
7.4.	MEJORA DE LA ROBUSTEZ DEL SISTEMA.....	226
7.5.	CONCLUSIONES.....	227
	CAPÍTULO 8.....	229
	CONCLUSIONES.....	229
	REFERENCIAS.....	232
	ANEXOS.....	242
	ANEXO I.....	243
	ANEXO II.....	245
	ANEXO III.....	250
	ANEXO IV.....	261

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 3.1: Control de un Eje de Actitud mediante un Sistema SISO.....	20
Figura 3.2: Diagrama de Bloques General de los Subsistemas Integrados a bordo de un Satélite.	21
Figura 3.3: Maniobras de Actitud Mediante Angulos de Euler (Roll-Pitch-Yaw).....	25
Figura 3.4: Diagrama de Bloques Representativo de un Control de Actitud Generalizado.	26
Figura 3.5: Proceso de Determinación y Control de Actitud.	26
Figura 3.6: Órbitas LEO Progresiva y Regresiva.	30
Figura 3.7: Especificaciones en el dominio del tiempo.....	32
Figura 3.8: Posición de los Polos del Sistema Linealizado en Lazo Abierto.	34
Figura 3.9: Determinación de la Controlabilidad de los Autovalores del Sistema en Lazo Abierto.....	36
Figura 3.10: Polos más Controlables del Sistema.	37
Figura 3.11: Determinación de la Observabilidad de los Polos del Sistema en Lazo Abierto.....	37
Figura 3.12: Valores singulares correspondientes a las maniobras de actitud.	38
Figura 3.13: Valores singulares correspondientes a la relación entre las deformaciones de los paneles solares y las maniobras de actitud.....	40
Figura 3.14: Controlador LQR 1 - K1.	43
Figura 3.15: Controlador LQR 2 – K2.	44
Figura 3.16: Controlador LQR 3 –K3.	45
Figura 4.1: Sistema de Coordenadas Inerciales Centradas en la Tierra - ECI (Earth Centered Inertial).....	47
Figura 4.2: Sistema de Coordenadas Fijas en el Centro de la Tierra - ECEF (Earth Centered Earth Fixed).....	47
Figura 4.3: Sistema de Coordenadas Orbitales.....	48
Figura 4.4: Representación Gráfica de la Secuencia de Rotaciones.....	49
Figura 4.5: Magnitud de las Perturbaciones Espaciales en Función de la Altura de la Orbita (Figura obtenida de [2004, Hughes]).	54
Figura 4.6: Degradación del Radio Orbital.	56
Figura 4.7: Configuración del Satélite junto con los Paneles Solares.	69
Figura 4.8: Deformación Longitudinal y Transversal de los Paneles Solares para los Cinco Primeros Modos.	70
Figura 4.9: Representación 3D de la Deformaciones Longitudinal y Transversal de los Paneles Solares para los Dos Primeros Modos.....	72
Figura 4.10: Representación 3D de la Deformaciones Longitudinal y Transversal de los Paneles Solares. Modo 1-1 (izquierda), Modo 2-2 (derecha).....	72
Figura 4.11: Deformación de los Paneles: Simétrica y Antisimétrica.....	73
Figura 4.12: Frecuencias Naturales de los Modos Rígidos y Modos Flexibles.	73
Figura 4.13: Deformación del Panel Solar Debida a Flexión.....	74
Figura 4.14: Deformación del Panel Debida a Torsión.....	76
Figura 4.15: Proceso de Diseño del Controlador con los Modelos Matemáticos Lineal y No Lineal.	86
Figura 4.16: Oscilación sobre el eje de cabeceo en condiciones $I_x > I_z$	88
Figura 4.17: Disminución del error con el aumento de la diferencia en los momentos de inercia I_x e I_z	89

Figura 4.18: Error cometido en cabeceo debido a la diferencia entre los momentos de inercia I_y e I_z ..	89
Figura 4.19: Diagrama de Fase de los Movimientos Angulares y de las Velocidades Angulares.....	90
Figura 4.20: Excitación Escalón Unitario en el canal de alabeo para el Sistema en Lazo Abierto.....	92
Figura 4.21: Excitación Escalón Unitario en el canal de cabeceo para el Sistema en Lazo Abierto.....	92
Figura 5.1: Sistema con Realimentación de Estados.....	113
Figura 5.2: Sistema con Realimentación de la Salida.....	113
Figura 5.3: Regulador con Realimentación de la Salida.....	114
Figura 5.4: Representación Gráfica del Método de Proyección del Autovector Deseable en el Subespacio Alcanzable.....	116
Figura 6.1: Deformación de los Paneles por Flexión para la Función de Forma $\phi(\xi)$..	131
Figura 6.2: Diagrama de Bloques del Sistema de Control de Actitud con Realimentación de la Salida.....	135
Figura 6.3: Posición de los autovalores en el plano complejo.....	138
Figura 6.4: Respuestas de los Sistemas Lineal y No Lineal a Excitación Escalón en Lazo Abierto.....	139
Figura 6.5: Error en actitud producido por la vibración de los paneles solares.....	140
Figura 6.6: Valores Singulares del Sistema.....	141
Figura 6.7: Detalle de las tareas de diseño de los controladores relativas al grupo 1 y 2 de simulaciones.....	144
Figura 6.8: Respuesta del sistema lineal con excitación escalón unitario.....	149
Figura 6.9: Relación entre el tiempo de asentamiento, el coeficiente de amortiguamiento y el número de condición con diferentes valores de amortiguamiento.....	151
Figura 6.10: Polos del sistema en lazo cerrado para el controlador $K4$ (función sfb_proj). ..	153
Figura 6.11: Respuesta a excitación escalón unitario.....	153
Figura 6.12: Respuesta a deformación por Flexión y Torsión de los Paneles Solares....	154
Figura 6.13: Excitación escalón unitario del sistema con el controlador $K5$ (función $projea$).....	157
Figura 6.14: Vibración sostenida en el modo de flexión. Repercusión sobre el resto de los modos. (Controlador $K5$).....	157
Figura 6.15: Vibración sostenida en el modo de torsión. Repercusión sobre el resto de los modos. (Controlador $K5$).....	158
Figura 6.16: Excitación escalón unitario con el controlador $K6$	161
Figura 6.17: Repercusión de los modos orbitales frente a vibración longitudinal de los paneles solares.....	161
Figura 6.18: Repercusión de los modos orbitales frente a vibración transversal de los paneles solares.....	162
Figura 6.19: Autovalores del sistema en lazo cerrado.....	165
Figura 6.20: Excitación Escalón unitario con el controlador $K7$	165
Figura 6.21: Deformación de los paneles solares debida a flexión con el controlador $K7$. ..	166
Figura 6.22: Deformación de los paneles solares debida a flexión con el controlador $K7$. ..	166

Figura 6.23: Respuesta del sistema lineal a excitación escalón unitario con el controlador $K8$.	169
Figura 6.24: Excitación del sistema en lazo cerrado con escalón unitario con el controlador $K9$.	171
Figura 6.25: Comparación de Respuestas a Excitación Escalón para los Sistemas Lineal y No Lineal con el Controlador por Características del Sistema ($K4$).	175
Figura 6.26: Comparación de Respuestas a Excitación Escalón para los Sistemas Lineal y No Lineal con el Controlador por $K5$.	176
Figura 6.27: Representación de las Acciones de Control en los Sistemas Lineal y No Lineal para una Maniobra de Alabeo con el Controlador $K5$.	177
Figura 6.28: Comparación de Respuestas a Excitación Escalón para los Sistemas Lineal y No Lineal con el Controlador ($K7$).	178
Figura 6.29: Representación de las Acciones de Control en los Sistemas Lineal y No Lineal para una Maniobra de Alabeo con el Controlador $K7$.	179
Figura 6.30: Comparación de Respuestas a Excitación Escalón para los Sistemas Lineal y No Lineal con el Controlador con Amortiguación Requerida en la Flexión ($K5$).	180
Figura 6.31: Representación de las Acciones de Control en los Sistemas Lineal y No Lineal para una Maniobra de Alabeo con el Controlador $K5$, y con Amortiguamiento Adicional en Flexión.	181
Figura 6.32: Comparación de Respuestas a Excitación Escalón para los Sistemas Lineal y No Lineal con el Controlador con Amortiguación Requerida en la Flexión ($K7$).	183
Figura 6.33: Representación de las Acciones de Control en los Sistemas Lineal y No Lineal para una Maniobra de Alabeo con el Controlador $K7$, y con Amortiguamiento Adicional en Flexión.	184
Figura 6.34: Comparación de Respuestas a Excitación Escalón para los Sistemas Lineal y No Lineal con el Controlador con Amortiguación Requerida en la Torsión ($K5$).	185
Figura 6.35: Representación de las Acciones de Control en los Sistemas Lineal y No Lineal para una Maniobra de Alabeo con el Controlador $K5$, y con Amortiguamiento Adicional en Torsión.	186
Figura 6.36: Representación de las Acciones de Control en los Sistemas Lineal y No Lineal para una Maniobra de Alabeo con el Controlador $K7$, y con Amortiguamiento Adicional en Torsión.	187
Figura 6.37: Representación de las Acciones de Control en los Sistemas Lineal y No Lineal para una Maniobra de Alabeo con el Controlador $K7$, y con Amortiguamiento Adicional en Torsión.	188
Figura 7.1: Esquema genérico de un sistema de control con perturbaciones.	193
Figura 7.2: Consideraciones de comportamiento del sistema en función de la frecuencia.	195
Figura 7.3: Representación gráfica del modelo LFT superior e inferior.	198
Figura 7.4: Transmisión de la vibración de los paneles solares y su relación con la maniobra de orientación del vehículo.	203
Figura 7.5: Autovalores del sistema con variación en el amortiguamiento de la flexión y torsión.	204
Figura 7.6: Autovalores del sistema con variación en el amortiguamiento y frecuencia de la flexión y torsión.	204
Figura 7.7: Márgenes de ganancia y fase para los tres canales controlados del sistema en lazo abierto y no amortiguado.	205
Figura 7.8: Márgenes de ganancia y fase para los tres canales controlados del sistema en lazo cerrado y no amortiguado.	205

Figura 7.9: Márgenes de ganancia y fase para los tres canales controlados del sistema en lazo abierto y amortiguado.	206
Figura 7.10: Márgenes de ganancia y fase para los tres canales controlados del sistema en lazo cerrado y amortiguado.	206
Figura 7.11: Diagramas de Bode del sistema en lazo abierto amortiguado y no amortiguado.	207
Figura 7.12: Diagrama de Bode comparativo de los sistemas en lazo cerrado amortiguado y no amortiguado.	207
Figura 7.13: Diagrama de bloques del sistema y controlador de la transformación lineal fraccional.	209
Figura 7.14: Bloque M sintetizando entradas y salidas.	210
Figura 7.15: Transformación Lineal Fraccional para el Sistema Completo.	210
Figura 7.16: Diagrama de Bode de las Funciones de Transferencia de los Pesos de las Señales del Sistema.	212
Figura 7.17: Representación genérica de las perturbaciones, planta y controlador.	213
Figura 7.18: Transformación lineal utilizada para la medida de estabilidad robusta.	214
Figura 7.19: Estabilidad Robusta - Caso 1 – Incertidumbre Real.	214
Figura 7.20: Estabilidad Robusta - Caso 2 – Incertidumbre Real.	215
Figura 7.21: Estabilidad Robusta - Caso 1 – Incertidumbre Compleja.	216
Figura 7.22: Estabilidad Robusta - Caso 2 – Incertidumbre Compleja.	216
Figura 7.23: Transformación lineal utilizada para la medida del Comportamiento Robusto.	218
Figura 7.24: Comportamiento Robusto - Caso 1 – Incertidumbre Real.	218
Figura 7.25: Comportamiento Robusto - Caso 2 – Incertidumbre Real.	219
Figura 7.26: Comportamiento Robusto - Caso 1 – Incertidumbre Compleja.	219
Figura 7.27: Comportamiento Robusto - Caso 2 – Incertidumbre Compleja.	220
Figura 7.28: Comportamiento Nominal - Caso 1 – Incertidumbre Real.	220
Figura 7.29: Comportamiento Nominal - Caso 2 – Incertidumbre Real.	221
Figura 7.30: Comportamiento Nominal - Caso 1 – Incertidumbre Compleja.	221
Figura 7.31: Comportamiento Nominal - Caso 2 – Incertidumbre Compleja.	222
Figura 7.32: Estabilidad Robusta – Incertidumbre Real.	223
Figura 7.33: Comportamiento Robusto – Incertidumbre Real.	223
Figura 7.34: Comportamiento Nominal – Incertidumbre Real.	224
Figura 7.35: Estabilidad Robusta – Incertidumbre Compleja.	224
Figura 7.36: Comportamiento Robusto – Incertidumbre Compleja.	225
Figura 7.37: Comportamiento Nominal – Incertidumbre Compleja.	225

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 3.1: Comparación entre los Tipos de Sensores para Determinación de Actitud.	23
Tabla 3.2: Tabla Comparativa de las Parametrizaciones de Actitud.....	25
Tabla 3.3: Tabla Comparativa de los Métodos de Estabilización.	28
Tabla 3.4: Ejemplo de Especificaciones para la Actitud de Cada Eje del Satélite.....	31
Tabla 3.5: Correspondencia entre los Modos del Sistema en Lazo Abierto y la Autoestructura.	33
Tabla 3.6: Valores asignados a los controladores LQR.	42
Tabla 3.7: Controlador LQR1 – K1.....	43
Tabla 3.8: Controlador LQR 2 – K2.....	44
Tabla 3.9: Controlador LQR3 – K3.....	45
Tabla 4.1: Valores del coeficiente de acomodación en función del coeficiente de resistencia aerodinámica.....	51
Tabla 4.2: Magnitud y Regiones Aplicables a las Perturbaciones.	53
Tabla 4.3: Valores Tomados por las Constantes de las Funciones Admisibles.	70
Tabla 4.4: Relación de momentos de inercia para obtener condiciones de estabilidad.....	88
Tabla 5.1: Grados de libertad asignables en la asignación de la autoestructura.....	104
Tabla 5.2: Determinación del acoplamiento en la matriz de autovectores.....	108
Tabla 5.3: Métodos de Diseño Iterativos.....	124
Tabla 6.1: Datos numéricos del vehículo rígido-flexible.	130
Tabla 6.2: Modos y Autovalores del Sistema en Lazo Abierto.....	137
Tabla 6.3: Relación entre Autovalores y Autovectores del Sistema en Lazo Abierto. ...	137
Tabla 6.4: Criterio de Desacoplo entre los Modos del Sistema.	143
Tabla 6.5: Grupo de Simulaciones 1: Autovalores Deseados (Sistema Lineal).....	144
Tabla 6.6: Grupo de Simulaciones 2: Autovalores Deseados (Sistema Lineal y No Lineal).....	144
Tabla 6.7: Características de los autovalores obtenidos para el controlador LQR1 ($K1$).	146
Tabla 6.8: Autoestructura obtenida para el controlador LQR1 ($K1$)......	146
Tabla 6.9: Características de los autovalores obtenidos para el controlador LQR2 ($K2$).	147
Tabla 6.10: Autoestructura obtenida para el controlador LQR2 ($K2$)......	147
Tabla 6.11: Características de los autovalores obtenidos para el controlador LQR3 ($K3$).	148
Tabla 6.12: Autoestructura obtenida para el controlador LQR3 ($K3$)......	148
Tabla 6.13: Funciones para la obtención del controlador por técnicas de proyección....	150
Tabla 6.14: Números de condición mínimos.....	151
Tabla 6.15: Autovalores obtenidos por el método de proyección.	152
Tabla 6.16: Autoestructura obtenida por el método de proyección (controlador $K4$).	152
Tabla 6.17: Autovalores deseados y obtenidos para el controlador $K5$ (función projea).	154
Tabla 6.18: Autovalores deseados y obtenidos para el controlador $K5$ (función projea).	155
Tabla 6.19: Autovalores deseados y obtenidos para el controlador $K5$ (función projea).	156

Tabla 6.20: Funciones para la obtención del controlador por técnicas de asignación recursiva y descomposición en valores singulares.	158
Tabla 6.21: Autovalores deseados y obtenidos para el controlador $K6$ (función ofeasvd).	159
Tabla 6.22: Características de los autovalores obtenidos con el controlador $K6$	160
Tabla 6.23: Autoestructura de controlador $K6$ (función ofeasvd).	160
Tabla 6.24: Autovalores deseados y obtenidos para el controlador $K7$ (función gpofea).	163
Tabla 6.25: Características de los autovalores obtenidos con el controlador $K7$	163
Tabla 6.26: Autoestructura obtenida con el controlador $K7$	164
Tabla 6.27: Autovalores deseados y obtenidos.	167
Tabla 6.28: Características de los autovalores obtenidos con el controlador $K8$	167
Tabla 6.29: Autoestructura obtenida con el controlador $K8$	168
Tabla 6.30: Funciones para la obtención del controlador por técnicas de asignación recursiva y descomposición en valores singulares.	169
Tabla 6.31: Autovalores deseados y obtenidos con el controlador $K9$	170
Tabla 6.32: Características de los autovalores obtenidos.	170
Tabla 6.33: Autoestructura obtenida con el controlador $K9$ (función rbsteig).	171
Tabla 6.34: Tabla comparativa de autovalores obtenidos.	173
Tabla 6.35: Casos Analizados con los Controladores $K5$ y $K7$	173
Tabla 6.36: Autovalores Deseados para los Casos Analizados.	174
Tabla 6.37: Datos Paramétricos de los Autovalores Obtenidos con el Controlador $K5$	176
Tabla 6.38: Datos Paramétricos de los Autovalores Obtenidos con el Controlador $K7$	177
Tabla 6.39: Datos Paramétricos de los Autovalores Obtenidos con el Controlador $K5$	180
Tabla 6.40: Datos Paramétricos de los Autovalores Obtenidos con el Controlador $K7$	182
Tabla 6.41: Datos Paramétricos de los Autovalores Obtenidos con el Controlador $K5$	184
Tabla 6.42: Datos Paramétricos de los Autovalores Obtenidos con el Controlador $K7$	186
Tabla 6.43: Datos del número de condición de los controladores diseñados.	188
Tabla 6.44: Datos de Sensibilidad y Número de Condición para los Controladores $K1$ – $K9$ del Sistema Lineal.	189
Tabla 6.45: Datos de Sensibilidad y Número de Condición para los Controladores $K5$ y $K7$ en los Casos 1 – 3.	190
Tabla 7.1: Relación entre el comportamiento dinámico del sistema y los elementos de la matriz de estado.	202
Tabla 7.2: Datos de márgenes de ganancia y fase.	208
Tabla 7.3: Valores de pico normalizados y sus inversos para los controladores $K1$, $K5$ y $K7$	217
Tabla 7.4: Sensibilidad de los Autovalores y Número de Condición para los Controladores $K5$ y $K7$	226

LISTA DE SÍMBOLOS

ϕ, θ, ψ	Ángulos de Euler.
$\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$	Variación angular de Euler.
$\ddot{\phi}, \ddot{\theta}, \ddot{\psi}$	Aceleración angular de Euler.
$\phi_i(x)$	Función de forma debida a flexión.
φ	Coordenada angular en potencial gravitatorio.
$\eta(\mathbf{V})$	Sensibilidad del autovector.
λ	Autovalores de la matriz de estados.
λ_i^d	Autovalores deseados.
μ	Constante de Gravitación Universal.
v	Velocidad del satélite con relación a la atmósfera.
v_i^d	Autovectores deseados.
ρ	Densidad atmosférica.
ν	Coefficiente de Poisson.
$\bar{\omega}$	Velocidad angular.
ω_0	Velocidad angular orbital.
$w_i(x, t)$	Composición de la deformación debida a flexión y torsión.
$\psi_i(x)$	Función de forma debida a torsión.
Δh	Variación en la altura de la órbita.
Δs	Variación en la circunferencia de la órbita en cada periodo.
Λ	Matriz diagonal de autovalores.
\aleph	Espacio nulo.
A, B, C	Matrices de estado, control y salida.
c_i	Número de condición.
E	Módulo de Young.
E_C	Energía Cinética Total.
E_{CR}	Energía Cinética de Rotación.
E_{CT}	Energía Cinética de Traslación.
f_{ni}	Frecuencias naturales de los modos elásticos de los paneles solares.
F_r, F_θ, F_φ	Componentes de fuerza de la perturbación por achatamiento terrestre.
G	Módulo de rigidez a cortadura.
h_w	Momento angular de la rueda de reacción.
\bar{H}	Momento Angular.

I	Tensor de Inercia.
I_{Xi}	Momento de inercia másico del panel solar en flexión.
I_{Yi}	Momento de inercia másico del panel solar en torsión.
J_{Yi}	Momento de inercia generalizado del panel solar en torsión.
J	Índice de comportamiento del controlador LQR.
J_i	Índice de minimización en el cálculo de la autoestructura.
K	Matriz de realimentación de la salida por la técnica EA.
K_P	Constante de proporcionalidad del controlador PD.
K_D	Constante de velocidad del controlador PD.
K_{Fi}, K_{Ti}	Constante de rigidez generalizada de Poisson a flexión y torsión.
m_i	Masa generalizada asociada al panel i-ésimo.
M, G, K	Matrices de masa, giroscópica y de rigidez.
R	Matriz de ponderación del controlador LQR dependiente del vector de control.
R_i	Matriz de ponderación del índice de coste J_i .
$R_{\nu\theta\phi}$	Matriz de Rotaciones.
p, q, r	Componentes de la velocidad angular para alabeo, cabeceo y guiñada.
q_1, q_2, r_1, r_2	Componentes del vector de estado para la deformación elástica.
q_i	Componentes del cuaternión.
Q_{Xi}	Momento generalizado de primer orden de la deformación del panel por flexión.
Q_{Yi}	Momento generalizado de primer orden de la deformación del panel por torsión.
Q_{nc}	Fuerzas de carácter no conservativo en el lagrangiano.
Q	Matriz de ponderación del controlador LQR dependiente del vector de estado.
$S(s)$	Función de Sensibilidad.
T_C	Componente de la acción de control.
T_D	Componente de Perturbación externa.
T	Energía Cinética Total en el lagrangiano.
\bar{T}_A	Par aerodinámico.
\bar{T}_{SP}	Par generado por la presión solar.
T_{eddy}	Par interno debido a las corrientes de eddy.
T_{mag}	Par magnético debido al campo magnético terrestre.
\bar{T}	Componente total de la perturbación externa e interna.
$T(s)$	Función de Sensibilidad Complementaria.
u	Vector de estado en la formulación lagrangiana.
\bar{u}	Vector de control.
V	Energía Potencial Total en el lagrangiano.

$\mathbf{V} = [v_1, \dots, v_n]$	Matriz de autovectores por la derecha del sistema.
$\mathbf{W}^T = [w_1, \dots, w_n]$	Matriz de autovectores del sistema por la izquierda.
$w_s(s)$	Funciones de Peso para el análisis mu.
$\bar{\mathbf{x}}(t)$	Vector de estado en la ecuación de control.
$\mu(\mathbf{M})$	Valor Singular Estructurado.
$\Delta(s)$	Matriz de incertidumbre del análisis mu.

LISTA DE ACRÓNIMOS

AOCS: Attitude and Orbit Control System
COMM: Communication Subsystem
CRAFT: Control power, Robustness, Agility, and Flying Qualities Tradeoffs.
EKF: Extended Kalman Filter
EA: Eigenstructure Assignment
ECEF : Earth Centered Earth Fixed
ECI : Earth Centered Inertial
ESA: Eigenstructure Assignment
GEO : Geostationary Earth Orbit
LEO : Low Earth Orbit
LQR : Linear Quadratic Regulator
MEO : Medium Earth Orbit
MIMO: Multiple-Input Multiple-Output
NORAD : North American Aerospace Defense Command
OBDH : On Board Data Handling
QUEST: Quaternion Stimation
QR : Descomposición o Factorización QR
RCAM : Research Civil Aircraft Model
SISO: Single Input Single Output
SVD : Singular Value Decomposition
TLE: Two Line Elements
TRIAD: Triads Attitude Determination
UAV: Unmanned Aerial Vehicle
UAS: Unmanned Aerial System
VISTA : Variable Stability Inflight Simulation Test Aircraft

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Los sistemas de control multivariable encuentran un gran campo de aplicación en los sistemas aeroespaciales. Aunque este tipo de sector suele ser conservativo en lo que a modificaciones o la introducción de nuevas técnicas se refiere, los sistemas de control multivariable se han aplicado en el sector aeroespacial.

Por tanto el sector aeroespacial se postula como un campo de análisis y aplicación de técnicas de control diversas. Una revisión de la literatura técnica relacionada con el guiado, la navegación y el control aplicada al sector aeroespacial, permite conocer la forma en que han evolucionado las técnicas y los sistemas. Concretamente en sistemas de control automático se ha evolucionado desde los iniciales sistemas SISO hasta los modernos sistemas MIMO, que trabajan con multitud de sensores y actuadores.

La evolución ha podido observarse también en las técnicas de filtrado, de determinación de actitud y de control mediante la aplicación de diversos métodos que crecen en sofisticación a medida que crece la capacidad de cálculo de los sistemas embarcados.

Pero el desarrollo de las técnicas de control está íntimamente unido al desarrollo de la capacidad de medida y actuación. Especialmente en el control de actitud de sistemas aeroespaciales también se ha evolucionado desde sistemas simples donde el control se realiza por medios puramente pasivos a sistemas que requieren una capacidad de maniobra rápida y precisa.

El control de actitud de sistemas espaciales se complica con el incremento de elementos adosados al cuerpo principal del vehículo. El estado del arte de vehículos espaciales no es simple, ya que hoy en día un satélite está formado por diversos elementos que conforman una estructura compleja. Estas estructuras pueden ser de carácter simple considerando únicamente un cuerpo principal rígido, o pueden ser consideradas de carácter más complejo, en el que un cuerpo principal tiene adosados diversos elementos estructurales que pueden ser considerados deformables. En el extremo más elevado de complejidad se encuentran las estaciones espaciales. Este tipo de sistemas están formados por una cantidad de elementos en número creciente, creando por tanto una estructura deformable y flexible.

No es necesario considerar una complejidad tan elevada como la que muestra una estación espacial, para plantear un problema relacionado con la deformación de las partes flexibles de un satélite bajo la acción de determinadas maniobras de control de actitud, es decir de orientación del vehículo.

Si se considera por tanto que un satélite es deformable bajo la maniobra de reorientación o de apuntamiento de un satélite, de forma lógica ha de plantearse el diseño del controlador que permite al sistema de control de actitud mantener y obtener los requisitos definidos.

Dentro de la búsqueda del método de diseño del controlador se considera la de Asignación de Autoestructura (Método EA). Esta técnica por sus características se

adapta a los requisitos de control de actitud que debe tener un satélite considerado flexible. El análisis modal del sistema permite conocer las características de comportamiento. Esta información es utilizable directamente por la técnica EA, constituyendo por tanto un acceso directo al diseño del controlador.

1.1 PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Cualquier vehículo aeroespacial considerado flexible está compuesto de dos partes, una de ellas es la parte rígida y otra la considerada deformable. En sí mismo este planteamiento podría ser considerado como un problema de importancia relativa si el sistema fuera accesible en cualquier momento y en cualquier situación y por tanto mantenible y reparable. Pero esto mismo puede representar un problema importantísimo debido a la inaccesibilidad a estos vehículos. Por diseño se ha de garantizar que cualquier vehículo aeroespacial, en particular cualquier satélite, va a tener una vida útil determinada por la función que va a desarrollar el mismo. La estructura de este tipo de vehículos ha de ser lo suficientemente robusta para que las perturbaciones a las que se encuentran expuestas no la degraden y deformen.

En este tipo de vehículos aparecen vibraciones no deseadas que pueden estar causadas por perturbaciones internas o externas y por maniobras de orientación. Las perturbaciones externas son aquellas que se producen alrededor del vehículo, son dependientes del tipo de órbita desarrollada y pueden causar deformaciones elásticas en la estructura o vibraciones. Las perturbaciones internas son las causadas por algún tipo de actuador perteneciente a los sistemas del satélite. Y las maniobras de orientación son aquellas que se realizan para orientar el vehículo en una determinada orientación.

Independientemente de la fuente de perturbación la estructura puede deformarse de forma elástica causando cierto estrés sobre los materiales de los que está fabricada. La cuestión que se plantea precisamente está relacionada con la atenuación de las deformaciones y vibraciones que se producen durante las maniobras de orientación y corrección de la órbita, en definitiva de los movimientos de actitud del vehículo.

Con esta idea, el problema principal consistiría en diseñar una ley de control que aplicada sobre el sistema de control de actitud atenuara la deformación elástica o vibración sobre los elementos flexibles del vehículo. A la vez que se ofrece una solución para atenuar la vibración de los elementos flexibles sintetizada en forma de controlador, se hace necesario en el proceso de diseño llevar a cabo un análisis de robustez para determinar como es afectado el sistema frente a perturbaciones e incertidumbres.

1.2 MOTIVACIÓN

El problema planteado es lo suficientemente motivante como para afrontar el estudio de este tipo de vehículos desde la perspectiva de los sistemas de control y en particular desde el diseño de leyes de control que atajen el problema expuesto. Pero esto no es todo. Para llegar a desarrollar un controlador por técnicas de Asignación de Autoestructuras (técnicas EA) es necesario disponer en primer lugar de un modelo matemático adecuado próximo al real. Esto abre otra línea de trabajo que se va a

desarrollar en esta tesis para cubrir matemáticamente los aspectos más reales del sistema.

Por tanto, el acercamiento a la resolución del problema va a tener una vertiente poliédrica. En primera aproximación la necesidad de disponer de un modelo matemático adecuado que permita una aproximación precisa del problema. Este modelo permitirá la realización de un estudio del comportamiento del sistema mediante un análisis modal del mismo. En segundo lugar se presenta el diseño del controlador mediante la aplicación de las técnicas que más se aproximen al objetivo del diseño. Esto conlleva un análisis detallado de las técnicas de resolución del problema de control. Por último, el diseño del controlador finaliza con simulaciones del sistema lineal y no lineal, en el que se ha integrado el controlador diseñado.

Otro aspecto interesante de esta tesis está centrado en profundizar en las posibilidades que ofrece la técnica de Asignación de Autoestructuras y como esta puede adaptarse al objetivo perseguido para el sistema. Uno de los aspectos más interesantes de la técnica es aquel relacionado con la robustez del sistema.

Por último, el tercer aspecto considerado en esta tesis recae sobre la simulación gráfica del sistema correspondiente al satélite, con el objeto de validar el modelo matemático y comprobar su comportamiento en lazo cerrado con el controlador diseñado.

Esta triple motivación es la que ha sido tenida en cuenta en esta tesis. Con ello se cubren todos los aspectos relacionados con el análisis y síntesis de sistemas de control automático. Se comienza en la fase de definición del sistema, se continúa con el modelado y diseño del controlador finalizando con la simulación.

1.3 OBJETIVO Y CONTRIBUCIONES DE LA TESIS

Puede decirse que esta tesis tiene varios objetivos. El primero está relacionado con la obtención del modelo matemático. En este se van tener en consideración los aspectos de modelado que afectan a las deformaciones de los elementos flexibles, de un vehículo de estas características. El modelo matemático va a incluir las deformaciones longitudinales y transversales de los elementos deformables adosados al cuerpo rígido del vehículo.

Otro aspecto que se va a desarrollar en la tesis está basado en la obtención de un alto nivel de desacople mecánico entre los elementos rígidos y flexibles del vehículo por medio de técnicas de control basadas en la Asignación de Autoestructuras (EA). En sí mismo este puede considerarse como el objetivo principal de la tesis. Obtener un desacople mecánico del vehículo por aplicación de una ley de control obtenida por métodos EA supone atenuar o en algunos casos eliminar la vibración y deformación no deseada de los elementos flexibles. Con esta característica se garantizan unas deformaciones y vibraciones contenidas dentro de unos límites soportables por las estructuras de los elementos flexibles.

Un tercer aspecto considerado en esta tesis está relacionado con la robustez del sistema analizada con los diferentes controladores diseñados. La técnica de análisis que se va a emplear está basada en el análisis μ .

Estos objetivos individuales llevan al objetivo conjunto del desarrollo de esta tesis. Se trata de considerar un vehículo aeroespacial rígido-flexible que puede realizar maniobras de orientación en tres ejes. El acoplamiento mecánico entre las partes de este vehículo puede llevara a generar vibraciones en los elementos flexibles del mismo y maniobras erróneas de orientación. El objetivo por tanto es diseñar un sistema de control de actitud, centrado en su controlador, que permita obtener un alto grado de atenuación en las vibraciones y deformaciones que forman parte del vehículo.

1.4 ESTRUCTURA DE LA TESIS

Esta tesis está estructura en ocho capítulos incluidos la introducción y las conclusiones, junto con varios anexos que expanden aquellas partes necesarias para el entendimiento y desarrollo del problema y que no han sido incluidos en el cuerpo principal del documento.

El CAPÍTULO 2 está dedicado a realizar un repaso del estado del arte de los diversos conceptos y disciplinas que ha sido necesario cubrir para presentar y resolver el problema. Se realizan numerosas referencias a artículos y documentos publicados en publicaciones relacionadas con el control automático, la flexibilidad y la vibración en sistemas dinámicos. Aunque se ha tratado de hacer un repaso de las publicaciones más recientes, se han incluido las publicaciones iniciales relacionadas con el planteamiento de la técnica de Asignación de Autoestructuras. Así mismo, no se ha olvidado las referencias a textos especializados, necesarios por su aportación técnica.

El CAPÍTULO 3 está focalizado al planteamiento del problema de control en estructuras aeroespaciales, a determinar aquellos aspectos que pueden considerarse como perturbaciones externas y a definir el modelo del vehículo objeto del estudio presentado.

El modelo matemático del vehículo se desarrolla en el CAPÍTULO 4. En este se detalla pormenorizadamente los pasos seguidos para la obtención del modelo matemático y concluir con las ecuaciones dinámicas del movimiento de un vehículo flexible. El modelo matemático obtenido se corresponde con un modelo no lineal. Este modelo no lineal se linealizará alrededor de un punto de equilibrio para poder desarrollar la ley de control por el método de Asignación de Autoestructuras.

Todo lo que acontece al desarrollo del método de Asignación de Autoestructuras EA, se desarrolla en el CAPÍTULO 5. En este se mencionan las técnicas desarrolladas para la obtención de una ley de control y se detallan aquellos métodos relacionados con la robustez del sistema. El método EA se relaciona con el problema de control de actitud identificando los modos del sistema y determinando las especificaciones necesarias para el control de actitud.

En el cuerpo principal de la tesis se incluyen las simulaciones realizadas para demostrar la validez de la técnica en el diseño de controladores aplicados a vehículos flexibles. Estas simulaciones se presentan en el CAPÍTULO 6. Las simulaciones llevadas a cabo se aplican al sistema lineal y al no lineal.

Un capítulo adicional, el CAPÍTULO 7 está dedicado al análisis de la robustez del sistema con los controladores obtenidos en el CAPÍTULO 6. Aunque se han utilizado técnicas de análisis de robustez clásicas para suministrar información básica, se ha empleado el análisis μ como herramienta de análisis de robustez. Por tanto, en este capítulo se han incluido las líneas básicas de este tipo de análisis para analizar el sistema.

Por último, el CAPÍTULO 8 está dedicado a la presentación de conclusiones y a analizar aquellos aspectos susceptibles de ser tratados en el futuro.

CAPÍTULO 2

ESTADO DEL ARTE

2.1. INTRODUCCIÓN

En el diseño y desarrollo de un sistema de control de actitud de un vehículo espacial se ha de prestar atención a diversos aspectos que afectan al diseño del controlador. Estos aspectos están relacionados con el tipo de vehículo, la órbita que va a desarrollar, las perturbaciones internas y externas y desde el punto de vista de simulación matemática la precisión del modelo.

En cuanto al tipo de vehículo tratado, se ha de discernir respecto de la consideración de vehículo rígido o flexible. Esta característica está relacionada con la complejidad matemática del modelo y por tanto con la similitud con el sistema real. Este aspecto introduce cierta incertidumbre en la precisión del modelo que puede tener una repercusión más que moderada en el diseño del controlador y en la etapa de simulación.

Otros aspectos son las perturbaciones internas y externas que van a afectar al comportamiento del vehículo y que han de ser tenidas en cuenta en el modelo matemático y en el proceso de simulación para conocer la repercusión real del sistema.

Estos aspectos, junto con las especificaciones del sistema de control de actitud han de ser valoradas para la selección del método de diseño del controlador.

Desde el punto de vista de diseño y desarrollo del controlador por el método de Asignación de Autoestructuras y relacionado con los aspectos citados se han de tener en cuenta la flexibilidad del vehículo y la robustez del sistema frente perturbaciones e incertidumbres del modelo.

En esta sección de la tesis se realiza una revisión de los trabajos más interesantes relacionados con el desarrollo matemático y aplicación al sector aeroespacial de la técnica de asignación de autoestructuras, de los trabajos y desarrollos relacionados con el carácter de flexibilidad del vehículo y por último los aspectos de robustez del sistema.

2.2. CONTROLADORES APLICADOS EN SISTEMAS DE CONTROL DE ACTITUD

En esta sección se van a presentar los trabajos seleccionados que muestran las últimas tendencias en controladores de aplicación espacial, y en el desarrollo y aplicación de la metodología EA. Esta visión del estado del arte no es única, evidentemente, pero si se ha considerado que es representativa para el objetivo de la tesis.

Desde los primeros tiempos de implantación de controladores mecánicos, las técnicas de control aplicadas estaban basadas en los tradicionales controladores PID, de los que

existen diversos ejemplos, tal como Minisat, en los años 90. Los controladores de carácter magnético, también han sido extensamente utilizados en satélites en órbitas LEO. Sirva como ejemplo el MAGSAT también de los años 90.

A principios de los años 90, la Agencia Europea del Espacio, en su congreso de navegación y control [1991, ESA], recoge las aportaciones de lo que se denominó “técnicas de control moderno”, en donde son presentados diversas técnicas de control presumiblemente aplicables a futuros satélites [1991, Champentier].

En este trabajo se presentan diversos campos de aplicación, entre las que se encuentran los sistemas de apuntamiento preciso, grandes satélites, maniobras de atraque de los transbordadores (Rendezvous) y sistemas multicuerpo. Se barajaban en estos trabajos las diversas técnicas de control aplicables, entre las que se encontraban:

- Técnicas de control óptimo.
- Control Adaptativo.
- Control Predictivo.
- Control Robusto.
- Control Modal.

El control modal, ya se posicionaba como la técnica de asignación de autoestructuras, en la que el objetivo principal es el desacople dinámico de los modos.

Ordenados por los diversos tipos de controladores el estado del arte en el ámbito europeo se clasifica de la siguiente forma:

- **Controladores PID:** Las técnicas de control clásico mediante la instalación de controladores PID siguen teniendo su aplicación en sistemas de control de actitud. Independientemente de la complejidad del control, la aplicación se realiza de forma extensa en el campo aeroespacial [1997, Villa].

Entre los numerosos satélites que desarrollan una ley de control clásica se encuentra el satélite español Minisat. Este satélite de carácter científico, dispone de un control de actitud de tres ejes. La ley de control está basada en controladores PID, para la rueda de momentos instalada a bordo.

Como ejemplo de aplicación más reciente se muestra el control de actitud y control de la órbita del satélite PROBA (Project for On Board Autonomy) [2002, Braembussche]. Este satélite dispone de control de actitud sobre tres ejes. La ley de control implementada realiza la realimentación de cuaternión y de los errores de velocidad angular. Con el control sobre los tres ejes se obtiene un apuntamiento preciso a Nadir, orientar los paneles hacia el Sol, y la orientación estable de las cámaras de a bordo hacia Tierra.

- **Control Predictivo:** Entre las aplicaciones más recientes de control predictivo se encuentra la aplicada a satélites en formación de órbita baja LEO, que se ven afectados por perturbaciones externas como son la resistencia aerodinámica o la presión solar [2002, Ortega]. En concreto este estudio realiza la aplicación al satélite italiano MITA.

El sistema de control propuesto es MIMO [2002, Rossi], teniendo como entradas las aceleraciones en los ejes X e Y del sistema orbital de coordenadas. Como salidas dispone de control de posición y velocidad en los mismos ejes mencionados. La órbita del satélite es circular, con una altitud de 450 Km. Los resultados muestran que aplicando esta técnica de control es posible obtener error cero incluso comenzando con errores que saturan los actuadores.

En otros trabajos, se aplica la estrategia de control predictivo en el sistema de control de vuelo de un vehículo de reentrada en la atmósfera terrestre, procedente de cualquier estación espacial [2002, Rossi]. El sistema de control de vuelo se encarga de gestionar las medidas de posición y el control de actitud del vehículo. En este trabajo se compara el sistema de control predictivo basado en modelo con el de inversión dinámica.

- **Síntesis H_∞ :** A mediados de los años 90, se dio una importancia singular a las técnicas de control basadas en H_∞ [2003, Semel]. Aunque esta técnica ha sido empleada en sistemas de control de actitud de diversos satélites, encuentra una aplicación adicional en lanzadores [2002, Matthieu], entre los que se encuentra el Ariane 5E/CB.

Más recientemente, las técnicas han evolucionado hacia los análisis de la problemática introducida por elementos flexibles a bordo del satélite. Esto se relaciona con la robustez de los sistemas, atrayendo el interés de los ingenieros de las diversas organizaciones espaciales.

Las técnicas empleadas en la determinación de la robustez son diversas. Entre ellas se encuentran la síntesis μ [2005, Bodineau], realimentadores estáticos [2005, Kron], o técnicas basadas en observadores de incertidumbres [2005, Chen]. En este sentido una de las últimas referencias relacionadas con el control de satélites con elementos flexibles grandes, es [2005, Chiappa]. En este trabajo se presenta la técnica iterativa μ , mostrando especial atención a la robustez del sistema conseguida mediante la aplicación de la técnica. Se muestra, por tanto, que el campo de la aplicación de diversos controladores cuando aparecen modos flexibles en los elementos externos del satélite es atrayente.

Desde la perspectiva de la determinación de actitud, los trabajos realizados tanto en ámbito europeo como americano, se focalizan principalmente en dos algoritmos clásicos, QUEST y TRIAD [1996, Bak], [1997, Reynolds]. Adicionalmente, aparecen las aplicaciones de los filtros de Kalman, y Kalman extendidos (EKF) en la determinación de actitud, simplificando notablemente el hardware de los sistemas AOCS, y de aplicabilidad en satélites pequeños, pero complicando el código software integrado a bordo del computador principal.

En el campo de los actuadores, empiezan a utilizarse con especial interés los denominados "Control Moment Gyros", simplificando el hardware de control de actitud, y suministrando control total sobre los tres ejes del satélite.

2.3. MÉTODO DE CONTROL BASADO EN LA ASIGNACIÓN DE AUTOESTRUCTURAS

La técnica de asignación de autoestructuras EA ha recibido atención preferente por parte de investigadores durante los años 90. Es una técnica interesante, que tiene como objetivo situar los autovalores y los autovectores del sistema en lazo cerrado en lugares deseados del plano complejo después de integrar el controlador. De forma más concreta, este método, permite al diseñador satisfacer los criterios de amortiguamiento, tiempo de asentamiento y desacoplo de los modos del sistema por medio de una selección apropiada de los autovalores y autovectores del sistema en lazo cerrado.

Un sistema dinámico MIMO [1984, Sinha] modelado mediante la técnica de espacio de estados, muestra su grado de estabilidad como una función de la posición relativa que ocupan los autovalores de la matriz de estados. Estos autovalores son equivalentes en sistemas SISO a los polos del sistema.

De forma simple puede conocerse la estabilidad del sistema en lazo abierto por el valor que toman los autovalores. En las técnicas de control modal, como la de asignación de autoestructuras, los autovectores del sistema tienen su importancia puesto que modelan la respuesta del sistema. Por tanto, esta técnica se basa en el comportamiento de la autoestructura, es decir en la posición que muestren los autovalores y por los valores relativos de los autovectores del sistema.

El método de asignación de autoestructuras pretende obtener los autovalores del sistema en lazo cerrado lo más próximo posible a unos autovalores denominados deseados o pretendidos, que dotarán al sistema de nuevas prestaciones en el dominio del tiempo, diferentes a las originales del sistema.

Una de las características más importantes de la técnica, y que la hace extremadamente atrayente a la aplicación espacial, en la que aparecen modos rígidos y flexibles, es la posibilidad de desacoplar las dinámicas entre los distintos modos del sistema. Exige, para ello, un trabajo importante de determinación de estos modos y de conocimiento profundo del sistema.

2.3.1. DESARROLLO DE LA TÉCNICA DE ASIGNACIÓN DE AUTOESTRUCTURAS

La revisión de los trabajos realizados referentes a los métodos de Asignación de Autoestructuras se va a presentar desde dos puntos de vista complementarios. Por una parte se va a revisar la documentación referente al desarrollo matemático de la técnica. Así, se van a presentar los trabajos realizados relacionados con la técnica que han permitido solucionar de diversas formas el problema de asignación para llegar a obtener los correspondientes controladores. Desde la segunda perspectiva, se van a presentar trabajos relacionados con aplicaciones de la técnica EA en diferentes campos industriales recalcando el aspecto aeroespacial.

Es complicado establecer el momento exacto en que la técnica atrajo el interés de los investigadores para el cálculo de controladores. Con el objeto de referenciarlas temporalmente se ha mencionado los trabajos de [1967, Wonham] a finales de los años 60

y principios de los 70, bajo contrato de NASA. En este trabajo se presenta el resultado fundamental para la resolución del problema de posicionamiento de sistemas lineales con entradas múltiples por medio de la realimentación de estados. Es en este trabajo donde se presta especial atención a la relocalización de los autovalores de sistemas lineales con entradas múltiples. La técnica inicial trataba de asignar la autoestructura mediante realimentación de estados, dando lugar a trabajos adicionales como el de [1976, Moore], en el que se pretendía deducir las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de la realimentación más conveniente de las variables de estado, de forma que se obtengan los autovalores y autovectores en lazo cerrado especificados. Posteriormente estos trabajos tuvieron continuación con los de otros autores como [1977, Porter], en el que se presentaba una técnica de asignación de autovectores en lazo cerrado para sistemas multivariados lineales en el tiempo con autovalores diferentes por medio de realimentación de estados.

La aplicación de la técnica EA a sistemas que realimentan la salida se presenta en el trabajo de [1975, Kimura], en el que la aproximación se realiza para las propiedades de las autoestructuras de la dinámica del sistema en lazo cerrado, poniendo de manifiesto en este trabajo que el problema de la asignación de polos como una posible técnica del paso de la teoría de control clásico a control moderno.

Los trabajos de [1983, Andry] se muestran como de los más interesantes en el espectro de actividades relacionadas con la técnica EA. Además de presentar una revisión de los trabajos realizados sobre la técnica, justifican el estudio del problema tomando como referencias de partida los trabajos anteriores. En este trabajo se solucionó la ecuación:

$$[(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}) + \mathbf{BKC}] \nu_i = 0$$

Siendo λ_i los autovalores y ν_i los autovectores. Los métodos matemáticos utilizados para el cálculo de los vectores deseados incluían técnicas de proyección de autovectores. Se concluye que el autovector deseado tiene la forma $\nu_i = (0, 1, \dots, x)$, donde un “0” representa una condición no deseada, un “1” representa una condición deseada y una “x” una condición no importa, obteniéndose diferentes soluciones para la matriz de ganancia de realimentación \mathbf{K} , si se trata de realimentación de estados o de realimentación de la salida. El estudio presentaba un algoritmo de aproximación al Autovector. En este trabajo también se presentaba un sistema de control de aeronave como aplicación fundamental de la técnica.

Puede decirse que el objetivo principal de los investigadores desde el punto de vista matemático se ha centrado en la resolución del problema por diferentes técnicas. Entre estas se han utilizado técnicas de minimización, como la de [2003, Mengali] en la que primeramente se fijan los componentes de los autovectores deseados y numéricamente se minimiza un índice cuadrático lineal, para alcanzar los autovalores deseados dentro de los límites especificados. Otras técnicas se basan en la descomposición en valores singulares (SVD), como el trabajo presentado por [1989, Burrows], en el que además se comienzan a estudiar la robustez de la técnica por medio de la realimentación de estados.

Otros investigadores siguieron la línea de asignación simultánea y desarrollo de algoritmos de asignación. Este es el caso del trabajo de [1998, Choi], en donde se

presenta el caso de asignación de autoestructuras derecha e izquierda de forma simultánea.

Una de las preocupaciones adicionales contempladas por los investigadores para el desarrollo de método de asignación, bien sea por realimentación de estados o de la salida es la robustez. Hay que considerar que el método de asignación EA no es un método robusto en sí mismo, sino que es necesario establecer estrategias que permitan “robustificar” el proceso. En cierto modo los trabajos realizados por [1985, Andry] aplicados al control de vuelo ya trataba aspectos relacionados con la robustez del método.

Los trabajos de [1994, Patton] presentan directamente el problema del control robusto por asignación de autoestructuras, tomando como índices de robustez las funciones de sensibilidad y sensibilidad complementaria.

Aplicando el método EA a un piloto automático genérico, que tiene como requisito el desacoplo de los modos del sistema, [1992, Wilson] presenta de nuevo el problema de la asignación robusta de la autoestructura, concretamente aplicada a la estabilidad robusta.

El interés por la técnica EA reaparece con [2002, Duan]. En este trabajo se denomina a la técnica ESA (Eigenstructure Assignment). Se propone la resolución de la autoestructura mediante la introducción de dos algoritmos, que permiten la repetición de los autovalores en lazo cerrado respecto de los de lazo abierto. Este mismo investigador vuelve a proponer la misma técnica en [2003, Duan] aplicable a realimentación de la salida. Así mismo, en [2005, Xue] se trata de nuevo la técnica del método de asignación EA, denominándola también ESA.

Es interesante resaltar que la asignación de autoestructuras también ha sido atendida por los investigadores desde el punto de vista de la generación y diseño de herramientas aplicables al cálculo de controladores por diferentes técnicas. Cabe destacar en particular dos herramientas utilizadas para entorno MATLAB desarrolladas por [1998, Liu] y [2002, Magni].

2.3.2. APLICACIONES DE LA TÉCNICA DE ASIGNACIÓN DE AUTOESTRUCTURAS AL SECTOR AEROESPACIAL

La aplicación de los sistemas de control al campo aeroespacial se extiende desde el campo aeronáutico con todos los tipos de aeronaves comerciales, de transporte, militares y más reciente la aparición de las aeronaves no tripuladas, hasta el aeroespacial incluyendo diversos tipos de vehículos, entre los que se encuentran los lanzadores y vehículos espaciales de aplicaciones diversas. Aunque es posible encontrar aplicaciones dedicadas de control automático en determinados elementos instalados a bordo de cualquier vehículo aeroespacial. Con el objeto de ilustrar la aplicación de la técnica de asignación de autoestructuras se van a enumerar una serie aplicaciones al sector aeroespacial.

La aplicación al controlador lateral de una aeronave se muestra en [1978, Srinathkumar]. En este trabajo se muestra la metodología EA, aplicada a una aeronave,

mediante realimentación de la salida. En el mismo sentido se encuentra el trabajo de [1988, Mudge].

En el trabajo de [1985, Sobel], se marca la pauta de desarrollo de algoritmos para la asignación de la autoestructura aplicada también al desarrollo de sistemas de control de vuelo en el sector aeronáutico. Se propone el desacoplo de los modos para encontrar independencia entre los movimientos de la aeronave. Además de este trabajo este autor también presenta el [1985, Sobel y Shapiro], aplicado al control de vuelo igualmente.

Continuando con el vuelo automático, aparece la aplicación a autopilotos de misiles. El trabajo desarrollado por [1992, Wilson] desarrolla un controlador realimentando la salida, que tiene como objetivo conseguir la mejor autoestructura alcanzable para mantener criterios de robustez. Se utilizan criterios de minimización entre autoestructuras reales y alcanzables por medio de la aplicación de la ecuación de Lyapunov.

Otro trabajo relacionado con los autopilotos aplicados a misiles es el de [2001, Döll] , donde se diseña un controlador para este tipo de vehículos basado en asignación de autoestructuras multi-modelo. El trabajo incluye técnicas de análisis y síntesis μ .

El trabajo de [2007, Bong] presenta la relación entre los métodos de diseño EA y el control de vuelo. En el trabajo se valora la estabilidad robusta frente a variaciones de los parámetros del sistema, en el que se trata la pretendida falta de robustez del método.

En el mismo sentido que el anterior el trabajo de [1998, Patrick] muestra la aplicación de la metodología al diseño de controladores que ofrecen robustez, agilidad y mejora de las cualidades de vuelo en una metodología denominada CRAFT.

Dentro de esta perspectiva histórica es necesario mencionar los trabajos desarrollados para Garteur por [1997, Faleiro] aplicados al control de vuelo de aeronaves (RCAM), así como los desarrollados por [1997, De la Cruz] sobre el mismo tema.

Abordando los trabajos comparativos entre diferentes técnicas y la metodología EA, cabe mencionar los trabajos de [2001, Lohsoonthorn], donde la aplicación se encuentra en el controlador longitudinal de una aeronave hipersónica, tratando de desacoplar los modos identificados como período corto y fugoide. En este trabajo se comparan las técnicas H_{∞} y la EA.

En otro tipo de aplicaciones aeroespaciales, en concreto de la tecnología de lanzadores espaciales, se encuentra el trabajo de [2002, Oliva]. El trabajo compara la metodología EA con las técnicas de control óptimo. El objetivo es estudiar el desacoplo de los modos obtenidos mediante la aplicación de ambas técnicas.

Respecto de los recientes trabajos aparecidos en los que se retoma la metodología EA, denominándola metodología ESA, el trabajo de [2004, Tsai] combina la metodología EA con los métodos LEQG/LTR, aplicados al control de actitud de un satélite. Se tratan los aspectos relacionados con la robustez del sistema y tratando de minimizar las limitaciones de cada uno de los métodos tratados.

Enlazando el control de actitud con estructuras flexibles y con la técnica EA, se han desarrollado diversos trabajos. Cabe reseñar el trabajo de [1989, Juang], en el que se trata la asignación de autoestructura robusta, para lo que se utiliza descomposición QR.

Las actividades presentadas en [1987, Clark] aplican la metodología EA en el desacoplo de la vibración a que es sometida una estructura flexible. Se trata de una aplicación directa de la técnica a los modos presentados por la estructura.

El trabajo de [2002, Merkel], presenta la metodología EA aplicada al control de elasticidad de elementos flexibles en el ámbito aeronáutico, y en el que se plantea un método de resolución para un sistema con incertidumbres en el modelo.

Respecto de los controladores longitudinales el trabajo de [2002, Crassidis], expone la aplicación de la técnica EA al controlador longitudinal de período corto del simulador denominado VISTA (Variable Stability Inflight Simulator Test Aircraft).

Una aplicación de las técnicas EA a elementos embarcados se presenta en [2004, Kyongsoo]. La aplicación EA en esta tesis se realiza sobre un espejo primario de telescopio de aplicación espacial.

La técnica EA también se aplica al control lateral de velocidad de misil. Este trabajo se presenta en [2003, Bruyère]. Respecto del control robusto son diversos los trabajos desarrollados y presentados en la literatura técnica. Técnicas de control robusto aplicadas a lanzadores, [2003, Ganet], a control de vuelo robusto [2003, Satoh], o incluso combinando técnicas EA y QFT [2004, Wu].

El trabajo de [2006, Mehrabian] aborda la aplicación de técnicas EA al piloto automático de misiles. El objetivo es diseñar controladores adaptativos mediante la comparación de métodos diseñados con técnicas EA y de ganancia programada.

A pesar de que la técnica EA ha sido utilizada ampliamente durante los años 90, siguen apareciendo referencias en la literatura reciente de aplicaciones diversas. El trabajo de [2007, Nieto-Wire] aplica la técnica al diseño de un sistema de control de vuelo para modelos de túnel aerodinámico de las denominadas aeronaves “tailless”. Esta aplicación fue de nuevo presentada en [2009, Nieto-Wire].

En cuanto a la aplicación en helicópteros cabe destacar, entre los trabajos iniciales con aplicación de autoestructuras, el de [1989, Garrad]. En este el objetivo era obtener un controlador para desacoplar todos los modos de este tipo de vehículos, además de diseñar un estimador de estados aplicando técnicas de asignación de autoestructuras.

Otras aplicaciones en helicópteros como la de [2003, Clarke] tratan de definir la autoestructura adaptada a especificaciones de tipo militar. El objetivo principal de este trabajo fue el de obtener una respuesta satisfactoria del modo de periodo corto. Como continuación de este trabajo [2008, Pomfret] adapta la autoestructura, que denomina ideal del trabajo del 2003 a una aplicación muy concreta en un modelo de helicóptero denominado Lynx. De nuevo en el trabajo de [2009, Pomfret] presenta el método EA aplicado a un helicóptero de rotor simple, y aplicado al caso más complejo del mando de velocidad. El objetivo perseguido fue el de desacoplo de los modos basados en estándares de diseño militares.

La aplicación a helicópteros no tripulados también ha aparecido en algunos trabajos como el de [2006, Antequera]. En este se considera la aplicación de la técnica por realimentación de estados y se comparan los resultados con un controlador LQ diseñado para esta función.

Un trabajo más reciente como el de [2008, Srinathkumar] presenta la adaptación de la teoría y métodos de la asignación de autoestructuras a las cualidades de vuelo de helicópteros y al controlador lateral-direccional de aeronaves.

El control de vuelo sigue recibiendo atención por parte de los diseñadores de sistemas, en los que se combinan diversas técnicas de diseño. En este sentido, el trabajo de [2008, Douik] presenta la combinación de los sistemas de hormigas (Ant Systems) con métodos LQR para encontrar un controlador por realimentación de estados basado en técnicas EA.

Un escenario novedoso en lo que control de sistemas aeroespaciales se refiere se abre con los vehículos no tripulados (UAV y UAS). Estos vehículos desde su aparición, han sido progresivamente adaptados a diversas utilidades ofreciendo escenarios nuevos para los sistemas de control. El tipo de vehículos no tripulados es variopinto, ofreciéndose vehículos de ala fija y ala rotatoria. La aplicación de los métodos de control basados en autoestructuras se presentan en las aplicaciones presentadas en [2009, Yanguo] y en [2010, Thimmaraya].

2.3.3. ROBUSTEZ EN SISTEMAS AEROESPACIALES

Como consecuencia del proceso de diseño pueden aparecer modos de comportamiento dinámico no deseados, debido a consideraciones no tenidas en cuenta, no simuladas o simplemente como consecuencia de interacciones interiores o exteriores no modeladas. A pesar de estos inconvenientes de diseño, se pretende que el sistema responda con ciertas garantías cuando se presentan estos imponderables.

Para solucionar esto, se dice que el sistema tiene que ser robusto, disponiendo por ello de cierto grado de robustez. Por lo tanto, se podría describir la robustez como la habilidad del sistema de control para mantenerse dentro de las prestaciones nominales del mismo frente a perturbaciones interiores o exteriores.

Cualquier sistema dispone de ciertos modos de funcionamiento que no son del todo independientes entre sí, ya que se presenta cierto grado de acoplamiento entre los mismos. En cualquier proceso de diseño se ha de tener en cuenta el acoplamiento existente, requiriendo que el acoplamiento cruzado entre los distintos modos sea mínimo. Esta característica de diseño se denomina “desacoplamiento entre modos”, consiguiéndose con ello en realidad añadir robustez al sistema.

Debido a la interdependencia de los modos que se presenta en los sistemas MIMO, intentar mantener los márgenes de estabilidad en un lazo del sistema puede llevar a degradar las prestaciones de cualquier otro del sistema. Por ello, los sistemas MIMO requieren una medida de la robustez de la estabilidad global del mismo, consiguiendo comportamientos aceptables dentro de los rangos de diseño.

Entre los trabajos más interesantes relacionados con el incremento de robustez de los sistemas a los que se ha aplicado la metodología EA, se extraen los siguientes:

Se presenta en [1987, Junkins] una metodología de robustificación de la metodología EA, basada en la definición de subespacios de autovectores admisibles. La formulación está basada en la resolución del problema mediante mínimos cuadrados y descomposición en valores singulares. Persigue la técnica de robustificación que los autovectores en lazo cerrado estén próximos a un conjunto unitario de vectores previamente definidos y que a la vez lo sean a los autovectores en lazo abierto.

Otras técnicas de robustificación, tratan del problema de robustez parcial en la asignación de los autovalores del sistema. Estos se tratan en [1987, Nichols], donde se propone un método de proyección nuevo para obtener asignación parcial. El proceso de robustez estudia la sensibilidad de los autovalores asignados. Se introduce el concepto aproximado que relaciona la robustez con la insensibilidad de las soluciones obtenidas.

Posteriormente se presentan los trabajos de [1988, Mudge], en los que se relaciona el problema de la robustez con la sensibilidad de los autovalores de nuevo. Así mismo, se propone la resolución del espacio alcanzable por medio de descomposición en valores singulares, SVD, aplicados a la realimentación de estados. Se presenta en este trabajo una aplicación al control de aeronaves.

El trabajo de [1989, Burrows] retoma la descomposición en valores singulares para la obtención de la autoestructura deseada, basando la robustez en la sensibilidad de la autoestructura.

En [1994, Chouaib] se muestra interés por el desacoplo de los modos del sistema y el cálculo de la sensibilidad mínima para la asignación de la autoestructura proponiendo un nuevo procedimiento. Este se basa en la minimización de la sensibilidad de los autovalores asignados utilizando los grados de libertad ofrecidos por asignación de los autovectores.

Una aplicación al campo de los lanzadores se presenta en [2003, Ganet]. Este trabajo está enfocado al diseño y desarrollo de sistemas de control robusto mediante técnicas de Asignación de Autoestructuras y H_{∞} para aplicar a lanzadores. Este trabajo se centra en la flexibilidad de los lanzadores del futuro, y pone de manifiesto la complejidad de obtención de controladores con estas características.

La medida de robustez de sistemas aeroespaciales en los que se presenta incertidumbre paramétrica es tratada en el trabajo de [2005, Bruyère]. El análisis de robustez se realiza sobre un misil con control de aceleración lateral.

Desde el punto del vista del análisis de robustez y síntesis de controladores cabe destacar el trabajo de [2001, Boulet], en el que se presenta la técnica de síntesis μ aplicada a estructuras flexibles de aplicación espacial.

Desde la perspectiva puramente teórica es interesante mencionar las definiciones y demostraciones relacionadas con la sensibilidad de las matrices del sistema y de los autovalores y autovectores del mismo en [1965, Wilkinson].

El análisis y síntesis μ se postula como un método interesante en la determinación de la robustez de un sistema y la posterior síntesis bajo criterios de iteración. El trabajo de [2001, Döll] cubre estos aspectos a la vez que aplica estas técnicas, junto con la asignación de autoestructuras, en el diseño de un piloto automático robusto de un misil.

En los últimos años los aspectos relacionados con la robustez vuelven a tomar importancia y se plasman en los trabajos realizados en ONERA y concretados en [2002, Magni]. En este trabajo, se concentran los conceptos de robustez y los de control modal.

La robustez y el número de condición son relacionados en [2009, Tsakiris]. Se propone un algoritmo denominado APA (Affine Projection Algorithm) que tiene como objetivo forzar la realimentación de sistemas regulados mediante optimización del número de condición de la matriz de inversión.

2.3.4. ELASTICIDAD Y VIBRACIÓN EN VEHÍCULOS AEROESPACIALES

Este último apartado está dedicado a la presentación de trabajos relacionados con la elasticidad y vibraciones en vehículos aeroespaciales y sobre las posibilidades de atenuación de las mismas. La preocupación por la elasticidad de los vehículos de aplicación aeronáutica y aeroespacial es un tema de constante preocupación que se manifiesta en forma de deformaciones y vibraciones de los elementos que constituyen cualquier tipo de vehículo. Es por esto por el que la elasticidad conlleva a la consideración de flexibilidad sobre cualquier vehículo y por tanto a la complejidad del modelo matemático.

La presentación de estos trabajos se lleva a cabo desde la perspectiva de los sistemas de control y de su influencia sobre la orientación de un vehículo espacial para tratar de plasmar la preocupación existente en el sector aeroespacial sobre este asunto. Algunos de los trabajos relacionan las propiedades elásticas del sistema con métodos de control y con análisis de robustez.

El control de vehículos aeroespaciales puede presentarse de forma desacoplada en lo que al control de ejes se refiere. Generalmente, se presentan controladores individuales para cada uno de los canales de control del vehículo o bien se agrupan parcialmente para diseñar controladores de dos ejes, como por ejemplo el de alabeo y guiñada y de forma adicional, no siempre necesaria el controlador de cabeceo. Esta consideración queda patente en [1985, Wie]. En este se presenta un controlador de alabeo-guiñada para un satélite flexible, poniendo de manifiesto la necesidad de una lógica de control adecuada a las características de los elementos adosados y considerados flexibles.

El trabajo de [2000, Grewal] estudia las características de robustez de un vehículo espacial flexible, evaluando controladores LQG/LTR y H_{∞} . Cabe destacar el modelado matemático basado en la formulación Lagrangiana.

El problema de vibración que aparece en vehículos con elementos adosados considerados grandes en términos de sus dimensiones es de completa actualidad. La supresión de la vibración activa de elementos flexibles en satélites y los problemas presentados en el control de actitud se presentan en [1998, Di Gennaro]. Como en otros

trabajos la formulación del modelo es Lagrangiana y se consideran tanto los modos de deformación longitudinales como los transversales.

El problema de la vibración y deformación de superficies flexibles se pone de manifiesto en [2006, Wen-Hua], donde se presenta una técnica de control denominada “Disturbance Observer Based Controller (DOBC)” que persigue la cancelación sobre los modos flexibles de un vehículo flexible de las perturbaciones externas al mismo, junto con el análisis de robustez frente a incertidumbres. Trabajos más recientes siguen presentando sus investigaciones en la reducción de vibración como se muestra en [2008, Quinglei].

Otro aspecto interesante está relacionado con el modelado matemático del sistema flexible. Esta consideración ha sido recogida en las publicaciones especializadas donde cabe destacar los trabajos de [1987, Meirovich] y [1995, Meirovich], en los que se presentan las ecuaciones dinámicas de vehículos aeroespaciales que modelan el comportamiento del mismo.

El acoplamiento mecánico que presentan los vehículos aeroespaciales entre los elementos flexibles y los elementos considerados rígidos es un aspecto interesante, que ha motivado esta tesis, y que ha sido tratado en algunas publicaciones como la de [2007, Ishimura]. Otro aspecto interesante es el del amortiguamiento de un vehículo flexible. Desde el punto de vista puramente matemático, es decir del modelo, la consideración del amortiguamiento ha de ser precisa, ya que el sistema real dispone del mismo. Esto conlleva a la determinación del comportamiento del sistema en lazo cerrado en presencia de sistemas amortiguados. Este tema es tratado en [2008, Cai].

Las técnicas de control adaptativo aplicado a vehículos espaciales flexibles también son tratadas en la literatura. En [2007, Maganti] se evalúa un controlador adaptativo simplificado diseñado para la supresión (atenuación) de vibraciones en elementos flexibles externos al vehículo. El control adaptativo aplicado al diseño de sistemas de control de actitud se presenta en [2002, Le Du].

El problema de los vehículos con aplicación espacial flexibles es tratado en la literatura con profusión. En [2007, Quinglei] se trata el problema del control de la vibración de vehículos espaciales flexibles en presencia de perturbaciones externas y de incertidumbre en el modelo. Se diseña un controlador estático que realimenta la salida comparándolo con una versión adaptativa del mismo.

En [2008, Jiang] se trata el mismo problema, el de la reducción de vibración en los elementos flexibles de vehículos espaciales. En este artículo se diseña un controlador dinámico con tal objetivo junto con la utilización de materiales diseñados para tal fin. Otro trabajo adicional al anterior es el presentado por [2007, Hu], donde el objetivo es comparar controladores diseñados con diferentes técnicas para atenuar vibraciones en las maniobras de actitud.

La supresión de vibraciones con sensores y actuadores no coincidentes, y con aplicación de los métodos EA son propuestos en [2009, Rastgaar]. En donde la base del diseño de los controladores EA reside en la ortogonalidad entre los autovectores del sistema en lazo abierto y en lazo cerrado. Se presenta una interesante aproximación a la ortogonalidad como medio de mejorar la robustez del sistema.

2.4. CONCLUSIONES

Esta sección dedicada al estado del arte ha tratado de plasmar la literatura, trabajos y artículos de interés relacionados con las principales disciplinas que son necesarias para el desarrollo de esta tesis. Se han mencionado trabajos relacionados con la ingeniería aeroespacial, las vibraciones en vehículos aeroespaciales y las técnicas de control, prestando especial atención a los métodos de asignación de autoestructuras. Los trabajos y artículos son diversos, y en referencia a las vibraciones en vehículos aeroespaciales y los métodos de control basados en técnicas EA se ha querido poner de manifiesto el interés en este campo por medio de trabajos recientes.

CAPÍTULO 3

EL CONTROL DE ACTITUD EN SISTEMAS ESPACIALES

3.1. INTRODUCCIÓN

El control de actitud de un sistema espacial, desarrollando cualquier tipo de órbita, tiene como función orientar al vehículo de una forma determinada que ofrezca un apuntamiento acorde a las especificaciones requeridas.

La tarea de control de actitud se centra por tanto en controlar la orientación del vehículo. Estas funciones recaen sobre un subsistema denominado subsistema de control de actitud. Este tipo de subsistemas generalmente resuelven la actitud a bordo del vehículo, de forma complemente autónoma, aunque existen técnicas para resolverla desde tierra.

Cualquier vehículo espacial, o más concretamente cualquier satélite desarrollando una órbita cualquiera, se encuentra sometido a un conjunto de perturbaciones que alterarán la orientación del mismo. El conocimiento de estas perturbaciones, junto con la especificación del sistema de control de actitud, permitirá obtener los apuntamientos requeridos en las diferentes misiones.

Por tanto, el subsistema de control de actitud, es un sistema de control automático, formado por un conjunto de sensores y actuadores que basado en el conocimiento de la dinámica del sistema permite reaccionar de forma adecuada frente a perturbaciones mediante las acciones de control necesarias. Controlar la orientación del satélite permite obtener diferentes apuntamientos para los instrumentos instalados a bordo o para posicionar las antenas de los enlaces de transmisión y recepción en una dirección determinada o realizar maniobras de reorientación para obtener apuntamientos diferentes.

Todo lo expuesto lleva al planteamiento del problema de determinación de actitud y su control, sucintamente introducido en el CAPÍTULO 1. Una adecuada selección de sensores y actuadores dependiente del tipo de satélite, del tipo de estabilización y de los apuntamientos requeridos, permitirá cumplir las especificaciones. A modo de ejemplo la Figura 3.1 representa un controlador de actitud simple de un eje, introduciendo un controlador PD. En ella se observa que la determinación de actitud está llevada a cabo por los sensores de posición y de velocidad como en cualquier otro sistema de control.

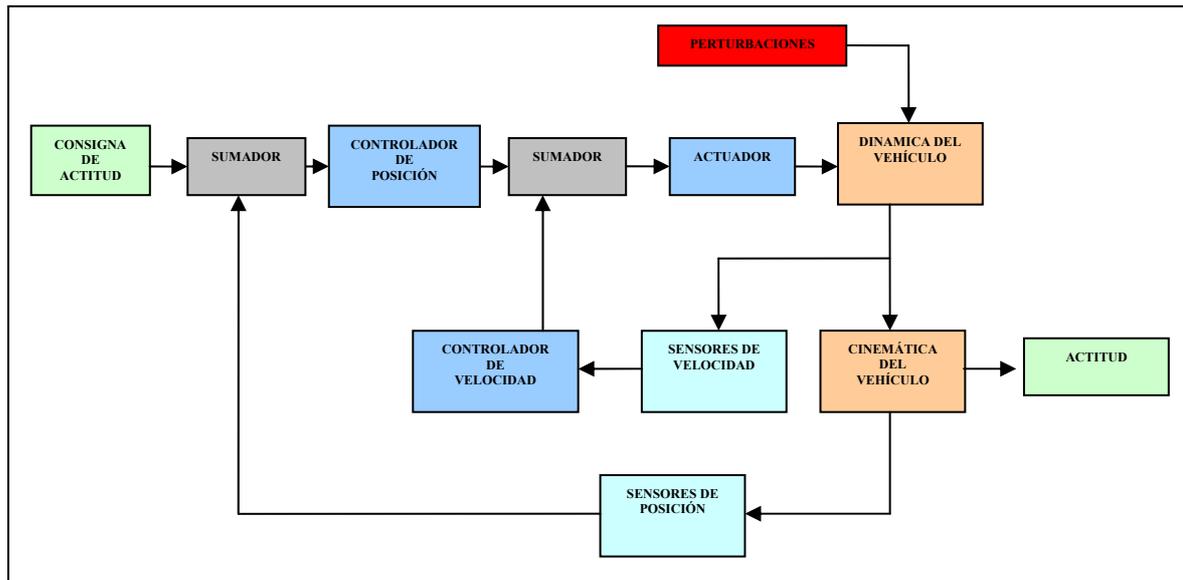


Figura 3.1: Control de un Eje de Actitud mediante un Sistema SISO.

3.2. CARACTERÍSTICAS DE LOS SISTEMAS ESPACIALES

Un vehículo espacial, o más concretamente un satélite, está formado por un conjunto de subsistemas a los que naturalmente se les atribuye una función determinada. Al conjunto del satélite se le denomina plataforma, concentrando los subsistemas mencionados. Los subsistemas integrados en la plataforma tienen relación directa con la misión para la que ha sido diseñado el satélite. Los subsistemas generalmente disponibles se muestran en la Figura 3.2, siendo sus funcionalidades las siguientes:

- **Subsistema de control de órbita y actitud (AOCS: Attitude and Orbit Control System):** Realiza el control de actitud y de órbita cuando son integradas estas funcionalidades.
- **Subsistema de potencia eléctrica:** Genera y controla la energía eléctrica del satélite.
- **Subsistema de control térmico:** Controla las temperaturas de los elementos más susceptibles.
- **Subsistema de comunicaciones (COMM):** Realiza la transmisión y recepción de datos entre los centros de control y el satélite.
- **Subsistema de gestión de datos (OBDH: On Board Data Handling):** Es el computador principal del satélite. Tiene enlace con todos los subsistemas.
- **Subsistema de carga de pago:** Son los equipos que llevan a cabo la misión a desarrollar. Puede tener diferentes objetivos:
 - o Comunicaciones.
 - o Carga de carácter meteorológico.
 - o Exploración de la Tierra.
 - o Experimentos científicos.

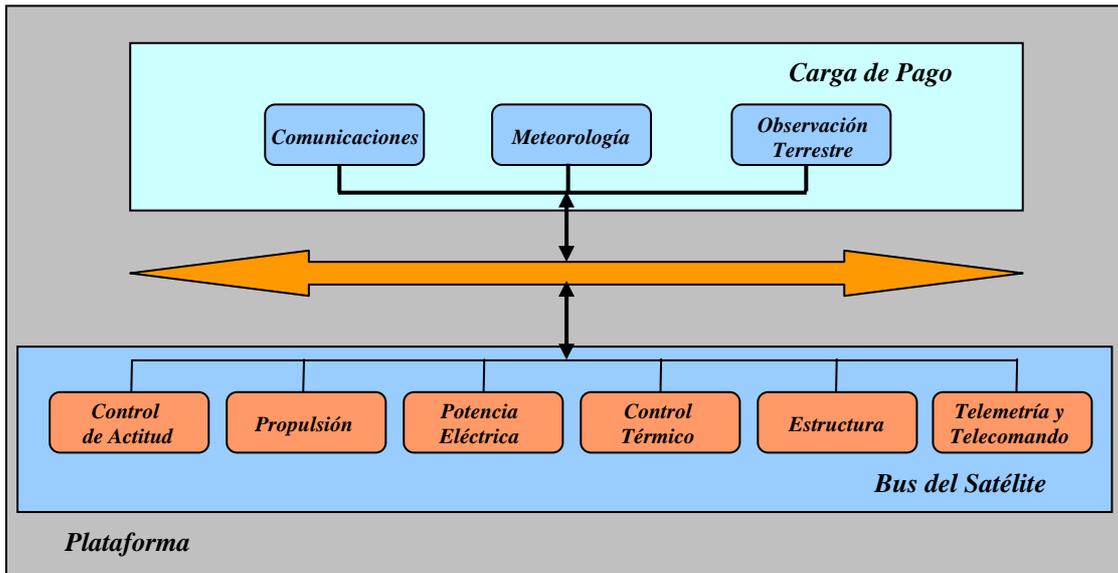


Figura 3.2: Diagrama de Bloques General de los Subsistemas Integrados a bordo de un Satélite.

Ciertos elementos pertenecientes a alguno de los subsistemas pueden estar integrados fuera de la plataforma. Entre estos se encuentran las antenas o los paneles solares. Desde la perspectiva del control de actitud, se plantea el problema de disponer de dos conjuntos de equipos. Los primeros los alojados en la plataforma y los dispuestos en el exterior de esta. Este tipo de disposición de elementos y equipos tiene influencia sobre los momentos de inercia del satélite y por tanto sobre la estabilización del mismo. Por otra parte añade una complicación adicional. Se trata del carácter de flexibilidad de que están dotados tanto la plataforma en sí misma y la que tienen los elementos externos, sobre todo si las dimensiones de estos son apreciables. Los segundos son los elementos que pueden ser considerados flexibles, con sus modos de vibración propios. Respecto de estos, se hace la consideración de elementos rígidos comparados con los anteriores. A este último conjunto pertenece la plataforma del satélite. Se presenta, por tanto, una de las consideraciones básicas para el desarrollo de esta tesis, que fue presentado en CAPÍTULO 1. Se trata de la consideración de rigidez de la plataforma del satélite, frente a la de flexibilidad de los paneles solares. Esto implica que cualquier maniobra de orientación de la plataforma podría excitar alguno de los modos flexibles de los paneles, y por tanto someterlos a un estrés innecesario. Así mismo, cualquier perturbación sobre los elementos flexibles, debido a sus dimensiones, podría influir sobre el apuntamiento, variando por tanto la actitud del satélite.

3.3. CONCEPTOS RELACIONADOS CON LA ACTITUD DEL VEHÍCULO

A lo largo del desarrollo de la tesis se van a utilizar conceptos relacionados con el planteamiento de la aplicación aeroespacial. Se introducen en este apartado los conceptos relacionados con el proceso de control de actitud de un satélite, con los tipos

de sensores y actuadores y con las diferentes perturbaciones de carácter externo que pueden perjudicar a la orientación del vehículo.

3.3.1. DETERMINACIÓN DE ACTITUD

Se conoce como determinación de actitud al proceso de conocer la orientación del satélite desarrollando su órbita. Para ello ha de disponer de sensores que tomen medidas de diferentes características para tomar una decisión sobre la orientación del satélite.

De forma adicional, además de los sensores, la determinación de actitud se basa en algoritmos robustos que permiten conocer de forma fiable la posición del satélite en su órbita y el error de apuntamiento cometido. Mediante la determinación de actitud se conocen bien los ángulos de Euler y los componentes del cuaternión, es decir se conoce la posición relativa del sistema de referencia ligado al cuerpo del satélite frente a cualquier otro sistema de referencia.

Para determinar la actitud es necesario conocer a bordo la magnitud de las componentes de la velocidad angular, para resolver la ecuación dinámica, o para obtener las componentes del cuaternión. Esta velocidad angular puede estar suministrada por giróscopos de velocidad o bien ser estimada a partir de las mediciones de otro tipo de sensores.

La determinación de actitud puede ser obtenida a partir de la lectura conjunta de diversos sensores, mediante fusión de sensores. Al menos un sensor es necesario en el desarrollo de las órbitas, para determinar la actitud del satélite. La combinación de la lectura de diversos sensores junto con el modelo dinámico del satélite lleva a dos metodologías en la resolución del problema de determinación:

- **Métodos determinísticos o métodos punto a punto:** Estiman sólo la actitud, basados en la observación de vectores de al menos dos sensores.
- **Métodos de estimación recursiva:** Estima los elementos de un vector de estado a partir de medidas procedentes de diversos sensores. Este es el caso de aplicación de magnetómetros en la determinación de velocidades angulares y elementos del cuaternión.

Existen diversos algoritmos ampliamente referenciados en la literatura para ambos métodos. Para los métodos determinísticos se encuentran los algoritmos denominados TRIAD y QUEST [1981, Shuster]. Para el segundo de los métodos la aplicación más común es la de un filtro de Kalman extendido.

El proceso de determinación de actitud, dependiendo de la misión desarrollada y del tipo de satélite, puede presentarse en varias fases:

- **Adquisición:** En esta fase el sistema ha de estimar la orientación inicial y las velocidades de rotación de los ejes.
- **Control de la trayectoria del satélite:** El satélite por medio de las acciones de control empieza a mantener una orientación determinada. En esta fase los paneles, si estuvieran disponibles, ya generarían potencia eléctrica.

- **Control de apuntamiento fino:** El satélite está estabilizado inercialmente, permitiendo un apuntamiento preciso de antenas e instrumentos científicos, si estuvieran instalados a bordo.
- **Control de Orientación:** El satélite sigue los comandos generados de forma manual o automática para obtener una orientación particular.

Tanto en la fase de adquisición como en la de control de la orientación, el satélite está girando sobre alguno de los ejes principales, o sobre algún otro no coincidente con los mismos. En estas fases la velocidad de giro mayor será la obtenida en la suelta del satélite. Las fases de control de la trayectoria y de control de apuntamiento fino vienen determinadas por la cantidad de error obtenido por desviación de la actitud respecto de una actitud definida como nominal.

El proceso de determinación de actitud debe ser completamente fiable y robusto. De esta forma se pretende que el satélite disponga de una fiabilidad lo más alta posible, por tanto en la determinación de actitud deben garantizarse la medidas de los sensores y un cálculo preciso. De esta información depende el cambio de orientación del satélite realizado de forma automática, o incluyendo también aquellos llevados a cabo por comando. Esto permitiría cambiar de modo, bajo la ejecución de un conjunto de leyes de control.

3.3.2. SENSORES

Entre los sensores susceptibles de ser integrados a bordo del satélite y útiles en el proceso de determinación de actitud se encuentran los siguientes, estando detallados de forma más específica en la Tabla 3.1, en donde se ofrecen datos generales de su precisión.

- **Sensores de velocidad:** Estos miden la velocidad de rotación alrededor de alguno de los ejes principales. Por medio de integración se obtiene posición angular. Se utilizan principalmente en la fase de adquisición.
- **Sensores de apuntamiento:** Son aquellos que realizan medidas de algún elemento determinado:
 - o Sensores solares.
 - o Sensores terrestres.
 - o Sensores estelares.
- **Sensores de campo magnético:** Miden la magnitud del campo magnético terrestre.

Tipo de Sensor	Precisión	Aplicabilidad
Magnetómetros	1.0° a 5000 Km. 5.0° a 200 Km.	Medidas de actitud relativa a la componente local del campo magnético. Aplicable por debajo de 6000 Km.
Sensores Terrestres	0.05° Orb. GEO 0.1 ° Orb. LEO	Presentan incertidumbre en la detección del horizonte.
Sensores Solares	0.01°	Campo de visión típico ±30°
Sensores Estelares	2 arc-seg.	Campo de visión típico ±6°
Giróscopos	0.001 °/hr	Necesitan realizar un reset periódico.

Tabla 3.1: Comparación entre los Tipos de Sensores para Determinación de Actitud.

3.3.3. ACTUADORES

Además de los sensores, a bordo del satélite se instalan los necesarios actuadores para controlar la orientación del satélite. El modelado matemático de estos, junto con el de los sensores, y la aportación matemática del sistema dinámico, permiten obtener las estimas de actitud, además de sus errores. Los elementos mecánicos o eléctricos encargados de variar la posición angular del satélite son de diversos tipos:

- **Ruedas de reacción:** Consisten en un motor eléctrico con una carga acoplada que se aceleran en función de la demanda de par producida.
- **Ruedas de momentos:** Es un sistema de las mismas características que el anterior, con una masa acoplada de mayor dimensión, que tienen como objetivo suministrar momento angular al satélite. Están girando permanentemente para conseguir el momento deseado.
- **Jets (Thrusters):** Son dispositivos que expulsan una cierta cantidad de un gas (hidracina). Mediante la combinación de varios de ellos se pueden obtener pares alrededor de cualquiera de los ejes del satélite.
- **Magnetopares:** Estos actuadores son de carácter magnético. Consisten en arrollamientos de cobre a modo de bobinas eléctricas, que al ser excitadas con una corriente eléctrica producen un par electromagnético que interacciona con el campo magnético terrestre produciendo pares alrededor de los ejes del satélite. Estos se disponen alineados con los ejes principales de inercia.

El control de actitud se puede llevar a cabo mediante la instalación de alguno de los actuadores mencionados, o por medio de combinación de estos.

3.3.4. REPRESENTACIÓN DE ACTITUD

La representación de la actitud de cualquier satélite está referida al modo en que la orientación va a ser presentada y por medio de qué parámetros se va a llevar a cabo. Es habitual utilizar los siguientes métodos de representación, que son detallados en la Tabla 3.2 [1990, Wertz], [1997, Sidi]:

- **Cosenos Directores:** El conocimiento de los elementos de la matriz de cosenos directores es equivalente a conocer la actitud del satélite con respecto a un sistema de referencia coordinado.
- **Ángulos de Euler:** Este tipo de representación consiste en tres rotaciones sucesivas alrededor de los ejes del satélite. Con ello, cualquier cambio en la orientación del satélite puede ser indicada mediante tres giros sucesivos, obteniendo con ello desde la perspectiva matemática una matriz de orientación determinada. Este método posee ciertos inconvenientes. Uno de ellos implica la utilización de relaciones matemáticas no lineales en la caracterización de la cinemática del satélite. Los valores que pueden obtenerse en los giros alrededor de los ejes, pueden presentar singularidades, que harían que el cálculo matemático fuera complicado.
- **Parámetros de Euler-Rodrigues, cuaterniones:** Frente a los anteriores, la utilización de cuaterniones introduce simplicidad en el cálculo, ya que las ecuaciones de predicción de actitud pueden ser tratadas de forma lineal. A

diferencia del anterior no se presentan singularidades, y no se presentan ecuaciones trascendentales.

Parametrización	Ventajas	Desventajas	Aplicabilidad
Cosenos Directores	No ofrece singularidades	Seis parámetros redundantes	Transformación de vectores de un sistema de referencia a otro.
Angulos de Euler	No dispone de parámetros redundantes	Funciones trigonométricas. Presenta singularidades	Control de actitud de satélites estabilizados en tres ejes.
Cuaterniones	No ofrece singularidades.	Un parámetro redundante. Interpretación física difusa.	Determinación de actitud de satélites estabilizados en tres ejes.

Tabla 3.2: Tabla Comparativa de las Parametrizaciones de Actitud.

Para ilustrar de forma gráfica el concepto de maniobra de actitud se representa en la Figura 3.3, en la que se observan las maniobras de alabeo, cabeceo y guiñada (Roll, Pitch, Yaw), a las que puede ser sometido cualquier vehículo aeroespacial.

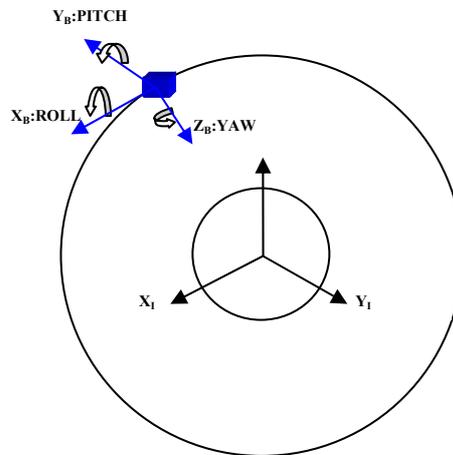


Figura 3.3: Maniobras de Actitud Mediante Angulos de Euler (Roll-Pitch-Yaw).

3.3.5. CONTROL DE ACTITUD

A partir de la información facilitada en el proceso de determinación de actitud, se lleva a cabo el control de actitud. Cada satélite realiza su proceso de control basado en los controladores específicos diseñados al efecto y con los actuadores integrados en el subsistema de control de actitud.

Sin pérdida de generalidad, puede decirse que el objetivo del control de actitud es mantener al satélite con un apuntamiento determinado, que involucra tanto a velocidades como a ángulos de actitud. Este apuntamiento ha de ser aceptable con arreglo a unos límites establecidos, a pesar de las perturbaciones que actúan sobre el satélite. La Figura 3.4 modela un sistema MIMO, extensión del sistema SISO de la Figura 3.1, disponiendo de control en cada uno de los ejes, y resolviendo los apuntamientos deseados con arreglo a la consigna.

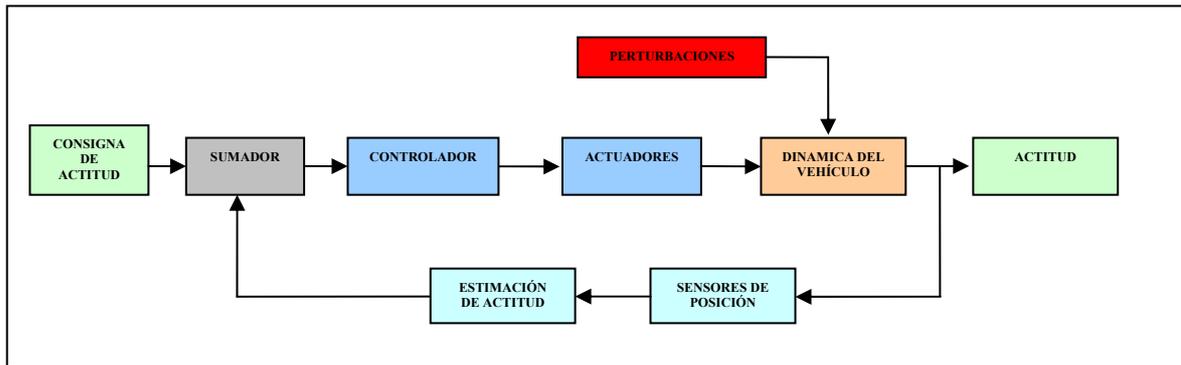


Figura 3.4: Diagrama de Bloques Representativo de un Control de Actitud Generalizado.

El proceso de determinación y control de actitud a partir del modelo matemático se representa gráficamente en la Figura 3.5. Se observa en ella que se ha incluido la fase de robustez como una de las preocupaciones del diseñador del sistema de control de actitud.

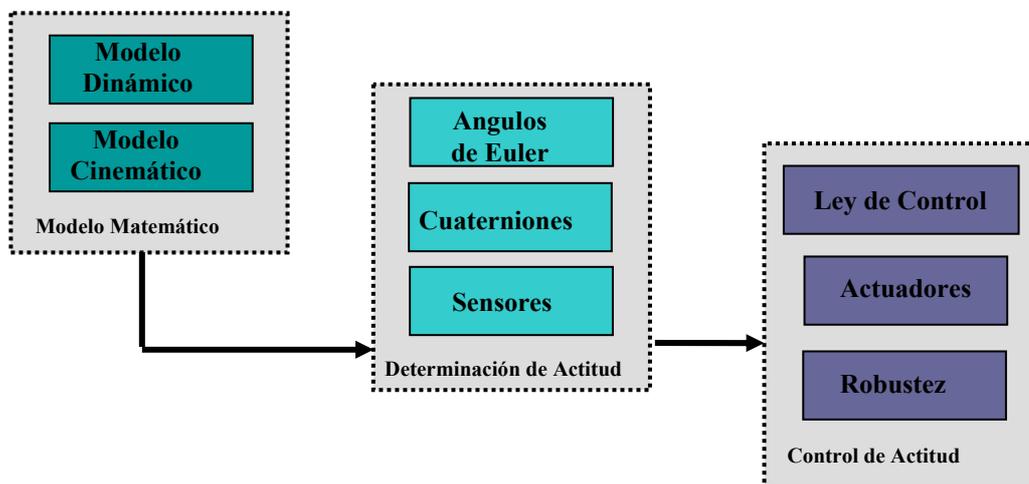


Figura 3.5: Proceso de Determinación y Control de Actitud.

3.3.6. MÉTODOS DE ESTABILIZACIÓN

El movimiento de rotación de un cuerpo libre de pares es estable si este se realiza alrededor de su eje de mayor o menor momento de inercia, siendo inestable si se realiza alrededor de cualquier otro eje intermedio. Por tanto el comportamiento del satélite en

cada uno de sus ejes, en lo que a estabilización se refiere, depende en primera instancia de su configuración mecánica, de las perturbaciones exteriores ejercidas sobre el mismo, y de los pares de fuerza a que es sometido. Esto implica que el satélite puede comportarse de forma estable o inestable. El grado de estabilidad, por tanto, depende de la configuración del mismo y del grado de flexibilidad de los elementos exteriores.

Determinar el grado de inestabilidad es importante, conduce a desarrollar un método de estabilización determinado, función de la misión encomendada. En sí mismo, el tipo de función, y la misión a desarrollar por el satélite permite una clasificación funcional en los siguientes dos grupos:

- **Satélites con apuntamiento inercial:** Destinados a observar un punto fijo de la esfera celeste.
- **Satélites con apuntamiento terrestre:** Tienen como objetivo la observación de la Tierra.

En función de la misión del vehículo espacial, del tamaño del mismo, de la vida útil y de las prestaciones de apuntamiento sobre alguno de los objetivos, se pueden implantar diversos tipos de control, y obtener por tanto diversas capacidades. Los tipos de control aplicados se enmarcan bajo la siguiente doble clasificación:

- **En cuanto a los actuadores:**
 - o **Pasivo:** No dispone de actuadores. La estabilización se realiza de forma mecánica natural.
 - o **Semipasivo:** Dispone de algún actuador en algún eje, sin renunciar a las características de control pasivo.
 - o **Activo:** Dispone de actuadores en alguno o todos los ejes.
- **En cuanto al tipo de control que afecta a la estabilidad:**
 - o **Control pasivo:** La estabilización se obtiene por las características mecánicas del satélite.
 - o **Control por giro:** La estabilización se consigue por giro del satélite completo o de alguna de sus partes.
 - o **Control en tres ejes:** Permite orientar cada uno de los ejes de forma independiente, disponiendo de un apuntamiento coordinado.

Una de las características de los tipos de control se encuentra en la precisión. Esta depende de los actuadores utilizados y de la capacidad de maniobrabilidad. Precisamente la maniobrabilidad es otra de las características de los tipos de control, pudiendo esta resolverse en traslación o en rotación. La Tabla 3.3 muestra las características principales de los tipos de control descritos.

TIPO DE ESTABILIZACION		APUNTAMIENTO	MANIOBRABILIDAD		PRECISION
			Traslación	Rotación	
Pasivo	Gradiente de Gravedad y Rueda de Momentos	Vertical Local de la Tierra	Ajustes menores	Limitada	$\pm 5^\circ$
	Giro Simple	Fijos inercialmente en cualquier dirección. Reapuntamiento con maniobras de precesión.	Ajustes menores en los otros dos ejes.	Rigidez del vector de momento	$\pm 0.3017^\circ$ hasta $\pm 1^\circ$
Por Giro	Giro Doble	Limitados por la articulación de la plataforma	Ajustes menores en los otros dos ejes.	Limitado por su geometría	Indicada por la precisión de la carga de pago.
	Momento cero (Zero Momentum)	Sin limitaciones	En cualquier dirección	Sin limitaciones	0.001° hasta 1°
Estabilización en tres ejes.	Dominio del momento (Momentum Bias)	Apuntamiento vertical preciso	Sólo conseguible con "thrusters"	Obtenido por medio de ruedas de momentos	0.1° hasta 1°

Tabla 3.3: Tabla Comparativa de los Métodos de Estabilización.

Atendiendo al tipo de estabilidad, y el medio por el que se consigue, se hacen las siguientes consideraciones:

- **Estabilidad por Gradiente de Gravedad:**
 - o El eje que apunta a Nadir o Zenith es el eje de equilibrio.
 - o En órbitas circulares, el satélite tiende a estar alineado con la combinación de efectos que ejercen la fuerza centrífuga y el gradiente de gravedad.
 - o El eje de mayor momento de inercia se encuentra a lo largo de la normal al plano orbital.
 - o El eje de menor momento de inercia está alineado con la vertical, eje zenith-nadir.
 - o El eje de momento de inercia intermedio, está alineado con el vector velocidad.

- **Estabilidad por Giro:**
 - o Presentan rigidez en el plano normal al eje de rotación.
 - o Ante la presencia de un momento externo constante, el satélite reacciona mediante una aceleración angular. La velocidad crece linealmente con el tiempo.
 - o Al cesar el momento externo, el satélite mantiene la última velocidad angular adquirida, produciendo una variación lineal de la posición angular.
 - o Los satélites estabilizados por este método, son sólo estables si giran alrededor del eje de mayor momento de inercia.

- **Estabilidad en tres ejes:**
 - La realización de maniobras rápidas de orientación son conseguidas por medio de ruedas de reacción, instaladas en uno o varios ejes, incluso en la bisectriz de los mismos. También se logran con sistemas expulsadores de gas (jets).
 - Controladores de tipo magnético, permiten un control continuo. Con estos actuadores no se pueden realizar maniobras de actuación rápidas.
 - Soluciones mixtas en cuanto a los actuadores. Este tipo de instalaciones contempla la instalación de una rueda de momentos en alguno de los ejes, y un conjunto de actuadores de carácter magnético con una doble misión, la de suministrar control de actitud en los tres ejes, y la de favorecer la desaturación de la rueda. Este tipo de soluciones se denominan “momentum bias”.

Independientemente del método de estabilización seleccionado, la magnitud de los momentos de inercia juega un papel importante en la determinación de la estabilidad. Evidentemente, la precisión en el apuntamiento está relacionada con los aspectos de estabilidad y control de actitud mencionados.

3.4. INFLUENCIA DE LA ÓRBITA

La órbita desarrollada por el satélite tiene una influencia directa sobre el diseño del sistema de control de actitud. Existe una relación directa entre las perturbaciones exteriores y la altura de la órbita. La magnitud de las perturbaciones depende por tanto del tipo de órbita. Atendiendo a las diferentes órbitas desarrolladas se dispone de la siguiente clasificación [1991, Elices].

- **Atendiendo a la altura:**
 - **LEO (Low Earth Orbit):**
 - Altura sobre la superficie terrestre entre 200 y 1000 Km.
 - Pueden tener cualquier inclinación (polar, ecuatorial)
 - Órbitas casi circulares (excentricidad cero).
 - **MEO (Medium Earth Orbit):**
 - Altura sobre la superficie terrestre en torno a los 20000 Km.
 - Cualquier inclinación.
 - **GEO (Geostacionary Earth Orbit):**
 - Altura sobre la superficie terrestre en torno a los 35000 Km.
 - Inclinación cero.
- **Sentido de rotación:**
 - **Progresiva:** Gira en el mismo sentido que la rotación de la Tierra.
 - **Regresiva:** Gira en sentido contrario al de rotación de la Tierra. Ver Figura 3.6.

La influencia de la órbita se manifiesta en la estabilidad del satélite, y por lo tanto en los medios para corregirla y orientar el satélite hacia el apuntamiento correcto. Por tanto, será necesario disponer de sensores adecuados y actuadores acorde a la dimensión de las perturbaciones. Pero no sólo las perturbaciones afectan al apuntamiento, sino que en órbitas LEO se manifiesta una progresiva degradación de la órbita, hecho que produce

la pérdida de altura de la misma. Si el satélite no está integrado con sistemas de corrección de la órbita, inevitablemente perderá altura, manifestándose de forma importante al final de su vida útil. Esta pérdida de altura incidirá en un progresivo aumento de la perturbación aerodinámica.

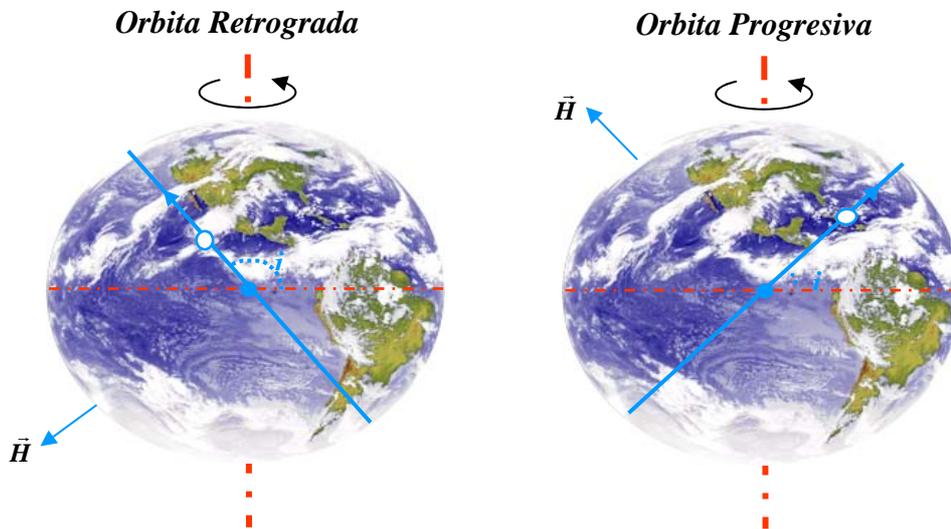


Figura 3.6: Órbitas LEO Progresiva y Regresiva.

3.5. ESPECIFICACIONES DE UN SISTEMA DE CONTROL DE ACTITUD

Los requisitos de diseño que conllevan a la especificación dependen del tipo de aplicación del vehículo. Se hace referencia a la precisión de los apuntamientos de los sistemas de control de actitud y sobre todo se focaliza la atención a la forma temporal de los tiempos de respuesta.

3.5.1. ESPECIFICACIONES GENERALES

La especificación del sistema de control de actitud del que se va a proponer puede estar realizada atendiendo a la respuesta que ha de dar el satélite en cualquier maniobra o bien atendiendo a los parámetros de un sistema excitado en el dominio del tiempo. Los parámetros que determinan la respuesta transitoria del sistema en el dominio del tiempo son precisamente interesantes para la técnica de control de autoestructuras.

En cualquiera de las fases definidas en el control de actitud, pueden definirse requisitos que informen sobre los objetivos perseguidos. Entre estos se encuentran el apuntamiento nominal, el error de apuntamiento permitido, velocidades requeridas y errores en las mismas y maniobrabilidad en cada uno de los ejes. Ha de tenerse en cuenta que la aproximación que se hace en esta tesis es de ángulos pequeños. Aún así es necesario definir los rangos de variabilidad angular. La Tabla 3.4 resume de forma general los aspectos mencionados.

		Margen de Apuntamiento (°)	Error de Apuntamiento (°) 3σ	Error de velocidad(°/s) 3σ	Maniobrabilidad (°)
Angulo	Alabeo	3	1	x	±90
	Cabeceo	3	1	x	±90
	Guiñada	5	1	x	±180
Velocidad	Alabeo	x	x	0.03	1
	Cabeceo	x	x	0.03	1
	Guiñada	x	x	0.03	1

Tabla 3.4: Ejemplo de Especificaciones para la Actitud de Cada Eje del Satélite.

La siguiente especificación está relacionada con las especificaciones que determinan el comportamiento del sistema en el dominio del tiempo. Conociendo los polos dominantes para cada uno de los modos se pueden conocer las características representativas del dominio del tiempo. La representación típica en el dominio del tiempo esta dada por los valores tradicionales siguientes:

- **Error en estado estacionario, e_{ss} :** Este error se computa como la diferencia $r - y_{ss}$, siendo este el valor de la respuesta en estado estacionario.
- **Tiempo de subida, t_r :** Es el tiempo necesario de respuesta desde el 0%, 5% o 10% de su valor final hasta 100%, 95% o 90%.
- **Tiempo de pico, t_p :** El tiempo necesario para que el sistema alcance su valor máximo.
- **Porcentaje de Sobre-elongación, M_p :** Se define como la relación entre el valor máximo de pico a su valor final.
- **Tiempo de asentamiento, t_s :** El tiempo de asentamiento se define como el requerido para que el sistema en su valor final converja a un valor del 2%(o 4%).

La Figura 3.7 muestra gráficamente los conceptos relacionados con el desarrollo del transitorio bajo excitación de tipo escalón.

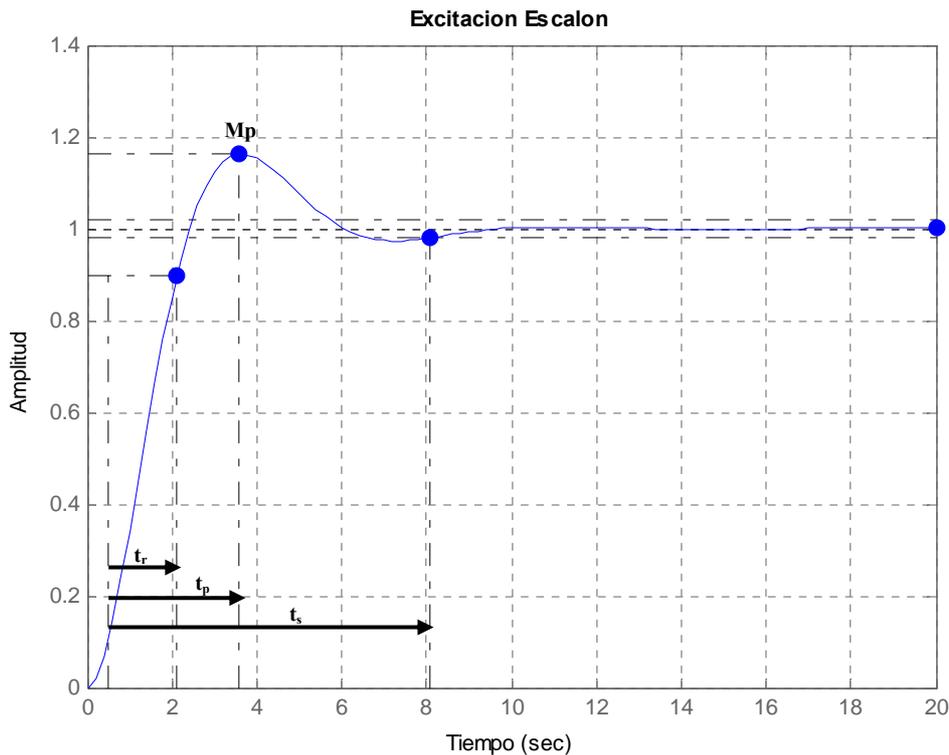


Figura 3.7: Especificaciones en el dominio del tiempo.

3.5.2. ESPECIFICACIONES DEL SISTEMA DE CONTROL EN TÉRMINOS DE POLOS Y CEROS

Los métodos de asignación de polos o ceros son extremadamente útiles para obtener un comportamiento deseado en el sistema de control de actitud, garantizando la estabilidad del sistema y por lo tanto del satélite en cualquiera de los ejes que sea necesario actuar.

Los polos se encuentran caracterizados por su frecuencia natural y coeficiente de amortiguamiento. El diseño se realiza con las técnicas del lugar de las raíces, ya que presentan una forma directa de visualizar los polos y ceros del sistema. Este método de asignación directa de polos tiene resultados evidentes en el comportamiento de sistemas SISO. Sin embargo en sistemas MIMO, esta asignación de polos puede llevar a una redistribución de ceros en el sistema, causando una degradación de las prestaciones del mismo.

Así mismo, con las técnicas del lugar de las raíces, las dinámicas indeseadas son eliminadas mediante la compensación de polos introduciendo ceros que los cancelen. Estas técnicas pueden inducir a complicaciones en el comportamiento del sistema debido a cambios inesperados en el diseño del controlador y a incertidumbres en los parámetros del sistema.

Dentro de los métodos de control, el método EA, resuelve los problemas de diseño tratando de posicionar los polos en lazo cerrado en posiciones que mejoren el comportamiento dinámico del sistema. Mediante la técnica de asignación de autoestructuras, además de tener en cuenta la posición de los nuevos polos deseados, es necesario tener en cuenta la repercusión de los autovectores del sistema.

3.6. ANÁLISIS MODAL DEL SISTEMA LINEAL EN LAZO ABIERTO

La estabilidad del movimiento del sistema en lazo abierto puede obtenerse a partir de una excitación para cualquiera de los canales, tal como escalón unitario, que permite conocer la evolución en el tiempo de la salida. Es al mismo tiempo útil identificar los modos del sistema por medio de su correspondencia con los autovalores del mismo. La identificación de los modos del sistema es una de las tareas necesarias para el conocimiento exhaustivo del mismo, que permitirá desarrollar el controlador por el método EA. La autoestructura, es decir autovalor y autovector, están ligados al modo del sistema.

Sirva este avance de datos numéricos ofrecido en la Tabla 3.5 y de representación gráfica de la Figura 3.8 para determinar que existe un autovalor situado en el semiplano izquierdo que inestabiliza al sistema. El resto de polos se sitúan en el eje imaginario, o muy próximos a este eje.

Modo	Autovalor	Amortiguamiento	Frecuencia (rad/s)
Alabeo	$\pm 2.91e-002$	1.00	2.91e-002
Cabeceo	$0.0 \pm 3.24e-002i$	0.0	3.24e-002
Guiñada	$-6.15e-004 \pm 3.48e-002i$	1.76e-002	3.48e-002
Flexión	$0.0 \pm 2.77e+001i$	0.0	2.77e+001
Torsión	$0.0 \pm 4.00e+002i$	0.0	4.00e+002

Tabla 3.5: Correspondencia entre los Modos del Sistema en Lazo Abierto y la Autoestructura.

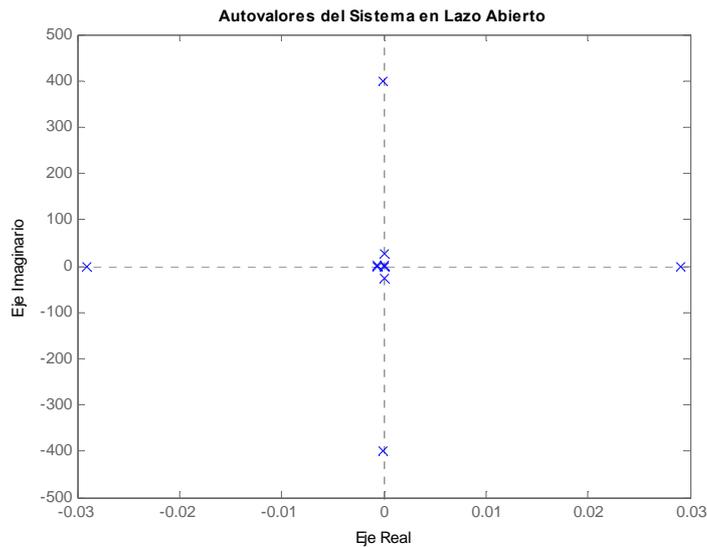


Figura 3.8: Posición de los Polos del Sistema Linealizado en Lazo Abierto.

Los valores obtenidos para los autovalores no permiten concluir que el sistema de forma global se comporte de forma estable o inestable. La teoría de Liapunov establece que no es posible determinar de forma fehaciente el comportamiento del sistema, basado en la posición que ocupan los autovalores, aunque puede decirse que el sistema es marginalmente estable.

3.6.1. CONTROLABILIDAD Y OBSERVABILIDAD

Uno de los requisitos más importantes necesarios para la aplicación de la metodología EA esta relacionada con la controlabilidad y la observabilidad del sistema. Las comprobaciones respecto de estas características se realizan con el modelo linealizado entorno al punto de operación. La determinación de la controlabilidad está relacionada con las matrices de estado y de control, y la determinación de la observabilidad lo está con las matrices de estado y de salida.

En el modelo matemático del sistema se están considerando tanto elementos rígidos como flexibles. Los datos de los parámetros relacionados con los modos flexibles tienen valores elevados, como el módulo de Young, o en contraste valores menores en lo que a dimensiones se refiere, sobre todo en el espesor de los paneles solares. Las diferencias de varios órdenes de magnitud en los mencionados datos conllevan que a que la matriz de estado está mal condicionada. En la terminología Matlab, la variable **sys_nl** representa el sistema linealizado en lazo abierto, estando su controlabilidad determinada por el comando:

$$\mathbf{rank}(\mathbf{ctrb}(\mathbf{sys_nl}))=10$$

y la observabilidad por:

$$\mathbf{rank}(\mathbf{obsv}(\mathbf{sys_nl}))=10$$

Puesto que el número de estados considerados para un sistema reducido es 10, se determina que el sistema en lazo abierto es controlable y observable.

El control de los modos del sistema encaja con los conceptos de controlabilidad modal introducidos por [2002, Magni]. Bajo este concepto se introduce la medida de controlabilidad y observabilidad de cada uno de los modos del sistema. Esta información puede ser utilizada para tomar la decisión de la posición de los autovalores del sistema en lazo cerrado. De hecho, cuando aquellos autovalores que resultan ser pobremente controlables son posicionados en zonas diferentes en el plano complejo el resultado se refleja en altas ganancias o en la pérdida de insensibilidad (alta sensibilidad de los autovalores). El concepto de controlabilidad modal está relacionado con el concepto de medida de la controlabilidad de la relación entre la entrada y la salida, y por tanto relacionándolo con el control modal. Este concepto matemático queda expresado por la ecuación (3.1), que indica el grado de controlabilidad de cada uno de los autovalores del sistema:

$$\lambda_i = \|\mathbf{u}_i \mathbf{B}\| \|\mathbf{C} \mathbf{v}_i\| \quad (3.1)$$

En la expresión (3.1) los vectores \mathbf{u}_i y \mathbf{v}_i representan los autovectores por la derecha y por la izquierda respectivamente. La misma expresión permite obtener la controlabilidad y observabilidad global del sistema particularizada para cada uno de los polos del sistema. El objetivo es tratar de determinar la controlabilidad de entrada a salida de cada uno de los polos en orden creciente cuando se realiza alguna maniobra de actitud. Con esto se obtiene un resultado de controlabilidad particular, relacionando la entrada con la salida. La Figura 3.9 representa gráficamente este concepto para cada una de las maniobras de actitud del sistema. Este tipo de representación es una indicación comparativa de la controlabilidad y observabilidad de los modos del sistema.

Estos gráficos junto con los de observabilidad permiten conocer de forma global la controlabilidad y observabilidad en términos generales, como una aproximación más específica. Así mismo, los resultados permiten obtener los autovalores del sistema más controlables y más observables.

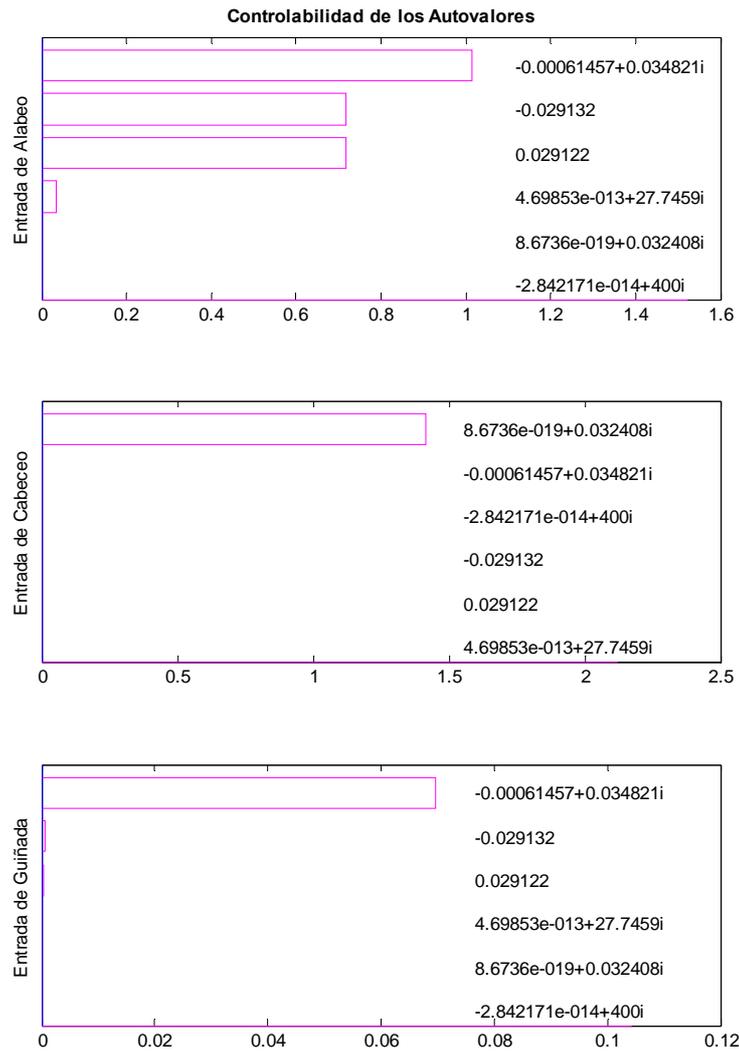


Figura 3.9: Determinación de la Controlabilidad de los Autovalores del Sistema en Lazo Abierto.

Se observa que a partir de la maniobra de alabeo los autovalores más controlables son los correspondientes a guiñada, seguidos de los de alabeo y flexión. La maniobra de cabeceo muestra que los modos más controlables son los de cabeceo, y para la última de las maniobras, la de guiñada, la situación indica que el autovalor más controlable es el de guiñada. Los datos que muestra la Figura 3.9 deben compararse con los ofrecidos en la Tabla 3.5. Este ensayo particular de controlabilidad individual en función del tipo de maniobra, muestra una vez más el acoplamiento que tiene el sistema. También muestra la potencial independencia entre las maniobras de alabeo-guiñada con la maniobra de cabeceo.

A partir de estos resultados la determinación de los polos más controlables en orden creciente se representa en la siguiente Figura 3.10, en donde se han agrupado los resultados:

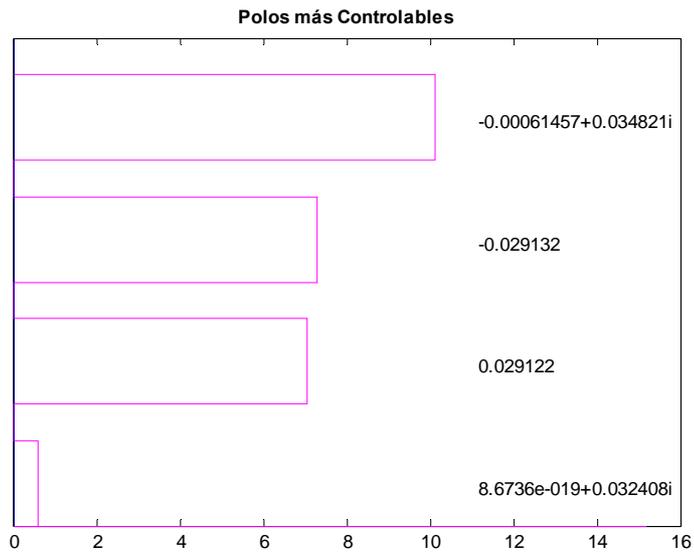


Figura 3.10: Polos más Controlables del Sistema.

Comparando los datos de la Figura 3.10 con los de la Tabla 3.5., se pone de manifiesto que el autovalor más controlable se corresponde con el de guiñada, seguido de alabeo y cabeceo. Es interesante hacer notar, que en este análisis los autovalores correspondientes a flexión y torsión no son controlables, estrictamente hablando, ya que no disponen de actuador, y su control se corresponde única y exclusivamente con maniobras de actitud. El mismo tipo de análisis debe de realizarse para determinar la observabilidad individual de cada uno de los autovalores del sistema en lazo abierto. Los resultados se muestran en la Figura 3.11.

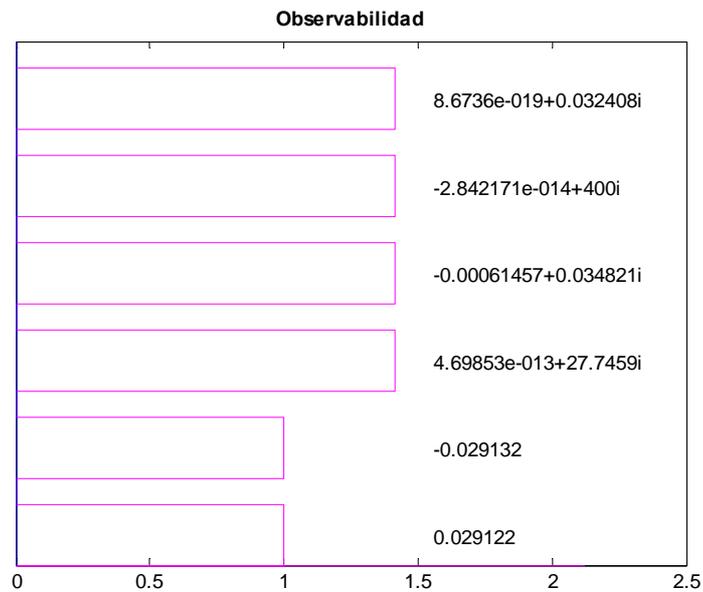


Figura 3.11: Determinación de la Observabilidad de los Polos del Sistema en Lazo Abierto.

De los resultados obtenidos para observabilidad y comparando de nuevo con la Tabla 3.5 de autovalores, se observa que los autovalores más observables son los correspondientes a cabeceo, seguidos de los de torsión, guiñada y flexión. Y siendo los menos observables los correspondientes al modo de alabeo.

Comparando los resultados obtenidos para controlabilidad y observabilidad se observa que el polo correspondiente a cabeceo es el menos controlable pero es el más observable. Otro dato curioso está relacionado con el autovalor correspondiente a torsión. Siendo este un autovalor no controlable directamente, sí aparece como observable.

3.6.2. VALORES SINGULARES

Un método adicional a los expuestos anteriormente para comprobar el acoplamiento de los modos del sistema, reside en la obtención de los valores singulares. Desde el punto de vista matemático, se denomina valores singulares a los elementos σ_i , de la matriz $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$; $r = \min(m, n)$; que factorizan la matriz A de la forma $A = U\Sigma V^T$. A esta factorización se le denomina Descomposición en Valores Singulares, siempre que U y V sean ortogonales y los valores singulares positivos ($\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r \geq 0$). Las primeras r columnas de V son los valores singulares por la derecha y las primeras r columnas por la izquierda de U son los valores singulares por la izquierda.

Desde el punto de vista del sistema real resulta interesante obtener los valores singulares de la respuesta en frecuencia de la función de transferencia de un sistema. A la vez estos resultados se pueden representar mediante diagramas de Bode de magnitud. En la representación gráfica los picos de la misma representan los valores singulares de la función bajo consideración. En la valoración de sistemas flexibles los picos de la función suelen coincidir con frecuencias de resonancia, y los cambios de ganancia de la función con modos generalmente rígidos. Por tanto, los valores singulares, representados en gráficas en frecuencia representan los modos de la función y coinciden con los modos reales, es decir y para este caso, con los modos orbitales y de deformación.

El análisis de los valores singulares se puede realizar desde una doble perspectiva. La primera es la comprobación de los modos excitados del sistema al realizar cualquier tipo de maniobra alrededor de cualquiera de los ejes del satélite. La Figura 3.12 muestra este efecto.

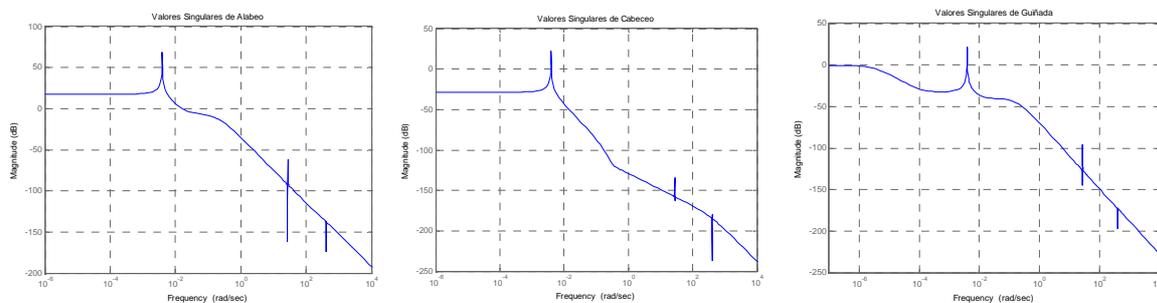
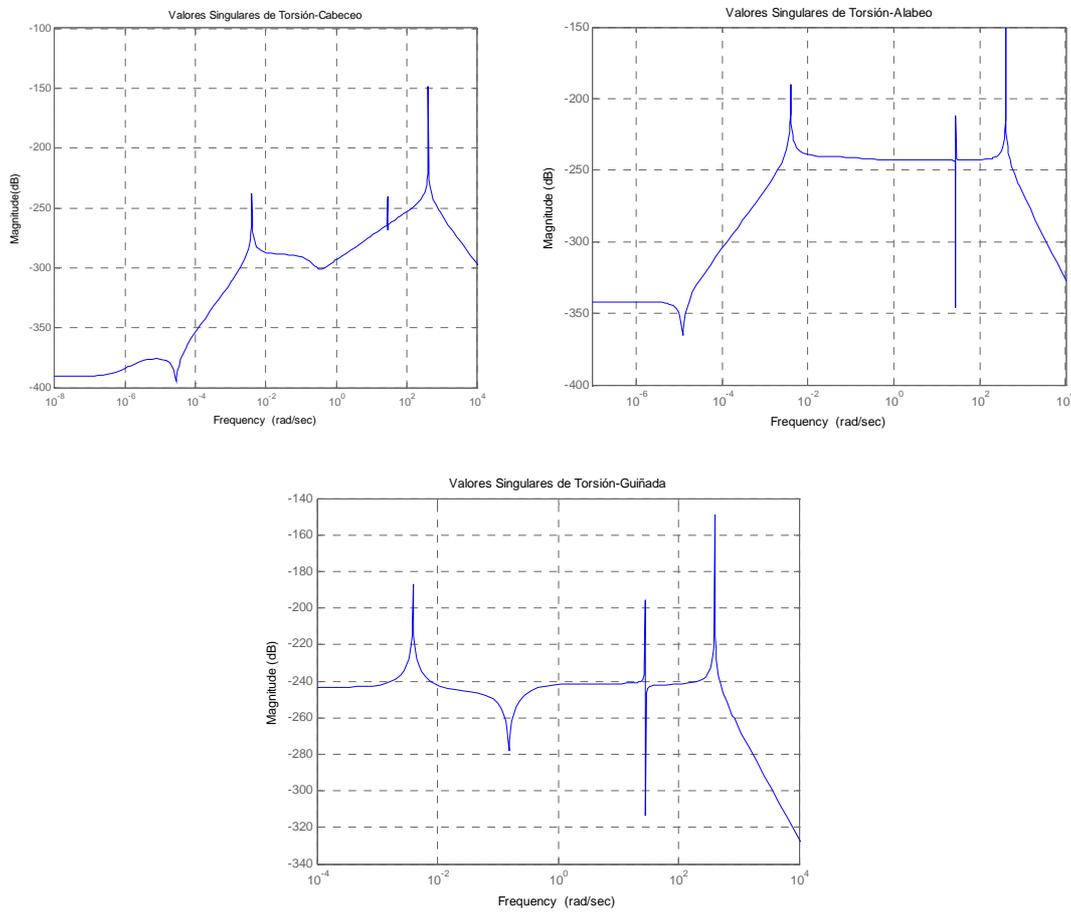


Figura 3.12: Valores singulares correspondientes a las maniobras de actitud.

Las tres maniobras de actitud excitan en cierto grado las frecuencias correspondientes a la deformación por flexión y a la deformación por torsión. La deformación por flexión se encuentra relacionada con la maniobra de guiñada en mayor medida, y con la de alabeo en menor medida, debido al acoplamiento existente entre ambos modos. La deformación debida a torsión de los paneles se encuentra relacionada con la maniobra de cabeceo. Se observa en la figura que tanto la deformación por flexión como la deformación por torsión aparecen en cualquiera de las maniobras con diferentes amplitudes. El modelo no lineal se caracteriza por disponer de acoplamiento entre todos los modos determinados en el sistema.

El segundo tipo de análisis se corresponde con la realización de ensayos inversos a los expuestos anteriormente. Se considera en este caso, las deformaciones por flexión y torsión, con el objetivo puesto en la determinación del modo orbital correspondiente que ha sufrido desviación del punto de equilibrio. La Figura 3.13 muestra estas situaciones.



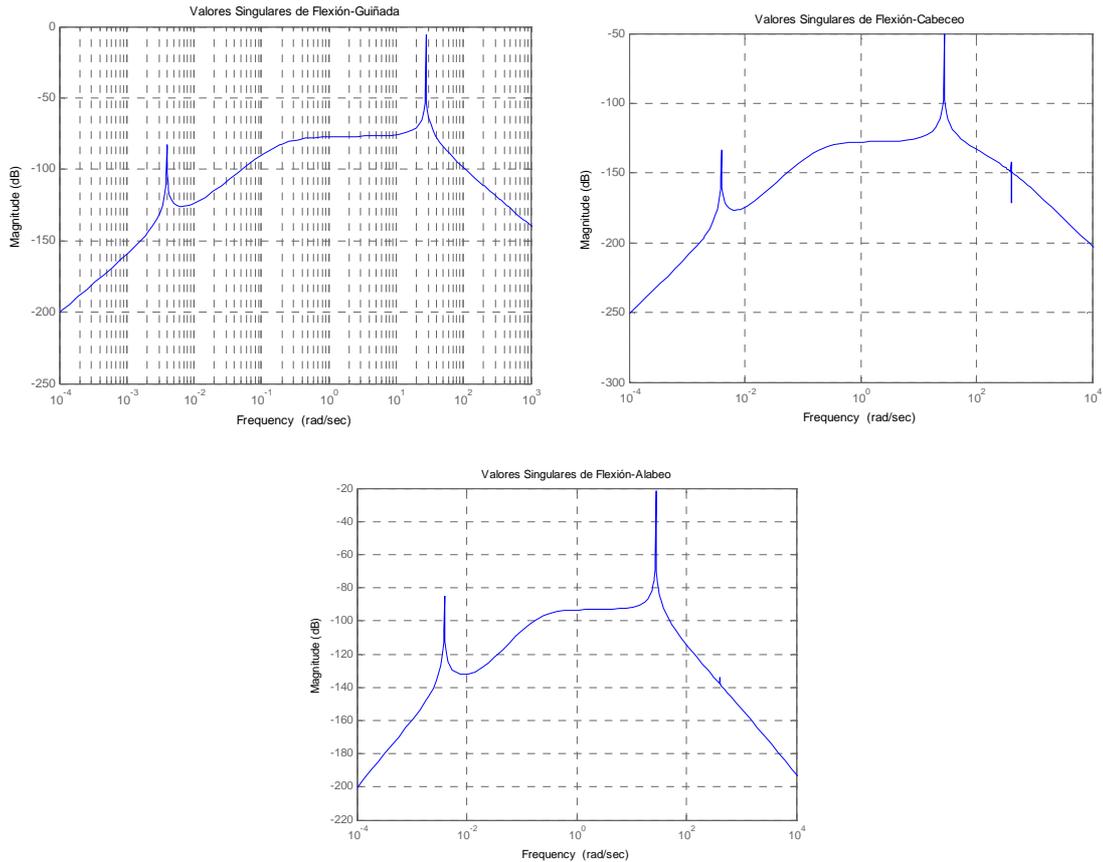


Figura 3.13: Valores singulares correspondientes a la relación entre las deformaciones de los paneles solares y las maniobras de actitud.

De nuevo se pone de manifiesto la relación existente entre la flexión y la maniobra de guiñada y alabeo, y la deformación por torsión de los paneles con la maniobra de cabeceo.

3.7. DISEÑO DE UN CONTROLADOR ÓPTIMO

Se va a utilizar el modelo linealizado para obtener un sistema lineal en lazo cerrado a partir del controlador diseñado por técnicas LQR. El diseño de un regulador lineal cuadrático tiene como objetivo comparar los resultados con el que se obtenga por métodos EA. Se persigue conocer el comportamiento de los modos del sistema y la determinación de acoplamiento entre ellos. El objetivo es estabilizar el sistema alrededor del punto de operación, diseñando un controlador que permita modificar la posición de los autovalores del sistema en lazo abierto. De forma adicional, el controlador es integrado en el sistema real, no lineal, permitiendo comparar los resultados.

El controlador que se va a diseñar consiste en una sola matriz de ganancia \mathbf{K} obtenida por medio de criterios de regulación óptima, LQR [1994, Li]. Este método aplicable a

sistemas lineales, consiste en minimizar una función de coste cuadrática, y generar una matriz de ganancia de realimentación. Por tanto, el sistema una vez más, ha de estar linealizado. La función de coste a minimizar es la siguiente:

$$J = \int_0^t [\bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q} \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{R} \bar{\mathbf{u}}] \quad (3.2)$$

En esta expresión, \mathbf{Q} es una matriz semidefinida positiva, \mathbf{R} es definida positiva, $\bar{\mathbf{x}}$ es el vector de estado y $\bar{\mathbf{u}}$ es el vector de control. La ponderación de las matrices \mathbf{Q} y \mathbf{R} depende de las especificaciones del vector de estado y del vector de control. Ha de tenerse en cuenta, que la solución del problema LQR, depende de la controlabilidad del sistema. Un de los desafíos que se presentan en el diseño de controladores de este tipo es la selección de las matrices \mathbf{Q} y \mathbf{R} . Estas matrices pueden expresarse de la siguiente forma:

$$\mathbf{R} = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_{na}) \quad (3.3)$$

$$\mathbf{Q} = \text{diag}(q_1, q_2, \dots, q_{ns}) \quad (3.4)$$

Siendo na el número de actuadores, y ns el número de estados del sistema, y r_i y q_i los factores de ponderación. El criterio seguido para el cálculo de estos factores es el que está matemáticamente representado por la siguiente expresión:

$$q_i = \frac{1}{(\Delta x_i)^2} \quad (3.5)$$

$$r_i = \frac{1}{(\Delta u_i)^2}$$

En el caso de los estados Δx_i , está basado en el grado de movilidad dado a estos. Y para el control, Δu_i , está basado en el par máximo aplicable por las ruedas de reacción, esto es, en el esfuerzo máximo de control.

3.7.1. CRITERIO DE SELECCIÓN DE LAS MATRICES R Y Q

La selección de los elementos de las matrices \mathbf{R} y \mathbf{Q} ha de realizarse de forma cuidadosa con el objetivo de obtener un controlador adecuado a las necesidades del sistema. La selección de los elementos de las matrices de peso está ligada obviamente al sistema. Por ello, y con el objetivo de comparar los resultados se han desarrollado tres criterios.

El primero de ellos está basado en el criterio anteriormente expuesto, teniendo en cuenta las variaciones máximas de los estados del sistema y las deformaciones. Para las entradas se ha tenido en cuenta los pares máximos que aportan las ruedas de reacción.

Además de este, se han considerado otros dos casos de selección de estas matrices de peso. Así, el segundo criterio considera que la matriz \mathbf{Q} es unitaria. Y el tercer y último

criterio es considerar la matriz \mathbf{Q} con valores de 0.1. Los elementos de las matrices \mathbf{R} y \mathbf{Q} se muestran en la ecuación siguiente:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = r_c \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

siendo sus valores los siguientes:

$$q_1 = \frac{1}{x^2}; \quad q_2 = \frac{1}{y^2}; \quad q_{11} = \frac{1}{L^2}; \quad q_{12} = \frac{1}{a^2}; \quad r_c = \frac{1}{u^2} \quad (3.7)$$

y los valores de los parámetros en función de los controladores los que se muestran en la Tabla 3.6:

Controlador	x(°)	y(°/s)	u(mNm)	L(m)	a(cm)
Controlador 1 – K1	10	1	19	2	40
Controlador 2 – K2	1	1	19	2	40
Controlador 3 – K3	0.1	0.1	19	2	40

Tabla 3.6: Valores asignados a los controladores LQR.

3.7.2. ANÁLISIS DEL SISTEMA

Los valores dados anteriormente para las matrices de peso \mathbf{R} y \mathbf{Q} han sido utilizados para obtener los resultados de estabilidad del sistema introduciendo los correspondientes controladores. El análisis que se presenta se corresponde con los tres controladores mencionados. Esto permitirá comparar los resultados, ya que en sí mismo el proceso representa ensayos de prueba y error. Para los tres tipos de controladores LQR diseñados se presentan la Tabla 3.7 de autovalores correspondientes a cada uno de los modos, junto con el mapa de autovalores.

- **Controlador LQR 1 - K1:** La Figura 3.14 muestra el resultado obtenido para el controlador **LQR 1 - K1**. Se observa que se mantienen los autovalores correspondientes a torsión sobre el eje imaginario. Los autovalores correspondientes a la deformación por flexión han sido trasladados del eje imaginario, consiguiendo un ligero amortiguamiento respecto de la situación en lazo abierto. El resto de los autovalores han sido igualmente trasladados. El comportamiento del sistema es por tanto estable.

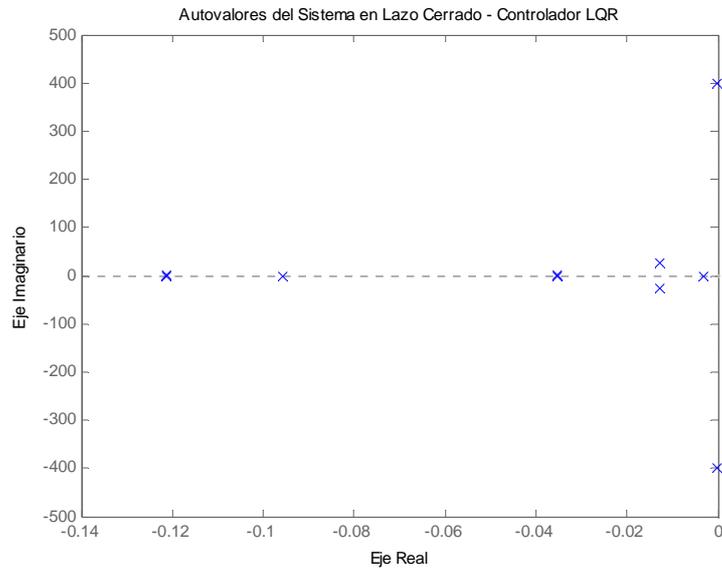


Figura 3.14: Controlador $LQR 1 - K1$.

Modo	Autovalor	Amortiguamiento	Frecuencia (rad/s)
Alabeo	-3.15e-003	1.00	3.15e-003
	-9.59e-002	1.00	9.59e-002
Cabeceo	-3.53e-002 ± 4.32e-002i	6.33e-001	5.58e-002
Guiñada	-1.21e-001 ± 1.37e-001i	6.63e-001	1.83e-001
Flexión	-1.28e-002 ± 2.77e+001i	4.62e-004	2.77e+001
Torsión	-1.44e-005 ± 4.00e+002i	0.0	4.00e+002

Tabla 3.7: Controlador $LQR1 - K1$.

- **Controlador $LQR 2 - K2$:** La Figura 3.15, junto con la Tabla 3.8 muestran los resultados para el controlador $LQR 2 - K2$. La situación respecto del controlador $LQR 1 - K1$ es diferente en lo que a amortiguamiento del sistema se refiere. Los autovalores debidos a la deformación por torsión y flexión no han sufrido variación, estando posicionados sobre el eje imaginario. El resto de autovalores, prácticamente permanecen sobre el eje real, en situación estable y con amortiguamiento crítico. Cualquier tipo de maniobra orbital podría excitar los modos de deformación.

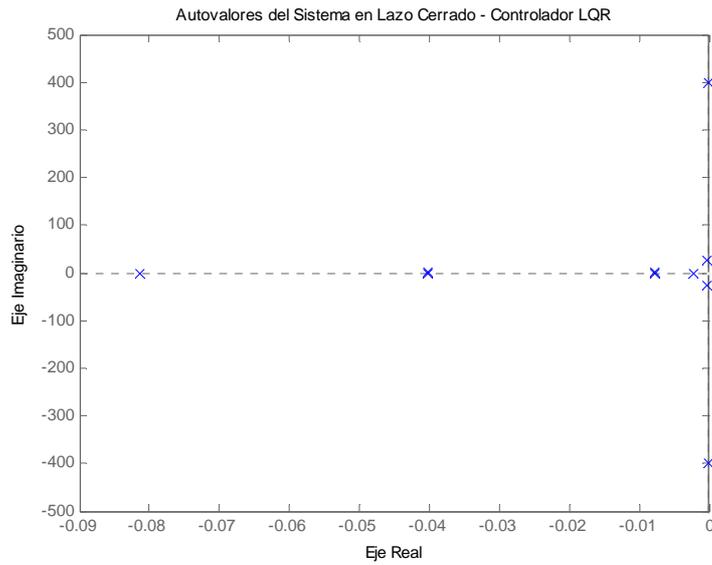


Figura 3.15: Controlador $LQR 2 - K2$.

Modo	Autovalor	Amortiguamiento	Frecuencia (rad/s)
Alabeo	-2.34e-003	1.00	2.34e-003
	-8.13e-002	1.00	8.13e-002
Cabeceo	-7.69e-003 ± 3.33e-002i	2.25e-001	3.42e-002
Guiñada	-4.01e-002 ± 7.27e-002i	4.83e-001	8.30e-002
Flexión	-2.24e-004 ± 2.77e+001i	8.06e-006	2.77e+001
Torsión	± 4.00e+002i	0.0	4.00e+002

Tabla 3.8: Controlador $LQR 2 - K2$.

- **Controlador $LQR 3 - K3$:** La situación ofrecida por el controlador $LQR 3 - K3$, Figura 3.16, es similar a la del controlador $LQR 2 - K2$, Tabla 3.9. Los autovalores por deformación en torsión y flexión continúan posicionados sobre el eje imaginario, y el resto sobre el eje real, también en situación estable y con amortiguamiento crítico. Al igual que el controlador $LQR 2 - K2$ cualquier maniobra orbital potencialmente podría producir deformaciones en los paneles solares.

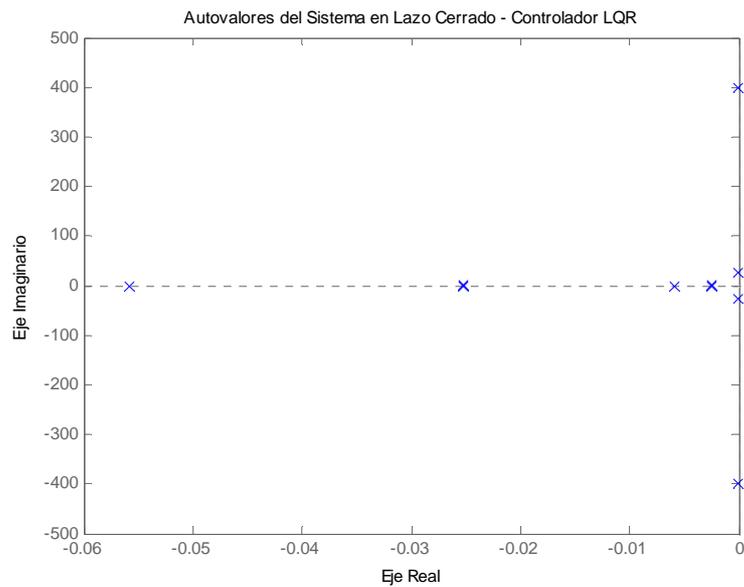


Figura 3.16: Controlador LQR 3 – $K3$.

Modo	Autovalor	Amortiguamiento	Frecuencia (rad/s)
Alabeo	-5.90e-003	1.00	5.90e-003
	-5.58e-002	1.00	5.58e-002
Cabeceo	-2.49e-003 ± 3.25e-002i	7.64e-002	3.26e-002
Guiñada	-2.52e-002 ± 5.07e-002i	4.45e-001	5.66e-002
Flexión	-7.07e-005 ± 2.77e+001i	2.55e-006	2.77e+001
Torsión	± 4.00e+002i	0.0	4.00e+002

Tabla 3.9: Controlador $LQR3$ – $K3$.

Los resultados mostrados para los tres controladores presentados muestran que el criterio de selección de las matrices R y Q utilizado para el controlador LQR 1 - $K1$ es el más adecuado. Este ofrece un situación mejorada para los autovalores debidos a flexión y ligeros amortiguamientos para el resto de los modos.

CAPÍTULO 4

MODELO MATEMÁTICO

4.1. INTRODUCCIÓN

El objetivo de este capítulo es desarrollar el modelo matemático de un vehículo rígido-flexible. El modelo ha de introducir aquellos aspectos relacionados con el control de actitud y las perturbaciones externas. Además de estos aspectos previos, el modelo ha de incluir los relacionados con su órbita. Todo esto permitirá obtener un conjunto de ecuaciones cinemáticas y dinámicas referenciadas a un sistema de coordenadas inercial centrado en Tierra, que constituirán el modelo dinámico del sistema.

El modelado del satélite permite tratarlo con dos comportamientos diferentes. El primero es la consideración de un sistema rígido, y el segundo compuesto de un sistema rígido más flexible. Los tratamientos matemáticos correspondientes se obtienen mediante la aplicación de la física newtoniana o mediante la aplicación de la mecánica analítica. Ambos métodos se van a aplicar con el objeto de validar los modelos matemáticos obtenidos.

La representación del movimiento del satélite en su órbita se apoya en diversos sistemas de referencia. Ello conlleva la determinación de las matrices de transformación entre sistemas de referencia, caracterizando de forma adicional el movimiento típico de actitud del satélite.

4.2. SISTEMAS DE REFERENCIA

Son necesarios al menos tres sistemas de referencia coordinados para describir el movimiento del satélite. El primero de ellos puede ser un sistema de referencia inercial centrado en Tierra, denominado sistema ECI o un sistema también centrado en Tierra y solidario con ella denominado ECEF. El segundo es un sistema denominado orbital, y el último es un sistema de referencia ligado al sistema, y que se denomina “ejes cuerpo”.

4.2.1. SISTEMA DE REFERENCIA INERCIAL CENTRADO EN TIERRA (ECI)

Este tipo de sistema coordinado (ECI: Earth Centered Inertial) está centrado en la Tierra. La dirección del eje Z apunta al Polo Norte geográfico, o es paralelo al eje de rotación de la Tierra. El eje X se extiende en la dirección del equinoccio Vernal, y el eje Y es ortogonal a ambos. La Tierra gira con respecto al sistema ECI, ya que este es inercial, lo cual implica que son aplicables las leyes de Newton. Los ejes del sistema se denominan X_I , Y_I , Z_I , tal y como muestra la Figura 4.1.

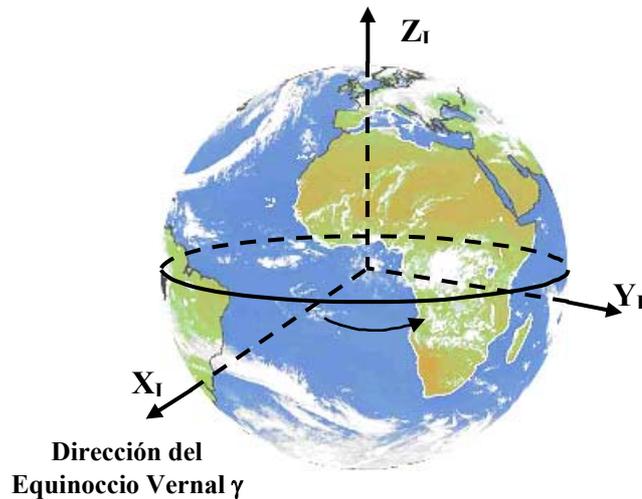


Figura 4.1: Sistema de Coordenadas Inerciales Centradas en la Tierra - ECI (Earth Centered Inertial).

4.2.2. SISTEMA DE REFERENCIA LIGADO Y CENTRADO EN TIERRA (ECEF)

El sistema de coordenadas centrado y fijo en la Tierra (ECEF) tiene su origen en el centro de la Tierra, pero gira en el espacio inercial con una velocidad angular constante $\omega_e = 7.2921 \times 10^{-5}$ rad/s. El eje X_E apunta hacia el Meridiano de Greenwich en el Ecuador, el eje Z_E apunta hacia el Polo Norte, completándose el sistema coordinado con el eje Y_E . El ángulo formado entre la dirección del equinoccio Vernal y el Meridiano de Greenwich es conocido como tiempo sidereo de Greenwich, θ_g , ver Figura 4.2.

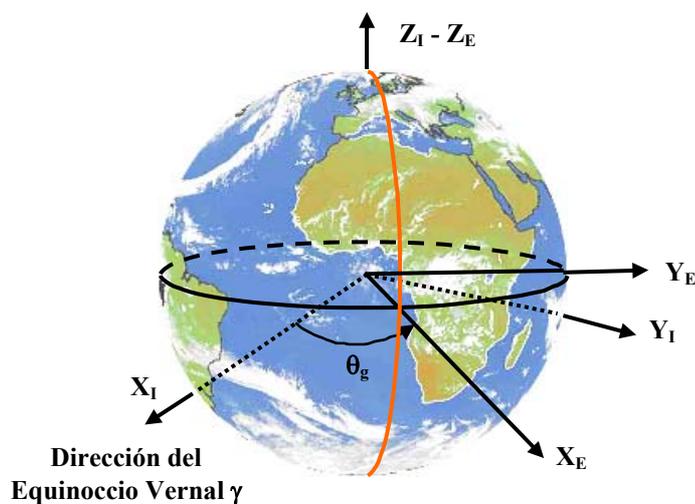


Figura 4.2: Sistema de Coordenadas Fijas en el Centro de la Tierra - ECEF (Earth Centered Earth Fixed).

4.2.3. SISTEMA DE REFERENCIA ORBITAL

Este sistema de referencia está relacionado con el escenario orbital seleccionado para la misión del satélite. Describe la actitud del satélite en su órbita y es por tanto utilizado como referencia para el subsistema de control de actitud. La Figura 4.3 representa el escenario de un satélite de apuntamiento a Nadir, con los siguientes ejes. El eje X_o es paralelo a la dirección del movimiento del satélite en órbitas circulares, el eje Z_o apunta hacia Nadir, y el eje Y_o completa el sistema, siendo perpendicular a la órbita descrita. El origen del sistema de referencia coordenado es el centro de masas del satélite.

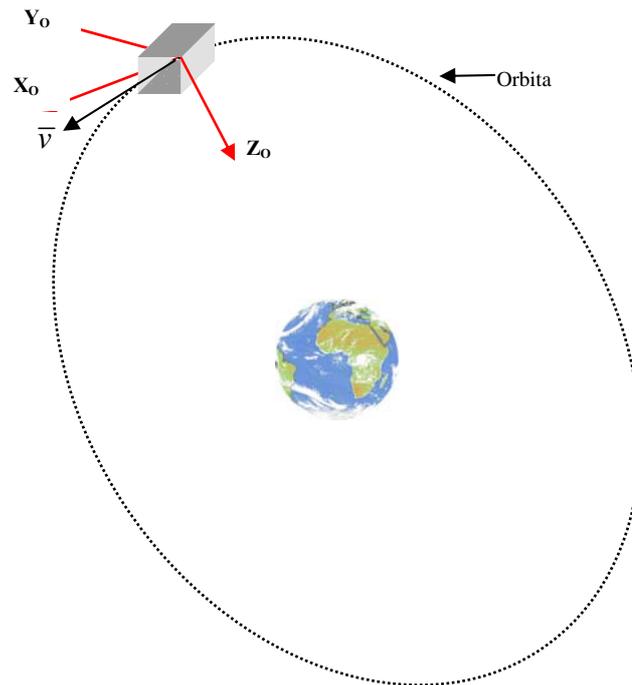


Figura 4.3: Sistema de Coordenadas Orbitales.

4.2.4. SISTEMA DE REFERENCIA LIGADO AL CUERPO DEL SATÉLITE

Este sistema de referencia tiene su origen en el centro de masas del satélite, y permanece fijo al cuerpo del mismo. Si este sistema de referencia coincide con los ejes principales de inercia, el tensor de inercia se reduce a una matriz diagonal. Esto permite simplificar el movimiento de rotación sobre los ejes X_B - Y_B - Z_B mediante las maniobras de alabeo (Roll), cabeceo (Pitch) y guiñada (Yaw). La rotación entre el sistema de referencia y el orbital, determina la actitud del satélite.

4.3. TRANSFORMACIONES ENTRE SISTEMAS DE REFERENCIA

Cualquier maniobra de orientación del satélite para cubrir los objetivos de apuntamiento se realiza por medio de una secuencia sucesiva de tres rotaciones alrededor de cualquiera de los tres ejes que describen los sistemas de referencia definidos. Así mismo, si se realiza una maniobra de reorientación, esta es llevada a cabo mediante una secuencia de rotaciones alrededor de los tres ejes para conseguir un nuevo apuntamiento.

Las rotaciones se llevan a cabo alrededor de los ángulos de Euler, definidos como ángulo de alabeo ϕ , ángulo de cabeceo θ y por último ángulo de guiñada Ψ . Se permite cualquier combinación de rotación alrededor de los ejes que definen las maniobras de alabeo, cabeceo y guiñada. Este conjunto de rotaciones define una secuencia de rotación, siendo doce las posibles secuencias [1990, Wertz], que vienen determinadas por el orden en que se realiza la rotación. La elección de la secuencia de rotación depende de la arquitectura del satélite y de la misión diseñada. Con objeto de concretar una secuencia se prevé la maniobra $\Psi\theta\phi(3-2-1)$, alabeo-cabeceo-guiñada. Esto da origen a la matriz de rotación $R_{\Psi\theta\phi}$, definida de la siguiente forma:

$$R_{\Psi\theta\phi} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta\cos\psi - \cos\phi\sin\psi & \sin\psi\sin\theta\sin\phi + \cos\psi\cos\phi & \sin\phi\cos\theta \\ \cos\psi\sin\theta\cos\phi + \sin\psi\sin\phi & \cos\phi\sin\theta\sin\psi - \sin\phi\cos\psi & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Gráficamente la secuencia matemática se representa mediante las tres rotaciones en la Figura 4.4.

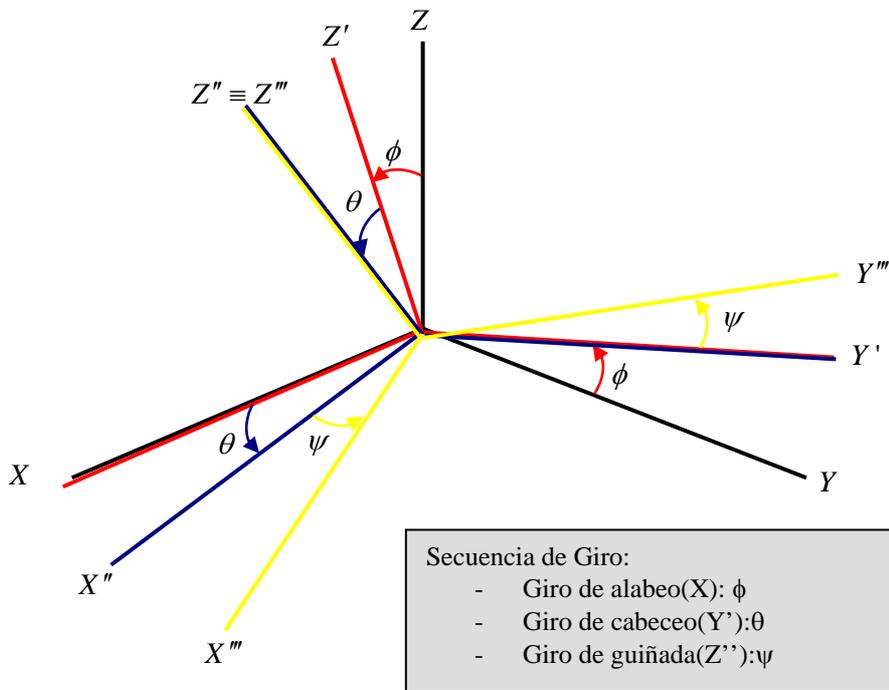


Figura 4.4: Representación Gráfica de la Secuencia de Rotaciones.

4.4. PERTURBACIONES

Puede considerarse que cualquier satélite artificial alrededor de la Tierra va a describir una órbita kepleriana. La realidad es bien distinta, ya que cualquier satélite se encuentra sometido a diferentes perturbaciones y aceleraciones, que causan la aparición de pares perturbadores (perturbaciones externas).

Bajo la influencia de estos pares perturbadores, el satélite no se ciñe a la órbita ideal, considerada kepleriana, sino que describe una órbita real como consecuencia de la distribución de aceleraciones a las que se encuentra sometido. Conocer la órbita descrita implica realizar estimaciones de la misma por medio de los diferentes pasos por las estaciones de seguimiento, y de los posibles cálculos matemáticos desarrollados a partir del conocimiento de los pares a que se encuentra sometido cualquier satélite.

Mientras que la fuerza de la gravedad mantiene al satélite dentro de la órbita, el resto de pares perturbadores tienen su influencia sobre la orientación del satélite y sobre la degradación de la órbita original.

Si las perturbaciones están modeladas, y son conocidas en las posiciones en que se encuentra el satélite, permitirá la acción preventiva tanto de corrección de orientación como corrección de la órbita. Estas perturbaciones dan origen a fuerzas, que una vez modeladas matemáticamente, tienen su influencia sobre el modelo matemático dinámico. Las perturbaciones pueden clasificarse atendiendo a la influencia ejercida sobre la actitud del satélite, tal como las aerodinámicas, la presión solar y el campo magnético, y las que degradan la órbita que son debidas al achatamiento de la Tierra.

4.4.1. PERTURBACIONES AERODINÁMICAS

La influencia atmosférica da origen a una fuerza de carácter aerodinámico en orbitas LEO, por debajo de los 1000 km de altitud. Este tipo de fuerza puede considerarse como una perturbación, ya que dependiendo de la forma externa del satélite, mostrará cierta influencia [1971, NASA SP-8058].

Es complicado modelar matemáticamente la situación atmosférica hasta la altura de la órbita mencionada. Existen diversos modelos matemáticos complejos que tienen en cuenta diversos parámetros, como temperatura, efectos día noche o presión solar. El modelo atmosférico presentado es uno de los más aceptados, denominado modelo TD-88 [1988, Sehnal].

En el análisis de los pares aerodinámicos que podrían repercutir sobre el satélite es necesario tener en cuenta los siguientes factores:

- **Entorno:** El modelo atmosférico seleccionado para los cálculos aerodinámicos durante la órbita.
- **Orientación de la superficie del satélite:** Se hace necesario orientar de forma precisa los elementos externos al cuerpo rígido del satélite, con objeto de presentar la menor resistencia aerodinámica, y generando pares aerodinámicos más pequeños.

- **Posición del centro de presiones:** La posición entre el centro de masas y el centro de presiones es importante para estimar el valor de los pares aerodinámicos. La posición del centro de presiones varía con la orientación del satélite dentro de su órbita.
- **Fuerza aerodinámica:** La fuerza neta que es ejercida sobre el centro de presiones es determinada por las configuraciones de vuelo, posición de los paneles solares, orientaciones del vehículo en su órbita y por el entorno atmosférico.

Aparecen los efectos de resistencia aerodinámica D y sustentación aerodinámica L , expresados respectivamente de la siguiente forma:

$$D = \frac{1}{2} \rho v^2 S C_D \quad (4.2)$$

$$L = \frac{1}{2} \rho v^2 S C_L \quad (4.3)$$

siendo:

ρ : Densidad atmosférica.

S : Superficie transversal.

v : Velocidad del satélite con relación a la atmósfera.

C_D : Coeficiente de resistencia aerodinámica.

C_L : Coeficiente de sustentación aerodinámica.

El valor del coeficiente de resistencia aerodinámica C_D , depende de la forma aerodinámica que presente el satélite, que puede variar en aquellos satélites que cambien de forma persistente la superficie presentada debida a las maniobras de control realizadas sobre el mismo para controlar la actitud.

Los valores de C_D oscilan alrededor de 2.2 como muestra la Tabla 4.1 siguiente dependiendo de un parámetro denominado coeficiente de acomodación α .

α	0.6	0.8	0.9	0.95	0.98	1.0
C_D	2.56	2.40	2.28	2.21	2.14	2.07

Tabla 4.1: Valores del coeficiente de acomodación en función del coeficiente de resistencia aerodinámica.

En la aplicación de las teorías de estudio aerodinámico aplicada a un satélite, no es de crucial importancia el valor de C_D , sino que realmente se considera importante el valor que toma el producto ($S \times C_D$). Es interesante que este producto permanezca constante en la zona de la órbita próxima al perigeo, ya que esta sufre ligeras variaciones hasta el final de la vida útil del satélite [1987, King Hele].

El par aerodinámico que surge al no coincidir el centro de masas con el centro de presiones del satélite se puede expresar mediante la siguiente relación matemática:

$$\vec{T}_A = \vec{m}_e \times \vec{D} \quad (4.4)$$

\vec{m}_e : Representa la distancia entre el centro de gravedad y el centro de presiones.

Si se expresa el par aerodinámico caracterizado únicamente por su módulo, se obtiene la expresión:

$$T = \frac{1}{2} \rho v^2 S C_D \lambda \quad (4.5)$$

λ : Representa la relación entre las dimensiones del satélite.

La resistencia aerodinámica no modifica ni el plano de la órbita ni la orientación de la órbita en su plano.

4.4.2. PRESIÓN SOLAR

Este tipo de perturbación genera una fuerza sobre el satélite que varía con la inversa al cuadrado de la distancia al Sol. La presión ejercida por la radiación solar es independiente de la altitud de la órbita sobre la Tierra. Es una fuerza de tipo constante, aunque puede ser cíclica en vehículos orientados hacia Tierra. Su efecto está relacionado con la geometría del vehículo y con la superficie que este presenta al Sol. La fuerza debida a la presión solar se modela por la siguiente ecuación [1969, NASA SP-8027].

$$\vec{T}_{SP} = P_S A_S L_S (1 + q) \cos i \quad (4.6)$$

Con:

$P_S = 4.617 \times 10^{-6} \text{ N/m}^2$: constante solar.

A_S : área del satélite

L_S : desplazamiento del centro de masas al centro de presiones

i : ángulo de incidencia del Sol

$q = 0.6$: factor reflectante.

4.4.3. CAMPO MAGNÉTICO

Los pares de tipo magnético aparecen como consecuencia de la interacción entre el campo magnético terrestre y las corrientes residuales generadas a bordo de cualquier satélite. Las fuentes de tipo magnético pueden ser los momentos magnéticos del satélite, las corrientes de Eddy o simplemente la histéresis. Las dos últimas componentes magnéticas son producidas por el movimiento de rotación del satélite. En particular la

hysteresis se produce por la magnetización de los materiales permeables dispuestos a bordo del satélite [1969, NASA SP-8018].

Matemáticamente la perturbación magnética puede modelarse como [1990, Wertz]:

$$\vec{T}_{mag} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (4.7)$$

- \vec{B} : Representa la densidad de flujo magnético geocéntrico, cuyas unidades son $\frac{Wb}{m^2}$.
- \vec{m} : Momento magnético efectivo del satélite: $A.m^2$.

Los pares producidos por las corrientes de Eddy se pueden modelar de la siguiente forma:

$$\vec{T}_{eddy} = k_e (\vec{\omega} \times \vec{B}) \times \vec{B} \quad (4.8)$$

- $\vec{\omega}$: Vector velocidad angular del satélite.
- k_e : Coeficiente constante que depende de la conductividad y geometría del satélite.

Las magnitudes aproximadas correspondientes a todas las perturbaciones mencionadas se resumen en la Tabla 4.2, mientras que la Figura 4.5 muestra una representación gráfica de las mismas extraída de [2004, Hughes]:

Fuente de la Perturbación	Región de Aplicación (Altura h) Km	Magnitud de la Perturbación
Aerodinámica	< 500	$\cong 10^{-4}$
Gradiente de Gravedad	500 < h < 35000	$\cong 10^{-3}$
Magnética	500 < h < 35000	$\cong 10^{-4}$
Presión Solar	> 700	$\cong 10^{-6}$

Tabla 4.2: Magnitud y Regiones Aplicables a las Perturbaciones.

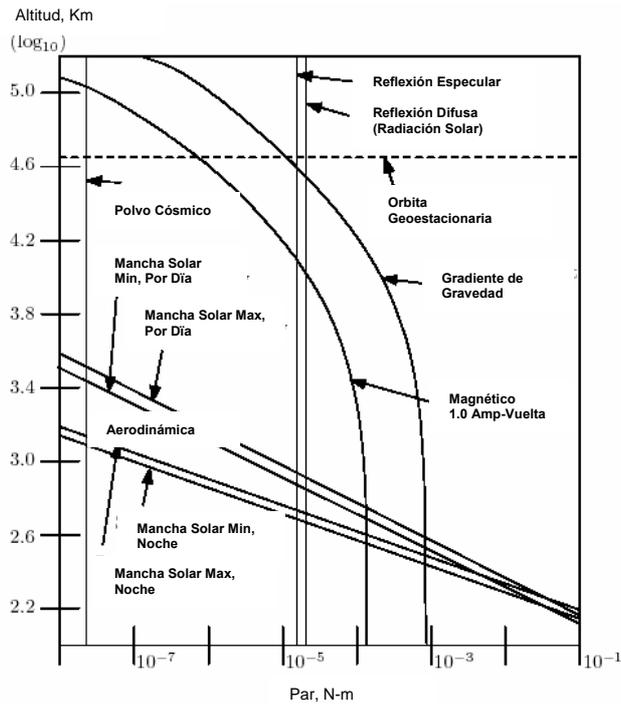


Figura 4.5: Magnitud de las Perturbaciones Espaciales en Función de la Altura de la Órbita (Figura obtenida de [2004, Hughes]).

4.4.4. ACHATAMIENTO TERRESTRE

La forma de la Tierra puede llegar a ser una fuente de perturbación adicional a las ya mencionadas. En particular, el efecto de atracción del campo gravitatorio tiene su influencia sobre la órbita del satélite, más acentuado en los que tienen órbitas bajas.

La Tierra no es una esfera perfecta, que podría disponer de un campo gravitatorio uniforme, sino que se acerca más a la figura de un geode, que dispone de un campo gravitatorio completamente asimétrico. Esta consideración, hace que sea necesario tener en cuenta los efectos producidos por la Tierra en las órbitas de baja cota, e intentar obtener qué parámetros orbitales son susceptibles de ser alterados.

El potencial gravitatorio terrestre se puede expresar por la siguiente expresión [1991, Elices], incluyendo hasta el término armónico J_2 causante del achatamiento polar, o lo que es lo mismo, del abultamiento ecuatorial:

$$U(r, \varphi) = \frac{\mu}{r} \left[1 + \frac{J_2}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^2 (1 - 3 \text{sen}^2 \varphi) \right] \quad (4.9)$$

y la perturbación obtenida de la ecuación anterior es:

$$U_{PER} = \frac{J_2 \mu R^2}{2r^3} (1 - 3\text{sen}^2 \varphi) \quad (4.10)$$

siendo la fuerza perturbadora la siguiente:

$$\vec{F} = \nabla U_{PER} \quad (4.11)$$

El gradiente se puede expresar en coordenadas esféricas:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi \quad (4.12)$$

Resultando que las fuerzas actuantes son:

$$\begin{aligned} F_r &= -\frac{3}{2} J_2 \mu R^2 \frac{1 - 3\text{sen}^2 \varphi}{r^4} \\ F_\theta &= 0 \\ F_\varphi &= -3J_2 \mu R^2 \frac{\text{sen} \varphi \cos \varphi}{r^4} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Las componentes de la perturbación pueden también expresarse sobre el triedro orbital, obteniéndose las ecuaciones:

$$\begin{aligned} R &= -\frac{3}{2} J_2 \mu R^2 \frac{1 - 3\text{sen}^2 i \text{sen}^2 \theta}{r^4} \\ C &= -3J_2 \mu R^2 \frac{\text{sen}^2 i \text{sen}^2 \theta \cos \theta}{r^4} \\ B &= -3J_2 \mu R^2 \frac{\text{sen} i \cos i \text{sen} \theta}{r^4} \end{aligned} \quad (4.14)$$

La influencia del achatamiento terrestre se muestra sobre los elementos orbitales siguientes: la ascensión recta del nodo ascendente, argumento del perigeo y anomalía media. Los elementos que no sufren variación son la inclinación de la órbita, el semieje mayor y la excentricidad.

4.4.5. DEGRADACIÓN DE LA ORBITA

Fundamentalmente las perturbaciones de tipo atmosférico consideradas, esto es la densidad atmosférica y la presión solar, van a conseguir que la órbita original se degrade en el sentido de modificar los parámetros de la elipse en que está contenida la propia órbita y la altitud de la misma.

En órbitas LEO, como la que aquí se considera, una de las perturbaciones más influyentes es la resistencia aerodinámica. Cuanto más baja sea la órbita, más resistencia

aerodinámica se presentará al satélite. Uno de los principales inconvenientes introducidos por la resistencia aerodinámica, es la pérdida de energía por parte del satélite, que se traduce en una pérdida de altitud, y por tanto en una degradación progresiva de la órbita. Si esto no es corregido, se produce un proceso denominado re-entrada en la atmósfera, que llevará a la destrucción del satélite. Además de esta consecuencia extrema, la pérdida de altura orbital implica la mayor influencia de las fuerzas aerodinámicas y por tanto su repercusión sobre satélites con elementos extensibles de dimensiones importantes.

Dos aspectos se tienen en cuenta en la degradación de la órbita. El primero la variación en altura y el segundo la variación circunferencial en cada periodo. Matemáticamente se expresan mediante [1991, Elices]:

$$\Delta h = -\frac{2\pi\rho}{B} r^2 \quad (4.15)$$

$$\Delta s = \frac{3\pi^2\rho}{B} r^2 \quad (4.16)$$

El coeficiente balístico, B , se obtiene a partir del conjunto de elementos orbitales que describen la órbita terrestre de un satélite, denominados TLE (Two Line Elements-Set), y que son suministrados por la organización NORAD (North American Aerospace Defense Command – Mando Norteamericano de Defensa Aeroespacial) para cualquier satélite. El radio de la tierra más la altura de la órbita se concentran en r , y la densidad atmosférica es representada por ρ . La Figura 4.6 muestra como se degrada la órbita con el tiempo y como disminuye el radio orbital. Se ha tenido en cuenta en los datos que se presentan la variación en el periodo orbital consiguiente producida por la reducción de la elipse que describe la órbita [IPS Radio].

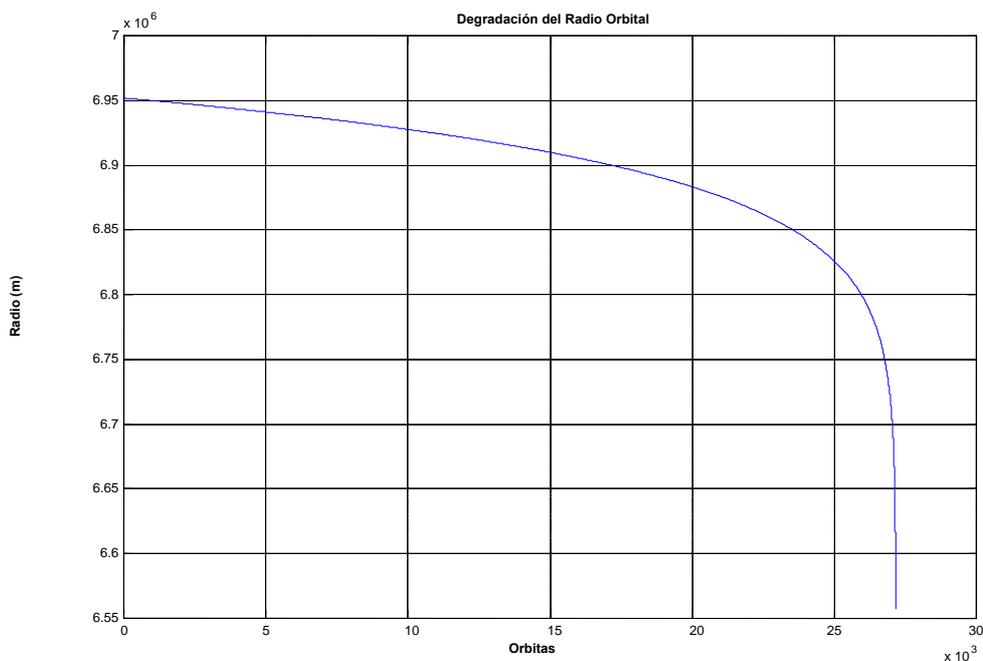


Figura 4.6: Degradación del Radio Orbital.

4.5. MODELO MATEMÁTICO DEL SATELITE RÍGIDO

El movimiento del satélite a lo largo de su órbita se modela mediante las ecuaciones cinemáticas y dinámicas que afectan al mismo. Se considera al satélite como un sistema rígido, con deformaciones consideradas nulas. También se considera que el movimiento del satélite está estabilizado en tres ejes.

La resolución de las ecuaciones cinemáticas y dinámicas permiten conocer bien las velocidades angulares del satélite alrededor de sus ejes, o bien la variación angular. Este modelado matemático es la fase previa al diseño del controlador, por lo que el formato matemático del movimiento del satélite es aplicable en la fase de control.

El modelo matemático correspondiente al comportamiento cinemático se expresa bien en ángulos de Euler, o por medio de cuaterniones. En cualquiera de las expresiones la secuencia de rotaciones seleccionada influye matemáticamente en el modelo. Desarrollar el modelo matemático basado en rotaciones expresadas con los ángulos de Euler implica la posible aparición de ciertas singularidades. Con los cuaterniones se evita este problema, facilitando por tanto el cálculo matemático. Además de los elementos del cuaternión, las velocidades angulares obtenidas por integración de las ecuaciones dinámicas, permitirían conocer cinemáticamente el comportamiento del sistema.

El comportamiento dinámico relaciona las fuerzas aplicadas sobre el satélite y la velocidad angular del mismo, referidos a un sistema de referencia ECI. A partir de este conjunto de ecuaciones diferenciales dinámicas, se puede conocer el grado de acoplamiento que se presenta entre los tres ángulos. En cierto grado se están presentando los modos que permiten conocer el acoplamiento del sistema. A partir de la determinación de estos modos, y mediante el método de asignación de autoestructuras, se podría especificar para el diseño el grado de desacoplo.

Para describir por completo el movimiento característico del satélite, además de las ecuaciones cinemáticas y dinámicas, es necesario conocer la velocidad angular del satélite en cualquiera de los sistemas de referencia, y conocer las energías cinética y potencial del sistema.

4.5.1. CINEMÁTICA DEL MOVIMIENTO

El cálculo cinemático del movimiento del satélite está basado en la secuencia de rotaciones descrita por la matriz de cosenos directores $R_{\psi\theta\phi}$. Esta secuencia representa una rotación alrededor del eje de alabeo, seguida de una alrededor del eje de cabeceo y por último alrededor del eje de guiñada. Este método podría presentar singularidades en las rotaciones, debido a la dependencia de los elementos de la matriz de senos y cosenos. En esta tesis se consideran maniobras con ángulos pequeños, lo que impide que se produzcan singularidades.

En la cinemática del satélite existen dos factores importantes:

- Las velocidades angulares de rotación de los ejes del sistema de referencia cuerpo respecto a otro sistema de referencia.
- La velocidad de este mismo sistema de referencia respecto al sistema de referencia ECI.

4.5.1.1. VELOCIDAD ANGULAR

La velocidad angular en ejes cuerpo respecto del sistema de referencia ECI, ω_b^{bi} , permite conocer los desplazamientos angulares sucedidos con el transcurso del tiempo y forma parte de la ecuación dinámica del movimiento. El objeto de este análisis es obtener la matriz de velocidades [1997, Sidi]:

$$\omega_b^{bi} = \omega_b^{bo} + \omega_b^{oi} \quad (4.17)$$

Aplicando la rotación necesaria para cambiar de sistema de referencia se obtiene:

$$\omega_b^{bi} = \mathbf{R}_b^{bo} \omega_b^{bo} + \mathbf{R}_b^{bi} \omega_i^{oi} \quad (4.18)$$

La secuencia de rotaciones en ejes cuerpo sobre los ángulos de guiñada, cabeceo y alabeo, según la matriz de rotación especificada, permite obtener las velocidades angulares medidas sobre los mismos ejes y en coordenadas cuerpo. La secuencia de rotaciones especificada viene determinada por la matriz de rotación $\mathbf{R}_{\psi\theta\phi}$, dada por el producto de matrices de rotación:

$$\mathbf{R}_{\psi\theta\phi} = \mathbf{R}_\phi \mathbf{R}_\theta \mathbf{R}_\psi \quad (4.19)$$

Luego las velocidades angulares en coordenadas cuerpo tienen las siguientes componentes $[p \ q \ r]$:

$$\omega_b^{bo} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \mathbf{R}_\phi \mathbf{R}_\theta \mathbf{R}_\psi \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \mathbf{R}_\phi \mathbf{R}_\theta \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{R}_\phi \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Desarrollando esta expresión, se llega a que las velocidades angulares en ejes cuerpo tienen la expresión:

$$\begin{aligned} p &= \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin(\theta) \\ q &= \dot{\theta} \cos(\phi) + \dot{\psi} \cos(\theta) \sin(\phi) \\ r &= \dot{\psi} \cos(\theta) \cos(\phi) - \dot{\theta} \sin(\phi) \end{aligned} \quad (4.21)$$

La segunda componente, la velocidad angular de ejes orbitales a inerciales se expresa mediante:

$$\boldsymbol{\omega}_b^{oi} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta\cos\psi - \cos\phi\sin\psi & \sin\psi\sin\theta\sin\phi + \cos\psi\cos\phi & \sin\phi\cos\theta \\ \cos\psi\sin\theta\cos\phi + \sin\psi\sin\phi & \cos\phi\sin\theta\sin\psi - \sin\phi\cos\psi & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Luego la velocidad angular en ejes cuerpo respecto del sistema de referencia ECI está expresada por:

$$\boldsymbol{\omega}_b^{bi} = \boldsymbol{\omega}_b^{bo} + \boldsymbol{\omega}_b^{oi} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{xb}^{oi} \\ \omega_{yb}^{oi} \\ \omega_{zb}^{oi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\psi}\sin\theta + \dot{\theta}\sin^2\theta + \dot{\phi} - \omega_0\cos\theta\sin\psi \\ \dot{\psi}\sin\phi\cos\theta + \dot{\theta}\cos\phi - \omega_0\cos\phi\cos\psi - \omega_0\sin\phi\sin\theta\sin\psi \\ \dot{\psi}\cos\phi\cos\theta - \dot{\theta}\sin\phi\cos\theta + \omega_0\sin\phi\cos\psi - \omega_0\cos\phi\sin\theta\sin\psi \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

El conocimiento de las condiciones iniciales para los ángulos de Euler, permite integrar la expresión anterior, y obtener así los ángulos ϕ , θ y ψ . Esta información permite conocer la magnitud de la rotación llevada a cabo alrededor del sistema de referencia.

Con estos valores se pueden obtener las componentes del cuaternión $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4]^T$. Sin embargo es posible realizar una simplificación. Se prevé que las rotaciones son realizadas con ángulos pequeños. Esto permite obtener la simplificación para los elementos del cuaternión siguiente:

$$q_1 \approx \frac{\phi}{2}; \quad q_2 \approx \frac{\theta}{2}; \quad q_3 \approx \frac{\psi}{2}; \quad q_4 \approx 1 \quad (4.24)$$

4.5.2. DINÁMICA DEL SISTEMA

La dinámica del sistema relaciona el movimiento del centro de masas del satélite respecto de algún punto inercialmente fijo. Como se está considerando que el satélite es rígido se toma como centro del sistema de referencia el centro de masas del satélite, es decir el origen del sistema de referencia cuerpo.

El comportamiento dinámico del satélite se expresa mediante su momento angular. El momento angular de un sistema referido a un punto en un sistema de referencia de ejes cuerpo está definido como el sumatorio de todos los momentos angulares de los diferentes elementos contenidos dentro del satélite, que en términos matemáticos es [1990, Wertz]:

$$\vec{H} = \sum \vec{r} \times m\vec{v} \quad (4.25)$$

En términos físicos el momento angular para un cuerpo rígido es una medida del momento necesario para crear un movimiento de rotación. La variación del momento

angular, referido al centro de masas del satélite o a cualquier otro punto inercial fijo se puede producir de dos formas:

- Mediante la aplicación de un par externo al satélite que produce momento angular sobre el punto de referencia, que producirá una velocidad de cambio descrita mediante la ecuación de Newton:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{T} \quad (4.26)$$

Siendo \vec{T} la suma de fuerzas exteriores aplicadas al satélite y pudiendo representar el momento angular en función del tensor de inercia \mathbf{I} , y de la velocidad angular del sistema $\vec{\omega}$. Los pares internos actuando entre cuerpos o partículas internas no afectan al momento angular total del satélite.

- El segundo medio para cambiar el valor del momento angular es mediante la expulsión del satélite de cierta masa que ejerciera momentos sobre el punto de referencia.

El momento angular para cuerpos rígidos se expresa en términos de la velocidad angular del satélite, y del tensor de inercia:

$$\vec{H} = \mathbf{I} \vec{\omega}_b^{bi} \quad (4.27)$$

Siendo ω_b^{bi} la velocidad angular referida a un sistema de referencia inercial, e \mathbf{I} la matriz de inercia.

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Donde I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} ; representan los momentos de inercia y los I_{xy}, I_{yz}, I_{zx} representan los productos de inercia. Los productos de inercia muestran una falta de simetría en la masa del satélite llevando a acoplamientos cruzados. Respecto de los ejes principales de inercia los productos de inercia son nulos, con lo que el tensor de inercia sería una matriz identidad. Luego el momento angular se puede expresar con la velocidad angular $\vec{\omega} = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T$ como:

$$\vec{H} = \begin{bmatrix} I_{xx}\omega_x & -I_{xy}\omega_y & -I_{xz}\omega_z \\ -I_{xy}\omega_y & I_{yy}\omega_z & -I_{yz}\omega_x \\ -I_{xz}\omega_z & -I_{zy}\omega_x & I_{zz}\omega_y \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Quedando el momento angular para los ejes principales de inercia de la forma:

$$\vec{H} = [I_{xx}\omega_x \quad I_{yy}\omega_y \quad I_{zz}\omega_z] \quad (4.30)$$

Desde el punto de vista de control de actitud, y teniendo en cuenta todo lo expuesto conviene tener en cuenta los siguientes aspectos del momento angular:

- En ausencia de pares o fuerzas externas \vec{T} , el momento angular \vec{H} permanece constante en dirección y magnitud.
- La magnitud del momento angular \vec{H} se verá incrementada si se aplica una fuerza exterior en su misma dirección.
- Un par externo aplicado de forma perpendicular al momento angular \vec{H} producirá un cambio en su dirección, pero no es su magnitud. Esto equivale a la precesión giroscópica. Sin embargo cuanto más grande es el momento angular, el cambio en su dirección debido a un impulso $T\delta t$, es menor, conocido como “rigidez giroscópica”. En la velocidad de giro tiene influencia el momento \vec{H} cinético representado por la expresión (para un ángulo general):

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\vec{T}}{\vec{H}} \quad (4.31)$$

- La influencia de los actuadores se refleja en la ecuación de Euler por medio del momento angular aportado. Esta característica es aplicable a ruedas de momentos y ruedas de reacción.

De lo anteriormente expuesto, la ecuación de Euler que representa la dinámica del satélite considerado rígido es la siguiente:

$$\dot{\vec{H}}_I = \dot{\vec{H}}_B + \vec{\omega} \times \vec{H}_B = \vec{T} \quad (4.32)$$

$$I\dot{\omega}_b^{ib} = -\omega_b^{ib} \times (I\omega_b^{ib}) + \vec{T}$$

4.5.3. LINEALIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DEL MOVIMIENTO

A partir de la presunción de que se generan rotaciones consideradas como ángulos pequeños, es posible linealizar la dinámica del movimiento, bien en términos de los ángulos de Euler, o en términos de cuaterniones.

En cualquiera de los casos el objetivo es el mismo, disponer de una ecuación del movimiento del satélite lineal con la que poder simular las acciones de control. La linealización alrededor del punto de equilibrio es:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_b^{bo} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{q}^{bo} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (4.33)$$

La expresión (4.33) indica que la velocidad angular entre los sistemas de referencia orbital y cuerpo sean las mismas, coincidiendo por tanto los sistemas de referencia. Este apuntamiento determina la actitud del satélite. La velocidad angular orbital es:

$$\boldsymbol{\omega}_b^{oi} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_0 \\ 0 \end{bmatrix}\quad (4.34)$$

Teniendo en cuenta la representación por ángulos pequeños, es posible linealizar la velocidad angular de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &\approx \omega_x \\ \dot{\theta} &\approx \omega_y \\ \dot{\psi} &\approx \omega_z\end{aligned}\quad (4.35)$$

$$\begin{aligned}\omega_x &\approx \dot{\phi} - \omega_0\psi - \dot{\psi}\theta & \rightarrow \dot{\phi} &\approx \omega_x + \omega_0\psi \\ \omega_y &\approx \dot{\theta} - \omega_0 + \dot{\psi}\phi & \rightarrow \dot{\theta} &\approx \omega_y + \omega_0 \\ \omega_z &\approx \dot{\psi} + \omega_0\phi - \dot{\theta}\phi & \rightarrow \dot{\psi} &\approx \omega_z - \omega_0\phi\end{aligned}\quad (4.36)$$

Por tanto las aceleraciones angulares se expresan:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_x &\approx \ddot{\phi} - \omega_0\dot{\psi} \\ \dot{\omega}_y &\approx \ddot{\theta} \\ \dot{\omega}_z &\approx \ddot{\psi} + \omega_0\dot{\phi}\end{aligned}\quad (4.37)$$

con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned}I_x\dot{\omega}_x - \omega_z\omega_y I_y + \omega_z\omega_y I_z &= T_{Cx} + T_{Dx} \\ I_y\dot{\omega}_y + \omega_x\omega_z I_x + \omega_x\omega_z I_z &= T_{Cy} + T_{Dy} \\ I_z\dot{\omega}_z - \omega_x\omega_y I_x + \omega_x\omega_y I_y &= T_{Cz} + T_{Dz}\end{aligned}\quad (4.38)$$

El anexo I muestra el desarrollo completo de la obtención de la ecuación dinámica del sistema, considerando al vehículo como rígido.

4.6. ENERGÍA CINÉTICA DEL MOVIMIENTO

La energía cinética de un satélite es una forma cuadrática que refleja la velocidad del satélite en un sistema de referencia inercial. Podemos enfocar la caracterización de la energía cinética, referenciada a la vertical local.

Estrictamente hablando, la energía cinética puede modelarse mediante la siguiente expresión para un elemento de masa genérico:

$$E_c = \frac{1}{2} \int_m \bar{v}^2 dm \quad (4.39)$$

siendo \bar{v} , la velocidad de un elemento respecto de un sistema de referencia ECI.

El desarrollo de la energía cinética introduce diversos componentes. Los componentes más importantes son los relacionados con la energía cinética de traslación y con la energía cinética de rotación. Adicionalmente a estos, aparecen términos de conversión de energía cinética en potencial si existen modos flexibles, como los pertenecientes a los paneles solares. Pueden aparecer otros términos relacionados con los modos de rotación de los motores de los actuadores, contribuciones de velocidad de apertura de los paneles, y acoplamiento entre los movimientos de los elementos sensibles y la actitud del satélite.

Para los dos primeros términos enumerados las expresiones matemáticas son las siguientes:

- Energía cinética de traslación: $E_{cT} = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 \quad (4.40)$

- Energía cinética de rotación: $E_{cR} = \frac{1}{2} \bar{\omega}^T I \bar{\omega} \quad (4.41)$

Luego la energía cinética total se considera como:

$$E_c = E_{cR} + E_{cT} \quad (4.42)$$

4.7. ENERGÍA POTENCIAL DEL MOVIMIENTO

La energía potencial debida al gradiente de gravedad se considera mínima cuando el eje Z del satélite, eje del momento de inercia mínimo, se encuentra alineado con el eje Z del sistema de referencia con vertical local, ya que no hay gradiente de gravedad actuando sobre el satélite. El valor máximo para la energía potencial se encuentra cuando el eje Z del sistema de referencia local coincide con el eje de referencia del

sistema de referencia de coordenadas principales. Luego la energía potencial asociada con el gradiente de gravedad puede ser considerada como una medida del ángulo de inclinación del satélite entre los ejes Z de ambos sistemas de referencia, cuerpo y orbital.

Desde la perspectiva de los componentes de energía potencial, se distinguen dos términos. El primero, es la energía potencial gravitacional, relacionada básicamente con la altitud de la órbita y la orientación del satélite con la vertical local, como se ha indicado anteriormente. El segundo término se corresponde con la energía potencial procedente de los elementos flexibles. Esta componente de energía potencial se adquiere por las deformaciones sufridas de los elementos flexibles al realizar maniobras, y aquella que aparece como consecuencia de la interacción de las perturbaciones externas.

Tanto la energía cinética como potencial junto con el momento angular definen por completo el movimiento rotacional del satélite.

4.7.1. ENERGÍA POTENCIAL GRAVITACIONAL

El movimiento orbital del satélite de masa m ocurre en un campo de fuerza central con origen en el centro de la Tierra. La intensidad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre su origen y la posición del satélite [1970, Meirovitch]. Esta definición se expresa como:

$$V_G = -\mu \int_m \frac{dm}{R} \quad (4.43)$$

Siendo $\mu = GM$, donde G es la constante de gravitación universal, y M la masa de la Tierra. Teniendo en cuenta todos los elementos del satélite, los momentos de inercia y la matriz de cosenos directores, la energía potencial gravitacional es [2004, Hughes]:

$$V_G = -\frac{\mu m}{R_B} - \frac{\mu}{2R_B^3} \text{tr}(\mathbf{I}) + \frac{3\mu}{2R_B^3} \mathbf{R}_{\psi\theta\phi}^T \mathbf{I} \mathbf{R}_{\psi\theta\phi} \quad (4.44)$$

R_B representa la distancia entre el centro del sistema ECI y el sistema de referencia ligado al cuerpo. El tensor de inercia se representa por \mathbf{I} .

4.7.2. ENERGÍA POTENCIAL ELÁSTICA

A esta también se la denomina energía de deformación, depende tanto del material con que están fabricados los paneles solares, de la forma, y del tipo de viga que represente. Este tipo de energía contribuye a la energía potencial mediante la siguiente expresión:

$$V_E = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (4.45)$$

La longitud del panel solar es L , EI representa la rigidez del mismo y w la deformación.

4.8. MODOS FLEXIBLES DEL SISTEMA

Hasta ahora se ha considerado al satélite desde una perspectiva rígida, siendo las deformaciones debidas a flexión o torsión mínimas. Esta consideración ha simplificado las ecuaciones dinámicas y cinemáticas del satélite, pudiendo calcular los efectos sin tener en cuenta la potencial aparición de modos flexibles y su influencia sobre la dinámica del satélite.

Los principales modos flexibles que aparecen en el satélite son los debidos a los efectos de los paneles solares, antenas de comunicaciones, estructuras telescópicas o brazos robóticos e incluso los efectos producidos por elementos rotatorios internos como ruedas de reacción. Todos ellos introducen ciertos modos que afectan a la dinámica del satélite, y por tanto a su control de actitud, ya que la generación de cualquier acción de control producirá una deformación de los elementos flexibles. A efectos de esta tesis, sólo se consideran los modos flexibles introducidos por los paneles solares únicamente sin tener en cuenta el resto de posibles estructuras que afecten a la dinámica del satélite. Incluso el cuerpo del satélite se sigue considerando como una estructura rígida comparándola con las deformaciones de los paneles.

En ciertas plataformas los paneles solares son orientados independientemente del resto del satélite, disponiendo por tanto de su propio control de orientación, garantizando con ello la generación máxima de potencia eléctrica a bordo. El hecho de tener a bordo del satélite modos flexibles introducidos por diversos elementos, hace que tenga su efecto sobre la ecuación dinámica del sistema, variando el momento angular total. Los modos flexibles, introducen sus propios momentos angulares según la siguiente expresión [1990, Wertz]:

$$\vec{H} = I\vec{\omega} + \vec{H}_{Flex} \quad (4.46)$$

En este sentido puede plantearse la relación entre la estructura dinámica del satélite y la flexible de los paneles solares, y que tipo de interacción aparece entre ellas. Este análisis lleva al estudio de estos modos de interactuar y a la definición de algún controlador que permita desacoplarlos.

A lo largo de la exposición llevada a cabo en esta tesis se ha mantenido la hipótesis que considera al satélite como un cuerpo rígido. Esta hipótesis es válida si se considera que no existen elementos adosados al cuerpo del satélite que puedan presentar alguna deformación. Este caso aparece cuando existen paneles solares o elementos extensibles que pueden verse sometidos a ciertas deformaciones.

Las maniobras de actitud pueden excitar ciertos modos de vibración de los elementos flexibles, produciendo cierto riesgo sobre ellos. La determinación de las frecuencias a

las que se producen estas vibraciones es importante en el diseño del controlador y sobre la consideración de las maniobras que pueden ser realizadas [2004, Kojima].

La cuestión que se presenta esta relacionada por tanto con las maniobras realizables y la excitación de las frecuencias que producen vibración. La respuesta a esta cuestión reside en la posibilidad de diseñar un controlador que permita disociar el acoplamiento dinámico existente entre los modos rígidos y los modos flexibles [2001, Baruh].

Los modos flexibles considerados en esta tesis, residen en los paneles solares. La deformación de estos elementos y su repercusión sobre la actitud está condicionada por diversos factores. Entre ellos se encuentran las dimensiones del panel, la posición relativa que disponen en el conjunto total del satélite, y el material con que han sido fabricados.

4.9. FORMULACIÓN LAGRANGIANA DEL SATELITE RIGIDO CON ELEMENTOS FLEXIBLES

El modelo matemático utilizado para describir el comportamiento dinámico del satélite, considerando a este compuesto de elementos rígidos y de elementos flexibles, está basado en la formulación Lagrangiana.

Este tipo de satélites se consideran como vehículos flexibles, y de forma más concreta como vehículos rígido-flexibles. El movimiento de estos está descrito mediante un conjunto híbrido de ecuaciones diferenciales ordinarias, asociadas a coordenadas discretas que describen la evolución en el tiempo de las rotaciones y de las traslaciones de la parte rígida. En cuanto a los elementos flexibles, su movimiento queda descrito por ecuaciones en derivadas parciales asociadas a coordenadas distribuidas relacionadas con las deformaciones elásticas sufridas en función del tiempo.

El método de Lagrange utilizado en esta metodología permite modelar el conjunto dinámico de ecuaciones diferenciales del sistema, con el objetivo de llegar a obtener las ecuaciones de estado del mismo aplicables al desarrollo posterior del controlador.

El procedimiento Lagrangiano está basado en magnitudes escalares: energía cinética, energía potencial y trabajo generalizado. Estas magnitudes ya han sido obtenidas, por tanto la aplicación a la formulación lagrangiana es directa.

4.9.1. ECUACIONES DE LAGRANGE PARA EL MOVIMIENTO DEL SISTEMA

La obtención del lagrangiano del sistema parte del conocimiento de las energías cinética y potencial del satélite, considerando tanto paneles solares flexibles como cuerpo rígido [1970, Meirovich]. La energía cinética del vehículo considera tanto la de traslación como la de rotación, y para la energía potencial se consideran la debida a la acción de la gravedad y la consideración de energía potencial a la de deformación de los paneles, denominada energía potencial elástica. La formulación Lagrangiana puede ser representada por:

$$L = T - V = T - (V_G + V_E) \quad (4.47)$$

Definiéndose como la diferencia entre la energía cinética T del sistema y la energía potencial V . El Lagrangiano será función de las coordenadas generalizadas dadas por \mathbf{u} , de las velocidades $\dot{\mathbf{u}}$ y del tiempo t . La ecuación del movimiento que considera todos los modos, se obtiene a partir de la expresión de Hamilton, considerando fuerzas no conservativas \mathbf{Q}_{nc} como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{Q}_{nc} \quad (4.48)$$

Las fuerzas consideradas como no conservativas tienen su origen en las acciones de control llevadas a cabo por los actuadores, independientemente del tipo de actuador:

$$\mathbf{Q}_{nc} = [Q_x \quad Q_y \quad Q_z]^T \quad (4.49)$$

En realidad con la aplicación del principio de Hamilton la función Lagrangiana se está definiendo un conjunto híbrido de ecuaciones del movimiento, ya que son ecuaciones con términos mixtos, procedentes de las derivadas parciales y del acoplamiento de las deformaciones elásticas de los elementos flexibles.

Este proceso de modelado matemático lleva a obtener una expresión del movimiento linealizado, que se expresa de la siguiente forma:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{Q}_{nc} \quad (4.50)$$

Donde \mathbf{M} representa la matriz de masa generalizada, siendo definida positiva; \mathbf{G} es semidefinida positiva representando la matriz giroscópica; \mathbf{K} semidefinida positiva, es la matriz de rigidez.

Si únicamente se tuvieran en cuenta los modos rígidos el vector de coordenadas generalizadas \mathbf{u} estaría compuesto por los ángulos de Euler de la siguiente forma:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

por lo que el modelo lineal desarrollado quedará como a continuación se muestra, teniendo en cuenta que en los momentos de inercia estarán incluidos los correspondientes a los paneles solares, y con la apreciación de considerarlos rígidos.

$$\begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \omega_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_y - I_z - I_x \\ 0 & 0 & 0 \\ I_x + I_z - I_y & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \omega_0^2 \begin{bmatrix} 4(I_y - I_z) & 0 & 0 \\ 0 & 3(I_x - I_z) & 0 \\ 0 & 0 & (I_y - I_x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix}$$

(4.52)

Este resultado es consistente con el obtenido por aplicación de la ecuación del movimiento de Euler. Los elementos de las matrices del movimiento tienen su origen en la energía cinética de rotación y en la energía potencial obtenida por efecto gravitatorio.

Los componentes de inercia de la matriz \mathbf{M} se corresponden con los principales del satélite sin deformar. Los componentes de \mathbf{G} proceden exclusivamente de la energía cinética de rotación, y los componentes de la matriz \mathbf{K} proceden tanto de la consideración de la energía cinética de rotación junto con la energía potencial.

En la extensión al modelo flexible aparecen nuevas coordenadas generalizadas procedentes de la consideración de la deformación elástica sufrida por los paneles. Estas coordenadas están relacionadas con la deformación por flexión q_i y por la deformación por torsión r_i para cada uno de los paneles. El nuevo vector de coordenadas generalizadas queda expresado como:

$$\mathbf{u} = [\phi \quad \theta \quad \psi \quad q_1 \quad r_1 \quad q_2 \quad r_2]^T \quad (4.53)$$

4.9.2. DEFORMACIÓN DE LOS PANELES SOLARES

La geometría general de los paneles solares flexibles considerados rectangulares sugiere que las deformaciones elásticas sean modeladas como una composición de movimientos en una viga encastrada-libre (Viga Cantilever) para la flexión y como una viga libre-libre para el movimiento de torsión. El encastre se encuentra situado en el extremo de unión al satélite y libre en el extremo contrario.

Entre los distintos modos aplicables a deformaciones de elementos flexibles, el que aquí se aplica es el denominado “método de los modos supuestos”. En este método, la deformación de estructuras elásticas continuas se modelan por una serie de funciones espaciales que son multiplicadas por funciones dependientes de la amplitud y del tiempo [1986, Junkins]. Las amplitudes se convierten en un subconjunto de coordenadas generalizadas propias para ser tratadas mediante formulación Lagrangiana. Y las funciones espacio dependientes se eligen para completar un conjunto de ecuaciones linealmente independientes. A este conjunto de funciones se les denomina funciones admisibles. Han de tenerse en cuenta los modos de vibración asociados, caracterizados por sus frecuencias naturales y por las amplitudes de las vibraciones. Se considera que los paneles son los elementos flexibles del satélite, y que sería interesante desacoplarlos del cuerpo que puede considerarse rígido del satélite. Para ello se consideran deformaciones longitudinales, en las que el desplazamiento lateral para un modo simple i , se modela mediante el producto de una función espacial relacionada con la frecuencia natural y una función sinusoidal armónica en el tiempo. La deformación de ambos paneles solares está discretizada por una serie de funciones admisibles asociadas a las

coordenadas generalizadas dependientes del tiempo. La expresión (4.54) muestra la deformación debida a flexión w_i y la ecuación la deformación debida a torsión v_i quedando expresadas como:

$$w_i(\xi, t) = \sum_{i=1}^2 \phi(\xi) q_i(t)$$

$$v_i(\xi, z, t) = \sum_{i=1}^2 \psi(\xi) r_i(t)$$
(4.54)

En esta expresión $w_i(x, t)$ y $v_i(\xi, z, t)$ son las coordenadas físicas longitudinales y transversales, $\phi_i(x)$ y $\psi_i(x)$ representan las funciones de forma de los modos de deformación y por último $q_i(t)$ y $r_i(t)$ son las coordenadas generalizadas o coordenadas modales. Las funciones de forma de los modos $\phi_i(x)$ y $\psi_i(x)$ dependen de la forma en que se considera la estructura flexible que modela el panel solar. Las cargas dinámicas que pueden ser ejercidas sobre los paneles pueden excitar diversos modos y frecuencias de vibración de forma simultánea. En cada instante de tiempo t la deformación de los paneles varía a lo largo de su longitud.

Se considera al panel como una estructura rectangular adosada al cuerpo del satélite, y que está sometida a efectos de flexión y de torsión. Las dimensiones del panel se muestran en la Figura 4.7, disponiendo de un largo L , un ancho a y un espesor b . El sistema de coordenadas utilizado es el de la figura, coincidente con las coordenadas cuerpo (X_B, Y_B, Z_B). El satélite dispone de dos paneles situados en el mismo eje, y simétricos respecto del centro de gravedad, y del origen del sistema coordinado centro en el mismo. Se considera a efectos de cálculo y simulación que la deformación de un panel en un sentido se produce en el otro de la misma forma pero antisimétrica.

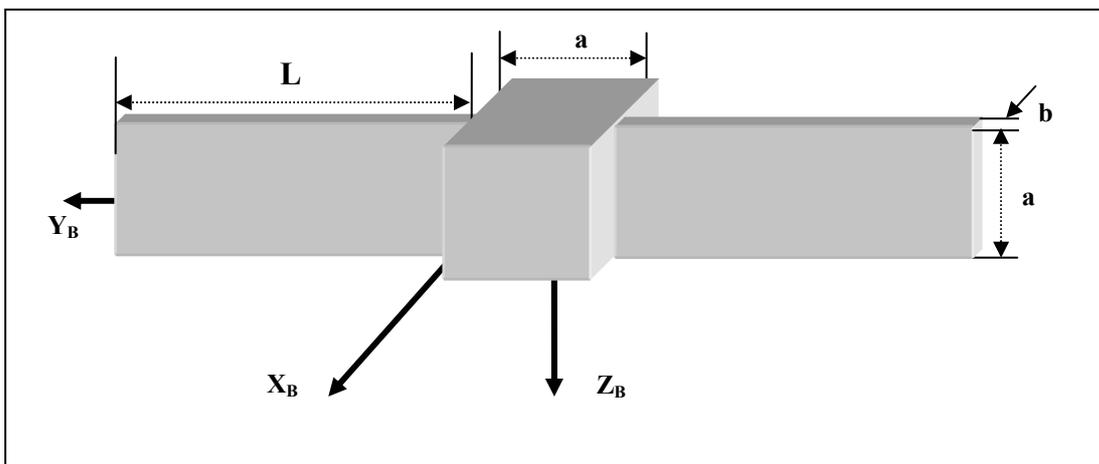


Figura 4.7: Configuración del Satélite junto con los Paneles Solares.

Las funciones admisibles se modelan para los dos tipos de viga considerados de la siguiente forma [1995, Sarafin]:

- Estructura fija-libre(Cantilever):

$$\phi_i(x) = \cosh \frac{c_i x}{L} - \cos \frac{c_i x}{L} - d_i \left(\sinh \frac{c_i x}{L} - \sin \frac{c_i x}{L} \right) \quad (4.55)$$

- Viga libre-libre(free-free):

$$\psi_i(x) = \cosh \frac{c_i x}{L} + \cos \frac{c_i x}{L} - d_i \left(\sinh \frac{c_i x}{L} + \sin \frac{c_i x}{L} \right) \quad (4.56)$$

En ambos casos, las ecuaciones que determinan la forma de los modos son aplicables a los modos considerados teniendo en cuenta que las estructuras tienen masa uniformemente distribuida, m , momento de inercia constante, I , y módulo de Young constante, E . Los valores de c_i y d_i representan valores constantes que dependen del modo considerado. La Tabla 4.3 muestra los valores tomados por los coeficientes c_i y d_i para los primeros cinco modos de vibración.

Modo	Viga Encastrada-Libre		Viga Libre-Libre	
	c_i	d_i	c_i	d_i
1	1.875	0.734096	4.730	0.982502
2	4.694	1.018467	7.853	1.000777
3	7.855	0.999227	11.00	0.999966
4	11.00	1.000034	14.14	1.000001
5	14.14	0.999999	17.28	1.000000

Tabla 4.3: Valores Tomados por las Constantes de las Funciones Admisibles.

La frecuencia natural obtenida para cada uno de los modos está dada por [1995, Sarafin]:

$$f_{ni} = \frac{c_i^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (4.57)$$

Gráficamente las deformaciones introducidas por los cinco primeros modos, tanto para flexión como para torsión se presentan en la Figura 4.8:

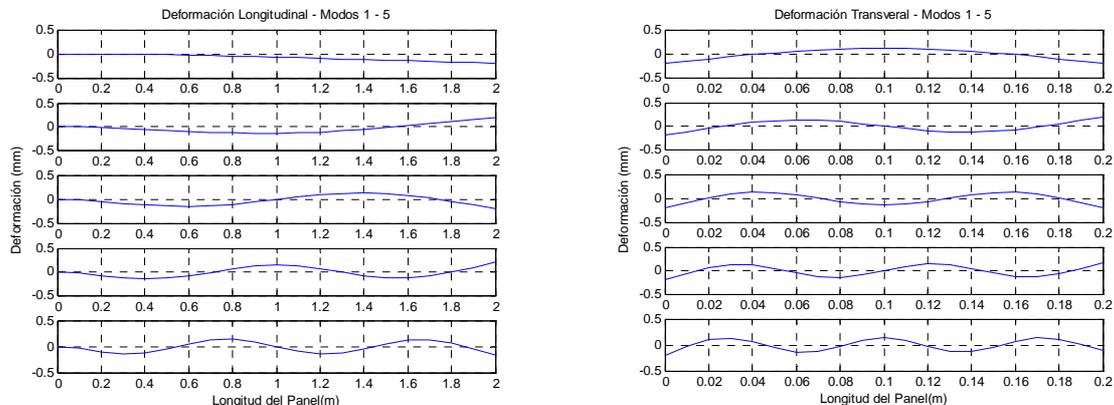
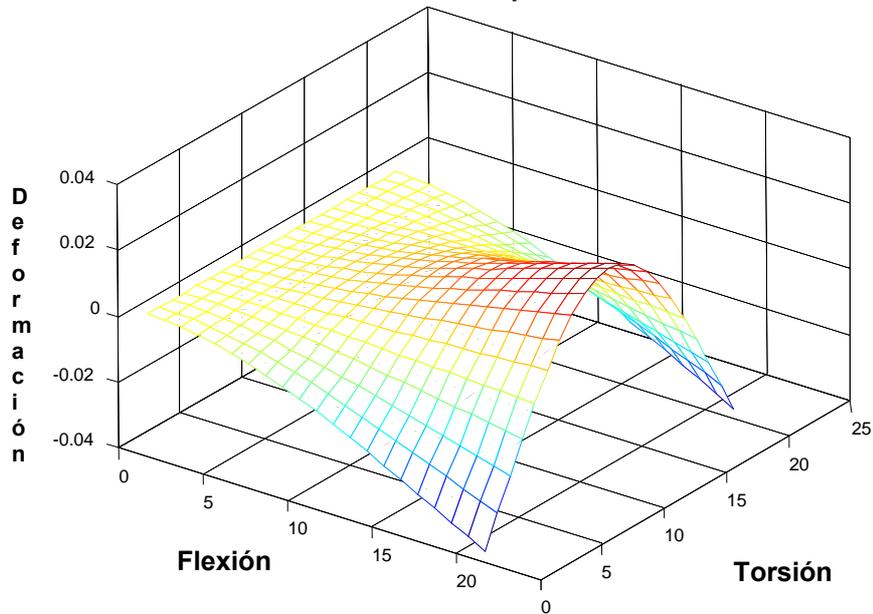


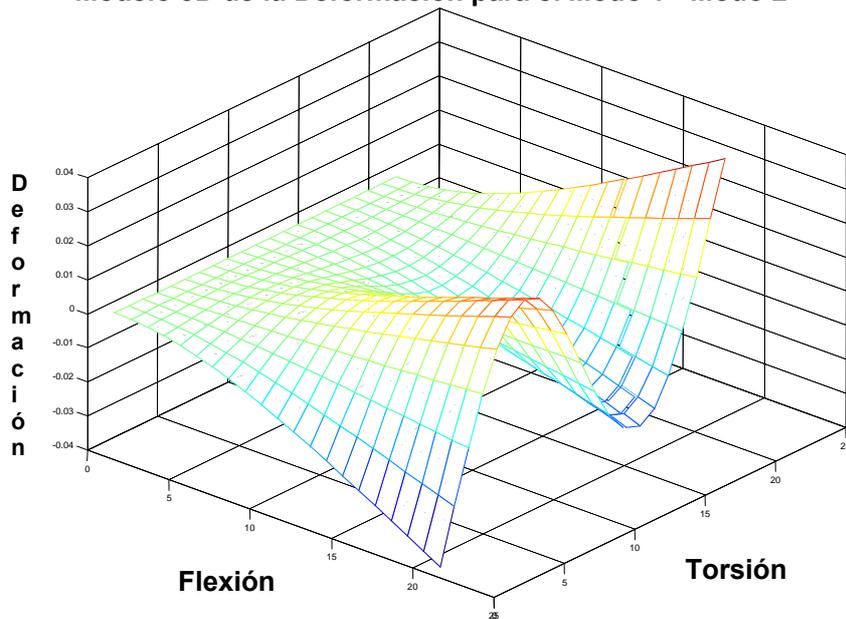
Figura 4.8: Deformación Longitudinal y Transversal de los Paneles Solares para los Cinco Primeros Modos.

Una visión general del efecto que produce la flexión y torsión conjunta sobre los paneles solares se muestra en la Figura 4.9. En ella se muestran algunos de los modos de deformación, y el efecto que tienen sobre un panel. En una configuración antisimétrica el efecto sobre el segundo panel será de las mismas características pero con signo inverso.

Modelo 3D de la Deformación para el Modo 1 - Modo 1



Modelo 3D de la Deformación para el Modo 1 - Modo 2



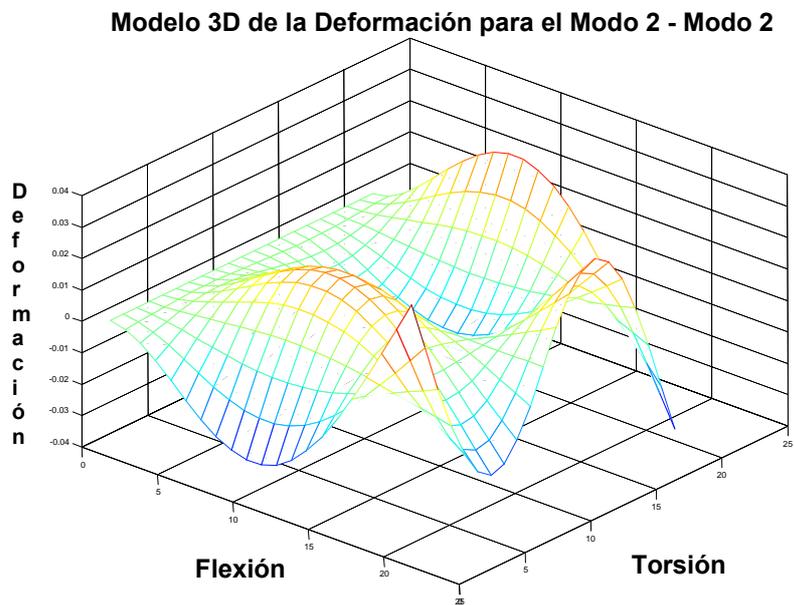


Figura 4.9: Representación 3D de la Deformaciones Longitudinal y Transversal de los Paneles Solares para los Dos Primeros Modos.

La Figura 4.10 representa gráficamente el efecto de la deformación de los paneles solares sobre la estructura rígida del satélite.

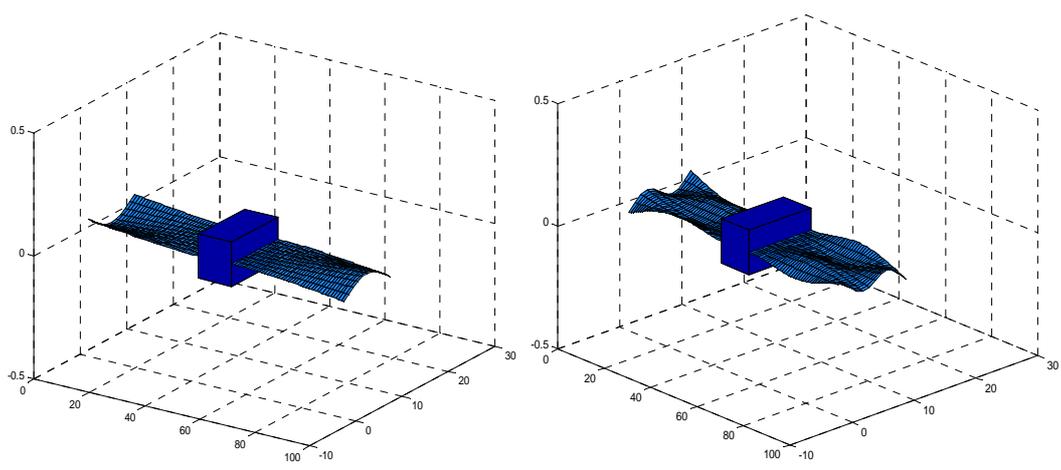


Figura 4.10: Representación 3D de la Deformaciones Longitudinal y Transversal de los Paneles Solares. Modo 1-1 (izquierda), Modo 2-2 (derecha).

La deformación de los paneles puede considerarse para cualquier maniobra como simétrica o antisimétrica. Esta segunda opción es la desarrollada en esta tesis, debido a que es la deformación que se presenta en una maniobra de actitud. La Figura 4.11 muestra de forma simple la posible deformación tanto para el caso simétrico como para el antisimétrico.



Figura 4.11: Deformación de los Paneles: Simétrica y Antisimétrica.

Las frecuencias propias de los modos que pueden aparecer en el sistema están relacionadas con los modos orbitales o rígidos y los modos flexibles. Es interesante conocer su magnitud, con el objeto de identificar estas frecuencias posteriormente en el análisis de la autoestructura en lazo abierto y cerrado y hacer corresponder los autovectores con los autovalores del sistema. Las frecuencias se presentan en la Figura 4.12.

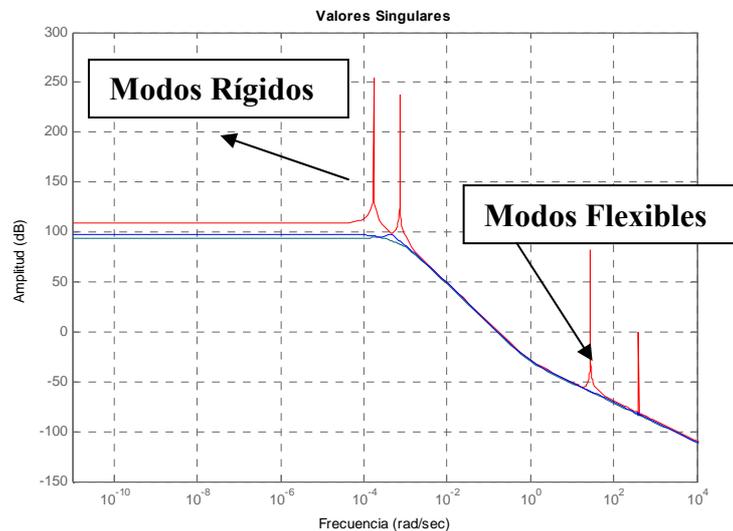


Figura 4.12: Frecuencias Naturales de los Modos Rígidos y Modos Flexibles.

4.9.3. ENERGÍA CINÉTICA DE DEFORMACIÓN

La energía cinética del panel deformado tiene dos componentes, la dedicada a la flexión del panel y la que se obtiene por torsión del mismo.

4.9.3.1. FLEXIÓN DE LOS PANELES

Se considera que el panel solar se va a deformar según una función de forma de flexión definida por la función $\phi(\xi)$, siendo ξ la distancia entre la unión del panel con el cuerpo del satélite, y la de un elemento de masa del panel solar. Por tanto, el desplazamiento por flexión de una sección del panel viene dado por la expresión:

$$w_i(\xi, t) = \left(\xi + \frac{a}{2} \right) \phi(t) + q_i(t) \phi(\xi) \quad (4.58)$$

La Figura 4.13 muestra de forma gráfica la deformación elástica debida a flexión.

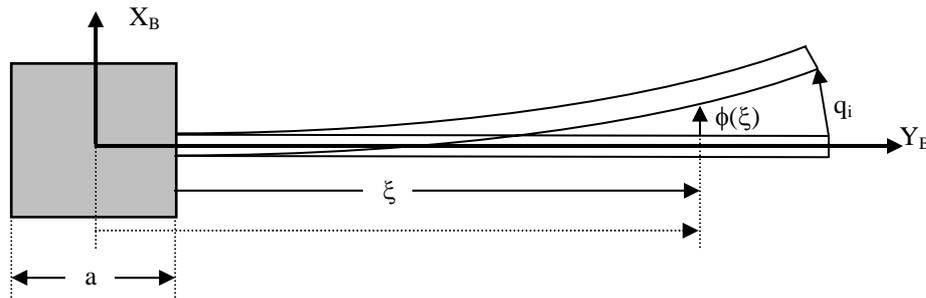


Figura 4.13: Deformación del Panel Solar Debida a Flexión.

La energía cinética debida a flexión de los paneles se expresa mediante:

$$E_{C_Flexion} = \frac{1}{2} \int_0^l \mu_i (\dot{w}_i(\xi, t))^2 d\xi \quad (4.59)$$

siendo μ_i la masa por unidad de longitud según el eje Y_B del panel i-ésimo, y $\dot{w}_i(\xi, t)$ la velocidad de una sección del panel. Desarrollando la expresión de la energía cinética del panel para su flexión:

$$\begin{aligned}
E_{C_Flexion} &= \frac{1}{2} \int_0^l \mu_i \left(\left(\xi + \frac{a}{2} \right) \dot{\phi}(t) + \dot{q}_i(t) \phi(\xi) \right)^2 d\xi = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^l \mu_i \left(\left(\xi + \frac{a}{2} \right) \dot{\phi}^2(t) + \dot{q}_i^2(t) \phi^2(\xi) + 2\dot{\phi}(t) \dot{q}_i(t) \left(\xi + \frac{a}{2} \right) \phi(\xi) \right) d\xi = \\
&= \frac{1}{2} \dot{\phi}^2(t) \int_0^l \mu_i \left(\xi + \frac{a}{2} \right)^2 d\xi + \frac{1}{2} \dot{q}_i^2(t) \int_0^l \mu_i \phi^2(\xi) d\xi + \frac{1}{2} 2\dot{\phi}(t) \dot{q}_i(t) \int_0^l \mu_i \left(\xi + \frac{a}{2} \right) \phi(\xi) d\xi = \\
&= \frac{1}{2} \dot{\phi}^2(t) I_{zi} + \frac{1}{2} \dot{q}_i^2(t) m_i + \dot{\phi}(t) \dot{q}_i(t) Q_{zi}
\end{aligned}$$

(4.60)

En esta expresión existen términos identificados de la siguiente forma:

$m_i = \int_0^l \mu_i \phi^2(\xi) d\xi$; representa la masa generalizada asociada a la flexión del panel i -ésimo.

$I_{xi} = \int_0^l \mu_i \left(\xi + \frac{a}{2} \right)^2 d\xi$; es el momento de inercia másico del panel con respecto al X_B .

$Q_{xi} = \int_0^l \mu_i \left(\xi + \frac{a}{2} \right) \phi(\xi) d\xi$; es el momento generalizado de primer orden del panel con respecto al eje X_B del satélite.

Representando la energía cinética del panel en forma matricial, se obtiene la expresión:

$$E_{C_Flexion} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\phi} & \dot{q}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xi} & Q_{xi} \\ Q_{xi} & m_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{q}_i \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

4.9.3.2. TORSIÓN DE LOS PANELES SOLARES

Del mismo modo en que se ha procedido a la obtención de la energía cinética por flexión de los paneles solares, se procede para las deformaciones debidas a torsión. En realidad, este tipo de deformación existe, y lleva asociada una función de forma $\psi(\xi)$, con lo que un desplazamiento alrededor del eje Z_B de un punto del panel solar situado en las coordenadas $y = 0, \xi + \frac{a}{2}, z$ estará definido por:

$$v \left(0, \xi + \frac{a}{2}, z, t \right) = -(\theta + \psi(\xi) r_i(t)) \quad (4.62)$$

Donde aparecen las nuevas coordenadas generalizadas asociadas a torsión $r_i(t)$. El efecto de torsión sobre los paneles aparece al realizar la maniobra de cabeceo, es decir cualquier giro alrededor del eje Y_B . La Figura 4.14 muestra esta deformación.

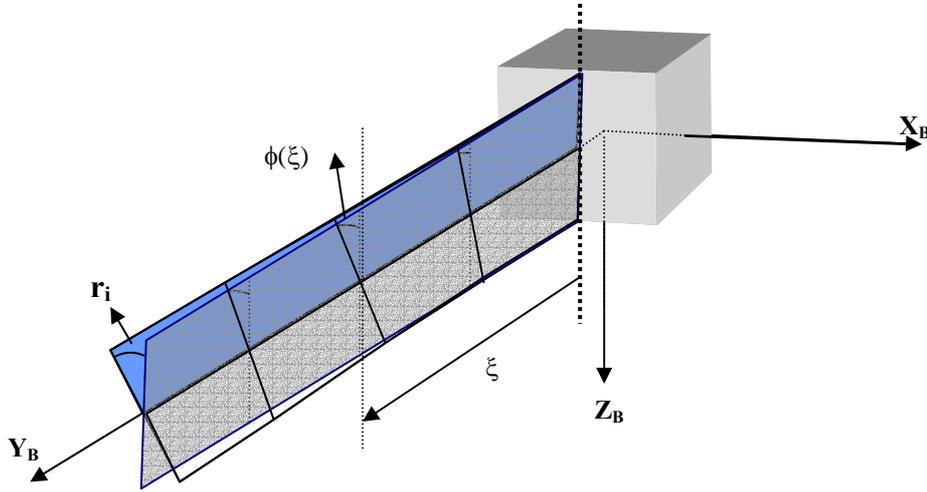


Figura 4.14: Deformación del Panel Debida a Torsión.

La energía cinética, asociada a los paneles i -ésimos es:

$$E_{C_Torsion} = \frac{1}{2} \int_0^l \int_x \rho \dot{v} \left(x, \xi + \frac{a}{2}, t \right)^2 b(\xi, x) dx d\xi = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\int_x \rho \left(-(\dot{\theta} + \psi(\xi) \dot{r}_i(t)) x \right)^2 b(\xi, x) dx \right] d\xi \quad (4.63)$$

Aparece en esta expresión el término ρ , que representa la densidad másica del panel. El término $b(\xi, x)$ es la ley de espesores de una sección genérica del panel solar definida por su coordenada ξ a una distancia x del eje de simetría del panel. La ley de espesores considera que el espesor de los paneles permanece constante. Desarrollando la expresión anterior se obtiene:

$$\begin{aligned}
E_{C_Torsion} &= \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \int_0^l \left[\int_z \rho b(\xi, z) z^2 dz \right] d\xi + \frac{1}{2} \dot{r}_i^2 \int_0^l \left[\int_z \rho b(\xi, z) z^2 dz \right] \psi^2(\xi) d\xi + \\
&+ 2 \frac{1}{2} \dot{\theta} \dot{r}_i \int_0^l \left[\int_z \rho b(\xi, z) \psi(\xi) z dz \right] d\xi = \frac{1}{2} I_{Y_i} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_{Y_i} \dot{r}_i^2 + Q_{Y_i} \dot{\theta} \dot{r}_i
\end{aligned}$$

$$(4.64)$$

Se observa que la energía cinética de torsión depende del momento de inercia I_{Y_i} , del momento de inercia generalizado J_{Y_i} , y del momento de primer orden Q_{Y_i} , todos aplicables al panel i -ésimo alrededor del eje Y_B . Estos momentos matemáticamente desarrollados se expresan de la forma:

$$I_{Y_i} = \int_0^l \left[\int_z \rho b(\xi, z) z^2 dz \right] d\xi \quad (4.65)$$

$$J_{Y_i} = \int_0^l \left[\int_z \rho b(\xi, z) z^2 dz \right] \psi^2(\xi) d\xi \quad (4.66)$$

$$Q_{Y_i} = \int_0^l \left[\int_z \rho b(\xi, z) \psi(\xi) z dz \right] d\xi \quad (4.67)$$

La energía cinética de torsión expresada en forma matricial queda como:

$$E_{C_Torsion} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\theta} & \dot{r}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{Y_i} & Q_{Y_i} \\ Q_{Y_i} & J_{Y_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{r}_i \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

4.9.3.3. ENERGÍA CINÉTICA TOTAL

Las contribuciones a la energía cinética total procedentes de la rotación del vehículo, de la deformación por flexión y la deformación por torsión se expresan en forma matricial por las ecuaciones (4.69) y (4.70):

$$E_{C_total} = \begin{bmatrix} \phi & \theta & \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\phi} & \dot{q}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{X_i} & Q_{X_i} \\ Q_{X_i} & m_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{q}_i \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\theta} & \dot{r}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{Y_i} & Q_{Y_i} \\ Q_{Y_i} & J_{Y_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{r}_i \end{bmatrix}$$

$$(4.69)$$

$$E_{C_total} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} & \dot{\theta} & \dot{\psi} & \dot{q}_1 & \dot{r}_1 & \dot{q}_2 & \dot{r}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_X + I_{X1} + I_{X2} & 0 & 0 & Q_{X1} & 0 & Q_{X2} & 0 \\ 0 & I_Y + I_{Y1} + I_{Y2} & 0 & 0 & Q_{Y1} & 0 & Q_{Y2} \\ 0 & 0 & I_Z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_{X1} & 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{Y1} & 0 & 0 & J_{Y1} & 0 & 0 \\ Q_{X2} & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & Q_{Y2} & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{Y2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{q}_1 \\ \dot{r}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{r}_2 \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

4.9.4. ENERGÍA POTENCIAL

La energía potencial elástica, también denominada energía de deformación, depende tanto de la forma de los paneles solares como del material del que están contruidos. Se considera, a efectos de modelado matemático, que el material empleado en la fabricación de los paneles es homogéneo y se encuentra uniformemente distribuido.

La energía potencial para la parte rígida del sistema se considera nula a todos los efectos, por no estar sometido a deformación alguna.

Debido a las deformaciones supuestas para los paneles, es necesario calcular la energía de deformación debida a flexión y la debida a torsión.

4.9.4.1. ENERGÍA DE DEFORMACIÓN DEBIDA A FLEXION DE LOS PANELES

La energía de deformación considera la misma ley de desplazamientos $w_i(\xi, t)$ que para la energía cinética. Bajo esta condición la energía de deformación a flexión viene dada por:

$$E_{D_Flexion} = \frac{1}{2} \int EI_X \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right)^2 d\xi \quad (4.71)$$

siendo E el módulo de elasticidad (Módulo de Young), e \bar{I}_X el momento de inercia estático de la sección del panel con respecto al eje X_B . Desarrollando para la ley de desplazamientos se observa la dependencia de las coordenadas generalizadas q_i .

$$E_{D_Flexion} = \frac{1}{2} q_i^2 \int EI_X (\phi''(\xi))^2 d\xi$$

4.9.4.2. ENERGÍA DE DEFORMACIÓN DEBIDA A TORSIÓN DE LOS PANELES

El efecto de torsión también produce una energía de deformación para el giro de torsión θ_T , dado por:

$$E_{D_Torsión} = \frac{1}{2} \int GK \left(\frac{\partial \theta_T}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \quad (4.72)$$

En esta energía K es la constante de rigidez de Poisson, que depende de la sección, y G es el módulo de rigidez a cortadura, que por definición se expresa para el módulo de Poisson $\nu = 0.3$ como [2002, Timosenko]:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.73)$$

Considerando una ley de giros de ángulos pequeños y un factor de forma $\psi(\xi)$, se calcula la energía potencial:

$$\theta_T = (\theta + \psi(\xi)r_i(t)) \quad (4.74)$$

$$E_{D_Torsión} = \frac{1}{2} r_i^2 \int GK (\psi'(\xi))^2 d\xi \quad (4.75)$$

4.9.4.3. ENERGÍA TOTAL DE DEFORMACIÓN

La energía total de deformación está dada por las contribuciones de flexión y torsión.

$$E_{D_Total} = \sum_{i=1}^2 \left[\frac{1}{2} q_i^2 \int EI_x (\phi''(\xi))^2 d\xi + \frac{1}{2} r_i^2 \int GK (\psi'(\xi))^2 d\xi \right] = \sum_{i=1}^2 \left[\frac{1}{2} K_{Fi} q_i^2 + \frac{1}{2} K_{Ti} r_i^2 \right] \quad (4.76)$$

Aparecen en esta energía los términos de rigidez generalizada a flexión y de rigidez generalizada de torsión:

$$K_{Fi} = \int EI_x (\phi''(\xi))^2 d\xi \quad (4.77)$$

$$K_{Ti} = \int GK (\psi'(\xi))^2 d\xi$$

La energía total de deformación expresada en forma matricial es:

$$E_{C_total} = \begin{bmatrix} \phi & \theta & \psi & q_1 & r_1 & q_2 & r_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{F1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{T1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{F2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{T2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \\ q_1 \\ r_1 \\ q_2 \\ r_2 \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

4.9.5. FUERZAS GENERALIZADAS

Las fuerzas generalizadas Q_{nc} consideradas son de carácter no conservativo, y son aquellas producidas por los actuadores. De forma adicional a estas, se encuentran las producidas por las perturbaciones exteriores, que son función de la órbita. Entre estas se encuentran las perturbaciones aerodinámicas, las magnéticas y solares. Las fuerzas generalizadas se modelan de la siguiente forma:

$$Q_{nc} = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \\ 0_{(n-m)} \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

Las perturbaciones se encuentran integradas en la acción de los pares T de la forma:

$$T = T_c + T_{mag} + T_{aero} \quad (4.80)$$

Las fuerzas internas ejercidas por los actuadores se denominadas T_c .

4.9.6. ECUACIONES LINEALIZADAS DEL MOVIMIENTO

La obtención de las ecuaciones linealizadas del movimiento permitirá obtener la ecuación de primer orden a partir de la que se desarrollará el diseño del control. Esta ecuación del movimiento se obtiene a partir de las energías cinética y potencial, aplicando el principio de Hamilton, y para unas fuerzas generalizadas conocidas. Reescribiendo la ecuación (4.48):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial L}{\partial u} = Q_{nc}$$

La actitud del satélite está descrita por los ángulos de rotación y por los desplazamientos elásticos, conforme al vector de coordenadas generalizadas (4.53):

$$\mathbf{u} = [\phi \quad \theta \quad \psi \quad q_1 \quad r_1 \quad q_2 \quad r_2]^T$$

y por las coordenadas de velocidad:

$$\dot{\mathbf{u}} = [\dot{\phi} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\psi} \quad \dot{q}_1 \quad \dot{r}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{r}_2]^T \quad (4.81)$$

Con lo que el cálculo de los elementos de la ecuación del movimiento son los siguientes:

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} - \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} = \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} = \frac{\partial \mathbf{T}_{Rig}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} + \frac{\partial \mathbf{T}_{Flex}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} = f(\phi \quad \theta \quad \psi \quad \omega_0 \quad I \quad Q_{xi} \quad Q_{yi} \quad m_i \quad J_{Yi}) \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} = 0 \end{cases} \quad (4.82)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} = \frac{d}{dt} f = f'(\phi \quad \theta \quad \psi \quad \omega_0 \quad I \quad Q_{xi} \quad Q_{yi} \quad m_i \quad J_{Yi}) \quad (4.83)$$

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{u}} - \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{T}_{Rig}}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial \mathbf{T}_{Flex}}{\partial \mathbf{u}} = f(\phi \quad \theta \quad \psi \quad \omega_0 \quad I \quad Q_{xi} \quad Q_{yi} \quad m_i \quad J_{Yi}) \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{u}} = f(\phi \quad \omega_0 \quad K_{Fi} \quad K_{Ti}) \end{cases} \quad (4.84)$$

Reagrupando todos los términos se llega a la ecuación del segundo orden del movimiento del satélite siguiente dada por (4.84), ver anexo II:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{Q}_{nc} \quad (4.85)$$

Desarrollando los términos obtenidos para el Lagrangiano, y expresado en forma matricial se obtienen las matrices de masa generalizada \mathbf{M} , giroscópica \mathbf{G} y de rigidez \mathbf{K} siguientes:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} I & Q_{\beta\eta} \\ Q_{\beta\eta} & Q_{\eta\eta} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} T_{GG} & 0 \\ 0 & K_{\eta\eta} \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} I_X + I_{X2} + I_{X2} & 0 & 0 & Q_{X1} & 0 & Q_{X2} & 0 \\ 0 & I_Y + I_{Y1} + I_{Y2} & 0 & 0 & Q_{Y1} & 0 & Q_{Y2} \\ 0 & 0 & I_Z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_{X1} & 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{Y1} & 0 & 0 & J_{Y1} & 0 & 0 \\ Q_{X2} & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & Q_{Y2} & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{Y2} \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_Y - I_Z - I_X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I_X + I_Z - I_Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.88)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 4\omega_0^2 (I_Y - I_Z) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3\omega_0^2 (I_X - I_Z) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_0^2 (I_Y - I_X) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{F1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{T1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{F2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{T2} \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

Luego la ecuación (4.85) se expresa en forma matricial desarrollada:

$$\begin{bmatrix}
I_x + I_{x2} + I_{x2} & 0 & 0 & Q_{x1} & 0 & Q_{x2} & 0 \\
0 & I_y + I_{y1} + I_{y2} & 0 & 0 & Q_{y1} & 0 & Q_{y2} \\
0 & 0 & I_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\
Q_{x1} & 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & Q_{y1} & 0 & 0 & J_{y1} & 0 & 0 \\
Q_{x2} & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 \\
0 & Q_{y2} & 0 & 0 & 0 & J_{y2} & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\dot{\phi} \\
\dot{\theta} \\
\dot{\psi} \\
\dot{q}_1 + \omega_0 \\
\dot{r}_1 \\
\dot{q}_2 \\
\dot{r}_2
\end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
0 & 0 & I_y - I_z - I_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
I_x + I_z - I_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\phi \\
\theta \\
\psi \\
q_1 \\
r_1 \\
q_2 \\
r_2
\end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
4\omega_0^2(I_y - I_z) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 3\omega_0^2(I_x - I_z) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \omega_0^2(I_y - I_x) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & K_{r1} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & K_{r1} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{r2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{r2}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\phi \\
\theta \\
\psi \\
q_1 \\
r_1 \\
q_2 \\
r_2
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
Q_x \\
Q_y \\
Q_z \\
0 \\
0 \\
0 \\
0
\end{bmatrix}$$

$$(4.90)$$

La contribución de los elementos de la matriz \mathbf{M} procede de la energía cinética del vehículo rígido, junto con las energías cinéticas debidas a flexión y a torsión de los paneles solares. La matriz giroscópica \mathbf{G} aporta las contribuciones debidas a la rotación del satélite en su órbita, y por último la matriz de rigidez \mathbf{K} introduce las contribuciones debidas a rigidez de los paneles solares.

La ecuación dinámica anterior, puede ser escrita haciendo uso del teorema de Euler, haciendo la hipótesis de pequeñas deformaciones y acoplada con los efectos flexibles de los paneles:

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}\dot{\omega} + \boldsymbol{\delta}^T \ddot{\boldsymbol{\eta}} &= -\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\delta}^T \dot{\boldsymbol{\eta}}) + \mathbf{T} \\
\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{C}'\dot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\eta} &= \boldsymbol{\delta}^T \dot{\boldsymbol{\omega}}
\end{aligned}
\tag{4.91}$$

Las matrices \mathbf{C}' y $\boldsymbol{\kappa}$ representan amortiguamiento y rigidez de los elementos flexibles, el vector de coordenadas modales es $\boldsymbol{\eta} = [q_1 \ r_1 \ q_2 \ r_2]$, y la matriz $\boldsymbol{\delta}$ es el acoplamiento entre las estructuras flexible y rígida, que en forma matricial es:

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} Q_{x1} & Q_{y1} \\ Q_{x2} & Q_{y2} \end{bmatrix}
\tag{4.92}$$

En el anexo II se desarrolla el cálculo completo del lagrangiano.

4.9.7. AMORTIGUAMIENTO DEL SISTEMA

A lo largo del desarrollo del lagrangiano no se ha mencionado el material del que están formados los paneles solares. Intrínsecamente hablando, el material dispondrá de cierto amortiguamiento que se debe incluir en el modelo matemático. De forma adicional a esto, se pueden introducir ciertos elementos que actúen como amortiguadores de la deformación. Estas hipótesis han de aparecer matemáticamente en la formulación lagrangiana, concretamente en la matriz de giroscópica \mathbf{G} [1998, Bong Wie].

4.10. SÍNTESIS DE CONTROL

El modelo matemático desarrollado bien para el modelo rígido completo o para el modelo rígido con elementos flexibles desarrollado mediante lagrangiano, forma un conjunto de ecuaciones integro diferenciales que sirven para determinar la ecuación de primer orden en la formulación de espacio de estados de un sistema lineal invariante en el tiempo, que se utilizará para el diseño del controlador.

El objetivo pretendido es caracterizar el comportamiento dinámico del sistema como un sistema lineal. A partir de la ecuación de segundo orden del movimiento del satélite, ecuación (4.84):

$$M\ddot{u} + G\dot{u} + Ku = Q_{nc}$$

La ecuación definida en espacio de estados es la siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= A\bar{x} + B\bar{u} \\ \bar{y} &= C\bar{x} + D\bar{u}\end{aligned}\quad (4.93)$$

La transformación que tiene lugar para el cálculo de las matrices de estado A y de control B es de la siguiente forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_{n \times n} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}G \end{bmatrix}\quad (4.94)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \begin{bmatrix} 0_{(n-m) \times m} \\ I_m \end{bmatrix} \end{bmatrix}\quad (4.95)$$

$$C = [I]\quad (4.96)$$

$$D = [0]\quad (4.97)$$

La definición del vector de espacio de estado incluye a los elementos de posición dado por los ángulos de Euler junto con las coordenadas generalizadas de los movimientos de flexión y torsión de los paneles. El segundo conjunto de elementos del vector de estado son las velocidades:

$$\bar{x}(t) = [\phi \quad \theta \quad \psi \quad q_1 \quad r_1 \quad q_2 \quad r_2 \quad \dot{\phi} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\psi} \quad \dot{q}_1 \quad \dot{r}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{r}_2]^T\quad (4.98)$$

Al obtener los valores numéricos de las matrices de estado y control, se obtienen lo que se denomina matrices pobremente condicionadas, o mal condicionadas (ill conditioned matrix). Esto es debido a los valores extremadamente pequeños en algunos casos, y altos comparativamente hablando para el resto, en los elementos de estas matrices. Esta circunstancia produce un número de condición demasiado elevado. Con el propósito de mejorar el condicionamiento de la matriz, y realizar simulaciones, existen propuestas de multiplicar estas matrices por una constante para disminuir el número de condición [2007, Rahnamai]. Los sistemas mal condicionados conducen a la existencia de una alta dependencia entre las salidas del sistema y la dirección que toman las entradas. Concretamente podría traducirse en actuaciones conjuntas de las entradas para obtener una salida determinada [1994, Jacobsen].

Además de esto, el análisis del sistema muestra cierta redundancia de estados. Exactamente, los estados debidos a flexión y torsión aparecen duplicados por el efecto de considerar ambos paneles solares. Por ello, se ha trabajado con un sistema considerado mínimo, que respecto del original ha prescindido de los estados de flexión y torsión, y de sus velocidades para el panel número dos. De este modo el número de estados se ha reducido de 14 a 10 estados, siendo el vector de estado el siguiente:

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = [\phi \quad \theta \quad \psi \quad q_1 \quad r_1 \quad \dot{\phi} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\psi} \quad \dot{q}_1 \quad \dot{r}_1]^T \quad (4.99)$$

4.11. MODELO NO LINEAL

Como cualquier sistema mecánico, un satélite orbitando está sometido a perturbaciones de carácter interno y externo. Estas últimas de cierta importancia en función de la órbita, en función de la posición en la misma, y en función de la forma y tamaño del vehículo, como ya ha sido mencionado. Esto conduce a un proceso de inestabilidad que crea rotaciones arbitrarias alrededor de ejes no determinados, y que impiden desarrollar la función para la que ha sido diseñado el satélite. Del conocimiento de las perturbaciones, y de los momentos que se inducen sobre el satélite se puede obtener el grado de estabilidad del vehículo y por tanto la precisión en los apuntamientos requerido a los instrumentos y sistemas de abordó.

El conjunto de ecuaciones del modelo no lineal está formado por cinco ecuaciones diferenciales que relacionan todos los ángulos de Euler con las deformaciones debidas a flexión y torsión de los paneles solares. En este conjunto de ecuaciones diferenciales se ponen de manifiesto productos angulares, productos cruzados entre ángulos, velocidades angulares y aceleraciones angulares. Sin realizar ninguna consideración debida a ángulos pequeños que nos llevaría a un proceso de linealización básico, se estudia el modelo con las características mencionadas. La resolución de las ecuaciones diferenciales del modelo no lineal ha sido realizada con Simulink, ver anexo III. El proceso de simulación permite conocer de forma analítica los valores obtenidos tanto para los ángulos de Euler como para las deformaciones. El conjunto de ecuaciones diferenciales del sistema no lineal se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}} &= f(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}, t) \\ \bar{\mathbf{u}} &= g(\bar{\mathbf{x}}, t) \end{aligned} \quad (4.100)$$

donde f representa un vector de la función no lineal, \bar{x} es el vector de estado y \bar{u} es la acción de control. Un valor particular del vector de estado es denominado un punto, ya que se corresponden a un punto en el espacio de estados. La solución para $x(t)$ se corresponde con una curva en el espacio de estados, ya que t varía desde cero hasta infinito. Como se ha mostrado, el sistema dinámico desarrollado en este capítulo permite relacionar mediante el conjunto de ecuaciones diferenciales las velocidades angulares del sistema con las deformaciones del mismo por medio de la expresión (4.91). Por lo tanto, el modelo no lineal queda resuelto obteniendo los valores de las velocidades angulares y las deformaciones. Este resultado introducido en la ecuación cinemática permite obtener la actitud del satélite. A partir del modelo no lineal se considera el problema de regulación mediante realimentación de la salida. El objetivo es mantener la salida del sistema próxima a un punto de equilibrio. Con ello el problema se convierte en un problema de estabilización o de regulación. De forma adicional, el sistema de control ha de disponer de cierta tolerancia a perturbaciones, para mantener la actitud deseada. De esta forma, el sistema se convierte en un sistema insensible a perturbaciones. La incertidumbre en el modelado se caracteriza con una perturbación del modelo nominal que dará origen al modelo necesario para calcular la robustez del sistema.

La Figura 4.15 muestra el proceso entre los modelos matemáticos desarrollados para el cálculo de la ley de control. El modelo lineal se utiliza para el diseño del controlador, y el no lineal se utiliza para validar el controlador y comprobar su efectividad sobre el sistema “real”.

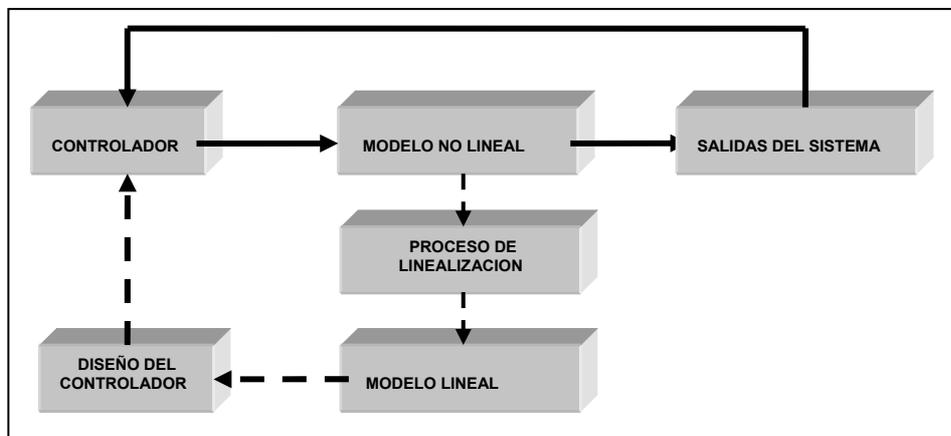


Figura 4.15: Proceso de Diseño del Controlador con los Modelos Matemáticos Lineal y No Lineal.

4.11.1. DETERMINACIÓN DE LA ESTABILIDAD DEL SISTEMA

El concepto de estabilidad relacionado con la actitud del satélite está focalizado en la estabilidad alrededor del punto de equilibrio. El punto de equilibrio es un estado en el que el sistema permanecería a largo plazo si no fuera perturbado por una acción

exterior. El modelo linealizado se utiliza para aproximar el sistema no lineal al punto de equilibrio. El sistema lineal resultante del proceso de linealización tiene un punto de equilibrio en el cero que se corresponde con el punto de equilibrio del sistema no lineal.

El problema de mantenimiento de la actitud hacia un punto determinado sobre la superficie terrestre, con el vehículo considerado flexible por el efecto de los paneles solares, puede plantearse como un problema de regulación sobre los ángulos de actitud hacia la mencionada referencia. En el caso de paneles solares flexibles, han de tenerse en cuenta los requisitos de supresión de la vibración. Matemáticamente estas ideas pueden concentrarse en lo siguiente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta = 0; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \vec{\omega} = 0; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \eta = 0; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\eta} = 0$$

Donde $\beta = [\phi, \theta, \psi]$ son los ángulos de actitud, $\vec{\omega} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$ son las velocidades angulares y las deformaciones de los paneles solares están dadas por η .

El sistema linealizado estará dado por la expresión:

$$\dot{\vec{x}} = f(\vec{x}, \vec{u}, t) = \mathbf{A}\vec{x}(t) + \mathbf{B}\vec{u}(t)$$

El desarrollo lineal se obtiene desarrollando en serie de Taylor la dinámica no lineal para cada una de las ecuaciones del sistema. Los puntos de equilibrio se obtienen igualando a cero la dinámica no lineal, y resolviendo para los estados del sistema:

$$\dot{\vec{x}} = f(\vec{x}, \vec{u}, t) = 0$$

Ha de tenerse en cuenta que la acción de control en el punto de equilibrio es cero, esto es, no existe actuación por parte de las ruedas de reacción, expresándose matemáticamente como:

$$\vec{u}_e(t) = 0$$

4.11.2. EFECTO DE LOS MOMENTOS DE INERCIA SOBRE LA ESTABILIDAD

En satélites desarrollando una órbita LEO el efecto de la gravedad puede ser utilizado para estabilizar el satélite mediante técnicas pasivas, o por el contrario puede representar una perturbación de carácter importante debido a la proximidad a la superficie terrestre, para satélites estabilizados en tres ejes. En cualquiera de los casos se manifiesta cierta repercusión, por lo que la configuración de la plataforma puede resultar determinante sobre la estabilidad.

En el diseño del satélite ha de tenerse en cuenta la aportación de los momentos de inercia del satélite debidos a la configuración del mismo, y que está relacionada con la posición de los equipos, con la forma externa del satélite, con la posición de los elementos adosados al bus principal, como son los paneles solares y antenas.

En un satélite controlado en tres ejes ha de tenerse en cuenta la relación de momentos de inercia para garantizar cierta estabilidad sobre el punto de operación, lo que garantizaría acciones de control limitadas. En caso contrario serían requeridas acciones de control continuas sobre el punto de equilibrio solicitado.

La relación de momentos de inercia que permiten obtener condiciones de estabilidad adecuadas están dadas en la Tabla 4.4.

Estabilidad	Relación de Momentos de Inercia	Condiciones de Estabilidad
Eje Y_B	$I_x > I_z$	$T_{Dy}=0$; Estable
		$T_{Dy} \neq 0$; Movimiento oscilatorio estable sobre Y_B
Plano $X_B - Z_B$	$I_x < I_y + I_z$	Estable
	$I_y > I_x > I_z$	
	$I_x > I_z > I_y$	Estable
	$I_x < I_y + I_z$	

Tabla 4.4: Relación de momentos de inercia para obtener condiciones de estabilidad.

Un ejemplo típico de oscilación mantenida debida a los valores de los momentos de inercia, es el que se produce sobre el de cabeceo, representado en la Figura 4.16. Este tipo de oscilación impediría adquirir la actitud deseada, perdiendo el apuntamiento de cualquier instrumento instalado a bordo.

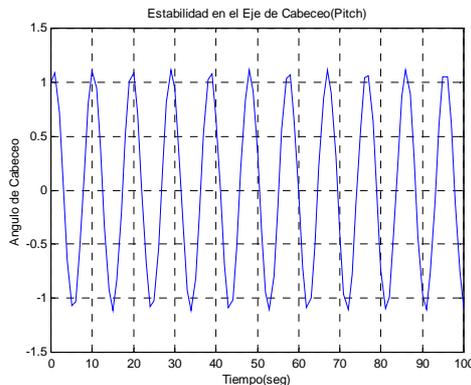


Figura 4.16: Oscilación sobre el eje de cabeceo en condiciones $I_x > I_z$.

A medida que crece la diferencia entre los momentos de inercia I_x e I_z se disminuye el error cometido por la acción de cabeceo tal y como muestra Figura 4.17.

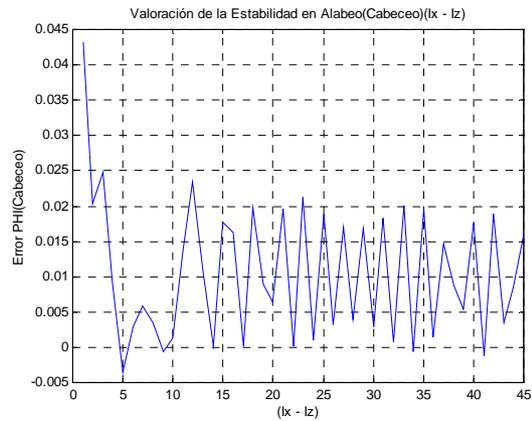


Figura 4.17: Disminución del error con el aumento de la diferencia en los momentos de inercia I_x e I_z .

Respecto del error cometido con la diferencia entre I_y e I_z , se muestra en la Figura 4.18.

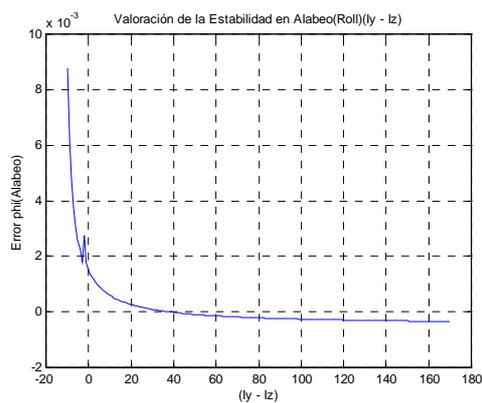


Figura 4.18: Error cometido en cabeceo debido a la diferencia entre los momentos de inercia I_y e I_z .

4.12. ANÁLISIS DEL SISTEMA NO LINEAL EN LAZO ABIERTO

La evaluación del sistema no lineal en lazo abierto permitirá conocer si el sistema es estable o no bajo ciertas condiciones de apuntamiento. A partir de la información suministrada del análisis del plano de fase para el sistema en lazo abierto, se puede determinar la estabilidad del sistema. Estos datos serán correspondidos con el análisis que se realice al modelo linealizado para el punto de operación, por medio de la posición que ocupen los autovalores del sistema en el plano complejo. Así mismo, se podrá identificar cada autovalor del sistema con los modos dinámicos.

4.12.1. ESTUDIO EN EL PLANO DE FASE

Mediante el método gráfico del plano de fase [1991, Slotine], permite generar el movimiento de diversas trayectorias correspondientes al espacio de estados de un sistema de segundo orden y para diferentes condiciones iniciales. Con estas gráficas es posible determinar la estabilidad y otras características del movimiento por medio de un sistema gráfico simple [1986, Junkins]. Desde la perspectiva del sistema se analizan los resultados para el movimiento de alabeo, cabeceo y guiñada del sistema en lazo abierto. Así mismo, se analizan las velocidades angulares por el mismo método. El modelo no lineal utilizado es el correspondiente al que se presenta en el anexo III, desarrollado en Simulink.

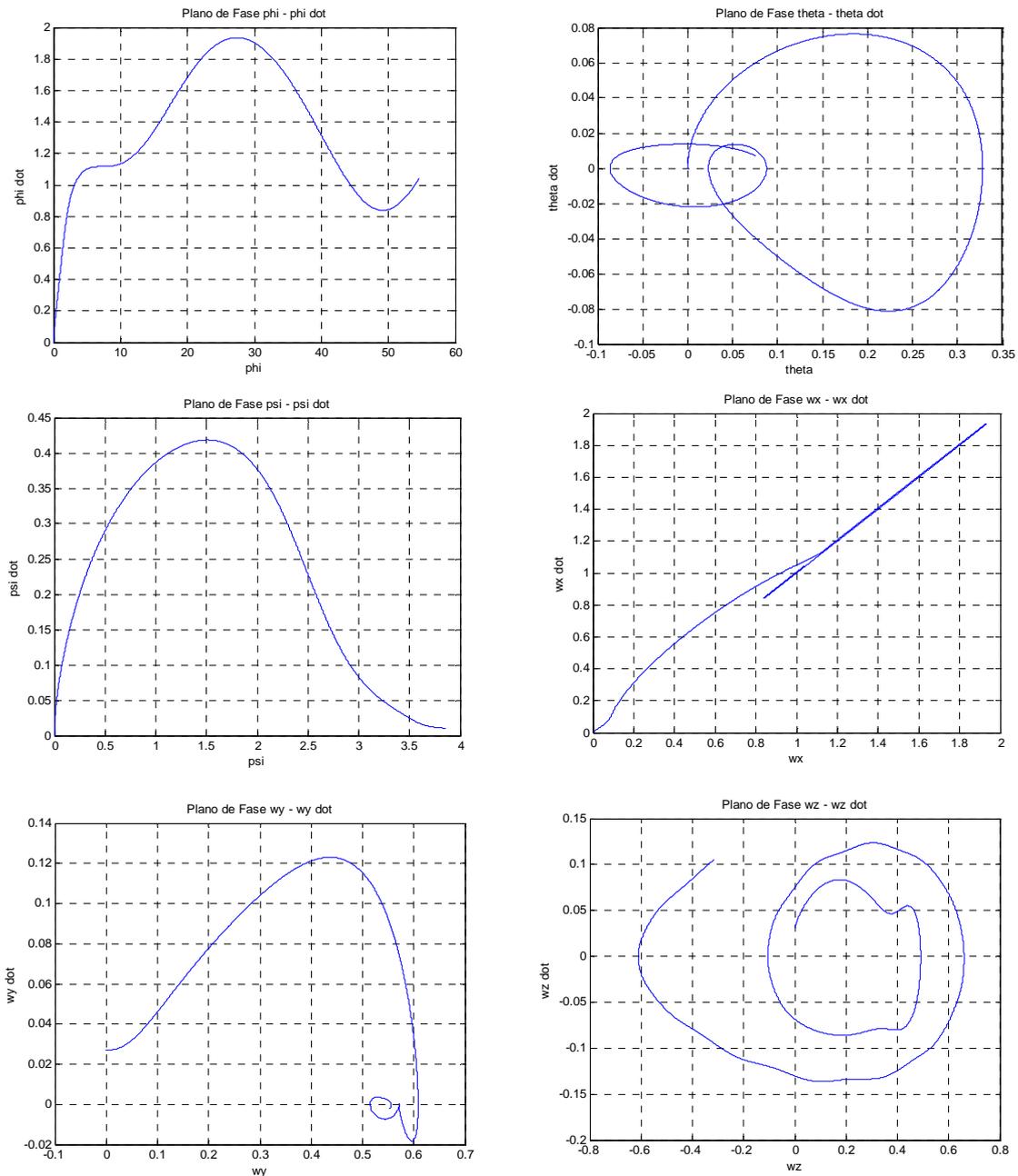


Figura 4.19: Diagrama de Fase de los Movimientos Angulares y de las Velocidades Angulares.

La Figura 4.19 muestra los resultados del análisis en el plano de fase. Respecto de los movimientos angulares, alabeo y guiñada, los diagramas de fase muestran un comportamiento inestable. Este comportamiento que afecta a los movimientos de alabeo y guiñada se sustenta en el acoplamiento existente entre ambos. Para el movimiento de cabeceo, el diagrama muestra cierto grado de estabilidad. Este movimiento se encuentra ligeramente acoplado con los otros dos en el modelo no lineal. Esto demuestra que el sistema es marginalmente estable.

Los diagramas de fase correspondientes a las velocidades angulares muestran un comportamiento inestable para el sistema no lineal en lazo abierto, debido a la configuración del satélite y a la relación de momentos de inercia existentes. En la solución de los diagramas de fase las soluciones obtenidas se alejan de las soluciones nominales $\vec{x} = 0; \dot{\vec{x}} = 0$.

4.12.2. ANÁLISIS EN LAZO ABIERTO

Una aportación adicional al estudio ofrecido por medio de los diagramas de fase está constituido por las respuestas a excitación escalón para el sistema no lineal en lazo abierto. Este se excita con entrada escalón en cada una de las posibles entradas al sistema, es decir en alabeo, cabeceo y guiñada. Este tipo de ensayo también permite obtener información respecto del acoplamiento dinámico existente entre los ejes del sistema, y entre estos y las deformaciones de los paneles solares. La Figura 4.20 muestra una excitación de tipo escalón unitario en el eje de alabeo. Esto permitiría maniobrar el satélite alrededor de ese eje. Se observa la tendencia creciente del ángulo de alabeo y la repercusión sobre el ángulo de guiñada. El comportamiento para el ángulo de alabeo es errático. Comienza a seguir a la consigna después de transcurrido un tiempo demasiado elevado, tendiendo a estabilizarse en un valor no asignado.

Respecto del ángulo de cabeceo, se muestra una tendencia decreciente, que hace perder la referencia nominal. Esto es debido al ligero acoplamiento que existe entre los tres modos orbitales en el modelo no lineal.

Las deformaciones también se ven afectadas por la maniobra realizada. En particular la flexión de los paneles muestra una ligera deformación que se hace más elevada en el momento en que comienza a crecer el ángulo de alabeo. La deformación debida a torsión está relacionada con la deformación por cabeceo, por lo que en este tipo de maniobra es una deformación acoplada.

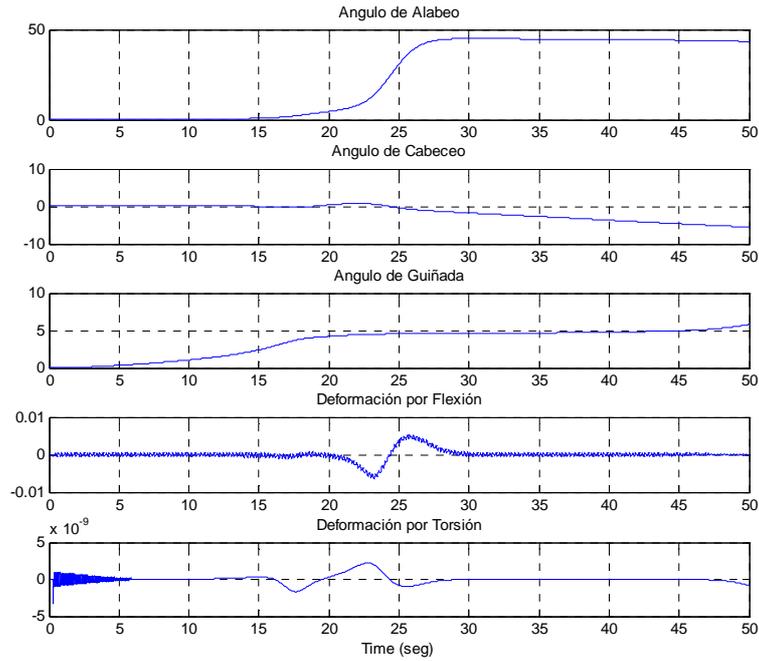


Figura 4.20: Excitación Escalón Unitario en el canal de alabeo para el Sistema en Lazo Abierto.

Un ensayo adicional del modelo no lineal en lazo abierto es el que se muestra en la Figura 4.21. Con el objetivo de comparar los resultados con la maniobra de alabeo, se realiza una maniobra de cabeceo.

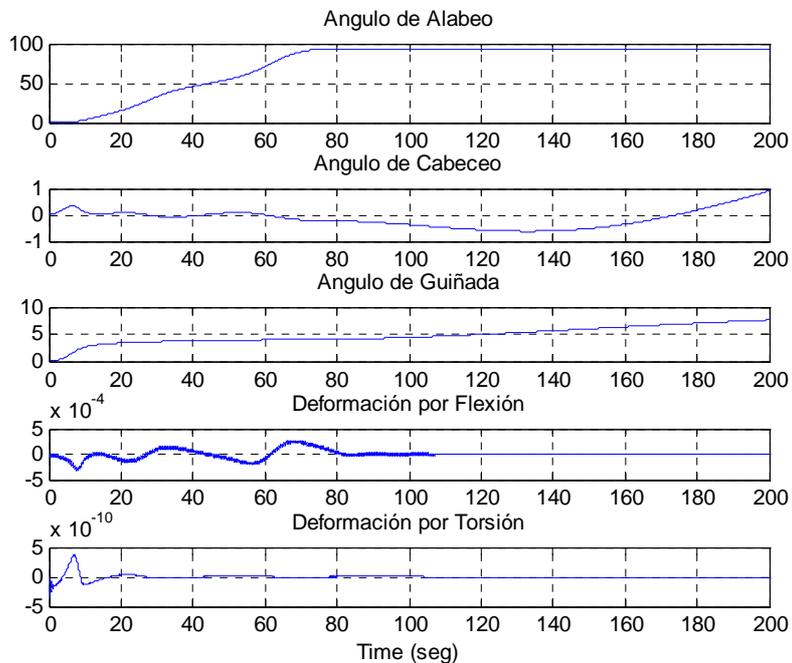


Figura 4.21: Excitación Escalón Unitario en el canal de cabeceo para el Sistema en Lazo Abierto.

Se concluye del sistema en lazo abierto que existe un grado de acoplamiento entre los modos del sistema, que se hace especialmente patente entre el alabeo y la guiñada. Así mismo, las deformaciones debidas a flexión se producen por las maniobras de guiñada o de forma inducida por las de alabeo. Las deformaciones debidas a torsión se deben a las maniobras sobre el eje de cabeceo, y en menor medida por el acoplamiento existente en el sistema no lineal con el resto de maniobras.

4.13. LINEALIZACIÓN DEL MODELO

El proceso de linealización del modelo se realizará por medio del desarrollo en serie de Taylor del sistema no lineal. La selección de los primeros términos del desarrollo representa el sistema linealizado:

$$f_i(\vec{x}, \vec{u}, t) = f_i(\vec{x}_e, \vec{u}_e, t_e) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \delta x_j; \quad i = 1 \dots n \quad (4.101)$$

La función descrita de forma general $f(\vec{x}, \vec{u}, t)$ se aplica al Lagrangiano del sistema sobre el punto de equilibrio:

$$L = L(\dot{\mathbf{u}}_e, \mathbf{u}_e)$$

Luego desarrollando en serie de Taylor el Lagrangiano para el punto de equilibrio $(\dot{\mathbf{u}}_e, \mathbf{u}_e)$ se obtiene:

$$L(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) = L(\dot{\mathbf{u}}_e, \mathbf{u}_e) + \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{u}}}(\dot{\mathbf{u}}_e, \mathbf{u}_e) \\ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}}(\dot{\mathbf{u}}_e, \mathbf{u}_e) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \delta \dot{\mathbf{u}} \\ \delta \mathbf{u} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \delta \dot{\mathbf{u}} \\ \delta \mathbf{u} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\mathbf{u}} \partial \dot{\mathbf{u}}}(\dot{\mathbf{u}}_e, \mathbf{u}_e) & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\mathbf{u}} \partial \mathbf{u}}(\dot{\mathbf{u}}_e, \mathbf{u}_e) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{u} \partial \dot{\mathbf{u}}}(\dot{\mathbf{u}}_e, \mathbf{u}_e) & \frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{u}}(\dot{\mathbf{u}}_e, \mathbf{u}_e) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \dot{\mathbf{u}} \\ \delta \mathbf{u} \end{bmatrix} + \dots \quad (4.102)$$

En esta expresión $\delta \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_e$, y $\delta \mathbf{q} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_e$ representan las diferencias entre un punto de trabajo cualquiera y el punto de operación definido, tanto para velocidad como para posición. Por aplicación del principio de Hamilton al Lagrangiano:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{u}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} = Q_{nc} \quad (4.103)$$

Introduciendo los valores obtenidos del desarrollo en serie de Taylor a la ecuación 4.11, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{u}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{u}}}(\dot{\mathbf{u}}_e, \mathbf{u}_e) + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\mathbf{u}} \partial \dot{\mathbf{u}}}(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) \delta \ddot{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\mathbf{u}} \partial \mathbf{u}}(\dot{\mathbf{u}}_e, \mathbf{u}_e) \delta \dot{\mathbf{u}} + \\
\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{u} \partial \dot{\mathbf{u}}}(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) \right]^T \delta \dot{\mathbf{u}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}}(\dot{\mathbf{u}}_e, \mathbf{u}_e) - \frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{u}}(\dot{\mathbf{u}}_e, \mathbf{u}_e) \delta \mathbf{u} - & \quad (4.104) \\
\frac{1}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{u} \partial \dot{\mathbf{u}}}(\dot{\mathbf{u}}_e, \mathbf{u}_e) \delta \dot{\mathbf{u}} - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\mathbf{u}} \partial \mathbf{u}}(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) \right]^T \delta \dot{\mathbf{u}} + \dots &= \mathbf{Q}_{nc}
\end{aligned}$$

En el punto de equilibrio del sistema se cumple la condición:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}}(\dot{\mathbf{u}}_e, \mathbf{u}_e) = 0$$

y se cumple que $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{u}}}(\dot{\mathbf{u}}_e, \mathbf{u}_e) = 0$, ya que es constante a lo largo del tiempo [1987, Meirovich].

Si se introducen las matrices siguientes:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}(i, j) &= \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\mathbf{u}}_i \partial \dot{\mathbf{u}}_j}(\dot{\mathbf{u}}_e, \mathbf{u}_e), & \mathbf{S}(i, j) &= \frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{u}_i \partial \dot{\mathbf{u}}_j}(\dot{\mathbf{u}}_e, \mathbf{u}_e), \\
\mathbf{K}(i, j) &= -\frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{u}_i \partial \mathbf{u}_j}(\dot{\mathbf{u}}_e, \mathbf{u}_e), & \mathbf{G} &= \mathbf{S}^T - \mathbf{S}
\end{aligned} \quad (4.105)$$

el hamiltoniano se sintetiza en la expresión linealizada:

$$\mathbf{M}_e \delta \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}_e \delta \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_e \delta \mathbf{q} = \mathbf{Q}_{nc}$$

Esta expresión representa la ecuación linealizada del movimiento del sistema mediante un sistema de segundo orden, en donde \mathbf{M}_e es la matriz de masa generalizada y es siempre definida positiva, \mathbf{G}_e es la matriz giroscópica, es antisimétrica y alberga los términos de amortiguamiento modal y \mathbf{K}_e la matriz de rigidez y es semidefinida positiva.

El modelo linealizado se obtiene determinando los puntos de equilibrio de la dinámica no lineal. Se asume que las medidas de las salidas están disponibles por medio de los sensores de actitud y de deformación elástica de los paneles solares. El resultado general, estará expresado por un sistema lineal dado por la expresión:

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = f(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}, t) = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}(t)$$

Este modelo linealizado es sólo válido si se encuentra próximo al punto de operación.

4.13.1. CARACTERÍSTICAS DE ESTABILIDAD DEL MODELO LINEALIZADO

El modelo linealizado presenta diversas características de estabilidad en función de la posición que ocupan los autovalores del sistema. Basado en la teoría de Lyapunov [1991, Slotine], se presentan tres casos diferentes:

- Si todos los autovalores del sistema se encuentran en el semiplano izquierdo del plano complejo el sistema es estable, por lo que el punto de equilibrio es asintóticamente estable para el sistema no lineal real.
- Si el sistema linealizado es inestable, es decir, al menos un autovalor se encuentra posicionado en el semiplano derecho del plano complejo, se dice que el punto de equilibrio es inestable.
- Si todos los autovalores del sistema se encuentran posicionados en el semiplano izquierdo, pero al menos uno de ellos se encuentra sobre el eje imaginario, no se puede concluir nada a partir de la aproximación lineal. En estas condiciones el punto de equilibrio puede ser estable, asintóticamente estable o inestable para el sistema no lineal.

Las condiciones matemáticas de estabilidad para el sistema han de tener su correspondencia en el sistema real. El requisito impuesto de apuntamiento a Nadir para el sistema, requiere que el eje Z del satélite apunte en todo momento hacia ese punto sobre la superficie terrestre. Si esto se consigue el sistema estará estabilizado obteniendo el apuntamiento previsto, a pesar de las perturbaciones existentes. Cualquier variación respecto de este punto implica un error de apuntamiento que es necesario corregir.

En términos matemáticos la velocidad angular respecto de ejes cuerpo ω_b^{bo} ha de permanecer nula $\omega_b^{bo} = 0$. En términos de velocidad angular inercial para este apuntamiento, la única componente que aparece es la velocidad angular orbital ω_o , ver la ecuación (4.34)

$$\omega_b^{oi} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_o \\ 0 \end{bmatrix}$$

CAPÍTULO 5

FUNDAMENTO TEÓRICO DE LOS MÉTODOS DE ASIGNACIÓN DE AUTOESTRUCTURAS.

5.1. INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores se ha considerado al satélite compuesto por una parte rígida y otra flexible, que interactúan entre sí, debido al acoplamiento existente entre ambos. Este acoplamiento se muestra matemáticamente en el modelo dinámico del satélite. Se han identificado además los modos del sistema, estos es, los modos flexibles y los modos orbitales. El problema que se plantea está relacionado con la orientación del satélite, bien realizando maniobras de corrección de apuntamiento o consiguiendo nuevos apuntamientos, de forma que se reduzca el grado de acoplamiento entre los modos del sistema.

Esto permitiría no excitar ciertas frecuencias de los elementos flexibles, y por tanto preservar a estos de vibraciones no deseadas que pudieran dañar los paneles solares. Incluso en sentido opuesto, que las perturbaciones que produzcan una deformación tolerable sobre los paneles no repercutan de forma alarmante sobre la actitud del satélite.

Uno de los objetivos de diseño del controlador es el de tratar de desacoplar hasta cierto grado, los modos orbitales y los modos flexibles. La mejor opción consiste en permitir que las acciones de control sobre el cuerpo del satélite realizadas por los actuadores, no afecten a los paneles, obteniendo por tanto un desacoplo aparente entre los modos flexibles y orbitales.

El método de Asignación de Autoestructuras es un método idóneo para cumplir el objetivo básico del controlador centrado en el desacoplo de los modos del sistema. Cualquiera de los métodos de asignación de autoestructuras entronca directamente con el comportamiento dinámico del sistema obtenido en primera aproximación del sistema en lazo abierto. Estos permitirán, por una adecuada selección de la autoestructura del sistema en lazo cerrado, diseñar un controlador que permita disponer de un comportamiento del sistema adaptado a los requisitos de diseño.

El desarrollo de las técnicas EA exige un conocimiento profundo del sistema, con el objeto de descender hasta los aspectos mínimos que permiten conseguir el controlador adecuado.

Del conocimiento profundo del sistema, se llega a la identificación de los modos del mismo y a la relación existente con los autovalores y autovectores. Un planteamiento adicional subyace bajo la idea de modificar la posición de los autovalores del sistema con el objeto de conseguir unas prestaciones temporales de respuesta transitoria adecuadas, y en modificar el valor de los elementos del autovector para los estados del sistema. Modificar la posición de los autovalores y el valor de los autovectores,

permitirá obtener comportamientos completamente diferentes respecto del sistema en lazo abierto.

El método EA permite plantear el comportamiento del sistema en lazo cerrado una vez que se hayan llevado a cabo las dos fases aplicables en la técnica, esto es el análisis de la autoestructura y la de asignación de la misma.

La aproximación a la obtención de los autovalores y autovectores deseados en lazo cerrado permitirá el diseño del controlador, bien por realimentación de estados o por realimentación de la salida. Esto se consigue mediante la aplicación de alguna de las técnicas de asignación desarrolladas.

En este capítulo se presentan los aspectos teóricos relacionados con la técnica EA, planteando los aspectos necesarios para el desarrollo de la misma y los elementos que intervienen en la obtención del controlador. Además se van a presentar las ideas desarrolladas alrededor de la técnica que permitan obtener un grado de robustez mayor que el conseguido de forma innata por la simple aplicación de la técnica. De forma adicional, y para ilustrar la forma de aplicación, se presenta un ejemplo relacionado con la dinámica del sistema dinámico del satélite propuesto.

5.2. ASPECTOS BÁSICOS DEL MÉTODO DE ASIGNACIÓN DE AUTOESTRUCTURAS

El análisis modal del sistema permite conocer desde el punto de vista físico el comportamiento del sistema, identificando aquellas frecuencias de interés. Precisamente desde esta perspectiva, se hace corresponder las frecuencias interesantes con lo que se puede denominar modos físicos del sistema. La excitación de estos modos físicos al realizar cualquier actuación sobre el sistema puede producir comportamientos que lleven a situaciones no deseadas que puedan degradarlo. Los modos físicos mencionados del sistema tienen su correspondencia con los modos matemáticos del modelo desarrollado. Esta correspondencia se identifica por medio del análisis matemático a través del conocimiento de la autoestructura.

La autoestructura se corresponde con los autovalores y autovectores del sistema. El valor de los autovalores del sistema se ha de corresponder con los modos dinámicos del sistema, existiendo una correspondencia determinada con los autovectores del mismo. Tanto esta correspondencia entre los modos dinámicos del sistema y los matemáticos del mismo, junto con características asociadas al comportamiento del sistema y que pueden influir en el diseño del controlador, conducen a la necesidad de tener un conocimiento exhaustivo de las posibilidades que ofrece la técnica EA.

Las características principales del sistema pueden ser evaluadas a partir de la relación existente entre las matrices del sistema dinámico, con las entradas y salidas del mismo, caracterizadas en el dominio del tiempo. Esto permitirá conocer la relación entre los diferentes modos del sistema con las entradas y salidas al mismo. Este análisis se realiza a partir del modelo dinámico del sistema (4.93):

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{y}} &= \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\bar{\mathbf{u}}\end{aligned}\quad (5.1)$$

Donde $\bar{\mathbf{x}} \in \mathfrak{R}^n$ es el vector de estado del sistema, $\bar{\mathbf{y}} \in \mathfrak{R}^p$ representa el vector de salida y $\bar{\mathbf{u}} \in \mathfrak{R}^m$ es el vector de entrada. Los autovalores λ_i de la matriz de estado \mathbf{A} del sistema en lazo abierto se obtienen de la ecuación característica

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \quad (5.2)$$

Dados los autovalores λ_i , se definen además los autovectores por la derecha \mathbf{v}_i y los autovectores por la izquierda \mathbf{w}_i . Estos autovectores satisfacen las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{v}_i &= \lambda_i\mathbf{v}_i \\ \mathbf{w}_i^T \mathbf{A} &= \lambda_i\mathbf{w}_i^T\end{aligned}\quad (5.3)$$

definiéndose las matrices de autovectores por la derecha y por la izquierda respectivamente:

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n] \\ \mathbf{W}^T &= [\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n]\end{aligned}\quad (5.4)$$

Si \mathbf{V} y \mathbf{W}^T son normalizadas se cumple la expresión:

$$\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{W}^T \quad (5.5)$$

La solución en el dominio del tiempo de las ecuaciones dadas para el sistema (5.1) [1994, Davidson] para los estados del sistema se representan por:

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (5.6)$$

Y para la salida del sistema la solución es:

$$\bar{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (5.7)$$

Así, la matriz dinámica del sistema \mathbf{A} puede estar representada por:

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1} \quad (5.8)$$

siendo $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Considerando el desarrollo en serie de $e^{\mathbf{A}t}$ siguiente:

$$e^{At} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^3}{3!} + \dots = \mathbf{I} + (\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1})t + \frac{(\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1})^2 t^2}{2!} + \frac{(\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1})^3 t^3}{3!} + \dots \quad (5.9)$$

$$= \mathbf{V} \left[\mathbf{I} + \mathbf{\Lambda}t + \frac{\mathbf{\Lambda}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{\Lambda}^3 t^3}{3!} + \dots \right] \mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V} e^{\mathbf{\Lambda}t} \mathbf{V}^{-1} = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i e^{\lambda_i t} \mathbf{w}_i^T$$

La solución para la ecuación de estado del sistema descrito por (5.6) se obtiene una dependencia de los autovectores \mathbf{v}_i y \mathbf{w}_i representada por:

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i e^{\lambda_i t} \mathbf{w}_i^T \mathbf{x}(0) + \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i \mathbf{w}_i^T \int_0^t e^{\lambda_i(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (5.10)$$

y para la salida (5.7):

$$\bar{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C} \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i e^{\lambda_i t} \mathbf{w}_i^T \mathbf{x}(0) + \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i \mathbf{w}_i^T \int_0^t \mathbf{C} e^{\lambda_i(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (5.11)$$

Desde el punto de vista del sistema y de la aplicación del método EA interesa conocer la interacción entre los elementos que participan en las ecuaciones (5.10) y (5.11) con los autovalores y autovectores del sistema. Como puede observarse tanto entrada $\bar{\mathbf{x}}(t)$ como salida $\bar{\mathbf{y}}(t)$ dependen tanto de autovalores λ_i , como de autovectores por la derecha \mathbf{v}_i , como los autovectores por la izquierda \mathbf{w}_i^T . Concretamente para la salida $\bar{\mathbf{y}}(t)$, el primer término representa la solución homogénea de la ecuación diferencial que depende de las condiciones iniciales y el segundo término representa la solución forzada que depende de la entrada al sistema. Esto da lugar a determinar que el comportamiento dinámico del satélite depende de los siguientes factores:

- Los autovalores λ_i determinan la velocidad de crecimiento y decrecimiento de la respuesta.
- Los autovectores por la derecha \mathbf{v}_i y por la izquierda \mathbf{w}_i^T determinan las variables de estado que participan en la respuesta de cada modo, caracterizando la forma de la misma, es decir la respuesta transitoria.
- La condición inicial del sistema $\mathbf{x}(0)$ determina el grado con que cada modo participa en la respuesta libre del sistema. De hecho, el producto dado por los autovectores por la izquierda junto con las condiciones iniciales ($\mathbf{w}_i^T \mathbf{x}(0)$) determina esta participación.
- Las entradas al sistema $\mathbf{u}(\tau)$ pueden excitar los modos del sistema no deseados, estando representado matemáticamente por la relación del producto $\mathbf{w}_i^T \mathbf{B}$.

Del estudio pormenorizado realizado sobre la ecuación (5.11) se infiere que la autoestructura tiene un papel importante tanto en la respuesta homogénea como en la

respuesta forzada. Se ha observado la relación entre los autovectores por la derecha y por la izquierda con la respuesta del sistema y como una entrada particular puede excitar ciertos modos del sistema. Desde un punto de vista ideal puede resultar interesante que algunos modos del sistema no sean afectados por las entradas al mismo. Este proceso representa un desacople modal, ya que trata de independizar las acciones de control de cualquier canal del sistema respecto del resto de modos del mismo. En realidad se está requiriendo al sistema que desacople las acciones de control respecto del comportamiento del sistema.

La caracterización del comportamiento del sistema en lazo cerrado dependerá del controlador obtenido. Este a su vez estará caracterizado por el efecto de la autoestructura seleccionada como autoestructura deseada. Para obtener un comportamiento adecuado de la respuesta del sistema, se debe asignar tanto los autovectores por la derecha como por la izquierda a la vez que se realiza la asignación de los autovalores del mismo.

Estas consideraciones sobre la relación existente entre los autovalores y autovectores por la derecha y por la izquierda y como repercuten sobre el comportamiento del sistema, en la respuesta del mismo y en la determinación de la forma de las respuestas induce a plantear la posibilidad de seleccionar una autoestructura concreta que permitirá al sistema trabajar de una forma muy determinada. El diseñador del controlador debe requerir lo que se denomina la autoestructura deseada basado en los requisitos del sistema. Esta autoestructura deseada estará determinada por un conjunto de autovalores deseados y autovectores deseados para el sistema en lazo cerrado. Por lo tanto el problema que se plantea está basado en el diseño de un controlador que permita al sistema en lazo cerrado comportarse con arreglo a las características que presenta la autoestructura deseada.

5.3. ESTRUCTURA DEL CONTROLADOR

El problema del control estriba en determinar el valor de un controlador K para el sistema lineal e invariante en el tiempo definido por (5.1). Los métodos de asignación de autoestructuras contemplan leyes de control por realimentación de estados y por realimentación de la salida. En la asignación del método EA para obtener un controlador estático de dimensiones $(m \times p)$ por realimentación la ley de control está dada por:

$$\bar{u} = -K\bar{y} \quad (5.12)$$

que para el caso de acceso completo a los estados del sistema se convierte en $\bar{u} = -K\bar{y} = -KC\bar{x}$, siendo la matriz de la salida $C = I$, y por tanto una realimentación de estados. El controlador puede diseñarse para realizar realimentación de la salida y realimentación de estados.

Con lo que la dinámica del sistema en lazo cerrado, considerando realimentación de la salida está dada por:

$$\dot{\bar{x}} = (A + BKC)\bar{x} \quad (5.13)$$

La autoestructura deseada estará compuesta por un conjunto de autovalores deseados Λ_d y de autovectores deseados V_d para el sistema en lazo cerrado, que tienen como componentes:

$$\begin{aligned}\Lambda_d &= [\lambda_{d1} \dots \lambda_{dp}] \\ V_d &= [v_{d1} \dots v_{dp}]\end{aligned}\tag{5.14}$$

Relacionando la autoestructura deseada (5.14) con el sistema en lazo cerrado (5.13) se obtiene la expresión:

$$(A + BKC)V_d = V\Lambda_d\tag{5.15}$$

A partir de esta expresión se puede obtener el controlador K . El problema de control consiste en encontrar una matriz real K tal que los autovalores de la matriz $(A + BKC)$ incluyan los autovalores deseados λ_{di} como un subconjunto de los autovalores del sistema y que los autovectores se encuentren lo más próximo posible al conjunto de autovectores deseados v_{di} .

Para cualquier par de autovalores deseado dado por λ_{di} y su correspondiente autovectores asociados v_{di} , se puede expresar la ecuación (5.15) como:

$$(A + BKC)v_i = \lambda_i v_i\tag{5.16}$$

Manipulando la expresión para obtener los autovectores del sistema se obtiene:

$$v_i = (\lambda_i I - A)^{-1} BKCv_i\tag{5.17}$$

A partir de esta expresión se define un subespacio admisible dado por las columnas de la matriz $(\lambda_i I - A)^{-1} B$. El autovector alcanzable se puede obtener proyectando el autovector deseado sobre el subespacio admisible antes mencionado. Reordenando la ecuación (5.17) en forma matricial se obtiene:

$$[A - \lambda_i I \quad B] \begin{bmatrix} v_i \\ KCv_i \end{bmatrix} = 0\tag{5.18}$$

Esta expresión puede estar representada para una solución no trivial como el espacio nulo dado por:

$$\begin{bmatrix} v_i \\ KCv_i \end{bmatrix} \in \{ \mathcal{N} : [A - \lambda_i I \quad B] \}\tag{5.19}$$

Precisamente este espacio nulo representa el espacio de vectores alcanzables. Todos los autovectores alcanzables que se corresponden con los autovectores deseados para el sistema en lazo cerrado deben ubicarse en el subespacio abarcado por las columnas de la matriz $[A - \lambda_i I \quad B]$. Esto implica que los autovectores deseados pueden ser fácilmente obtenibles si pertenecen a este subespacio y si existe una matriz del controlador K . Relacionando por tanto los autovectores por la derecha con la matriz del controlador y la matriz de la salida del sistema se define un nuevo vector $\bar{w}_i = KCv_i$ denominado vector de parámetros por la derecha, que cuando es aplicado a un conjunto de autovectores permite llegar a la obtención del controlador expresado como:

$$K = \bar{W} (CV)^{-1} \quad (5.20)$$

5.4. ASIGNACIÓN DE LA AUTOESTRUCTURA

Como se ha visto en las secciones anteriores los métodos de asignación de autoestructuras trabajan con los siguientes conceptos:

- Autoestructura en lazo abierto: Está formada por los autovalores y autovectores del sistema en lazo abierto. En la aplicación a vehículos flexibles es útil para determinar los modos del sistema.
- Autoestructura deseada en lazo cerrado: Son los autovalores y autovectores requeridos al sistema en lazo cerrado, después del cálculo del controlador.
- Autoestructura alcanzable: En el caso de los autovectores es el espacio vectorial calculado con los autovalores deseados. Este espacio no ha de ser coincidente con el espacio vectorial de autovectores deseados.
- Autoestructura obtenida: Los autovectores de esta autoestructura son los que se obtienen mediante alguna técnica de asignación a partir del espacio alcanzable y de los autovectores deseados. Los autovectores obtenidos pueden diferir de los autovectores deseados.

El problema de asignación de la autoestructura puede dividirse en dos subproblemas. Uno de ellos está relacionado con la asignación de los autovalores y el segundo de ellos con la asignación de los autovectores.

5.4.1. ASIGNACIÓN DE AUTOVALORES

El primer paso que se ha de realizar en la asignación de la autoestructura es la asignación de los autovalores del sistema. La asignación ha de realizarse para obtener aquellos valores deseados para el sistema en lazo cerrado, teniendo en cuenta la información obtenida del sistema en lazo abierto.

La selección de autovalores para el sistema en lazo cerrado, es decir, los autovalores deseados se puede llevar a cabo en términos clásicos: tiempo de respuesta, amortiguamiento, frecuencia natural y efecto de dominancia de los autovalores. El proceso de asignación de autovalores, basado en estos requisitos, es independiente del proceso de asignación de autovectores en los métodos de asignación EA.

La asignación de la posición de los autovalores se debe realizar a partir del análisis del sistema en lazo abierto. Este análisis permitirá seleccionar posiciones fijas de los autovalores. Sin embargo, si el sistema lo exige, el diseñador del sistema de control podría determinar una región determinada en el plano complejo para posicionar los autovalores del sistema. La segunda técnica ofrece mayor libertad en la selección de la posición de los autovalores. Ambas técnicas son dependientes del sistema bajo consideración.

El conocimiento que ofrece el sistema en lazo abierto a través del valor de los autovalores del sistema permite conocer aplicando técnicas EA los diferentes modos del sistema. Es decir, para aplicar cualquier técnica EA se relacionan los autovalores del sistema con los modos dinámicos del sistema. Esta relación, puramente matemática, permite tratar a cada modo de forma independiente en la asignación general de los autovalores deseados.

La estabilidad es otro requisito de diseño que se ha de tener en cuenta en la asignación de autovalores. Los autovalores deseados han de ser posicionados en el plano complejo en regiones que permitan estabilizar el sistema y que lo hagan controlable.

En el proceso de selección de los autovalores deseados se pueden seguir diferentes aproximaciones para obtener la solución óptima. En determinadas ocasiones, los autovalores deseados pueden estar muy próximos a los autovalores del sistema en lazo abierto, modificando sólo aquellos que necesiten prestaciones diferentes en lazo cerrado.

Es interesante fijarse de nuevo en la ecuación de la salida del sistema en el dominio del tiempo (5.11). En esta se observa la participación de los autovalores λ_i en los términos de respuesta homogénea y forzada determinando la respuesta transitoria y la frecuencia natural del modo $e^{\lambda_i t}$. Si en un sistema MIMO fuera posible forzar las respuestas del sistema para que aparecieran sólo algunos modos, sólo algunos autovalores determinarían la respuesta del sistema. Esto permite ver de forma más clara la implicación de los autovalores del sistema en la respuesta del mismo. Esto simplifica la selección de autovalores [2003, Clarke].

5.4.2. ASIGNACIÓN DE AUTOVECTORES

Se ha demostrado la dependencia existente entre los autovalores del sistema y los modos del mismo, y como estos afectan a la salida. Tanto los autovalores como los autovectores pueden ser modificados en lazo cerrado afectando a la dinámica de cualquier sistema. El segundo subproceso integrado en la asignación de la autoestructura es la asignación de los autovectores.

En sistemas MIMO los autovalores son insuficientes para caracterizar el comportamiento del sistema, de hecho son tanto estos como los autovectores los que determinan la respuesta del sistema.

Los autovectores caracterizan la forma y el acoplamiento de los diferentes modos del sistema. Existen diversos métodos para determinar los autovectores deseados V_d a partir de un conjunto de autovalores deseados Λ_d . Los métodos empleados dependen de las técnicas para obtener los controladores, pero básicamente todos requieren una especificación de los autovalores y autovectores deseados. A partir de estos datos se obtiene un autovector admisible en lazo cerrado que está contenido en un subespacio de dimensión relacionada con el número de entradas m [1998, Liu]. Generalmente los autovectores en lazo cerrado no pueden ser asignados de forma arbitraria. Sólo podrían serlo aquellos que pertenecen al subespacio mencionado. De hecho en sistemas reales la asignación del autovector no está relacionada con el subespacio admisible obtenido. Por ello, en la aplicación más general de la asignación de los autovectores son utilizadas técnicas de proyección del autovector deseado sobre el subespacio alcanzable.

5.4.3. LIBERTAD EN LA ASIGNACIÓN DE LA AUTOESTRUCTURA

Los grados de libertad que posee el diseñador para la asignación de la autoestructura han sido estudiados tanto para realimentación de la salida como para realimentación de estados. De acuerdo con [1998, Liu] y a partir de [1978, Srinathkumar], y para una ley de control de realimentación de la salida como $\bar{u} = -\bar{K}\bar{y}$, sólo es posible asignar un $\max(m,p)$ autovalores y un $\min(m,p)$ elementos del correspondiente autovector de forma precisa.

Para la asignación de un número mayor de elementos del autovector de $\min(m,p)$ es necesario realizar una aproximación precisa entre el autovector deseado y el obtenible. Este requisito es obtenido por medio de técnicas de proyección, proyectando el autovector deseado sobre el subespacio del autovector obtenible. La Tabla 5.1 muestra los grados de libertad disponibles en la asignación de la autoestructura teniendo en cuenta que el número de entradas es menor que el de salidas ($u < p$).

Parámetro	Grado de asignación
Autovalores asignables	p
Autovectores asignables	p
Número de salidas utilizables en la realimentación	p
Elementos especificados en cada autovector que pueden ser desacoplados	m

Tabla 5.1: Grados de libertad asignables en la asignación de la autoestructura.

5.4.4. ESPECIFICACIÓN DE LA AUTOESTRUCTURA DESEADA

La especificación de la autoestructura deseada afecta a los autovalores y autovectores deseados para el sistema en lazo cerrado. La apropiada selección de la autoestructura deseada tiene un impacto importante sobre la ganancia de realimentación.

La especificación de los autovalores, como se ha visto en las secciones anteriores, puede realizarse con criterios de control clásico: amortiguamiento y frecuencia natural. También es factible establecer como autovalores deseables aquellos que sean próximos a los autovalores del sistema en lazo cerrado, si la especificación lo permite.

Los autovectores deseados sin embargo necesitan que sean especificados por el diseñador, a veces de forma precisa, elemento a elemento. Los requisitos más interesantes que se adaptan al tipo de sistema de vehículo robusto-flexible para aplicación espacial son los siguientes:

- **Requisitos de Desacoplo de los Modos:** Los autovectores del sistema se relacionan con el sistema por medio de un modo del mismo definido por un autovalor y por la contribución que hace cada uno de ellos al vector de estado. Esta contribución es medible por el valor del elemento del autovector. Si alguno de los elementos del autovector tiene valor uno, indica un acoplamiento perfecto con el elemento del vector de estado correspondiente. Por el contrario, si el valor del mismo elemento del autovector tiende a cero indica un pobre o nulo acoplamiento. Esta última cualidad es la que se utiliza para requerir desacoplo de los elementos del vector de estado con los modos del sistema. Es decir el autovector es un mero transmisor de acoplamiento matemático, que se traduce en acoplamiento físico. En el desarrollo de cualquier método EA el autovector deseado ha de contener los requisitos de desacoplo de los modos, indicando aquellos elementos como cero para un desacoplo total deseado. El número máximo de elementos en cada autovector que puede ser desacoplado es $\min(m,r)$.
- **Requisitos de Robustez:** La falta de robustez de los métodos EA hace que los sistemas obtenidos, para cualquiera de las leyes de control requeridas, sean sensibles a variaciones de los parámetros. La robustez de los sistemas es dependiente de los métodos de obtención de los controladores. Básicamente se presentan sistemas que tratan de reducir la sensibilidad de los autovalores frente a variaciones del sistema como una primera opción. Otras técnicas están basadas en la ortogonalidad de los autovectores frente al resto de autovectores del subespacio obtenido. Cuanto mayor es la ortogonalidad mayor es la robustez del sistema medida como la interacción de los modos del sistema [2000, Pratt].

Mediante la aplicación de cualquiera de los métodos de diseño EA, el diseñador ha de tener en cuenta los diversos conceptos relacionados con la técnica de asignación mencionados anteriormente:

- **Autoestructura deseada:** Es aquella que aporta las necesidades de acoplamiento y estabilidad pretendidas en la especificación.
- **Autoestructura obtenible:** Es aquella accesible por medio de diversas técnicas algebraicas, técnicas de proyección, que permiten obtener una solución óptima a la asignación de la autoestructura.

Los criterios de asignación de la autoestructura, una vez más, dependen de los objetivos del diseño:

- **Autovalores:** Su asignación está relacionada con los tiempos de respuesta del sistema, su amortiguamiento y frecuencia natural.
- **Autovectores:** Su selección está relacionada para satisfacer dos posibles criterios:
 - o **Desacoplo:** Permite que los diferentes modos identificados para el sistema sean controlados de forma independiente. Los elementos correspondientes del autovector que se deseen desacoplar son asignados con valor cero.
 - o **Ortogonalidad:** Esta característica permitirá disponer de mejor número de condición, traduciéndose en mayor robustez. La sensibilidad de los autovalores decrece a medida que crece la ortogonalidad.
 - o **Baja Sensibilidad:** Está técnica permite obtener sistemas más robustos a perturbaciones, basado en la medida de la sensibilidad de los autovalores.

5.4.5. IDENTIFICACIÓN DE LOS MODOS DEL SISTEMA

A lo largo de las secciones anteriores se ha venido mencionando el concepto de modo. En esta sección se va a desarrollar el concepto de modo matemático y como se relaciona con el concepto de modo del sistema.

En la expresión (5.11) se observan dos sumatorios que hacen referencia al índice i , que se corresponde con los posibles n posibles modos dinámicos del sistema de que se trate, en este caso un vehículo flexible, que están básicamente identificados con las maniobras de orientación del mismo y con las deformaciones de los elementos elásticos como son los paneles solares.

En cualquier sistema el comportamiento dinámico del mismo puede ser considerado como un conjunto de modos de primer y segundo orden, compuestos de dos elementos que hacen referencia al comportamiento transitorio del modo (tiempo de establecimiento, y a la frecuencia), lo que se conoce como el polo (autovalor) en términos de control automático, y el segundo referido a la magnitud conocida como residuo del modo. El valor de estos dos componentes tiene una influencia directa sobre cada uno de los estados del vector de estado, además de sobre la salida del sistema y . En la técnica EA, el residuo de cada modo está proporcionalmente relacionado con la magnitud del autovector de ese modo [2000, Pratt].

Por tanto, pueden manifestarse en el comportamiento del sistema diversas causas que lo afectan. Entre estas se encuentran la potencial interacción entre los modos dinámicos del sistema y la salida, estando representados desde el punto de vista matemático por el producto de las matrices CV , también denominado vectores de acoplamiento modo-salida, o determinar únicamente por el valor de los autovectores V la interacción entre los estados del sistema y los modos dinámicos. Así mismo, se puede determinar la relación existente entre las entradas al sistema y los modos del mismo por el producto WB . Estas consideraciones son en realidad un análisis de la autoestructura, que de forma concisa permite conocer:

- La forma en que una entrada podría afectar a los modos dinámicos del vehículo.

- La influencia de cada modo dinámico sobre cada estado y la salida del sistema
- La naturaleza de cada modo dinámico del satélite.

Todas estas posibilidades permiten conocer a fondo el comportamiento del sistema, lo que permitirá diseñar un controlador adaptado a las particularidades del mismo y acorde a los objetivos de diseño. Matemáticamente, y considerando de nuevo la expresión (5.10), la solución homogénea de la misma, es decir la respuesta para entrada nula es:

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i e^{\lambda_i t} \mathbf{w}_i^T \mathbf{x}(0) \quad (5.21)$$

que expresado en forma compacta [1997, De la Cruz] es:

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{\lambda_i t} \mathbf{v}_i \quad (5.22)$$

en donde el $\alpha_i = \mathbf{w}_i^T \mathbf{x}(0)$ es un escalar. Se considera un cambio de base de forma que se obtiene:

$$\begin{aligned} \xi &= Wx \\ x &= V\xi \end{aligned} \quad (5.23)$$

Luego la ecuación (5.22) se escribe como:

$$\begin{aligned} \xi_i(t) &= \alpha_i e^{\lambda_i t} \\ \bar{\mathbf{x}}(t) &= \sum_{i=1}^n \xi_i(t) \mathbf{v}_i \end{aligned} \quad (5.24)$$

A los componentes del vector $\xi_i(t)$ se los denomina modos del sistema. El desacoplo de estos modos se determina en la matriz de autovectores. El valor cero de cualquiera de sus elementos implica que el estado asociado se encuentra desacoplado. A la inversa, un valor de uno indica acoplo perfecto del modo con el estado.

Desde el punto de vista de sistema, y tal como ya ha sido desarrollado en CAPÍTULO 3, para este sistema se identifican los siguientes modos físicos:

- **Modos Flexibles:** Son aquellas deformaciones aparecidas en los paneles solares como consecuencia de las perturbaciones externas o de las maniobras de actitud, afectando tanto a torsión como a flexión.
- **Modos Orbitales:** Son aquellos movimientos correspondientes con los de actitud del satélite, ángulo de alabeo, cabeceo y guiñada.

La interpretación del concepto matemático de modo y la relación con el modo real del sistema se interpreta en la Tabla 5.2. La tabla muestra la relación existente entre los modos del sistema, caracterizados por los autovalores de los modos orbitales y los

modos de deformación, y los elementos del vector de estado. Estos elementos se agrupan en los valores de posición y los valores de la derivada primera (d/dt). Los valores de los elementos de los autovectores están representados de forma simbólica por el carácter “X”. El valor de este símbolo está dado por un número complejo $X = R \pm jIm$, donde R representa la parte real e Im la parte imaginaria. La ventaja de esta representación es la sencilla determinación del acoplamiento de los modos del sistema. Si el valor absoluto del elemento “X” es igual a uno indica que el acoplamiento es total entre el modo y el elemento del vector de estado correspondiente. Si el valor del elemento “X” es cero existe un desacoplamiento total. De esta forma, al requerir los autovectores del sistema en lazo cerrado, simplemente será necesario especificar qué elemento del vector de estado ha de ser cero para obtener desacoplo completo.

Vector de Estado		Modos del Sistema				
		Autovalores de los Modos Orbitales			Autovalores de los Modos de Deformación	
		Alabeo	Cabeceo	Guiñada	Flexión	Torsión
	Alabeo - ϕ	X	X	X	X	X
	Cabeceo - θ	X	X	X	X	X
	Guiñada - ψ	X	X	X	X	X
	Flexión - q_1	X	X	X	X	X
	Torsión - r_1	X	X	X	X	X
d/dt	Alabeo - $\dot{\phi}$	X	X	X	X	X
	Cabeceo - $\dot{\theta}$	X	X	X	X	X
	Guiñada - $\dot{\psi}$	X	X	X	X	X
	Flexión - \dot{q}_1	X	X	X	X	X
	Torsión - \dot{r}_1	X	X	X	X	X

Tabla 5.2: Determinación del acoplamiento en la matriz de autovectores.

Esta información muestra que el análisis de la autoestructura es útil para conocer la naturaleza de los modos de un sistema, y determinar su acoplamiento.

5.4.5.1. RELACIÓN ENTRE LA SALIDA Y LOS MODOS DEL SISTEMA

Como se observo en la ecuación (5.11) la salida del sistema está caracterizada por la respuesta homogénea y la respuesta forzada. En situaciones en las que la configuración es de regulación la entrada forzada es nula, por lo que sólo las perturbaciones del sistema tendrán la mayor influencia sobre la respuesta temporal. En esta ecuación se observa que existe una relación directa entre el valor de la salida y el producto de los modos del sistema con los autovectores del mismo. Esto indica la existencia de un acoplamiento inherente de cada estado con los autovectores. Por tanto, se puede estimar un acoplamiento modo-estado que puede ser determinado cualitativamente por los autovectores por la derecha. Por otro lado, las condiciones iniciales y los autovectores por la izquierda afectan a la magnitud del acoplamiento.

La relación existente entre los modos del sistema y las salidas del mismo se caracterizan por el producto de vectores CV , donde especificando para autovectores particulares v_i ,

el producto de matriz de salida por este Cv_i , constituye el efecto del i-ésimo modo sobre la salida.

5.4.5.2. RELACIÓN ENTRE LA ENTRADA Y LOS MODOS DEL SISTEMA

Tal y como ha quedado expuesto la relación de la autoestructura con la matriz de estado viene dada para los autovectores por la derecha como $A = V\Lambda V^{-1}$ y para los autovectores por la izquierda como $WA = \Lambda W$. La relación existente entre los modos del sistema y la entrada al mismo queda definida por las columnas del producto de matrices WB , donde $w_i^T B$ define los efectos que las entradas tienen sobre el i-ésimo modo del sistema. Esta información es muy útil para determinar aquellos modos del sistema son excitados por las entradas al mismo. A la vez, aquellos modos del sistema que resulten afectados por la relación modo-entrada repercuten sobre la salida.

5.4.5.3. RELACIÓN ENTRE LA ENTRADA Y LA SALIDA DEL SISTEMA

La relación existente entre la entrada al sistema y la salida del mismo puede verse en términos de una integral de convolución, que aparece en la respuesta forzada del sistema dada por la ecuación (5.11). Algunos autores entre los que se encuentran [1997, Faleiro] haciendo referencia a [1977, MacFarlane], establece el proceso de convolución para la salida del sistema de la siguiente forma:

La entrada de un sistema u está acoplada con el i-ésimo modo por un producto interno $w_i^T B u(\tau)$. Esta componente dependiente del tiempo convolucionada con el exponencial $e^{\lambda_i(t-\tau)} w_i^T B u(\tau)$ para obtener otro componente dependiente del tiempo. La suma de todos los componentes definidos genera la salida del sistema junto con el vector que relaciona la salida con el vector v_i y del producto Cv_i .

Por lo tanto el producto interno $w_i^T B u(\tau)$ sirve como un factor de escala en la relación en el vector de acoplamiento Cv_i que define el acoplamiento entre la salida y los modos del sistema.

Además los autovectores por la derecha han de contemplarse como componentes de los vectores de acoplamiento salida con modos. Estos se utilizan para suministrar una medida de la magnitud de los residuos de la componente forzada de la respuesta del sistema. Por esta razón, los autovectores por la derecha son fundamentales en la asignación del sistema en lazo cerrado.

5.4.6. SENSIBILIDAD DE LA AUTOESTRUCTURA

Uno de los problemas que presentan los métodos de asignación de autoestructuras es la falta de robustez de la asignación propiamente dicha. En este sentido es necesario contemplar los diferentes problemas que se pueden presentar en el sistema y alterar el comportamiento del mismo. Un potencial problema se presenta cuando hay variación en los parámetros de la planta. Esta posibilidad puede afectar a los autovalores de la planta en lazo cerrado, o dicho de otra forma, los autovalores pueden ser sensibles a las variaciones de los parámetros de la planta. Pero además de la variación de los parámetros, otra causa que afecta a la robustez del sistema es la degradación de las prestaciones del sistema por efectos de la dinámica no modelada. Un ejemplo típico de esta situación se presenta en sistemas en los que el modelo dinámico no ha tenido en cuenta los modos de flexión y torsión de algún elemento de la planta. Por esta razón, el modelo dinámico ha de aproximarse al modelo real, introduciendo aquellos modos que pueden afectar al sistema.

La sensibilidad de los autovalores a perturbaciones ha de tenerse en cuenta con el objeto de aumentar la robustez del sistema. Unos autovalores del sistema en lazo cerrado poco sensibles a perturbaciones ofrecen confianza al implantar el controlador en el sistema real, ya que la posibilidad de inestabilizar el sistema es más remota. Una de las preocupaciones existentes con la aplicación del método EA es la de garantizar cierta robustez de los autovalores basado en la sensibilidad de estos.

La sensibilidad de los autovalores frente a cualquier variación de los parámetros se demuestra a partir de la ecuación (5.16) que relaciona el par autovalor-autovector con la matriz de estado del sistema en lazo cerrado: $(A + \mathbf{BKC})v_i = \lambda_i v_i$. Con el objeto de conocer la sensibilidad del autovalor λ_i frente a cualquier parámetro perturbado en las matrices del sistema, se define el parámetro θ_j , $j=1, \dots, l$ [1993, Ching-Fang Li]. Tomando la derivada en la ecuación (5.16) se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial \theta_j} v_i + \lambda_i \frac{\partial v_i}{\partial \theta_j} = \frac{\partial (A + \mathbf{BKC})}{\partial \theta_j} v_i + (A + \mathbf{BKC}) \frac{\partial v_i}{\partial \theta_j} \quad (5.25)$$

Para los autovectores por la izquierda w_i , la matriz del sistema en lazo cerrado se expresa como:

$$\lambda_i w_i = w_i (A + \mathbf{BKC}) \quad (5.26)$$

Multiplicando (5.25) por el autovector por la izquierda w_i y reordenando los términos se obtiene la expresión para el autovalor λ_i expresada como:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial \theta_j} = \frac{1}{w_i v_i} w_i \frac{\partial (A + \mathbf{BKC})}{\partial \theta_j} v_i \quad (5.27)$$

De la expresión (5.27) se conoce la dependencia del autovalor frente a variación de los parámetros de la matriz de estado del sistema en lazo cerrado. Esto se puede demostrar

suponiendo que el parámetro θ_j sólo afecta a la matriz de estado A y que los autovectores están normalizados $w_i v_i = 1$:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial \theta_j} = w_i \frac{\partial(A)}{\partial \theta_j} v_i \quad (5.28)$$

Si la magnitud de la expresión (5.28) es pequeña indica que el autovalor asignado es poco sensible a variaciones en los parámetros, por el contrario una magnitud elevada indica que la sensibilidad es alta. Enlazando esta idea con la robustez del sistema, se observa la dependencia con la variación de alguno de los parámetros.

Básicamente se definen dos métodos para la obtención de la sensibilidad de los autovalores del sistema en lazo cerrado. El primer método se puede expresar en términos de los autovalores por la derecha y por la izquierda. El segundo sólo se basa en los autovectores por la derecha.

La medida de sensibilidad de los autovalores basada en las matrices de autovectores relacionadas con el primer método da lugar a la sensibilidad individual de los autovalores. Esta medida fue introducida por [1965, Wilkinson] y viene dada por

$$\eta_i(V, W) = \frac{\|V_i\|_2 \|W_i\|_2}{|V_i^T W_i|} \quad (5.29)$$

Siendo V y W los autovectores por la derecha y por la izquierda respectivamente. El referido a la medida de la sensibilidad de un conjunto de autovalores queda definido por:

$$\eta(V) = \|V\|_2 \|V^{-1}\|_2 \quad (5.30)$$

En cualquiera de los casos que se analicen siempre se cumple que $\eta \geq 1$. Cuanto mayor sea el índice de sensibilidad peor condicionada estará la matriz objeto de análisis y mayor será la sensibilidad frente a perturbaciones. La interpretación geométrica de la sensibilidad de los autovalores se expresa [2002, Magni] como el ángulo entre los autovectores por la derecha. Maximizando este ángulo se obtiene menor sensibilidad de los autovalores en lazo cerrado. Otra interpretación adicional de $\eta(V)$ expresada en [1998, Liu], es la que hace referencia a esta sensibilidad como una medida de la condición de la matriz V a ser invertida, ya que en el cálculo del controlador depende directamente de la matriz inversa de los autovectores por la derecha.

Abundando en la idea de la medida de la sensibilidad global $\eta(V)$ se presenta el número de condición de la matriz de autovectores por la derecha, que se debe entender como una cota de sensibilidad y queda expresada como:

$$\max c_j \leq \eta(V) \quad (5.31)$$

La medida óptima del número de condición es uno, ya que los autovectores normalizados forman una base ortonormal del plano complejo n dimensional [1997, De la Cruz].

Cualquier técnica de asignación en principio es susceptible de ser mejorada en cuanto a la robustez que presentaría el sistema en lazo cerrado. Pero en particular, es interesante referirse a un conjunto de técnicas que tienen como objetivo la reducción de la sensibilidad individual de los autovalores o de la sensibilidad global.

5.5. SÍNTESIS DEL CONTROLADOR

En la técnica de Asignación de Autoestructuras, se pueden considerar diversas arquitecturas en el diseño en lazo cerrado del sistema. Como ya ha sido expuesto, se persigue no solo disponer de la posibilidad de colocar los autovalores en aquellos lugares deseados, sino que los autovectores tienen cierto peso. Este concepto aplicado a sistemas MIMO, permite mejorar el tiempo de respuesta del sistema.

En cualquiera de las estrategias que se plantean, el objetivo de utilizar realimentación, es modificar la autoestructura del sistema en lazo abierto para asegurar la estabilidad del sistema, para mejorar la robustez o para obtener una respuesta satisfactoria. Se plantean dos estrategias de realimentación para el sistema. Una relacionada con la realimentación de estados, y la segunda relacionada con la realimentación de la salida.

Proceso:

- Especificación de la autoestructura: Autovalores y Autovectores.
- Determinación del espacio alcanzable.
- Método de proyección.
- Obtención de controlador.

5.5.1. REALIMENTACIÓN DE ESTADOS

Este tipo de realimentación implica que los estados sean conocidos por el sistema. Los estados están definidos en el sistema dinámico como los modos orbitales y como las deformaciones elásticas de los paneles. Conociendo todos los estados definidos en el sistema permitiría realimentar el lazo y calcular la ganancia \mathbf{K} del controlador ajustada a las especificaciones de diseño.

La Figura 5.1, presenta el diagrama de realimentación de estados aplicable al control de actitud del satélite. En este se observa que las ecuaciones linealizadas del movimiento se pueden expresar de la siguiente forma:

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} + \mathbf{BK})\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}} \quad (5.32)$$

Siendo: $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{r}} - \mathbf{K}\bar{\mathbf{x}}$

Por tanto el diseño del controlador ha de determinar el valor de \mathbf{K} para disponer de los autovalores en lazo cerrado deseados en la especificación. El sistema ha de ser

controlable para poder asignar todos los polos del sistema en lazo cerrado en las posiciones deseadas después de conocer el valor de K .

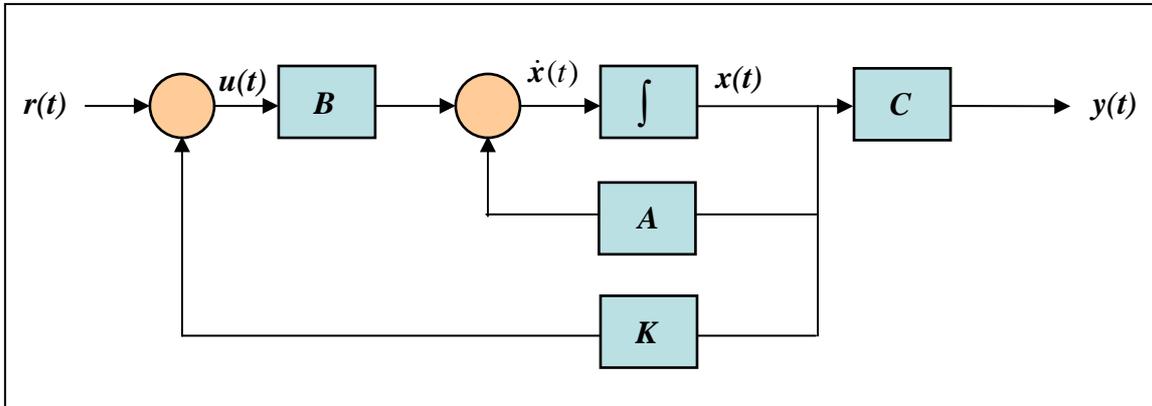


Figura 5.1: Sistema con Realimentación de Estados.

5.5.2. REALIMENTACIÓN DE LA SALIDA

En ciertos sistemas es imposible observar todos los estados definidos en el mismo, bien por que sean estados no medibles, o porque no se dispone de sensores adecuados para realizar la medida. Si este es el caso, la segunda opción para construir el sistema realimentado, es hacerlo por realimentación de la salida $y(t)$.

En este caso, el diseño conduce a diseñar un controlador estático que realimente la salida de la siguiente forma:

$$\bar{u} = \bar{r} - K\bar{y}$$

lo que da origen al sistema de control realimentado de la Figura 5.2:

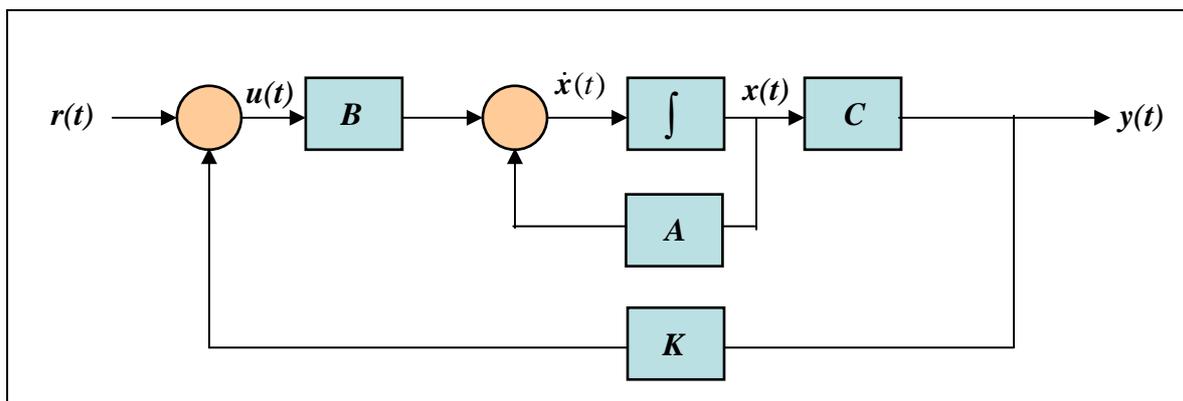


Figura 5.2: Sistema con Realimentación de la Salida.

En cuanto al sistema en lazo cerrado, queda expresado de la siguiente forma:

$$\dot{\bar{x}} = (A + BKC) \bar{x} + B\bar{u}$$

Una vez más, la estrategia de Asignación de Autoestructuras pasa por calcular la matriz de realimentación K , de forma que los autovalores en lazo cerrado permitan obtener las especificaciones deseadas, y por tanto especificar la autoestructura, en la que se tienen en cuenta también los autovectores del sistema.

Con el objetivo de diseñar un sistema que apunte en todo punto de la órbita hacia Nadir, el sistema de control realimentado se convierte en un regulador. En la Figura 5.3 se observa este caso, en el que la consigna es cero, y la señal de control es:

$$\bar{u} = K\bar{y} \quad (5.33)$$

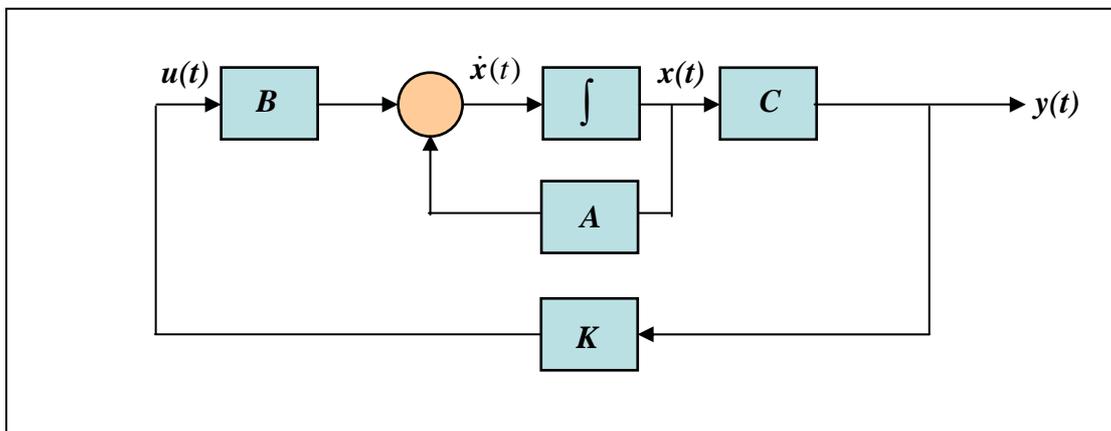


Figura 5.3: Regulador con Realimentación de la Salida.

5.6. MÉTODOS DE ASIGNACIÓN DE LA AUTOESTRUCTURA

Puede decirse que la literatura se ha ocupado en profundidad de desarrollar diferentes métodos para el cálculo de las autoestructuras deseadas y por tanto de los controladores. Esto conlleva a que no existe un único método de asignación, y que los diferentes métodos desarrollados tratan de mejorar los diferentes aspectos no resueltos de métodos anteriores. Es por ello que los controladores obtenidos son siempre dependientes del método de asignación empleado a pesar de que los requisitos sean los mismos.

Los métodos de asignación presentados en la literatura abarcan desde métodos de asignación denominados básicos, basados en técnicas de proyección de autovectores, pasando por métodos basados en técnicas de cálculo recursivas y finalizando con técnicas que tienen como objetivo principal la robustez del sistema.

Los parámetros generales que comparten los diferentes métodos son los autovalores y autovectores deseados y la autoestructura alcanzada. En cuanto a la selección de un

método adecuado que permita obtener una alta precisión en la obtención del controlador, la dependencia principal para su elección estriba en los requisitos deseados.

5.6.1. ASIGNACIÓN BÁSICA

Se considera el sistema lineal multivariable dado por la ecuación de estado siguiente:

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B\vec{u}$$

Si se considera una realimentación de estados, la ley de control vendrá dada por:

$$\vec{u} = K\vec{x}$$

Siendo K el controlador de dimensiones $m \times p$, concretamente $K \in \mathfrak{R}^{m \times p}$. Con K como matriz del controlador la ecuación de estado en lazo cerrado es:

$$\dot{\vec{x}} = (A + BK)\vec{x} \quad (5.34)$$

El método de asignación básico considera el caso en el que los autovalores deseados del sistema en lazo cerrado no coincidan con los autovalores del sistema en lazo abierto. En este caso la solución general para el problema de asignación general reside en obtener un controlador K que sea función de los autovalores del sistema en lazo cerrado Λ y de los autovectores por la derecha V : $K = K(\Lambda, V)$. Desarrollando este método, se considera la relación entre autovalores y autovectores dada por la expresión:

$$(\lambda_i I - A)V = BW \quad (5.35)$$

Siendo $W = KV$ es la llamada matriz de parámetros, y la matriz de autovectores por la derecha en lazo cerrado $V = (\lambda_i I - A)^{-1} BW$. La resolución de esta expresión implica que los autovalores deseados sean diferentes a los del sistema en lazo abierto, de lo contrario la matriz $(\lambda_i I - A)$ no será invertible. Si el diseño requiere que se repitan autovalores esa matriz puede ser resuelta utilizando descomposición en valores singulares. A partir de la matriz de parámetros se extrae la matriz del controlador en su representación paramétrica [1998, Liu], que viene dada por:

$$K = WV^{-1} \quad (5.36)$$

5.6.2. MÉTODOS DE PROYECCIÓN DE AUTOVECTORES

Como ya se ha visto la asignación de la autoestructura está compuesta de dos fases, la primera es la asignación de los autovalores del sistema en lazo cerrado y la segunda es la asignación de los autovectores. Generalmente la dificultad en la asignación procede de la asignación de los autovectores deseados, ya que estos han de reflejar diferentes requisitos de diseño.

Para ilustrar el procedimiento de asignación de los autovectores deseados diversos autores han utilizado las técnicas de proyección de autovectores. De forma general, los autovectores deseados v_i^d , no se encuentran disponibles el subespacio formado por el espacio nulo dado por $[A - \lambda_{di} \mathbf{I} \quad \mathbf{B}]$, sino que este subespacio ha de ser expandido para llegar a obtener el autovectores deseados. Se presenta así el concepto de subespacio alcanzable, que da lugar a los autovectores alcanzables. Cualquier combinación del nuevo espacio expandido del espacio nulo generará un autovector v_i , que no es el deseado, y que es obtenido por métodos de proyección del autovector deseado. Este nuevo autovector generará un sistema en lazo cerrado con los autovalores deseados. Al espacio nulo expandido se le denomina “espacio alcanzable”. En este serán proyectados los autovectores deseados para obtener los autovectores alcanzables que representan la solución más próxima a los autovectores deseados. Este procedimiento se ilustra de forma gráfica en la Figura 5.4.

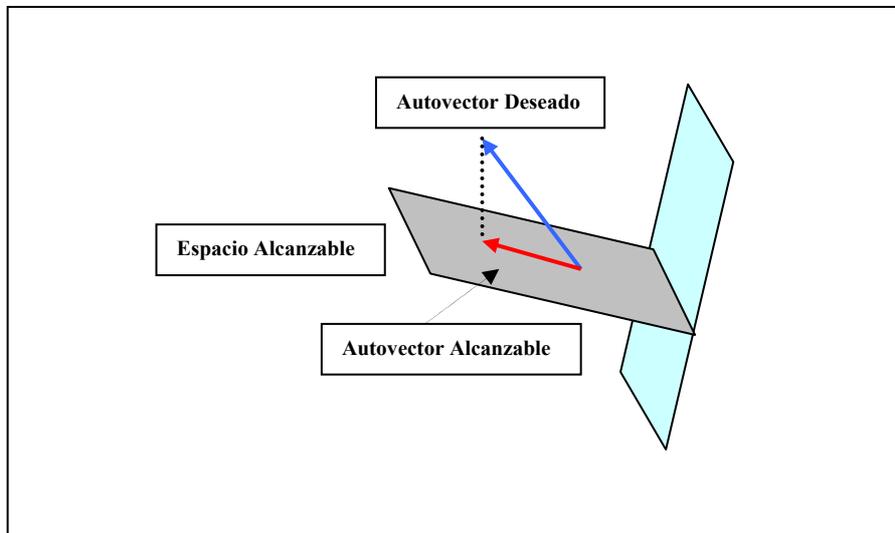


Figura 5.4: Representación Gráfica del Método de Proyección del Autovector Deseado en el Subespacio Alcanzable.

El método básico de proyección de autovectores en los espacios alcanzables fue propuesto por [1983, Andry]. Este método posteriormente fue refinado por [1985, Kautsky]. El método parte de la designación del vector alcanzable de estado-modo definido por S_i como:

$$\begin{bmatrix} S_i \\ \hat{S}_i \end{bmatrix} = \mathcal{N}[A - \lambda_i \mathbf{I} \quad \mathbf{B}] \quad (5.37)$$

El vector alcanzable expandirá este espacio, a la vez que aproxima el autovector deseado al alcanzable. Suponiendo que son aproximadamente iguales se obtiene:

$$v_{di} \approx v_i = S_i q \quad (5.38)$$

El autovector deseado tiene elementos especificados y no especificados, de forma que se puede utilizar una matriz de transformación \mathbf{P} para definir:

$$\mathbf{P}\mathbf{v}_{di} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{di}^s \\ \mathbf{v}_{di}^u \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

Por tanto, la proyección se define de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{di}^s \\ \mathbf{v}_{di}^u \end{bmatrix} = \mathbf{P}\mathbf{S}_i\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_i^s \\ \mathbf{S}_i^u \end{bmatrix} \mathbf{q} \quad (5.40)$$

$$\mathbf{v}_{di}^s \approx \mathbf{S}_i^s \mathbf{q} \quad (5.41)$$

El problema de proyección se centra en la selección del vector \mathbf{q} que se expresa como:

$$\mathbf{q} = \mathbf{S}_i (\mathbf{S}_i^s)^{-1} \mathbf{v}_{di}^s \quad (5.42)$$

Siendo el autovector alcanzable para el acoplamiento modo-estado el definido por:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{S}_i (\mathbf{S}_i^s)^{-1} \mathbf{v}_{di}^s \quad (5.43)$$

Y para el acoplamiento modo-salida:

$$\mathbf{t}_i = \mathbf{C}\mathbf{S}_i (\mathbf{S}_i^s)^{-1} \mathbf{v}_{di}^s \quad (5.44)$$

Con estos autovectores se generan las matrices de autovectores deseados \mathbf{V} o \mathbf{T} para obtener el controlador a partir de la expresión:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C})\mathbf{V} = \mathbf{V}\Lambda_d \quad (5.45)$$

La metodología del espacio nulo fue propuesta por [1983, Andry], a partir de la que se ha desarrollado el método de proyección introduce un problema relacionado con el cálculo de matrices inversas. La matriz $(\lambda_{di}\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ se toma como la base para generar los autovectores del sistema en lazo cerrado. Esta matriz puede ser singular si los autovalores deseados coinciden con los autovalores del sistema en lazo abierto, lo que representa un problema. En los trabajos de [1985, Kautsky] el método que se propone es obtener el espacio de vectores alcanzables sin la necesidad de invertir ninguna matriz. Esto dió lugar a los métodos de asignación recursiva denominados métodos KNV y más específicamente como Método 0 y Método 1.

5.6.3. MÉTODOS DE PROYECCIÓN PARA LA ASIGNACIÓN DE LA AUTOESTRUCTURA POR REALIMENTACIÓN DE LA SALIDA

La aplicación de la técnica EA a la determinación del controlador por realimentación de la salida pretende obtener una matriz \mathbf{K} , que cumpla con la ley de control $\vec{u} = -\mathbf{K}\vec{y}$, que permite describir el sistema en lazo cerrado de la siguiente forma:

$$\dot{\vec{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{BKC})\vec{x} \quad (5.46)$$

de forma que se cumpla lo siguiente:

- Para un determinado conjunto de autovalores deseados λ_i^d , con sus correspondientes autovectores v_i^d , encontrar la matriz de ganancia \mathbf{K} por realimentación de la salida, de forma que la matriz para el sistema realimentado, contenga un subconjunto de los autovalores deseados, con sus correspondientes autovectores, estando estos tan próximos como sea posible a los autovectores deseados.

La aplicación de la técnica de la asignación de la autoestructura, parte de dos premisas básicas:

- Las matrices \mathbf{B} y \mathbf{C} del sistema en lazo abierto son de rango completo.
- El sistema es controlable y observable.

disponiendo de las restricciones:

- Sólo pueden asignarse $\max(m,p)$ autovalores en lazo cerrado.
- En total pueden asignarse arbitrariamente tantos elementos del autovector como $\min(m,p)$.

Teniendo en cuenta que el sistema es controlable y observable, entonces la matriz \mathbf{K} asignará un máximo de $\max(m,p)$ autovalores, y parcialmente serán asignados un $\max(m,p)$ autovectores, con un $\min(m,p)$ en cada vector arbitrariamente elegidos [1997, De la Cruz]. Luego, p autovalores pueden ser asignados y m elementos de cada autovector pueden ser arbitrariamente elegidos.

Si consideramos el par autovalor, autovector a λ_i, v_i para el sistema en lazo cerrado [1993, Ching-Fang Li]:

$$\lambda_i v_i = (\mathbf{A} + \mathbf{BKC})v_i \quad (5.47)$$

despejando

$$v_i = (\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{BKC}v_i \quad (5.48)$$

Llamando

$$\mathbf{L}_i = (\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \quad (5.49)$$

y

$$\mathbf{z}_i = \mathbf{KC}v_i \quad (5.50)$$

los autovectores en lazo cerrado cumplen con la siguiente expresión:

$$v_i = L_i z_i \quad (5.51)$$

De esta relación se presume que el autovector v_i , asociado al autovalor λ_i deben pertenecer al espacio de L_i , conocido como el espacio alcanzable. La asignación de la autoestructura puede ser tratada como un problema de optimización, por aplicación directa de la técnica de mínimos cuadrados. Para ello es posible minimizar [1993, Ching-Fang Li]:

$$J_i = \min_{z_i} [v_i^d - L_i z_i]^T R_i [v_i^d - L_i z_i], \quad i = 1, \dots, p \quad (5.52)$$

La matriz R_i , es una matriz de peso con rango m . La interpretación geométrica de este proceso de minimización se puede observar en la Figura 5.4, mediante lo que se denomina proyección del autovector deseado en el subespacio de autovectores alcanzables.

La solución de vectores óptimos de z_i viene dada por la siguiente expresión:

$$z_i = (L_i^T R_i L_i)^{-1} L_i^T R_i v_i^d, \quad i = 1, \dots, p \quad (5.53)$$

y los autovectores alcanzables están dados por:

$$v_i^d = L_i z_i, \quad i = 1, \dots, p \quad (5.54)$$

Para encontrar la matriz de realimentación K se introduce una matriz de transformación T [1997, De la Cruz], expresada de la siguiente forma $T = [B \ P]$, siendo B una matriz identidad y P una matriz que hace que T tenga rango completo. Si se aplica la matriz T al sistema de primer orden $\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}$ se obtiene un sistema transformado:

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} = T^{-1} B \quad (5.55)$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \end{bmatrix} = T^{-1} A T \quad (5.56)$$

$$\bar{C} = C T \quad (5.57)$$

Con esta transformación se obtienen nuevos estados, autovalores y autovectores alcanzables, que vienen dados por:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{x}} &= \mathbf{T}^{-1} \mathbf{x} \\
\bar{\lambda}_i &= \lambda_i \\
\bar{\mathbf{v}}_i^a &= \begin{bmatrix} \bar{s}_i \\ \bar{w}_i \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{v}_i^a
\end{aligned} \tag{5.58}$$

Luego se puede determinar que la matriz de ganancia \mathbf{K} buscada es:

$$\mathbf{K} = -(\bar{\mathbf{S}} - \bar{\mathbf{A}}_1 \bar{\mathbf{V}})(\bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{V}})^{-1} \tag{5.59}$$

siendo:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{S}} &= [\lambda_1^d s_1, \dots, \lambda_{n_y}^d s_{n_y}] \\
\bar{\mathbf{V}} &= [\bar{v}_1^a, \dots, \bar{v}_{n_y}^a]
\end{aligned} \tag{5.60}$$

5.6.4. MÉTODOS DE ASIGNACIÓN DIRECTA (DEA – Direct Eigenstructure Assignment)

Entre los diferentes métodos desarrollados para asignación de la autoestructura de un sistema aeroespacial, se encuentra la de asignación directa de la autoestructura, denominado método DEA (Direct Eigenstructure Assignment) [1994, Davidson].

El método DEA, también se basa en las técnicas de proyección de autovectores deseados como se muestra gráficamente en la Figura 5.4, y tratándose de un método no iterativo.

Se va a considerar la ecuación del autovector para el sistema en lazo cerrado:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BKC})\mathbf{V} = \mathbf{V}\Lambda_d \tag{5.61}$$

para cada modo deseado se tiene lo siguiente:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BKC})\mathbf{v}_i = \lambda_{di} \mathbf{v}_i, \text{ para } i = 1 \dots p \tag{5.62}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i - \lambda_{di} \mathbf{v}_i + \mathbf{BKC}\mathbf{v}_i = 0 \tag{5.63}$$

$$[\mathbf{A} - \lambda_{di} \mathbf{I} \quad \mathbf{B}] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_i \\ \mathbf{KC}\mathbf{v}_i \end{bmatrix} = 0 \tag{5.64}$$

De esta ecuación se obtiene que:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_i \\ \mathbf{KC}\mathbf{v}_i \end{bmatrix} \in \mathcal{N}[\mathbf{A} - \lambda_{di} \mathbf{I} : \mathbf{B}] \tag{5.65}$$

Esta expresión $[A - \lambda_{di} \mathbf{I} : \mathbf{B}]$, representa un espacio nulo, que no tiene una solución trivial. Cualquier combinación de este espacio nulo puede producir un vector v_i , que cuando es considerado como un autovector, permitirá obtener el autovalor deseado λ_{di} . A este conjunto de soluciones se le denomina “Vector de espacio alcanzable”. Este método fue propuesto por [1983, Andry], siendo conocido como el método del espacio nulo. En este método el autovector alcanzable v_i , puede ser obtenido mediante proyección del vector deseado v_{di} en el espacio alcanzable. La Figura 5.4 muestra la proyección del vector deseado en el vector de espacios alcanzable y definido por el espacio nulo $[A - \lambda_{di} \mathbf{I} : \mathbf{B}]$.

Existen otros métodos para determinar el vector de espacio alcanzable. A partir del desarrollo matemático anterior:

$$A v_i - \lambda_{di} v_i + B K C v_i = 0 \quad (5.66)$$

$$(\lambda_{di} \mathbf{I} - A) v_i = B K C v_i \quad (5.67)$$

El vector v_i debe permanecer en el espacio definido por las columnas de $(\lambda_{di} \mathbf{I} - A)^{-1} \mathbf{B}$, pudiendo esta matriz ser tomada como vector básico para los autovalores del sistema en lazo cerrado. En este sistema no es necesario calcular el espacio nulo. Si se tiene la precaución de no hacer coincidir los autovalores deseados en lazo cerrado con los autovalores en lazo abierto del sistema, no se obtendrán problemas de cálculo en la matriz $(\lambda_{di} \mathbf{I} - A)$. Por lo tanto, la matriz de ganancia del controlador, por extensión al conjunto completo de autovalores y autovectores se obtiene a partir de (5.67), en donde las matrices inversas son pseudos-inversas:

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{V} \Lambda - \mathbf{A} \Lambda) (\mathbf{C} \mathbf{V}^{-1}) \quad (5.68)$$

5.6.5. MÉTODOS DE ASIGNACIÓN RECURSIVA

Los métodos de asignación recursiva se basan en la idea de seleccionar los autovectores del sistema en lazo cerrado a partir de los subespacios de autovectores alcanzables, de forma que la sensibilidad global de la matriz de autovectores se minimice. Estas técnicas son aplicables tanto a sistemas que realimentan la salida como a los que realimentan estados.

El objetivo principal de los métodos de asignación recursiva es seleccionar los autovectores del sistema en lazo cerrado de los subespacios alcanzables a partir de los autovectores deseados para que la sensibilidad completa de la matriz de autovectores sea mínima. A la vez se busca que la sensibilidad de los autovalores sea lo más baja posible. Existen diversas técnicas de asignación basadas en procedimientos recursivos que se presentan a continuación.

5.6.5.1. MÉTODO DE ACTUALIZACIÓN DE RANGO n .

A partir del método de asignación introducido en la metodología DEA, se define el de Rango n . Este tiene como objetivo asignar autoestructuras con baja sensibilidad de autovalores, mediante un proceso iterativo. Esto se lleva a cabo, resolviendo la matriz ortogonal más próxima a la matriz de autovectores por la derecha. Las columnas de esta matriz ortogonal son proyectadas en el subespacio alcanzable formando una matriz de rango n .

El método calcula en cada iteración la matriz ortogonal más próxima a la forma real de la matriz de autovectores por la derecha. La matriz de autovectores obtenida es proyectada en la matriz alcanzable para obtener una actualización de rango n de la matriz de autovectores. Este método optimiza el límite superior de la matriz de sensibilidad global $\eta(V)$ aplicada a la matriz de autovectores obtenidos.

Matemáticamente el método está basado en el desarrollo de [1998, Liu]. Este contempla el espacio de autovectores obtenidos después de un proceso iterativo, repetido k veces, con el que la matriz de autovectores queda definida como V^k . El método matemático define la matriz ortogonal U^k como la más próxima a V^k según el criterio de minimización de Frobenius definido como:

$$\min_{U^k} \|U^k - R^k\|_F \quad (5.69)$$

y considerando que $(U^k)^T U^k = I$. La solución de este problema es $R^k = XSY^T$, siendo X e Y matrices cuadradas y S una matriz diagonal. La solución mínima de la ecuación (5.69) viene dada por $U^k = XY^T$. De forma descriptiva el proceso iterativo se realiza de la siguiente forma:

- Especificación de los autovalores y autovectores deseados, Λ_d y V_d respectivamente. Este paso representa el inicio de la iteración ($k = 0$).
- Obtención de la matriz U^k más próxima a la deseada V^k .
- Utilizar técnicas de proyección para proyectar U^k en el subespacio de autovectores alcanzado.
- Calcular la sensibilidad global de la matriz de autovectores $\eta(V)$. Si el criterio de diseño no es alcanzado se repite el proceso. Este índice de sensibilidad es estable si se han conseguido los objetivos.
- Cálculo del controlador K .

5.6.5.2. MÉTODO DE ACTUALIZACIÓN DE RANGO 1.

(Rank 1 Update): Este método iterativo actualiza cada uno de los autovectores de la matriz de autovectores de forma individual. Cada autovector es sustituido por uno con ortogonalidad máxima al subespacio formado por el anterior. Esta solución es equivalente a requerir que el ángulo disponible entre el vector que es realmente ortogonal a este espacio y un autovector alcanzable sea minimizado. Por ello, los autovectores en lazo cerrado se requieren para que sean tan ortogonales como sea posible entre sí, lo que mejora la medida de sensibilidad global de los autovalores. Este

método inicialmente desarrollado por [1985, Kautsky] para el caso real, fue posteriormente planteado para el caso complejo por [1988, Mudge]. Los algoritmos de cálculo de estos controladores también utilizan algoritmos de proyección y la decisión de iteración la basan en el cálculo de el índice de sensibilidad dado por $\eta(V)$ como en el caso anterior.

5.6.5.3. MÉTODOS KNV: MÉTODO 0 Y MÉTODO 1.

El objetivo principal de los métodos propuestos por [1985, Kautsky] es doble. Por un lado es determinar una solución bien condicionada (robusta) en términos de la sensibilidad de los autovalores asignados frente a perturbaciones, y como segundo objetivo que las matrices de ganancia del sistema sean mínimas.

Existen dos métodos iterativos para el cálculo de un controlador robusto aplicado a sistemas realimentados por estados, conocidos como *método 0* y *método 1*.

- **Método 0:** El Objetivo del método es seleccionar vectores que sean lo más ortogonales posibles al espacio formado por el resto de los vectores. La solución se encuentra por iteración, en la que cada vector es reemplazado por un nuevo vector con ángulo máximo al espacio actual.
- **Método 1:** La solución es obtenida por iteración y aplicación de actualización de rango-1. El objetivo es seleccionar un nuevo vector que minimice la medida de condición de la matriz en cuestión. El proceso finaliza al encontrar un valor adecuado en el número de condición.

El cálculo de la matriz del controlador se obtiene a partir de la siguiente ecuación:

$$(A + BKC)V = V\Lambda_d \quad (5.70)$$

$$(BKC) = V\Lambda_d V^{-1} - A \quad (5.71)$$

La matriz B se puede descomponer en la siguiente expresión:

$$B = [U_0 \ U_1] \begin{bmatrix} Z \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.72)$$

siendo U_0 y U_1 matrices ortogonales y Z no singular. Sustituyendo el valor de B en la expresión (5.70) se obtiene la siguiente:

$$ZKC = U_0^T (V\Lambda_d V^{-1} - A) \quad (5.73)$$

$$0 = U_1^T (V\Lambda_d V^{-1} - A) \quad (5.74)$$

De aquí:

$$U_1^T (\lambda_{di} I - A) v_i = 0 \quad (5.75)$$

Para evitar obtener una solución trivial tal como $v_i = 0$, el autovector alcanzable debe permanecer en el espacio nulo de la matriz $U_1^T (\lambda_{di} I - A)$. En la práctica este resultado no es mejor que el obtenido del espacio nulo de $[A - \lambda_{di} I \ B]$. La matriz del controlador obtenida a partir de la expresión (5.73) queda como:

$$K = Z^{-1} U_0^T (V \Lambda_d V^{-1} - A) C^{-1} \quad (5.76)$$

Al igual que en los métodos anteriores, este se basa en la minimización del condicionamiento de la matriz de autovectores $\eta(V)$.

Los métodos expuestos en esta sección se han presentado como métodos iterativos. Independientemente de la técnica utilizada todos ellos tienen como objetivo mejorar algún índice de comportamiento, como se ha visto los índices de condicionamiento de la matriz de autovectores. El objetivo global de estas técnicas iterativas es mejorar la sensibilidad de la autoestructura frente a perturbaciones. La Tabla 5.3 presenta un resumen de las características más relevantes de los métodos utilizados para mejorar la sensibilidad.

Método	Características	Observaciones
DEA	No es iterativo. Proyección directa de un conjunto de vectores sobre el subespacio alcanzable. También puede obtenerse el controlador sin proyección	No es la solución óptima al problema de la sensibilidad en la asignación de autovalores .
Rank-n	Proyección	Ortogonalidad de la matriz respecto de la matriz de autovectores por la derecha. Produce el sistema en lazo cerrado con los números de condición de autovalor más bajos
Rank-1	Calcula la primera autoestructura por cualquier método.	Actualiza cada uno de los autovectores de la matriz de autovectores de uno en uno (no todos a la vez). Los autovectores en lazo cerrado son forzados a ser lo más ortogonales posibles a los otros. Mejoran la sensibilidad global.
Método 0	Parte de la descomposición de la matriz B.	El objetivo es elegir del espacio obtenible los autovectores que sean los más ortogonales posible al espacio expandido por el resto de autovectores.
Método 1	Parte de la descomposición de la matriz B.	El objetivo es minimizar la medida del número de condición

Tabla 5.3: Métodos de Diseño Iterativos.

5.6.6. CONTROL CON AUTOESTRUCTURAS ORTOGONALES

Recientemente en la literatura especializada de control aplicada a sistemas de control de vibraciones ha aparecido una aplicación basada en la asignación de autoestructuras que hace referencia a lo que denomina la autoestructura ortogonal [2009, Rastgaar]. El procedimiento que ofrece el sistema basado en la ortogonalidad de la autoestructura se basa en la definición de un conjunto de autovectores deseados en lazo cerrado que desacoplen los modos de la estructura, rechace perturbaciones y minimice el excedente de energía de un modo a otro. El objetivo de ortogonalidad se basa en que los autovectores del sistema en lazo cerrado sean ortogonales a los autovectores del sistema en lazo abierto. El método sigue trabajando con el concepto de espacio admisible, y se requiere que el conjunto de autovectores del sistema en lazo cerrado pertenezcan al espacio alcanzado. El método también establece que no es necesaria una predeterminación de la autoestructura completa del sistema en lazo cerrado y que no es necesario aplicar ninguna restricción a los autovectores del sistema. El soporte matemático de esta técnica parte de un sistema de primer orden, con realimentación de la salida como el dado por:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= A\bar{x} + B\bar{u} + E\bar{f} \\ \bar{y} &= C\bar{x} \\ \bar{u} &= K\bar{y}\end{aligned}\quad (5.77)$$

Donde A es la matriz de estado de dimensión $n \times n$, m es el número de actuadores y sensores, B es la matriz de entrada y E es una matriz de perturbación de entrada, siendo \bar{f} el vector de perturbaciones y \bar{u} el vector de entrada. La matriz del controlador se representa por K con dimensiones $m \times m$. Procediendo del mismo modo que en la ecuación (5.64), se observa que $\begin{bmatrix} \phi_i \\ KC\phi_i \end{bmatrix}$ pertenece al espacio nulo dado por la matriz $S_{\lambda_i} = [A - \lambda_i I \quad B]$. El procedimiento continúa con la descomposición en valores singulares de S_{λ_i} , expresado de la siguiente forma:

$$S_{\lambda_i} = [U_i]_{n \times n} \left[\sum_i \mid 0_{n \times m} \right]_{n \times (n+m)} [V_i^T]_{(n+m) \times (n+m)} \quad (5.78)$$

En la expresión (5.78) U_i y V_i representan matrices ortonormales por la izquierda y por la derecha. Si V_i es particionada como se representa en la expresión (5.79), donde la segunda columna expande el espacio nulo de S_{λ_i} .

$$[V_i]_{(n+m) \times (n+m)} = \begin{bmatrix} [V_{11}^i]_{n \times n} & [V_{12}^i]_{n \times m} \\ [V_{21}^i]_{m \times n} & [V_{22}^i]_{m \times m} \end{bmatrix} \quad (5.79)$$

El proceso determina que los autovectores por la derecha y por la izquierda están representados por V y W , y quedan expresados como:

$$V = [V_{12}^1 r^1 \dots V_{12}^m r^m] \quad (5.80)$$

$$W = [V_{22}^1 r^1 \dots V_{22}^m r^m] \quad (5.81)$$

Donde r^i es un vector de coeficientes que necesita ser determinado. La expresión del controlador está definida por (5.20). Por este proceso, denominado control por autoestructuras ortogonales, se obtiene una regeneración del sistema en lazo abierto mediante la búsqueda de los autovectores del sistema en lazo abierto y de sus vectores ortogonales para los modos de operación definidos para los autovalores del sistema en lazo abierto. Esto quiere decir, que los autovectores del sistema en lazo abierto de los autovalores que definen los modos del sistema están definidos por la intersección de los autovectores del sistema en lazo abierto y por el conjunto de autovectores que pertenece al conjunto de autovectores alcanzables [2008, Rastgaar].

5.7. REQUISITOS DE DISEÑO

El diseño del controlador por medio de métodos EA ha de basarse en unos objetivos de diseño asequibles desde el propio método. Para establecer unos objetivos de diseño aceptables y alcanzables se ha de tener un conocimiento profundo del comportamiento del sistema, obtenido de un análisis modal del mismo. El satélite considerado posee dos modos diferenciados, los modos orbitales y los modos flexibles, debidos a deformaciones elásticas de los elementos adosados al cuerpo principal. A partir de estas consideraciones se pueden plantear un objetivo simple de diseño. Este está caracterizado por obtener un grado de desacoplo entre los modos aceptable.

- **Desacoplo de los modos:** Se persigue con este objetivo atenuar la interacción entre los modos del sistema debidas a los movimientos de orientación del satélite. Desde el punto de vista frecuencial se trata de no excitar aquellas frecuencias que pudieran conducir a situaciones de deformación de los paneles solares no desadas. Por otro lado, se puede plantear la obtención de una grado de desacoplo también aceptable entre los modos orbitales. Considerando ambos casos, el objetivo de desacoplo de los modos es considerado como un objetivo doble. Desde el punto de vista de la autoestructura, los objetivos de desacoplo se convierten en desacoplos entre modos y estados, modos y salidas, señales de referencia a modos y por último señales de referencia a salidas.
- **Estabilidad:** Esta es el objetivo básico que ha obtener cualquier sistema realimentado, en el que se ha incluido la acción de un controlador. El satélite para la configuración considerada presenta inestabilidad. La estabilidad está relacionada con los valores de los momentos de inercia del satélite para los tres ejes.
- **Velocidad en la respuesta:** La velocidad de respuesta del sistema a excitación unitaria determina la respuesta transitoria del mismo. Esta respuesta va a estar directamente ligada a la repercusión entre los modos del sistema.
- **Amortiguamiento:** La determinación del grado de amortiguamiento, como en sistemas SISO, también puede ser caracterizada entre los objetivos de diseño del controlador. Al especificar un valor determinado de amortiguamiento hay que

tener en cuenta el esfuerzo en posicionar los autovalores del sistema en lazo cerrado en lugares diferentes o alejados de las posiciones que ocupaban en lazo abierto. Este objetivo puede repercutir sobre el esfuerzo de control aplicado sobre los actuadores.

- **Robustez:** Este objetivo está directamente relacionado con el comportamiento del sistema frente a perturbaciones o errores de modelado. Los algoritmos utilizados en la asignación de la autoestructura ofrecerán diferentes resultados en la medida seleccionada como indicador de robustez.

Se establece por tanto una serie de objetivos de diseño para el controlador que tienen que conjugarse con la técnica EA. Objetivos convencionales de diseño son garantizar la estabilidad y obtener un grado de desacople entre los modos aceptable. Esta estrategia representa lo que puede denominarse objetivos de diseño simples. Si la pretensión en el diseño del controlador es más compleja, y se desean integrar características de robustez y amortiguamiento, la estrategia se convierte en objetivos de diseño multiobjetivo.

Se ha de tener en cuenta en el diseño, que de forma general, no pueden conseguirse todos los objetivos de diseño planteados en el sistema multiobjetivo, sino que realmente se van a presentar limitaciones. Entre estas se encuentran las limitaciones matemáticas presentes en la propia técnica EA en cuanto a la asignación máxima de elementos para los autovectores. Por otro lado se encuentran las físicas debidas al sistema. Es decir, pueden presentarse situaciones en que los autovalores no se pueden trasladar a posiciones consideradas menos sensibles, u obtener los valores de amortiguamiento y modelado de la respuesta transitoria requeridos.

En cuando a la respuesta en frecuencia, las limitaciones se presentan en los sistemas MIMO en las relaciones frecuencia y fase requeridas [1993,Maciejowski]. Obtener un determinado margen de ganancia puede conducir a la introducción de márgenes de fase no adecuados y viceversa, volviendo a afectar a la robustez del sistema.

CAPÍTULO 6

ANÁLISIS Y SÍNTESIS DEL SISTEMA CON CONTROLADORES DISEÑADOS POR MÉTODOS DE ASIGNACIÓN DE AUTOESTRUCTURAS - EA

6.1. INTRODUCCIÓN

El objeto de este capítulo es aplicar al modelo lineal y no lineal obtenido en capítulos anteriores la técnica EA por diferentes métodos. Para ello, se va a desarrollar el modelo matemático con datos concretos respecto de las dimensiones físicas de un satélite tipo. Con estos datos se obtiene el modelo matemático aplicado para obtener los controladores por diferentes técnicas. Así mismo, se realizará un análisis de robustez sobre el sistema que presente mejores prestaciones para el índice del número de condición.

En los capítulos anteriores se ha desarrollado el modelo matemático del sistema rígido-flexible y se han introducido diferentes técnicas de Asignación de Autoestructuras. Este capítulo tiene como objetivo principal el diseño y síntesis de diversos controladores por técnicas EA. Estos controladores integrados en el sistema permitirán obtener los sistemas en lazo cerrado, a partir de los que se obtendrán los datos correspondientes del comportamiento del mismo.

El análisis de los resultados permitirá conocer la estabilidad del sistema, la aproximación de la autoestructura obtenida a la deseada y valorar la robustez y la sensibilidad. Todos estos datos son extraídos para un conjunto de controladores que permitirán conocer el que presenta mejor comportamiento frente a requisitos.

Las simulaciones se van a realizar en diferentes y grupos, que permitirán valorar aquellos controladores que ofrecen mejores prestaciones, y posteriormente se analizarán diferentes casos para valorar las prestaciones de las técnicas EA empleadas. Para llevar a término esta serie de simulaciones es necesario disponer de datos numéricos. Estos son aportados también en este capítulo como aquellos que se corresponden con vehículo flexible de tamaño medio.

6.2. OBTENCIÓN NUMÉRICA DEL MODELO MATEMÁTICO

La obtención de un modelo numérico se aplica a la ecuación en el espacio de estados. Estas están basadas en la ecuación del movimiento obtenida a partir del cálculo del Lagrangiano dado por la ecuación (4.85):

$$M\ddot{u} + G\dot{u} + K\bar{u} = Q_{nc}$$

Para obtener la ecuación del movimiento en el espacio de estados, se define el vector de estado, compuesto de los ángulos de Euler, de las deformaciones elásticas de los paneles, y de las derivadas respecto del tiempo de las anteriores, de acuerdo con la expresión (4.98):

$$\bar{\mathbf{x}} = [\phi \quad \theta \quad \psi \quad q_1 \quad r_1 \quad q_2 \quad r_2 \quad \dot{\phi} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\psi} \quad \dot{q}_1 \quad \dot{r}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{r}_2]^T$$

Las ecuaciones de estados, adaptadas de la ecuación del movimiento, quedan definidas por (4.93):

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{y}} &= \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\bar{\mathbf{u}}\end{aligned}$$

La derivada del vector de estado queda definida de la forma:

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = [\dot{\phi} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\psi} \quad \dot{q}_1 \quad \dot{r}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{r}_2 \quad \ddot{\phi} \quad \ddot{\theta} \quad \ddot{\psi} \quad \ddot{q}_1 \quad \ddot{r}_1 \quad \ddot{q}_2 \quad \ddot{r}_2]^T \quad (6.1)$$

Las matrices de estado \mathbf{A} y control \mathbf{B} se definen como en (4.94) y (4.95):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_{n \times n} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{M}^{-1} \begin{bmatrix} 0_{(n-m) \times m} \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{(m \times n)} = \mathbf{eye}(\mathbf{I})$$

$$\mathbf{D}_{(n \times m)} = [0]_{n \times m}$$

Las dimensiones de las matrices del sistema de primer orden son:

- Matriz de estados: $\mathbf{A}_{(n \times n)} \rightarrow n = 14 \rightarrow \mathbf{A}_{(14 \times 14)}$
- Matriz de control: $\mathbf{B}_{(n \times m)} \rightarrow m = 3 \rightarrow \mathbf{B}_{(14 \times 3)}$
- Matriz de salida: $\mathbf{C}_{(m \times n)} \rightarrow \mathbf{C}_{(14 \times 14)}$
- Matriz control – salida: $\mathbf{D}_{(n \times m)} \rightarrow \mathbf{D}_{(14 \times 14)}$

Se observa que el sistema es un sistema MIMO, con tres entradas, las correspondientes a los pares de control y las salidas correspondientes a las medidas de desviación angular y deformación de los paneles.

La configuración simétrica de los paneles solares en el satélite hace que exista redundancia en los estados del sistema. Esto es, el sistema incluye coordenadas generalizadas tanto para flexión como para torsión en los dos paneles considerados. Como el comportamiento en lo que a deformación de los paneles solares es completamente equivalente es interesante considerar la posibilidad de reducir el modelo para obtener un sistema reducido pero matemáticamente

representativo del sistema real. Con ello las simulaciones se realizarán con un sistema más simple, pero igualmente válido. El sistema quedará reducido al prescindir de las coordenadas de deformación del segundo panel solar, que están dadas por q_2, r_2 y sus correspondientes derivadas primeras \dot{q}_2, \dot{r}_2 . Por tanto, el número de estados considerado será de $n = 10$, permaneciendo las mismas entradas y salidas del sistema. Las dimensiones del sistema quedan como se muestra a continuación:

- Matriz de estados: $A_{(n \times n)} \rightarrow n = 10 \rightarrow A_{(10 \times 10)}$
- Matriz de control: $B_{(n \times m)} \rightarrow m = 3 \rightarrow B_{(10 \times 3)}$
- Matriz de salida: $C_{(m \times n)} \rightarrow C_{(10 \times 10)}$
- Matriz control – salida: $D_{(n \times m)} \rightarrow D_{(10 \times 10)}$

6.2.1. MATRICES DE MASA, GIROSCÓPICA Y DE RIGIDEZ

Para calcular las matrices de masa, giroscópica y de rigidez, M, G y K respectivamente, del sistema y obtener finalmente la matriz de estado A y de control B es necesario disponer de los valores de los parámetros del vehículo. Los parámetros presentados en la Tabla 6.1 se corresponden con aquellos pertenecientes a un vehículo del tipo “minisat” dotado de paneles solares. A partir de estos datos se calcularán todas las expresiones definidas en el CAPÍTULO 3 y 4 que permitan obtener las mencionadas matrices.

Parámetros	Notación	Valor
Longitud del Panel	L	2 m
Rigidez del Panel Solar	EI	1.3 e+09 N.m ²
Dimensiones del elemento central del vehículo	A	0.6 x 0.6 x 0.6 m
Momentos de Inercia	I_x, I_y, I_z	14.11, 12.072, 12.60 Kg.m ²

Tabla 6.1: Datos numéricos del vehículo rígido-flexible.

El proceso se inicia con el cálculo de las funciones de deformación $\phi(\xi)$ y $\psi(\xi)$. Los métodos supuestos para el cálculo de las deformaciones de los paneles solares permiten seleccionar funciones de deformación de tipo senoidal. Las funciones de forma se consideran tanto para la deformación debida a flexión, como para la deformación debida a torsión.

- **Flexión:** Una excelente función de forma es la presentada en la siguiente ecuación que tiene el mismo efecto que una carga uniformemente distribuida.

$$\varphi(\xi) = \xi^2 (\xi^2 + 6l^2 - 4\xi l) \quad (6.2)$$

Esta función de forma satisface las condiciones de contorno siguientes. En el extremo empotrado el desplazamiento y la pendiente son cero.

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0 \quad (6.3)$$

El resto de condiciones de contorno son la fuerza cortante y el momento flector nulo en el extremo libre:

$$\varphi''(l) = \varphi'''(l) = 0 \quad (6.4)$$

Se pretende que en el extremo del panel el desplazamiento sea la coordenada generalizada q_i . Para ello la ley de desplazamientos se normaliza de la siguiente forma:

$$\varphi(\xi) = \frac{\xi^2 (\xi^2 + 6l^2 - 4\xi l)}{\varphi(l)} = \frac{\xi^2 (\xi^2 + 6l^2 - 4\xi l)}{3l^4} \quad (6.5)$$

La Figura 6.1 muestra la gráfica de deformación longitudinal del panel para el primer modo.

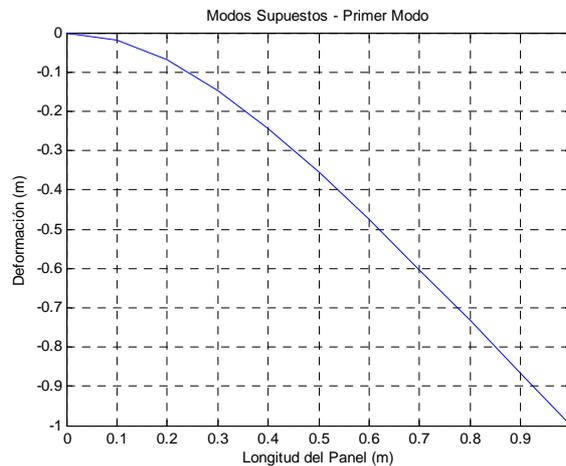


Figura 6.1: Deformación de los Paneles por Flexión para la Función de Forma $\phi(\xi)$.

- **Torsión:** La deformación debida a torsión, debido a su magnitud, puede ser sustituida por una ley lineal de ángulos, de la siguiente forma:

$$\psi(\xi) = \frac{\xi}{l} \quad (6.6)$$

Con estas funciones de forma se pueden obtener resultados concretos para las energías de deformación por flexión y por torsión, teniendo en cuenta que los paneles son de secciones constantes y homogéneas.

$$m_i = \int_0^l \mu_i \phi^2(\xi) d\xi = \frac{104}{405} l \mu = \frac{104}{405} m = 0.6162 \text{ kg} \quad (6.7)$$

$$I_{xi} = \int_0^l \mu_i \left(\xi + \frac{a}{2} \right)^2 d\xi = \frac{1}{12} m (4l^2 + 6la + 3a^2) = 4.256 \text{ kg.m}^2 \quad (6.8)$$

$$Q_{xi} = \int_0^l \mu_i \left(\xi + \frac{a}{2} \right) \phi(\xi) d\xi = \frac{1}{45} m(13l + 9a) = 4.256 \text{ kg.m} \quad (6.9)$$

$$I_{Yi} = \int_0^l \left[\int_z \rho b(\xi, z) z^2 dz \right] d\xi = \frac{1}{12} lh^3 \rho b = \frac{mh^2}{12} = 1.8 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2 \quad (6.10)$$

$$J_{Yi} = \int_0^l \left[\int_z \rho b(\xi, z) z^2 dz \right] \psi^2(\xi) d\xi = \frac{1}{36} lh^3 \rho b = \frac{mh^2}{36} = 610^{-5} \text{ kg.m}^2 \quad (6.11)$$

$$Q_{Yi} = \int_0^l \left[\int_z \rho b(\xi, z) \psi(\xi) z dz \right] d\xi = 0 \quad (6.12)$$

Luego las energías se obtienen mediante la aplicación numérica de los datos anteriores, obteniéndose las contribuciones a la energía cinética total procedentes de la rotación del vehículo, de la deformación por flexión y la deformación por torsión:

$$E_{C_total} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} & \dot{\theta} & \dot{\psi} & \dot{q}_1 & \dot{r}_1 & \dot{q}_2 & \dot{r}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x + I_{x1} + I_{x2} & 0 & 0 & Q_{x1} & 0 & Q_{x2} & 0 \\ 0 & I_y + I_{y1} + I_{y2} & 0 & 0 & Q_{y1} & 0 & Q_{y2} \\ 0 & 0 & I_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_{x1} & 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{y1} & 0 & 0 & J_{y1} & 0 & 0 \\ Q_{x2} & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & Q_{y2} & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{y2} \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

Y en formato numérico:

$$E_{C_total} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} & \dot{\theta} & \dot{\psi} & \dot{q}_1 & \dot{r}_1 & \dot{q}_2 & \dot{r}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7.28 & 0 & 0 & 1.5786 & 0 & 1.5786 & 0 \\ 0 & 5.394 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7.26 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.5786 & 0 & 0 & 2.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 \\ 1.5786 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

Los términos de rigidez generalizada a flexión y de rigidez generalizada de torsión son:

$$K_{Fi} = \int_0^l E \bar{I}_x (\phi''(\xi))^2 d\xi = \frac{16 E \bar{I}_z}{5 l^3} = \frac{16 E b h^3}{60 l^3} = 468 \quad (6.15)$$

$$K_{Ti} = \int_0^l G K (\psi'(\xi))^2 d\xi = \frac{1}{l} G K = \frac{1}{l} \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{h b^3}{3} = 16 \cdot 10^4$$

Y la energía de deformación total expresada en forma matricial es:

$$E_{C_total} = \begin{bmatrix} \phi & \theta & \psi & q_1 & r_1 & q_2 & r_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{F1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{T1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{F2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{T2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \\ q_1 \\ r_1 \\ q_2 \\ r_2 \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

Con datos numéricos:

$$E_{C_total} = \begin{bmatrix} \phi & \theta & \psi & q_1 & r_1 & q_2 & r_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 468 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 468 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \cdot 10^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \\ q_1 \\ r_1 \\ q_2 \\ r_2 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

La aplicación numérica para la obtención de las matrices de masa, giroscópica y de rigidez se muestra a continuación.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} I_X + I_{X2} + I_{X2} & 0 & 0 & Q_{X1} & 0 & Q_{X2} & 0 \\ 0 & I_Y + I_{Y1} + I_{Y2} & 0 & 0 & Q_{Y1} & 0 & Q_{Y2} \\ 0 & 0 & I_Z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_{X1} & 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{Y1} & 0 & 0 & J_{Y1} & 0 & 0 \\ Q_{X2} & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & Q_{Y2} & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{Y2} \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_Y - I_Z - I_X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I_X + I_Z - I_Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 4\omega_0^2(I_Y - I_Z) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3\omega_0^2(I_X - I_Z) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_0^2(I_Y - I_X) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{F1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{T1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{F2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{T2} \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

Estas matrices con datos numéricos quedan como:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 40.45 & 0 & 0 & 0.5786 & 0 & 0.5786 & 0 \\ 0 & 37.132 & 0 & 0 & 0.001 & 0 & 0.001 \\ 0 & 0 & 34.23 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5786 & 0 & 0 & 0.6162 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.001 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5786 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6162 & 0 \\ 0 & 0.001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.045086 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.03905 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1.2555 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.0183 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.5857 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 468 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 468 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \cdot 10^4 \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

Se observa que en la matriz giroscópica \mathbf{G} se ha incluido amortiguamiento de valor 0.7.

6.2.2. MATRICES DEL SISTEMA DINÁMICO

A partir de los resultados numéricos obtenidos para las matrices de masa, giroscópica y de rigidez, se obtienen las correspondientes a las matrices del sistema expresadas en (4.92):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3.1461e-007 & 0 & 0 & 11.012 & 0 & 0 & 0 & -1.1298e-003 & 1.6471e-002 & 0 \\ 0 & -5.4354e-007 & 0 & 0 & 4.3090 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.8852e-005 \\ 0 & 0 & 1.0484e-007 & 0 & 0 & -1.1408e-003 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.9542e-007 & 0 & 0 & -7.6983e+002 & 0 & 0 & 0 & 1.0608e-003 & -1.1515 & 0 \\ 0 & 5.4354e-010 & 0 & 0 & -1.6000e+005 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.7 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2.5058e-002 & 0 & 0 \\ 0 & 2.6931e-002 & 0 \\ 0 & 0 & 2.9214e-002 \\ -2.3529e-002 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

La función principal que realiza el sistema de control es la de regulador. Esta función se aplica a la consigna de actitud que es aquella que permite que el vehículo apunte siempre a una referencia fija sobre la superficie terrestre, permaneciendo la posición del satélite próxima al punto de equilibrio. La Figura 6.2 muestra el diagrama de bloques del sistema de control es el siguiente:

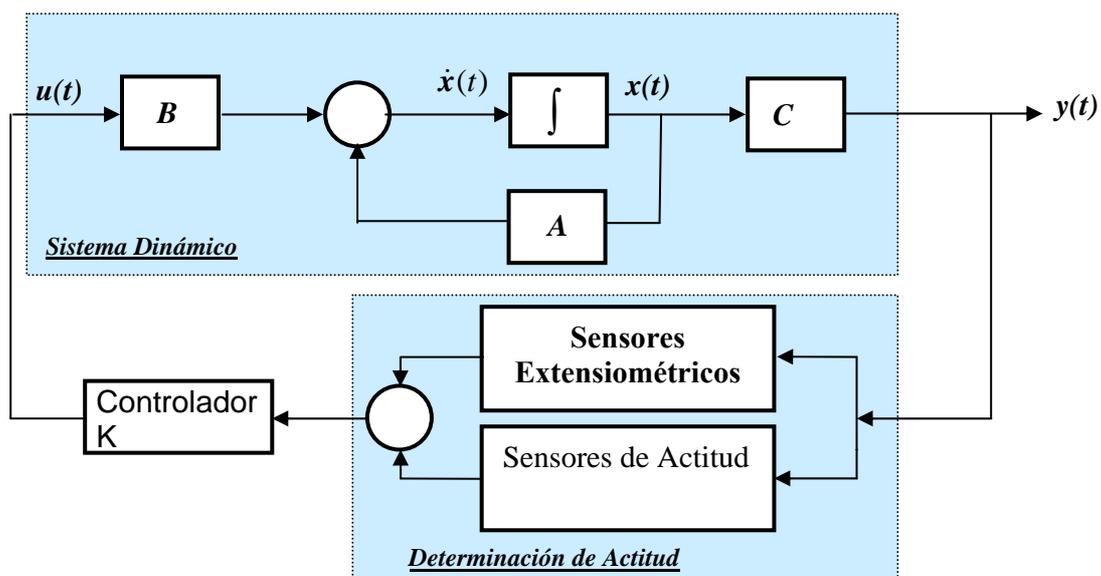


Figura 6.2: Diagrama de Bloques del Sistema de Control de Actitud con Realimentación de la Salida.

La determinación de actitud se consigue con los sensores adecuados que suministren información de orientación y de deformación de los paneles solares, tanto para flexión como para torsión. El controlador, calcula la ganancia de la matriz K , tomando como entradas las medidas proporcionadas por los sensores del bloque de determinación de actitud.

6.3. ANÁLISIS DEL SISTEMA LINEAL EN LAZO ABIERTO

El análisis del sistema lineal en lazo abierto tiene como objeto obtener un conocimiento adecuado del sistema sobre las maniobras de actitud, las deformaciones de los paneles y las repercusiones entre ambos.

El conocimiento del comportamiento del sistema en lazo abierto permitirá tomar decisiones de calado en el diseño del controlador. Mediante un análisis modal del sistema en lazo abierto se podrán conocer aquellas frecuencias de interés que estarán relacionadas con los modos del sistema, además de tener información del amortiguamiento del sistema a las mencionadas frecuencias. Este análisis modal suministrará además información relevante respecto de la relación existente entre los modos del sistema, es decir si estos se encuentran acoplados.

Es necesario recordar que existe un acoplamiento inherente en sistemas mecánicos flexibles que es necesario controlar, en el sentido de amortiguar o atenuar. El análisis en lazo abierto también permitirá determinar la estabilidad del sistema, lo que llevará a determinar las acciones preliminares sobre el sistema. A la vez que se realiza el análisis modal del sistema se realiza un análisis preliminar de robustez del mismo. Esto permitirá conocer la robustez del sistema lineal en lazo abierto y establecer los criterios de medida de la misma para el resto de ensayos y simulaciones que se realicen sobre el sistema.

6.3.1. ANÁLISIS MODAL DEL SISTEMA

El análisis modal realizado al sistema en lazo abierto permite conocer los autovalores y autovectores del mismo, el amortiguamiento del sistema en los autovalores determinados, así como la frecuencia de los mismos. Cada uno de los autovalores del sistema se va a relacionar con un modo del mismo, lo que permitirá establecer los requisitos de diseño del controlador. Los datos numéricos presentados en la Tabla 6.2 muestran los modos y sus características para el sistema en lazo abierto. Mientras que la Tabla 6.3 presenta la autoestructura del sistema para los parámetros del vehículo flexible considerado dado por las matrices del sistema expresadas en (6.24).

Modo Dinámico		Autovalores	Amortiguamiento	Frecuencia Natural (rad/seg)	Sensibilidad de los Autovalores	Número de Condición
Modos Orbitales	Alabeo	$\pm 2.91e-002$	$\pm 1.00e+000$	2.91e-002	2.8472e+002 2.9477e+002	1156.0321
	Cabeceo	$0.0 \pm 3.24e-002i$	0.0	3.24e-002	1.5444e+001	
	Guiñada	$-6.15e-004 \pm 3.48e-002i$	1.76e-002	3.48e-002	2.8959e+002	
Modos de Deformación	Flexión	$0.0 \pm 2.77e+001i$	0.0	2.77e+001	1.3892e+001	
	Torsión	$0.0 \pm 4.00e+002i$	0	4.00e+002	2.00e+002	

Tabla 6.2: Modos y Autovalores del Sistema en Lazo Abierto.

Modos del Sistema						
	Modos Orbitales			Modos de Deformación		
	Alabeo	Cabeceo	Guiñada	Flexión	Torsión	
Autovalores	$\pm 2.91e-002$	$0.0 \pm 3.24e-002i$	$-6.15e-004 \pm 3.48e-002i$	$0.0 \pm 2.77e+001i$	$0.0 \pm 4.00e+002i$	
Autovectores	-6.1063e-002 5.8989e-002	$0.0 \pm 0.0i$	$-2.0221e-006 \pm 6.1307e-004i$	$0.0 \pm 5.1515e-004i$	$0.0 \pm 0.0i$	
	0.0 0.0	9.9948e-001	$0.0 \pm 0.0i$	$0.0 \pm 0.0i$	$0.0 \pm 6.7327e-008i$	
	-9.9771e-001 -9.9783e-001	$0.0 \pm 0.0i$	9.9939e-001	$2.2111e-005 \pm 0.0i$	$0.0 \pm 0.0i$	
	6.4023e-008 -6.1893e-008	$0.0 \pm 0.0i$	$0.0 \pm 0.0i$	$0.0 \pm 3.6014e-002i$	$-0.0 \pm 0.0i$	
	0.0 0.0	$0.0 \pm 0.0i$	$0.0 \pm 0.0i$	$0.0 \pm 0.0i$	$0.0 \pm 2.5000e-003i$	
	-1.7782e-003 -1.7185e-003	$0.0 \pm 0.0i$	$2.1349e-005 \pm 3.0636e-007i$	$-1.4293e-002 \pm 0.0i$	$0.0 \pm 0.0i$	
	0.0 0.0	$0.0 \pm 3.2391e-002i$	$0.0 \pm 0.0i$	$0.0 \pm 0.0i$	$-2.6931e-005 \pm 0.0i$	
	-2.9055e-002 2.9069e-002	$0.0 \pm 0.0i$	$-6.1420e-004 \pm 3.4800e-002i$	$-2.7409e-08 \pm 6.1348e-004i$	$0.0 \pm 0.0i$	
	0.0 0.0	$0.0 \pm 0.0i$	$0.0 \pm 0.0i$	9.9925e-001	$0.0 \pm 0.0i$	
	0.0 0.0	$0.0 \pm 0.0i$	$0.0 \pm 0.0i$	$0.0 \pm 0.0i$	1.0000e+000	

Tabla 6.3: Relación entre Autovalores y Autovectores del Sistema en Lazo Abierto.

De los datos presentados en las tablas anteriores y obtenidos mediante análisis modal del sistema en lazo abierto se extraen las siguientes observaciones:

En cuanto a los modos orbitales, los valores correspondientes a los autovalores muestran el siguiente comportamiento:

- **Modos Orbitales:**

- En alabeo, no dispone de componente imaginaria, los autovalores están situados en el eje real, disponiendo de uno en el semiplano derecho. Esta situación confiere a este eje inestabilidad manifiesta, repercutiendo sobre el resto de los ejes, en particular sobre el eje de guiñada, constituyendo ambos el plano alabeo-guiñada.
- Los ejes de cabeceo y guiñada, muestran componentes reales próximas a cero, y valores de componentes imaginarias, prácticamente acopladas con la velocidad orbital ω_0 .

- **Modos de Deformación:**

- Los autovalores de flexión disponen de una frecuencia natural menor que la de torsión. Esto es debido a la configuración del panel solar en el que la dimensión longitudinal del mismo esta adosada con desplazamiento cero al cuerpo rígido del satélite.
- Tanto los autovalores de flexión como de torsión disponen de amortiguamiento cero. Esto es debido a que no se ha considerado un valor muy elevado en la amortiguación de los mismos.

El amortiguamiento inexistente en los modos de deformación, implica que cualquier maniobra de orientación o de corrección de la actitud que realice el satélite será repercutida sobre los paneles causando vibraciones y deformaciones no deseadas.

Esta situación muestra que hay ciertos autovalores que presentan una estabilidad marginal, por su proximidad al cero, y que uno de los correspondientes a alabeo es inestable como puede observarse en el mapa de polos, Figura 6.3.

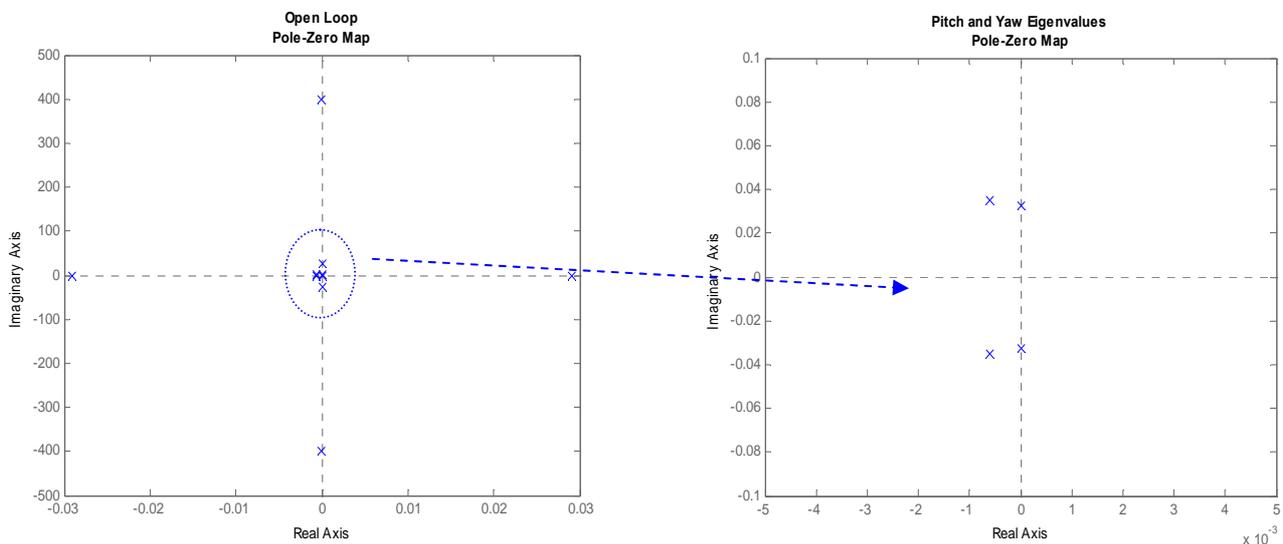


Figura 6.3: Posición de los autovalores en el plano complejo.

El estudio de esta situación permite valorar la posibilidad de modificar la posición de los autovalores correspondientes a los modos orbitales, y tratar de desplazar los correspondientes a las deformaciones ligeramente, con el objeto de dotar de cierto amortiguamiento a estos.

6.3.2. DETERMINACIÓN DEL ACOPLAMIENTO ENTRE LOS MODOS DEL SISTEMA

La determinación del acoplamiento entre los modos orbitales y de estos con los modos de deformación se lleva a cabo mediante simulaciones en las que se excita cada uno de los canales de actitud del sistema para conocer la repercusión sobre el resto de las variables de estado. Estas simulaciones se llevan a cabo con el sistema lineal y no lineal. De forma adicional, y con el mismo ensayo se comprueba la estabilidad del sistema ya obtenida del valor de los autovalores.

En primer lugar para determinar el acoplamiento entre los modos del sistema se excita este en lazo abierto con un escalón unitario sobre los tres canales (alabeo, cabeceo y guiñada). Los resultados de este ensayo se muestran en la Figura 6.4. Esta figura demuestra que existe acoplamiento entre los modos de alabeo, guiñada y flexión, repercutiendo mínimamente también sobre los modos de cabeceo y torsión. Esta circunstancia se produce tanto para el sistema lineal como no lineal. Sin embargo, el modo correspondiente a cabeceo que produce una vibración del modo de torsión se mantiene con un alto grado de independencia respecto de la excitación del modo de alabeo y guiñada.

Con este tipo de ensayo se demuestra por un lado el comportamiento inestable del sistema para el modo de alabeo y como repercute sobre el de guiñada, y como por otro lado el comportamiento oscilatorio de los modos de flexión y torsión debido al escaso amortiguamiento de estos modos.

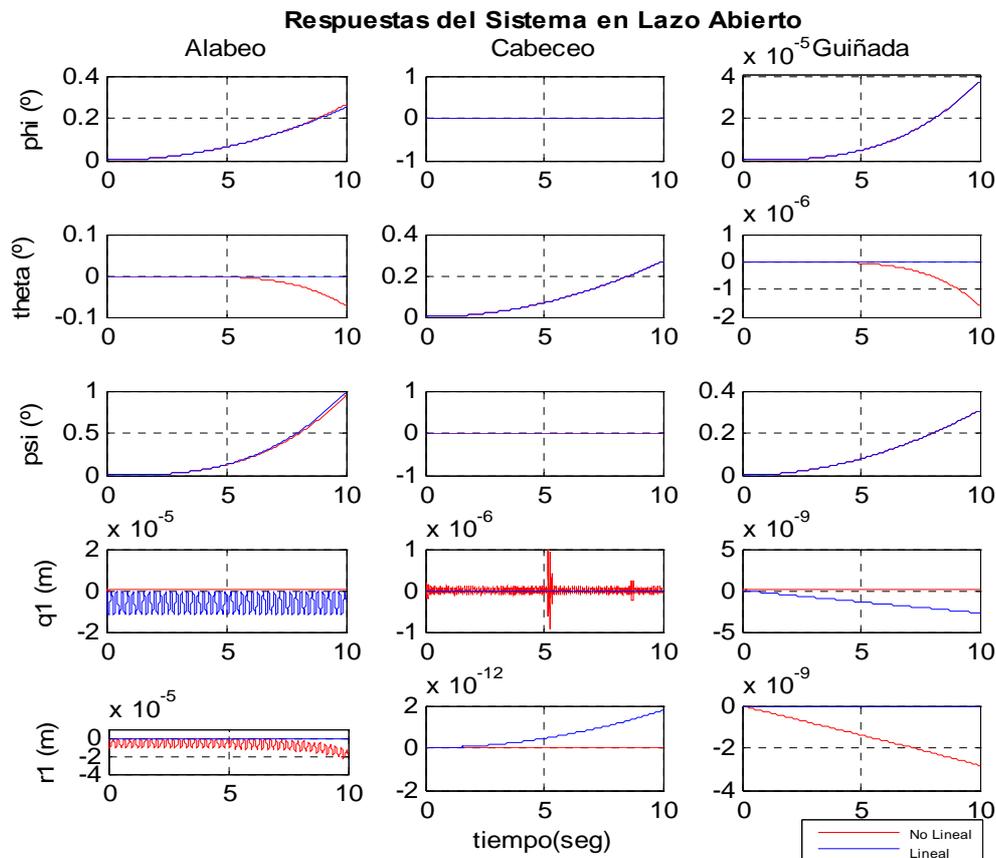


Figura 6.4: Respuestas de los Sistemas Lineal y No Lineal a Excitación Escalón en Lazo Abierto.

Además del ensayo llevado a cabo, en el que se ha comprobado el acoplamiento de los modos orbitales con los de deformación, conviene realizar el proceso inverso. En este, se trata de demostrar que cualquier deformación o vibración producida en los paneles solares puede causar pérdidas de apuntamiento del satélite. Para esta demostración se genera una excitación mantenida de los modos de flexión y torsión de forma individual y posteriormente conjunta para determinar su repercusión sobre el resto de modos del sistema. La Figura 6.5 muestra esta situación, en la que de nuevo se observa el acoplamiento del sistema, su inestabilidad y la oscilación de los paneles solares.

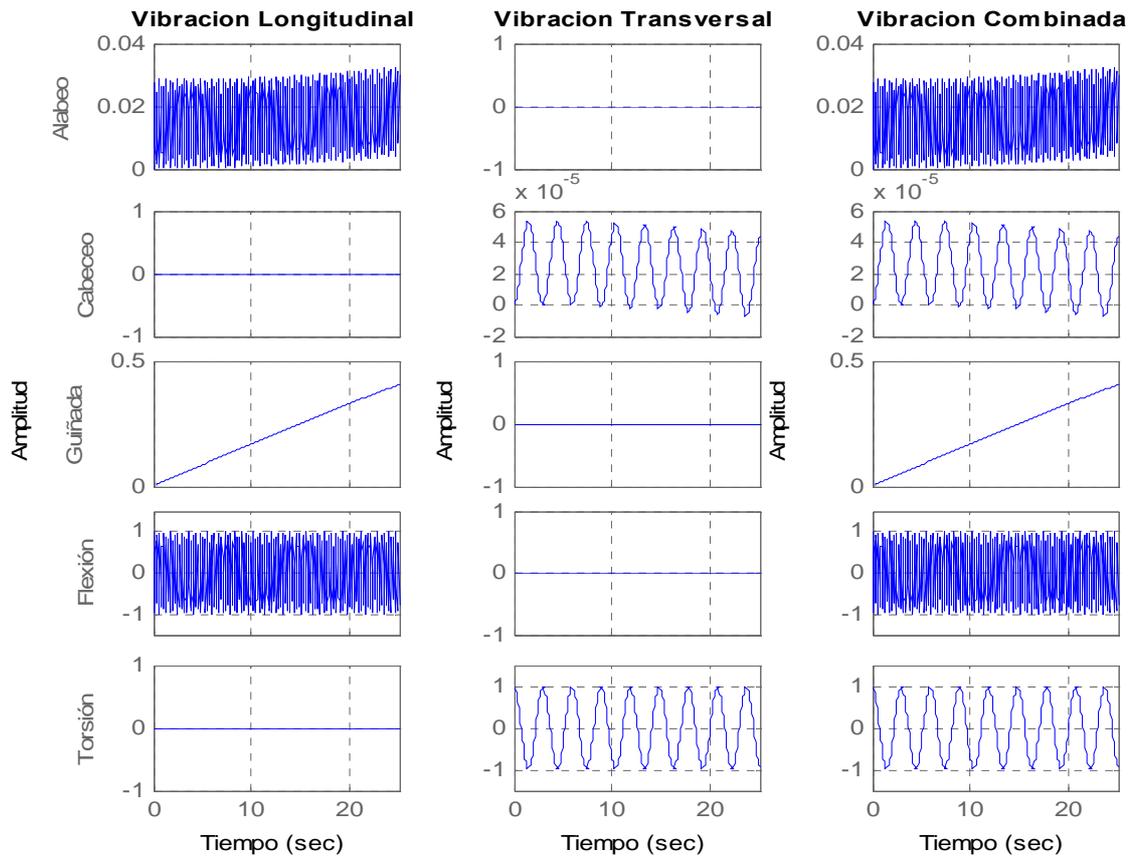


Figura 6.5: Error en actitud producido por la vibración de los paneles solares.

El último método que se utilizó para determinar el acoplamiento de los modos del sistema fue mediante un análisis modal básico. En este se identifican las frecuencias del sistema y como estos están relacionados con los modos orbitales y de deformación. La Figura 6.6 muestra estos resultados, en la que los picos de resonancia de frecuencia más bajos se corresponden con los modos orbitales y los de frecuencia mayor con los de deformación.

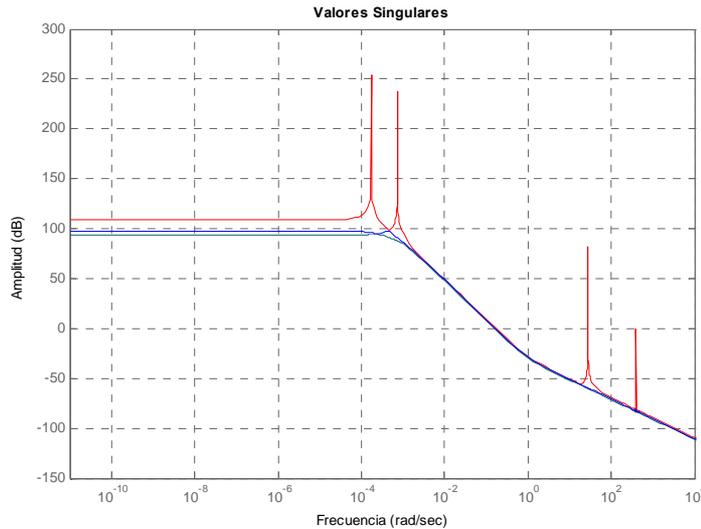


Figura 6.6: Valores Singulares del Sistema.

6.4. DISEÑO Y DESARROLLO DE CONTROLADORES CON MÉTODOS EA

Los datos obtenidos del análisis modal y la información suministrada por los ensayos realizados al sistema en lazo abierto van a permitir determinar las especificaciones del controlador. Por lo que, el diseño, desarrollo y simulación del controlador está basado en las siguientes especificaciones:

- Control en 3 ejes, mediante sistema de momento cero (Zero Momentum).
- Determinación de Actitud: Se considera que el satélite está equipado con los sensores necesarios para llevar a cabo la determinación de actitud.
- Actuadores. Tres ruedas de reacción alineadas con los ejes cuerpo del satélite.
- Requisitos de apuntamiento:
 - Angulos de Euler: Próximos al punto de Equilibrio. Apuntamiento a Nadir. Se requiere desacoplo entre los modos orbitales y entre estos y los modos de deformación.
 - Deformaciones de los paneles solares: Tanto en flexión como en torsión se admite el primer modo de vibración, desacoplados de los movimientos de actuación.
- Atenuación de la vibración de los paneles solares.
- Desacoplo entre los modos propios (orbitales o deformaciones).
- Desacoplo entre los modos orbitales y de deformación.

Sin determinar requisitos de diseño relacionados con la respuesta transitoria del sistema, se define como requisito básico la obtención de un desacoplo entre los modos del sistema mediante un controlador estático obtenido por técnicas EA.

En la parte de este capítulo referente a las simulaciones que se van a realizar sobre el sistema se persigue el objetivo común de determinar aquellos controladores que ofrecen mejores prestaciones con criterios comunes en lo que a la autoestructura deseada se refiere.

Después de haber llevado a cabo el análisis modal del sistema en lazo abierto el procedimiento siguiente es común a todos los controladores diseñados. Este procedimiento se sintetiza en los siguientes pasos:

- Determinación de los requisitos de diseño referente a los autovalores, autovectores, desacoplo de los modos orbitales y de deformación.
- Especificación de la autoestructura deseada.
- Cálculo matemático del controlador con las funciones de desarrollo basadas en técnicas EA para el sistema lineal.
- Simulación del sistema lineal en lazo cerrado mediante excitaciones del tipo escalón unitario. En el proceso de simulación una excitación escalón unitario equivale a una maniobra de reorientación del vehículo para acoplarse a una nueva actitud. Los datos obtenidos de estas simulaciones se representarán mediante gráficos.
- Comparación de los resultados de las simulaciones del sistema lineal con controladores diseñados mediante técnicas LQR.
- Selección de los controladores desarrollados con técnicas EA que ofrecen mejores prestaciones para ser evaluados en el sistema no lineal. El sistema no lineal es representativo de un sistema real.
- Simulación conjunta del sistema lineal y no lineal con el controlador seleccionado.

Estos pasos establecen el procedimiento de simulación que se va a realizar sobre todos los controladores. Así mismo, la selección del controlador diseñado por métodos EA será objeto de análisis de robustez por criterios de análisis μ .

Como íntegramente ha quedado sintetizado en los puntos anteriores la parte común del diseño se refiere a los requisitos de desacoplo de los modos y a los autovalores del sistema. Con estos dos aspectos quedaría requerida la autoestructura deseada. El primero de los requisitos afecta a los autovectores deseados mientras que los autovalores obtenidos están relacionados con la respuesta del sistema. En relación a este último aspecto hay que destacar que se han realizado dos grupos de simulaciones. El primero conducente a determinar que controlador ofrece en el sistema las mejores prestaciones de desacoplo y robustez sobre el sistema lineal. El segundo grupo de simulaciones se desarrolla con el sistema lineal y no lineal para comparar resultados sobre el sistema próximo al real.

6.4.1. REQUISITOS DE DESACOPLO DE LOS MODOS DEL SISTEMA

El desacoplo dinámico de los modos del sistema dependen matemáticamente de los autovectores del mismo. Para establecer el grupo de autovectores deseados es necesario establecer un criterio de diseño y desarrollo de los mismos. Básicamente la técnica utilizada, ampliamente utilizada en [1998, Faleiro], establece que la especificación de los elementos de los autovectores es posible mediante una aproximación basada en criterios de valor nulo y valores indiferentes. Estrictamente hablando la Tabla 6.4 muestra los requisitos de desacoplo entre los modos orbitales y de deformación de los paneles solares. En esta tabla el significado del símbolo “0” implica acoplamiento cero (elemento desacoplado), mientras que el símbolo “X” implica condición indiferente (no interesa especificar el acoplamiento). Desde el punto de vista de la autoestructura obtenida estas condiciones afectan a los autovectores del sistema.

	Orbital Modes			Flexible Modes	
	Alabeo	Cabeceo	Guiñada	Flexión	Torsión
Alabeo	X	X	0	X	0
Cabeceo	X	X	X	X	0
Guiñada	0	X	X	0	X
Flexión	X	X	0	X	X
Torsión	0	0	X	X	X

Tabla 6.4: Criterio de Desacoplo entre los Modos del Sistema.

El criterio de desacoplo mostrado en la Tabla 6.4, junto con los autovalores deseados conforma la autoestructura deseada. En esta tabla se requiere que los movimientos orbitales de alabeo y guiñada se encuentren desacoplados entre ellos y a la vez de flexión y torsión. Por otro lado, los movimientos elásticos de flexión y torsión han de encontrarse desacoplados evitando de esta forma cualquier posible repercusión entre ellos. La aplicación de distintas funciones pertenecientes a diversas herramientas de diseño no implica la obtención de los mismos controladores para la misma estructura deseada. Esto está relacionado con la técnica de obtención de los controladores, obteniéndose en cada una de ellas precisiones diferentes en las autoestructuras obtenidas.

6.4.2. REQUISITOS DE DISEÑO PARA LOS AUTOVALORES DESEADOS

El criterio seguido para definir los autovalores deseados se fundamenta en la estabilización del sistema como primer requisito, a la vez que se persigue dotar a los autovalores orbitales de un amortiguamiento diferente al nominal. Este amortiguamiento se requiere mediante la solicitud de un valor adecuado en la parte real e imaginaria para los autovalores deseados. En cuanto a los autovalores correspondientes a los modos de deformación, flexión y torsión, se ha seguido la hipótesis de mantener los mismos valores del sistema en lazo abierto si es posible. Esta decisión se sustenta en el hecho de que se va a obtener el desacoplamiento requerido al asignar los autovectores del sistema, con lo que estos modos no se verían afectados por ninguna de las maniobras de reorientación que se solicitasen y en el hecho de no excitar innecesariamente las maniobras de actuación de los actuadores del vehículo.

Las simulaciones que se van a realizar en dos grupos. Estos dos grupos de simulaciones mantienen en común los requisitos de desacoplo de los modos expresados en la Tabla 6.4, sin embargo los autovalores deseados cambian para obtener diferentes comportamientos dinámicos del sistema en lazo cerrado. Como se observa en esta tabla se han desdoblado las simulaciones en los grupos uno y dos. El primer grupo (grupo uno) de simulaciones tiene como objetivo diseñar varios controladores con los mismos requisitos en cuanto a autovalores y autovectores deseados para comprobar a la vez cuál de ellos presenta el mejor número de condición. Estos ensayos se van a realizar con cinco controladores.

El segundo grupo de simulaciones (grupo 2) tiene como objetivo simular de nuevo aquellos controladores que han presentado mejor número de condición en el grupo uno. Los nuevos ensayos se van a realizar a dos de los controladores seleccionados del grupo uno tanto para el sistema lineal como no lineal. En el grupo dos de simulaciones se han modificado los autovalores deseados, permaneciendo iguales los autovectores deseados. La modificación de los autovalores deseados se clasifica a su vez en tres casos. Estos casos están referidos a los autovalores nominales como primer caso, y autovalores que introducen amortiguamiento adicional en flexión y torsión, referidos como casos dos y tres respectivamente. Los requisitos

que afectan a los autovalores deseados que afectan tanto al grupo 1 de simulaciones como al grupo 2 se muestran en la Tabla 6.5 y Tabla 6.6 respectivamente.

Modo Dinámico	Autovalores deseados	Amortiguamiento correspondiente
Alabeo	$-6.2e-001 \pm 3.5e-001i$	0.87
Cabeceo	$-3.3e-002 \pm 3.3e-001i$	0.93
Guiñada	$-3.0e-001 \pm 3.0e-001i$	0.82
Flexión	$-0 \pm 2.7746e+001i$	0
Torsión	$-0 \pm 4.0e+002i$	0

Tabla 6.5: Grupo de Simulaciones 1: Autovalores Deseados (Sistema Lineal).

Modo Dinámico	Autovalores deseados	Amortiguamiento correspondiente
Alabeo	$-6.15e-002 \pm 3.35e-002i$	0.8720
Cabeceo	$-8.6e-002 \pm 3.20e-002i$	0.0982
Guiñada	$-2.90e-001 \pm 2.90e-001i$	0.7
Flexión	$-0.0 \pm 2.70e+001i$	0.0
Torsión	$0.0 \pm 4.00e+002i$	0.0

Tabla 6.6: Grupo de Simulaciones 2: Autovalores Deseados (Sistema Lineal y No Lineal).

La Figura 6.7 detalla gráficamente las entradas y salidas de los dos grupos de simulaciones realizados sobre el sistema para la obtención de controladores y para la simulación en el sistema lineal y no lineal.

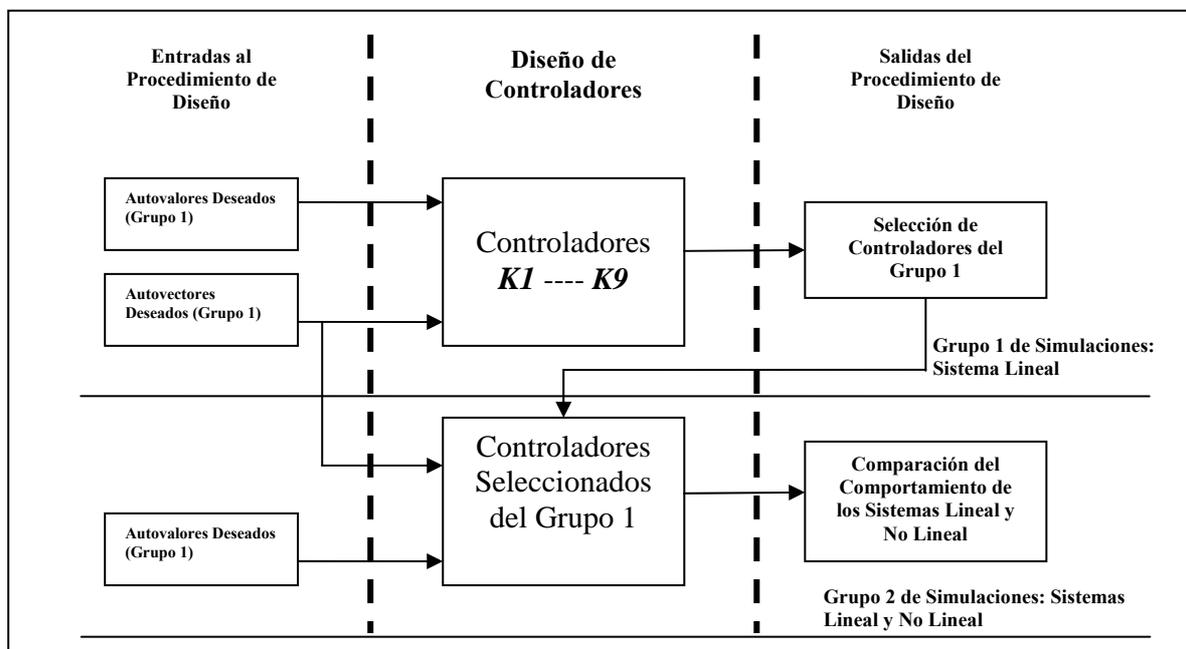


Figura 6.7: Detalle de las tareas de diseño de los controladores relativas al grupo 1 y 2 de simulaciones.

A la vez que se obtienen los controladores en el grupo uno de simulaciones se va a realizar un análisis básico de robustez basado en los indicadores típicos de medida de sensibilidad de la matriz de autovectores obtenidos. Esta medida de robustez con este índice está basada en la expresión $\eta(V)$ introducida en el CAPÍTULO 5, expresiones (5.29) y (5.30). El dato ofrecido por esta función se utiliza como referencia básica de robustez [1993, Junkins], [2008, Xu] y [1998, Liu].

6.5. CONTROLADORES LQR

A continuación se muestran los resultados obtenidos para la familia de controladores LQR desarrollados según los criterios expuestos en el CAPÍTULO 3. Se han utilizado valores diferentes en las matrices R y Q con el objeto de obtener tres controladores con prestaciones diferentes. Siguiendo el proceso de los métodos de asignación de autoestructuras, lo que se pretende al obtener estos controladores LQR es disponer de un sistema regulado con alguno de los controladores obtenidos que sirva como sistema de referencia con el que comparar los resultados de los controladores que se van a obtener con los métodos EA.

Por tanto, al trabajar con este objetivo, se necesitan las autoestructuras relacionadas con el sistema obtenido al introducir el controlador LQR en el lazo de control. Los elementos de las matrices mencionadas son aquellos que se mostraron en la sección 3.8.1. Los resultados de las simulaciones se compararán para determinar el de mejores prestaciones. Las prestaciones del controlador seleccionado volverán a ser comparadas en el sistema lineal y con el resto de controladores obtenidos. Se van a ensayar tres controladores LQR con tres prestaciones diferentes (ver sección 3.7).

6.5.1. CONTROLADOR LQR1

El primer controlador obtenido es el denominado KI .

$KI =$

```
1.0521e-001 1.5606e-013 9.0217e-002 -3.1954e-001 -1.6573e-007 1.3024e+001 1.3460e-012 1.7076e+000 -9.0236e-001 -2.9363e-010
-3.6182e-014 7.6637e-002 3.0692e-014 2.5997e-012 -7.5494e-002 1.7994e-012 2.6223e+000 2.7784e-013 3.9712e-014 -1.0690e+000
-8.8626e-002 2.8379e-014 3.2883e-002 -4.8682e-002 -5.0365e-008 2.1385e+000 2.8892e-013 5.9242e-001 3.0609e-002 -3.0486e-011
```

La Tabla 6.7 muestra los autovalores obtenidos y sus parámetros asociados. Es interesante observar los indicadores de robustez, en el que el número de condición menor tiene un valor relativamente pequeño para el tipo de matriz de estado disponible.

Modo Dinámico		Autovalores	Amortiguamiento	Frecuencia Natural (rad/seg)	Sensibilidad de los Autovalores	Número de Condición
Modos Orbitales	Alabeo	-3.1541e-003 -9.5859e-002	1.0 1.0	3.15e-003 9.59e-002	1.5161e+000 6.0066e+001	5.0509e+002
	Cabeceo	-3.5311e-002±4.3213e-002i	6.33e-001	5.58e-002	1.1611e+001	
	Guiñada	-1.2128e-001±1.3690e-001i	6.63e-001	1.83e-001	3.1085e+001	
Modos de Deformación	Flexión	-1.2809e-002±2.7746e+001i	4.62e-004	2.77e+01	1.3893e+001	
	Torsión	-1.4395e-005±4.0000e+002i	3.60e-008	4.00e+02	2.0000e+002	

Tabla 6.7: Características de los autovalores obtenidos para el controlador LQR1 (KI).

Aunque en este tipo de controladores no es requisito de diseño el valor de los elementos de los autovectores, conviene hacer una referencia a los mismos. Se observa en la Tabla 6.8 que existen muchos elementos que tienen valor cero. Esto implica un desacoplo completo entre los modos a los que pertenecen.

Autovectores Obtenidos						
	Modos Orbitales			Modos de Deformation		
	Alabeo	Cabeceo	Guiñada	Flexión	Torsión	
Autovalores Obtenidos	-3.1541e-003 -9.5859e-002		-3.5311e-002±4.3213e-002i	-1.2128e-001±1.3690e-001i	-1.2809e-002±2.7746e+001i	-1.4395e-005±4.0000e+002i
Autovectores	9.3954e-001	9.0282e-002	0.0±0.0i	-9.6986e-002±1.1042e-001i	-3.4699e-005±5.1518e-004i	0.0±0.0i
	0.0	0.0	9.9845e-001	0.0±0.0i	0.0±0.0i	-1.7994e-007±6.7327e-008i
	-3.4241e-001	-9.9133e-001	0.0±0.0i	9.7264e-001	2.2112e-005±1.4800e-006i	0.0±0.0i
	-1.1556e-008	-1.0256e-006	0.0±0.0i	-5.0164e-006±3.4312e-006i	-1.6626e-005±3.6014e-002i	0.0±0.0i
	0.0	0.0	0.0±0.0i	0.0±0.0i	0.0±0.0i	0.0±2.5000e-003i
	-2.9634e-003	-8.6543e-003	0.0±0.0i	-3.3537e-003±2.6668e-002i	-1.4294e-002±9.6935e-004i	0.0±0.0i
	0.0	0.0	-3.5256e-002±4.3146e-002i	0.0±0.0i	0.0±0.0i	-2.6931e-005±7.1975e-005i
	1.0800e-003	9.5029e-002	0.0±0.0i	-1.1796e-001±1.3315e-001i	-4.1347e-005±6.1351e-004i	0.0±0.0i
	0.0	9.8317e-008	0.0±0.0i	1.0781e-006±2.7061e-007i	9.9925e-001	0.0±0.0i
	0.0	0.0	0.0±0.0i	0.0±0.0i	0.0±0.0i	1.0000e+000

Tabla 6.8: Autoestructura obtenida para el controlador LQR1 (KI).

6.5.2. CONTROLADOR LQR2

Para el segundo de los controladores cambia la matriz Q respecto del controlador LQR1 ($K1$). Para estos nuevos valores la matriz de control obtenida es la $K2$ mostrada a continuación.

$K2 =$

7.0552e-002 2.6581e-012 1.2879e-002 4.4580e-003 6.1582e-008 6.5014e+000 -1.9882e-011 3.8187e-001 7.3983e-002 -9.3789e-011
 2.9377e-012 4.3820e-003 -1.2554e-013 -3.4066e-014 -3.9134e-004 -2.1557e-011 5.7078e-001 -7.8718e-012 -3.0857e-013 -2.5451e-002
 -1.1229e-002 6.2689e-014 2.3691e-003 6.6212e-004 4.1077e-009 4.7822e-001 -9.0573e-012 6.1446e-002 6.8405e-003 -7.9835e-012

Se observa de nuevo en los autovalores obtenidos y mostrados en la Tabla 6.9 que los modos de deformación (flexión y torsión) permanecen básicamente en las mismas posiciones que los autovalores en lazo abierto. Se observa además que el sistema es estable y que el número de condición es del mismo orden que el obtenido para el controlador LQR1.

Modo Dinámico		Autovalores	Amortiguamiento	Frecuencia Natural (rad/seg)	Sensibilidad de los Autovalores	Número de Condición
Modos Orbitales	Alabeo	-2.3365e-003 -8.1290e-002	1.0 1.0	2.34e-003 8.13e-002	5.73 1.74e+02	5.5392e+002
	Cabeceo	-7.6858e-003±3.3305e-002i	2.25e-001	3.42e-002	1.50e+01	
	Guiñada	-4.0121e-002±7.2664e-002i	4.83e-001	8.30e-002	9.92e+01	
Modos de Deformación	Flexión	-2.2370e-004±2.7746e+001i	8.06e-06	2.77e+01	1.39e+01	
	Torsión	-3.4292e-007±4.0000e+002i	0.0	4.00e+02	2.00e+02	

Tabla 6.9: Características de los autovalores obtenidos para el controlador LQR2 ($K2$).

Autovectores Obtenidos						
	Modos Orbitales			Modos de Deformación		
	Alabeo	Cabeceo	Guiñada	Flexión	Torsión	
Autovectores Obtenidos	-2.3365e-003 -8.1290e-002	-7.6858e-003±3.3305e-002i	-4.0121e-002±7.2664e-002i	-2.237e-004±2.7746e+001i	-3.4292e-007±4.0000e+002i	
Autovectores	-4.7903e-001	7.9939e-002	0.0±0.0i	-3.7954e-002±4.9720e-002i	-6.0600e-007±5.1515e-004i	0.0±0.0i
	0.0	0.0	-9.9942e-001	0.0±0.0i	0.0±0.0i	0.0±6.7327e-008i
	8.7780e-001	-9.9350e-001	0.0±0.0i	9.9461e-001	2.2111e-005±2.6818e-008i	0.0±0.0i
	0.0	-6.5308e-007	0.0±0.0i	-5.3064e-007±4.7990e-008i	-2.9036e-007±3.6014e-002i	0.0±0.0i
	4.6100e-022	0.0	0.0±0.0i	0.0±0.0i	0.0±0.0i	0.0±2.5000e-003i
	1.1192e-003	-6.4983e-003	0.0±0.0i	-2.0901e-003±4.7527e-003i	-1.4293e-002±1.6929e-005i	0.0±0.0i
	0.0	0.0	7.6813e-003±3.3286e-002i	0.0±0.0i	0.0±0.0i	-2.6931e-005±1.7146e-006i
	-2.0509e-003	8.0762e-002	0.0±0.0i	-3.9905e-002±7.2272e-002i	-7.4904e-007±6.1348e-004i	0.0±0.0i
	0.0	5.3089e-008	0.0±0.0i	2.4777e-008±3.6633e-008i	9.9925e-001	0.0±0.0i
0.0	0.0	0.0±0.0i	0.0±0.0i	0.0±0.0i	1.0000	

Tabla 6.10: Autoestructura obtenida para el controlador LQR2 ($K2$).

En relación a los autovectores mostrados en la Tabla 6.10 se manifiestan de la misma forma los elementos de los mismos. Existen elementos que muestran desacoplo total con los modos del sistema.

6.5.3. CONTROLADOR LQR3

El último controlador diseñado es el denominado LQR3 (K_3). Al igual que en el caso anterior se ha modificado la matriz R , adaptándola a los valores de la Tabla 3.6. Con arreglo a ello el controlador obtenido es el siguiente:

$K_3 =$

6.7687e-002 1.7989e-013 2.5624e-003 2.8656e-003 -3.4585e-009 4.4636e+000 2.3222e-011 1.5034e-001 5.7835e-002 -1.0781e-010
 5.8127e-014 4.6011e-004 1.0274e-014 1.9325e-014 -3.1925e-005 2.5414e-011 1.8495e-001 1.2934e-012 3.6374e-013 -6.4071e-003
 -2.1631e-003 -5.3480e-015 3.6750e-004 2.2541e-004 1.9897e-010 1.8827e-001 1.4822e-012 1.6676e-002 2.6930e-003 -4.7065e-012

La Tabla 6.11 muestra los autovalores obtenidos con este controlador para el sistema en lazo cerrado. Se observa que el sistema es estable y que los modos flexibles permanecen sobre el eje imaginario, es decir sin amortiguamiento adicional.

Modo Dinámico		Autovalores	Amortiguamiento	Frecuencia Natural (rad/seg)	Sensibilidad de los Autovalores	Número de Condición
Modos Orbitales	Alabeo	-5.5845e-002 -5.8991e-003	1.00 1.00	5.58e-002 5.90e-003	3.7826e+002 4.8360e+001	9.5742e+002
	Cabeceo	-2.4904e-003±3.2504e-002i	7.64e-002	3.26e-002	1.5399e+001	
	Guiñada	-2.5181e-002±5.0740e-002i	4.45e-001	5.66e-002	2.0654e+002	
Modos de Deformación	Flexión	-7.0739e-005±2.7746e+001i	2.55e-006	2.77e+01	1.3892e+001	
	Torsión	-8.6342e-008±4.0000e+002i	0.0	4.00e+02	2.0000e+002	

Tabla 6.11: Características de los autovalores obtenidos para el controlador LQR3 (K_3).

Autovectores Obtenidos						
	Modos Orbitales			Modos de Deformation		
	Alabeo	Cabeceo	Guiñada	Flexión	Torsión	
Autovectores Obtenidos	-5.5845e-002 -5.8991e-003	-2.4904e-003±3.2504e-002i	-2.5181e-002±5.0740e-002i	-7.0739e-005±2.7746e+001i	-8.6342e-008±4.0000e+002i	
Autovectores	-6.4358e-002	-1.8099e-001	0.0±0.0i	-2.8014e-002±2.6066e-002i	-1.9163e-007±5.1515e-004i	0.0±0.0i
	0.0	0.0	9.9947e-001	0.0±0.0i	0.0±0.0i	0.0±6.7327e-008i
	9.9637e-001	9.8347e-001	0.0±0.0i	9.9767e-001	2.2111e-005±0.0i	0.0±0.0i
	2.4814e-007	0.0	0.0±0.0i	-1.4955e-007±2.5969e-008i	-9.1820e-008±3.6014e-002i	0.0±0.0i
	0.0	0.0	0.0±0.0i	0.0±0.0i	0.0±0.0i	0.0±2.5000e-003i
	3.5941e-003	1.0677e-003	0.0±0.0i	-6.1716e-004±2.0778e-003i	-1.4293e-002±5.3535e-006i	0.0±0.0i
	0.0	0.0	-2.4891e-003±3.2487e-002i	0.0±0.0i	0.0±0.0i	-2.6931e-005±4.3171e-007i
	-5.5642e-002	-5.8016e-003	0.0±0.0i	-2.5122e-002±5.0621e-002i	-2.5561e-007±6.1348e-004i	0.0±0.0i
	-1.3857e-008	0.0	0.0±0.0i	0.0±0.0i	9.9925e-001	0.0±0.0i
	0.0	0.0	0.0±0.0i	0.0±0.0i	0.0±0.0i	1.00

Tabla 6.12: Autoestructura obtenida para el controlador LQR3 (K_3).

En cuanto a los autovectores mostrados en la Tabla 6.12 se observa que muestran la misma tendencia que en los casos anteriores. Los valores obtenidos como autovectores para los tres controladores se presentan con el objeto de relacionar los modos del sistema con los autovalores, del mismo modo que se lleva a cabo en la asignación de autoestructuras. Sin embargo en este caso la parte de la autoestructura relacionada con los autovectores no es requerida en el proceso de diseño del controlador.

La Figura 6.8 muestra las respuestas de la excitación escalón unitario al sistema lineal para los tres controladores LQR ($K1$, $K2$ y $K3$). Se observa en las gráficas la tendencia a inestabilizar el sistema de los controladores LQR2 y LQR3, mientras que el LQR1 tiende a estabilizar el sistema en régimen permanente. Una característica común de estos controladores es que los modos de deformación están desacoplados de los modos orbitales y viceversa. Sin embargo, no se ha conseguido un desacoplo adecuado entre los modos orbitales entre sí, de forma que se presenta acoplamiento entre el alabeo y la guiñada. Por otro lado, se observa que los dos modos orbitales anteriores sí se encuentran desacoplados de las maniobras de cabeceo. Este hecho se produce siempre para el sistema lineal.

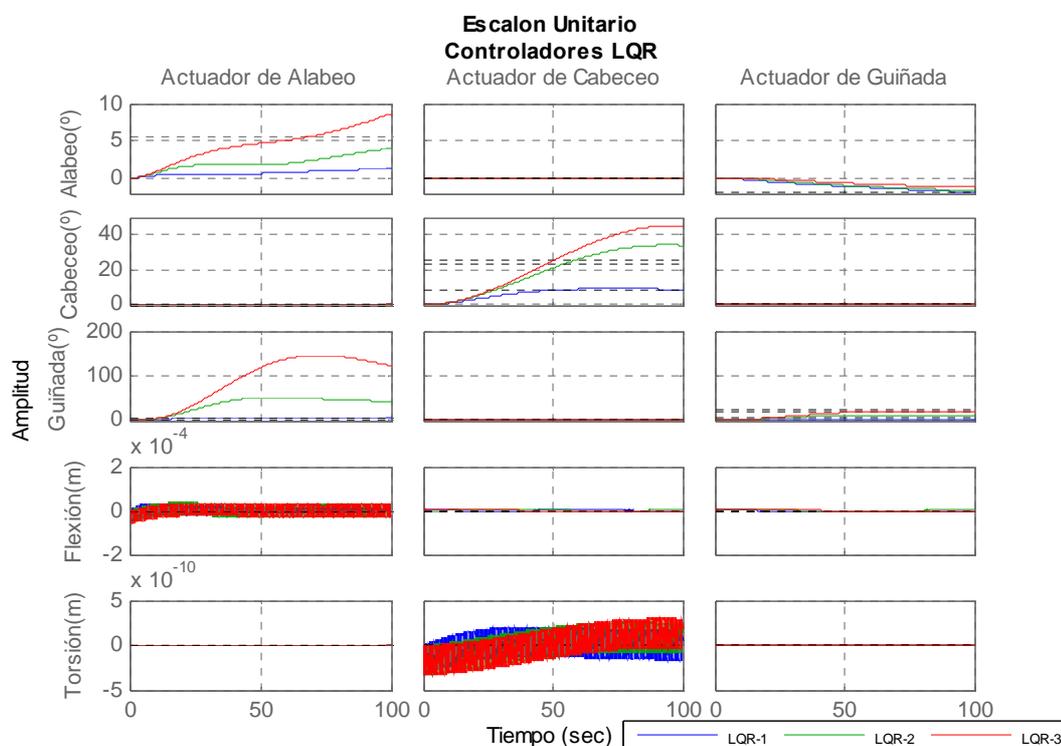


Figura 6.8: Respuesta del sistema lineal con excitación escalón unitario.

6.6. DISEÑO DE CONTROLADORES REALIZADOS CON TÉCNICAS EA

Como se puso de manifiesto en el CAPÍTULO 5, el diseño del controlador por métodos EA puede resolverse utilizando diversas técnicas, entre las que se encuentran las de proyección de autovectores en el espacio alcanzable, asignación directa, técnicas recursivas.

El software utilizado para el diseño de los controladores va a permitir obtener los mismos a partir de los requisitos dados al controlador. La utilización de estas herramientas ofrece la

posibilidad de disponer de diversos controladores, obtenidos mediante las técnicas mencionadas, para poder analizar y comparar los resultados en los sistemas lineal y no lineal. La estrategia que se sigue en las simulaciones consiste en la obtención de los datos de la autoestructura, del valor del número de condición para estimar y comparar la robustez del sistema y por último la excitación con entradas de tipo escalón unitario. Los resultados obtenidos para el conjunto de controladores diseñados permiten disponer de información respecto del controlador que presenta mejores características. Con los datos correspondientes a ese controlador se simula el sistema no lineal para verificar el diseño con un modelo realista y con el objeto de comparar los resultados con el sistema lineal.

Con el objeto de comparar los diferentes resultados, los ensayos que se realizan en este capítulo tratan de demostrar la viabilidad del método EA y como este aplicado en la obtención de la correspondiente ley de control permite obtener una autoestructura próxima en sentido matemático a la autoestructura deseada. En todas las funciones utilizadas para obtener la ley de control se ha utilizado la misma autoestructura deseada. La información relativa a las características de las funciones del software empleadas en el diseño y obtención de los controladores se muestra en el anexo IV.

6.6.1. DISEÑO DE CONTROLADORES BASADOS EN TÉCNICAS DE PROYECCION

Como fue desarrollado en el CAPÍTULO 5, las técnicas de diseño de controladores basadas en técnicas de proyección pueden considerarse como técnicas básicas de asignación de autoestructuras. Las funciones contenidas en las herramientas de diseño [2002, Magni] y [1998, Liu] se van a utilizar para obtener los controladores basadas en técnicas de proyección tal y como muestra la Tabla 6.13.

Función	Controlador	Características	Toolbox	Técnica
sfb_proj	K4	Características temporales Realimentación de estados	Robust Modal Control	Proyección y Mínima Energía
projea	K5	Proyección	Eigensructre Assignment Toolbox	Asignación recursiva Proyeccion

Tabla 6.13: Funciones para la obtención del controlador por técnicas de proyección.

6.6.1.1. CONTROLADOR OBTENIDO CON LA FUNCIÓN **sfb_proj**.

Esta función está implementada en la toolbox referenciada en [2002, Magni] de las empleadas en diseño y desarrollo de los controladores en que los datos de entrada a la misma no están relacionados con la autoestructura deseada, sino que lo están con las características de respuesta temporal deseadas para el sistema en lazo cerrado.

Con el objeto de relacionar los datos de amortiguamiento y tiempo de asentamiento para el sistema, se puede relacionar estos con la medida básica de robustez, es decir, con el número de condición. La relación entre estos parámetros permite conocer aquellas condiciones en las que el sistema es más robusto y en las que valores se obtienen las mejores condiciones. Los datos de

amortiguamiento y tiempo de asentamiento sirven como datos de entrada en el cálculo del controlador. La autoestructura se obtiene a partir de los datos de amortiguamiento y tiempo de asentamiento requerido para los autovalores del sistema en lazo cerrado. La imposibilidad de seleccionar una autoestructura en la que todos los autovalores del sistema en lazo cerrado sean posicionados más convenientemente, lleva a realizar la estimación del número de condición obtenido y relacionarlo con el tiempo de asentamiento y el amortiguamiento. La Figura 6.9 muestra la relación existente entre los números de condición y los tiempos de asentamiento con diferentes valores del coeficiente de amortiguamiento. De este estudio se obtiene como dato la relación que presenta menor número de condición con el objeto de obtener un controlador adecuado en términos de robustez. Esta estrategia permite trabajar con características de respuesta del sistema en lugar de requerir la autoestructura deseada como elemento de entrada para el cálculo del controlador.

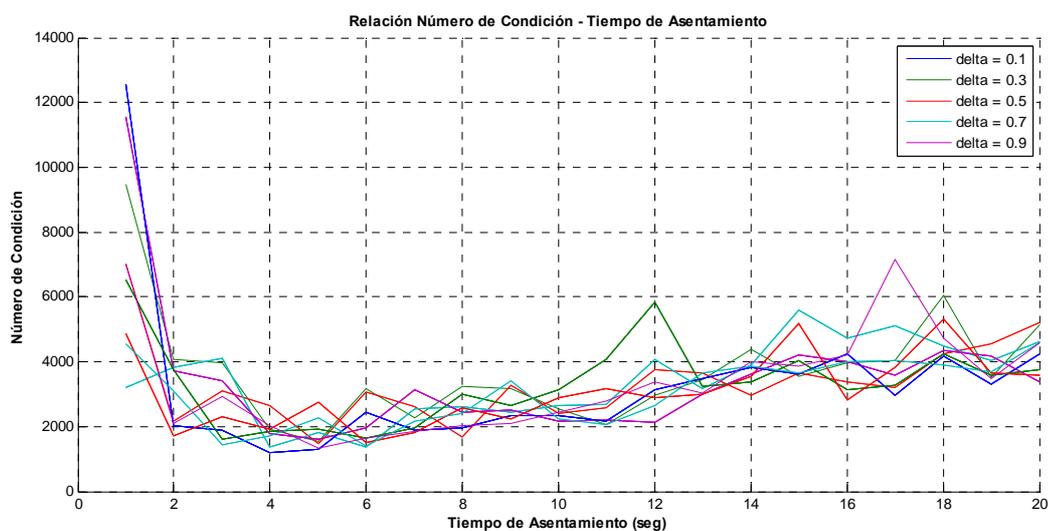


Figura 6.9: Relación entre el tiempo de asentamiento, el coeficiente de amortiguamiento y el número de condición con diferentes valores de amortiguamiento.

Concretamente los datos de la Figura 6.9 se presentan en la tabla Tabla 6.14, donde se observan los valores del coeficiente de amortiguamiento y tiempo de asentamiento que presentan mejor número de condición.

Datos de la Figura 6.9		
Coefficiente de Amortiguamiento	Tiempo de asentamiento(seg)	Número de Condición
0.1	3	1290
0.7	6	1354

Tabla 6.14: Números de condición mínimos.

El valor utilizado para el cálculo de la autoestructura es el que ofrece menor número de condición, es decir, amortiguamiento 0.7 y tiempo de asentamiento 3 segundos. Con estos requisitos como entrada a la función del cálculo del controlador se obtienen los datos paramétricos de la Tabla 6.15 y la autoestructura obtenida que se muestra en la Tabla 6.16.

Modo Dinámico		Autovalores	Amortiguamiento	Frecuencia Natural (rad/seg)	Sensibilidad de los Autovalores	Número de Condición
Modos Orbitales	Alabeo	-5.0923e-001 -5.5092e-001	1.0000e+000 1.0000e+000	5.0923e-001 5.5092e-001	5.2020e+002 5.3092e+002	1.8651e+003
	Cabeceo	-5.1178e-001±3.3172e-002i	9.9791e-001	5.1286e-001	1.9037e+001	
	Guiñada	-5.0480e-001±3.5156e-002i	9.9758e-001	5.0603e-001	6.4019e+002	
Modos de Deformación	Flexión	-7.7889e-003±2.7746e+001i	2.8073e-004	2.77e+001	1.3892e+001	
	Torsión	0.0±4.0000e+002i	0.0	4.00e+002	2.0000e+002	

Tabla 6.15: Autovalores obtenidos por el método de proyección.

Autovectores Obtenidos						
	Modos Orbitales			Modos de Deformation		
	Roll		Pitch	Yaw	Flexion	Torsion
Autovectores Obtenidos	-5.0923e-001	-5.5092e-001	-5.1178e-001±3.3172e-002i	-5.0480e-001±3.5156e-002i	-7.7889e-003 +2.7746e+001i	0.0±4.0000e+002i
Autovectores	5.4437e-002	5.1689e-002	0.0±0.0i	-1.8053e-006±5.4735e-004i	-2.1101e-005±5.1447e-004i	0.0±0.0i
	0.0	0.0	-8.8980e-001	0.0±0.0i	0.0±0.0i	0.0±6.7327e-008i
	8.8945e-001	-8.7435e-001	0.0±0.0i	8.9227e-001	3.6619e-005±2.1654e-006i	0.0±0.0i
	-1.7446e-005	-1.9388e-005	0.0±0.0i	2.4568e-008±1.7147e-007i	-1.0110e-005±3.6015e-002i	0.0±0.0i
	0.0	0.0	0.0±0.0i	0.0±0.0i	0.0±0.0i	0.0±2.5000e-003i
	-2.7721e-002	-2.8477e-002	0.0±0.0i	2.0154e-005±2.7624e-004i	-1.4274e-002±5.8948e-004i	0.0±0.0i
	0.0	0.0	4.5539e-001±2.9517e-002i	0.0±0.0i	0.0±0.0i	-2.6931e-005±6.8914e-08i
	-4.5293e-001	4.8170e-001	0.0±0.0i	-4.5042e-001±3.1368e-002i	-6.0367e-005±1.0160e-003i	0.0±0.0i
	8.8843e-006	1.0681e-005	0.0±0.0i	-1.8430e-008±8.5695e-008i	9.9925e-001	0.0±0.0i
	0.0	0.0	0.0±0.0i	0.0±0.0i	0.0±0.0i	1.0000e+000

Tabla 6.16: Autoestructura obtenida por el método de proyección (controlador K4).

El controlador obtenido con los valores de delta = 0.7 y ts = 6 seg es el dado por:

$K4 =$

-1.2161e+001 -4.8372e-012 5.3900e-005 -6.4580e-002 3.9720e-012 -4.4352e+001 -1.0876e-011 -1.5046e-003 5.4392e-002 4.5351e-007
3.1285e-008 -1.0154e+001 -6.3358e-010 9.3550e-011 -6.6670e-011 6.0483e-008 -3.8828e+001 -6.0189e-010 3.1390e-011 1.1634e-010
4.2849e+001 2.4312e-010 -8.1595e+000 7.3105e-002 -4.9360e-012 4.2258e+001 4.7720e-010 -3.2426e+001 -6.4520e-002 -5.7785e-007

La posición de los polos del sistema en lazo cerrado se observa en la Figura 6.10. En ella se muestra que los polos correspondientes a los modos de deformación permanecen en sus posiciones habituales para evitar esfuerzos de control no necesarios.

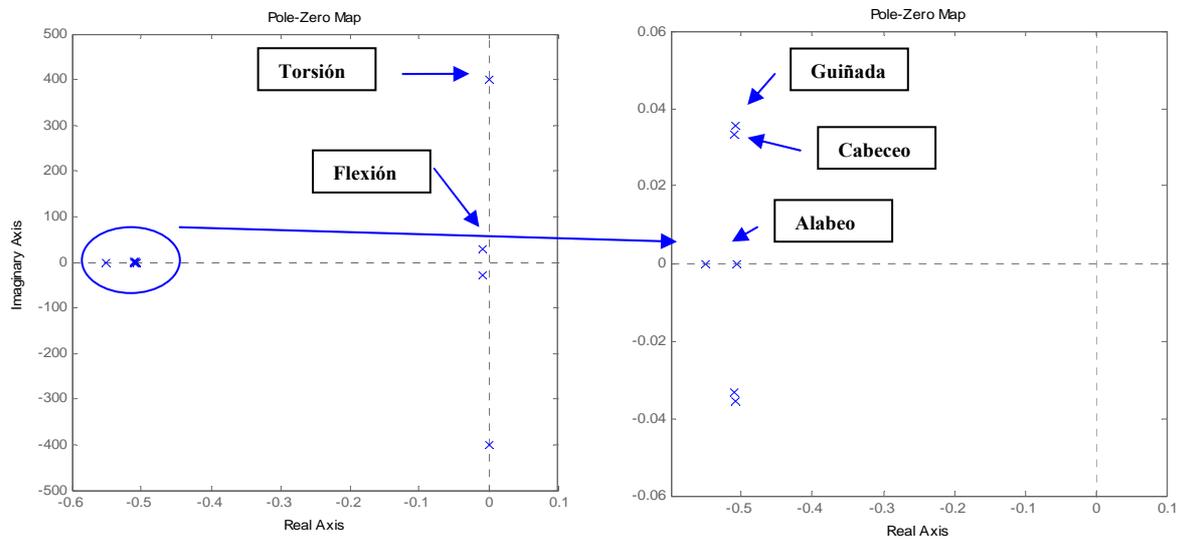


Figura 6.10: Polos del sistema en lazo cerrado para el controlador $K4$ (función `sfb_proj`).

La respuesta del sistema lineal en lazo cerrado con excitaciones tipo escalón se muestra en la Figura 6.11. El sistema lineal en lazo cerrado está altamente desacoplado para los modos orbitales y que existe un desacoplo apreciable entre los modos orbitales y los de deformación.

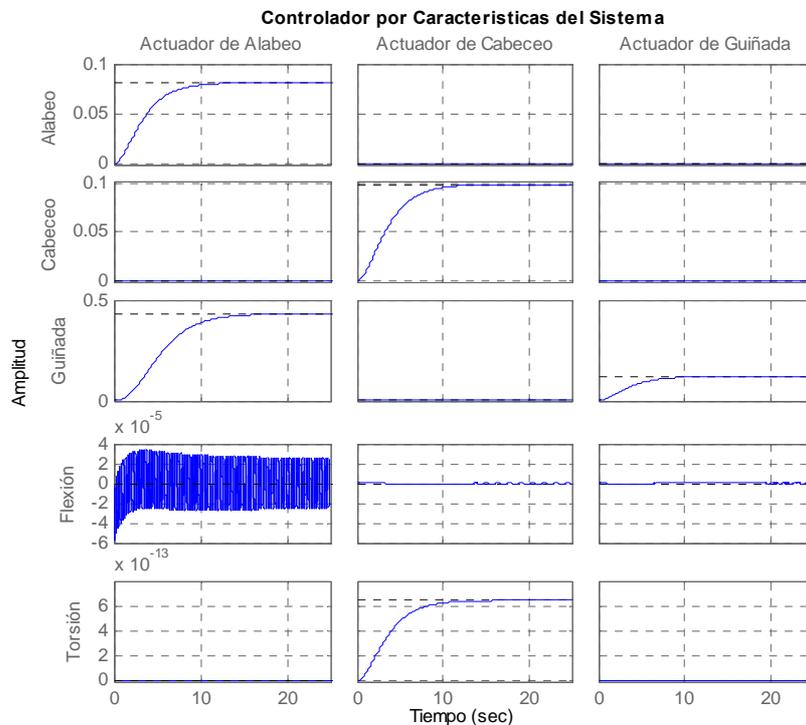


Figura 6.11: Respuesta a excitación escalón unitario.

Así mismo, las respuestas que se producen sobre la actitud del satélite al deformar los paneles solares se representan en la Figura 6.12. En ellas se observa el acoplamiento que existe entre la deformación debida a flexión de los paneles solares y la maniobra de alabeo. Así mismo, existe acoplamiento entre la deformación debida a flexión y la maniobra de cabeceo. Es necesario apreciar, que con el propósito de resaltar el acoplamiento existente se han introducido en la simulación amplitudes elevadas en las deformaciones debidas a flexión y a torsión. De hecho la señal de excitación en este tipo de ensayos es de amplitud la unidad y las deformaciones tienden a cero en los tres casos de acoplamiento con los modos orbitales. Estas excitaciones son válidas tanto para la deformación de flexión como de torsión.

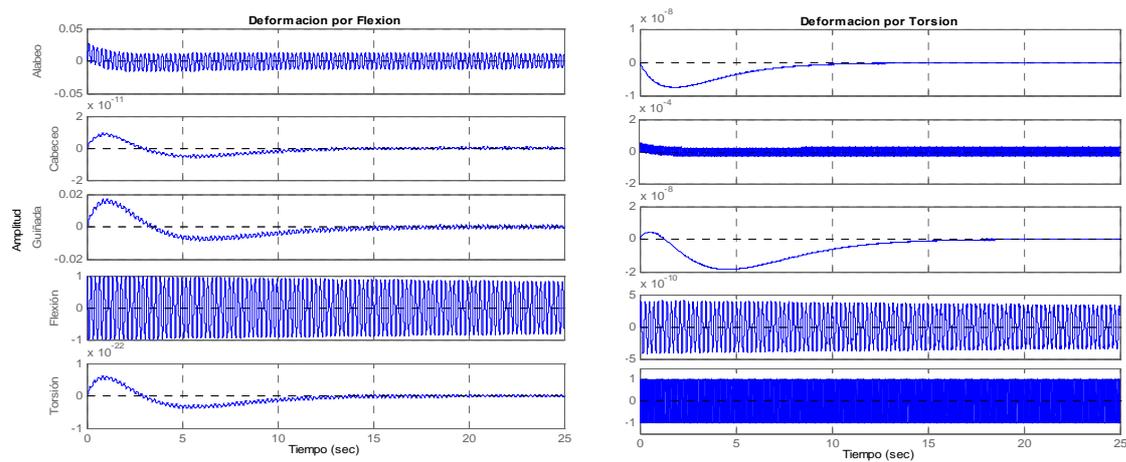


Figura 6.12: Respuesta a deformación por Flexión y Torsión de los Paneles Solares.

6.6.1.2. CONTROLADOR OBTENIDO CON LA FUNCIÓN projea.

El segundo controlador obtenido por el método de proyección presenta los resultados obtenidos para los autovalores en la Tabla 6.17. Los autovalores obtenidos se aproximan a los autovalores deseados. Esto implica que una buena selección de los autovalores deseados permitirá obtener unos autovalores deseados del sistema en lazo cerrado que cumplan con los requisitos de diseño. Se observa que los autovalores de deformación permanecen en las mismas posiciones que para el sistema en lazo abierto. Esta característica no introduce amortiguamiento adicional en el sistema. Esto puede ser interesante si no se requiere este tipo de amortiguamiento a los elementos flexibles.

Modo Dinámico	Autovalores deseados	Autovalores obtenidos
Alabeo	$-6.2e-001 \pm 3.5e-001i$	$-6.15e-001 \pm 3.48e-001i$
Cabeceo	$-3.3e-002 \pm 3.3e-001i$	$-3.24e-002 \pm 3.24e-001i$
Guiñada	$-3.0e-001 \pm 3.0e-001i$	$-2.90e-001 \pm 2.90e-001i$
Flexión	$-0 \pm 2.7746e+001i$	$0.0 \pm 2.7746e+001i$
Torsión	$-0 \pm 4.0e+002i$	$0.0 \pm 4.0000e+002i$

Tabla 6.17: Autovalores deseados y obtenidos para el controlador K5 (función projea).

El valor numérico del controlador es el siguiente:

$K_5 =$

-6.8387e+000 7.9371e-011 8.2603e-005 2.0535e-001 -3.3106e-007 -2.3466e+001 3.0325e-011 -1.1561e-003 -3.3589e-001 7.2634e-008
 -3.4909e-010 -3.8999e+000 5.0517e-011 2.5690e-010 8.9650e-004 -2.8575e-009 -2.4062e+000 2.5189e-010 -2.8585e-011 -6.4777e-005
 1.7460e+002 1.8443e-011 -1.6075e+001 -6.1543e+002 -5.3402e-006 3.0439e+002 4.2925e-012 -3.9657e+001 -4.9704e+002 5.9432e-009

Y las características paramétricas del sistema en lazo cerrado se muestran en la Tabla 6.18. En esta misma tabla se observa que el número de condición no es demasiado elevado. Esto indica una tolerancia mayor a perturbaciones, al menos con el análisis básico de robustez realizado.

Modo Dinámico		Autovalores	Amortiguamiento	Frecuencia Natural (rad/seg)	Sensibilidad de los Autovalores	Número de Condición
Modos Orbitales	Alabeo	-6.15e-001 ± 3.48e-001i	8.70e-001	7.06e-001	4.4448e+001	549.95
	Cabeceo	-3.24e-002 ± 3.24e-001i	9.95e-002	3.26e-001	1.7065e+000	
	Guiñada	-2.90e-001 ± 2.90e-001i	7.07e-001	4.10e-001	3.2970e+001	
Modos de Deformación	Flexión	0.0±2.7746e+001i	0.0	2.77e+001	1.5925e+001	
	Torsión	0.0±4.0000e+002i	0.0	4.00e+002	2.0000e+002	

Tabla 6.18: Autovalores deseados y obtenidos para el controlador K_5 (función projea).

La Tabla 6.19 muestra los autovectores por la derecha del sistema con este controlador. El sistema en lazo cerrado muestra desacoplo entre los modos de alabeo-guiñada con el cabeceo del vehículo. A la vez el sistema muestra un desacoplo muy elevado entre los modos de alabeo y guiñada. Esto implica que los modos orbitales son altamente independientes en las maniobras de orientación y reorientación del vehículo. En lo que respecta al desacoplo con los modos de deformación es necesario apreciar el alto grado de independencia de estos con los modos orbitales. Esto implica que cualquier maniobra no repercutirá negativamente sobre la flexión y torsión de los paneles solares.

Autovectores Obtenidos					
	Modos Orbitales			Modos de Deformation	
	Alabeo	Cabeceo	Guiñada	Flexión	Torsión
Autovectores Obtenidos	$-6.15e-001 \pm 3.48e-001i$	$-3.24e-002 \pm 3.24e-001i$	$-2.90e-001 \pm 2.90e-001i$	$0.0 \pm 2.7746e+001i$	$0.0 \pm 4.0000e+002i$
Autovectores	$-1.1065e-005 \pm 5.7501e-006i$	$0.0 \pm 0.0i$	$5.6520e-002 \pm 7.0107e-010i$	$-2.4776e-016 \pm 4.4970e-004i$	$0.0 \pm 0.0i$
	$0.0 \pm 0.0i$	$9.5084e-001$	$0.0 \pm 0.0i$	$0.0 \pm 0.0i$	$0.0 \pm 0.0i$
	$8.1678e-001$	$0.0 \pm 0.0i$	$9.2348e-001$	$1.7608e-002 \pm 0.0i$	$0.0 \pm 0.0i$
	$0.0 \pm 0.0i$	$0.0 \pm 0.0i$	$-2.6028e-009 \pm 1.1753e-005i$	$0.0 \pm 3.1417e-002i$	$0.0 \pm 0.0i$
	$0.0 \pm 0.0i$	$0.0 \pm 0.0i$	$0.0 \pm 0.0i$	$0.0 \pm 0.0i$	$0.0 \pm 2.5000e-003i$
	$8.8022e-006 \pm 0.0i$	$0.0 \pm 0.0i$	$-1.6391e-002 \pm 1.6391e-002i$	$-1.2477e-002 \pm 0.0i$	0.0
	$0.0 \pm 0.0i$	$-3.0807e-002 \pm 3.0815e-001i$	$0.0 \pm 0.0i$	$0.0 \pm 0.0i$	$-2.6931e-005 \pm 0.0i$
	$-5.0197e-001 \pm 2.8441e-001i$	$0.0 \pm 0.0i$	$-2.6781e-001 \pm 2.6781e-001i$	$2.1827e-005 \pm 4.8855e-001i$	$0.0 \pm 0.0i$
	$0.0 \pm 0.0i$	$0.0 \pm 0.0i$	$-3.4092e-006i$	$8.7170e-001$	$0.0 \pm 0.0i$
	$0.0 \pm 0.0i$	$0.0 \pm 0.0i$	$0.0 \pm 0.0i$	$0.0 \pm 0.0i$	1.0

Tabla 6.19: Autovalores deseados y obtenidos para el controlador K5 (función projea).

Los datos numéricos presentados en la tabla anterior son verificados por la representación gráfica de la Figura 6.13. En ella se observa de forma gráfica los resultados de la autoestructura obtenida. La maniobra de alabeo tiene repercusión sobre el canal de guiñada, esto indica que no se ha conseguido un desacoplamiento perfecto entre estos dos canales. Sin embargo, la de cabeceo es altamente independiente de los canales de guiñada y alabeo, esto es están descopladas.

Las simulaciones de vibración provocada sobre los paneles solares, tanto para flexión como para torsión se muestran en la Figura 6.14 y Figura 6.15. El objetivo de estos ensayos es cuantificar la repercusión del movimiento flexible de los paneles solares sobre la actitud del vehículo. Por ello, y según se muestra en las figuras mencionadas, la amplitud de la oscilación inducida sobre los paneles solares es elevada. Esto se observa comparando la respuesta gráfica que se obtiene sobre las maniobras de actitud correspondientes. Concretamente, en la Figura 6.14 se observa que la flexión de los paneles solares repercute con una oscilación mantenida pero de amplitud mínima sobre el alabeo del vehículo y que produciría un error de actitud permanente sobre el ángulo de guiñada. En realidad esto no tiene ninguna transcendencia debido a la configuración de los paneles solares sobre el vehículo y el sistema de apuntamiento requerido. Se observa de

forma adicional, que el modo de flexión está completamente desacoplado del movimiento de flexión.

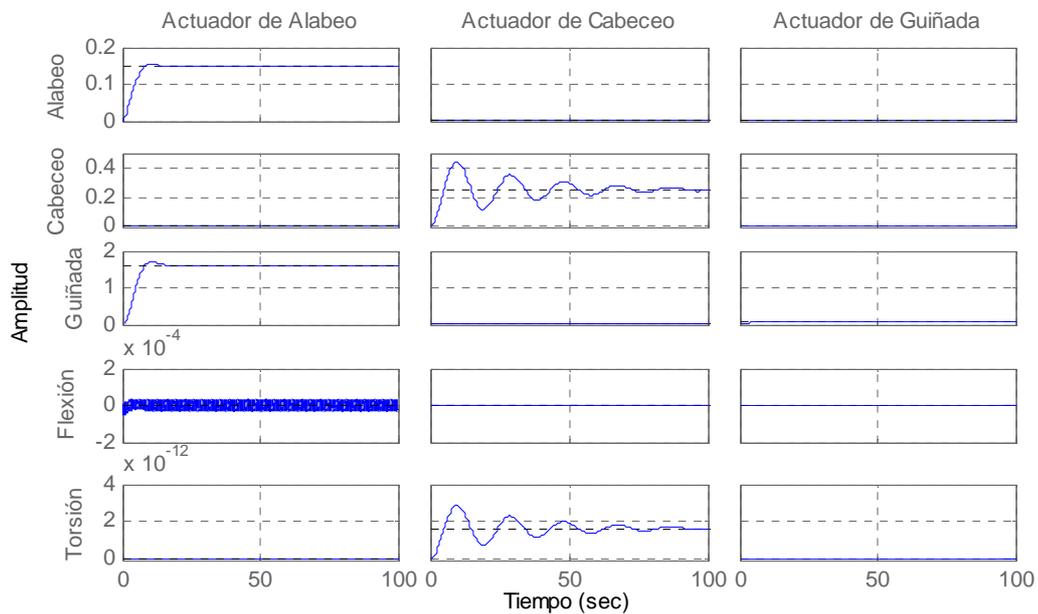


Figura 6.13: Excitación escalón unitario del sistema con el controlador $K5$ (función projea).

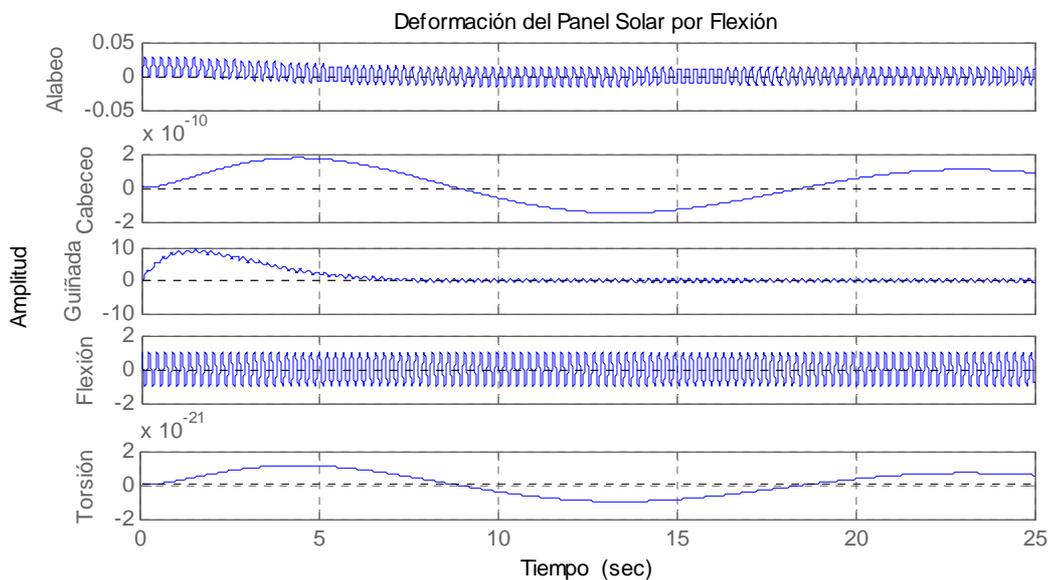


Figura 6.14: Vibración sostenida en el modo de flexión. Repercusión sobre el resto de los modos. (Controlador $K5$)

El último ensayo llevado a cabo sobre el sistema está relacionado con la torsión de los paneles solares. En la Figura 6.15 se induce una vibración permanente en el canal de torsión, y se estudia su repercusión sobre el resto de los modos. El movimiento de torsión está

completamente desacoplado del movimiento de flexión y de los movimientos orbitales de alabeo y guiñada. Repercute, con una amplitud mínima, sobre el movimiento de cabeceo, considerándose esta representación gráfica como una solución puramente matemática.

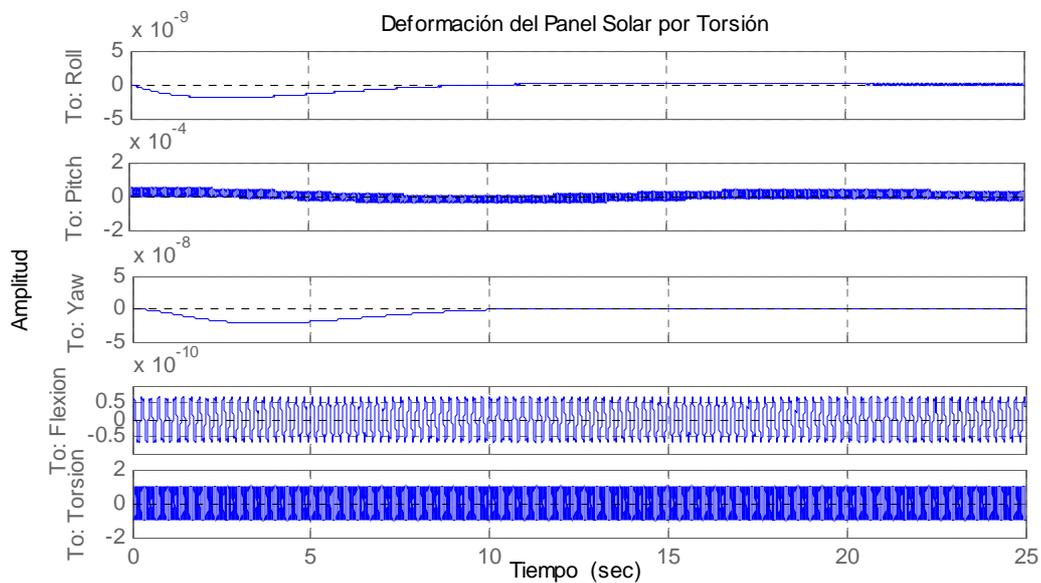


Figura 6.15: Vibración sostenida en el modo de torsión. Repercusión sobre el resto de los modos. (Controlador $K5$).

6.6.2. DISEÑO DE CONTROLADORES BASADOS EN TÉCNICAS DE ASIGNACIÓN RECURSIVA Y DE DESCOMPOSICIÓN EN VALORES SINGULARES

Continuando con las simulaciones llevadas a cabo con el sistema, se van a simular a continuación tres controladores obtenidos por métodos de asignación recursiva que emplean la técnica matemática de descomposición en valores singulares para el cálculo de los elementos de la matriz del controlador. En la Tabla 6.20 se presentan las características más relevantes de las funciones empleadas para el cálculo de los controladores, así como la designación empleada.

Función	Controlador	Características	Toolbox	Técnica
ofeasvd	$K6$	Selección de autovalores	Eigensructre Assignment Toolbox	Metodo de descomposición en valores singulares (SVD)
gpofea	$K7$	Selección de autovalores	Eigensructre Assignment Toolbox	Asignación paramétrica genérica. Realimentación de la salida
pofea	$K8$	Selección de autovalores	Eigensructre Assignment Toolbox	Asignación recursiva. Parametric output feedback EA

Tabla 6.20: Funciones para la obtención del controlador por técnicas de asignación recursiva y descomposición en valores singulares.

6.6.2.1. CONTROLADOR OBTENIDO CON LA FUNCIÓN ofeasvd.

Este controlador se obtiene por medio de descomposición en valores singulares del sistema dado por las matrices de estado A , de control B y la matriz de salida C . Permite además minimizar la sensibilidad del sistema por medio de los métodos recursivos de rango l y rango n . El comportamiento del sistema con este controlador K se sintetiza en los resultados mostrados para las siguientes acciones:

- Estabilización del autovalor de alabeo.
- Amortiguar flexión: Aumenta el número de condición.
- Amortiguar torsión: Genera matrices del controlador K muy altas y aumenta excesivamente el número de condición. Esto implica que aumenta la sensibilidad del sistema frente a perturbaciones.
- Amortiguar cabeceo y guiñada no modifica el número de condición.

La Tabla 6.21 muestra los autovalores del sistema deseados y obtenidos. Es interesante observar que el software de asignación realizado por descomposición en valores singulares obtiene los autovalores de forma muy próxima a los deseados. Se ha resaltar la característica relacionada con los modos de deformación, flexión y torsión, cuyos valores permanecen en las posiciones originales del sistema en lazo abierto.

Modo Dinámico	Autovalores deseados	Autovalores obtenidos
Alabeo	-6.2e-001±3.5e-001i	-6.15e-001 ± 3.48e-001i
Cabeceo	-3.3e-002±3.3e-001i	-3.24e-002 ± 3.24e-001i
Guiñada	-3.0e-001i±3.0e-001i	-2.90e-001 ± 2.90e-001i
Flexión	-0±2.7746e+001i	0.0±2.7746e+001i
Torsión	-0±4.0e+002i	0.0±4.0000e+002i

Tabla 6.21: Autovalores deseados y obtenidos para el controlador $K6$ (función ofeasvd).

La Tabla 6.22 muestra los resultados de amortiguamiento, frecuencia natural y números de condición de los autovalores obtenidos. Con objeto de tener información básica en cuanto a la robustez de la autoestructura, se introducen en la tabla aquellos valores relacionados con la sensibilidad de la misma. Se observa que los números de condición son altos, debido principalmente al tipo de sistema original (mal condicionado).

Los datos referentes a la autoestructura completa se presentan en la Tabla 6.23. Los autovectores con valor cero o con valores muy pequeños implican desacoplo del sistema para el modo al que pertenecen.

Modo Dinámico		Autovalores	Amortiguamiento	Frecuencia Natural (rad/seg)	Sensibilidad de los Autovalores	Número de Condición
Modos Orbitales	Alabeo	-6.15e-001±3.4821e-001i	8.70e-01	7.06e-001	4.4476e+002	1590.7916
	Cabeceo	-3.24e-002±3.24e-001i	9.95e-002	3.26e-001	2.0123e+002	
	Guiñada	-2.90e-001±2.90e-001i	7.07e-001	4.10e-001	5.1407e+002	
Modos de Deformación	Flexión	0.0±2.77e+001i	0.0	2.77e+01	2.8642e+001	
	Torsión	0.0±4.00e+002	0.0	4.00e+02	2.7456e+002	

Tabla 6.22: Características de los autovalores obtenidos con el controlador K_6 .

Autovectores Obtenidos					
	Modos Orbitales			Modos de Deformación	
	Alabeo	Cabeceo	Guiñada	Flexión	Torsión
Autovectores Obtenidos	-6.15e-001±3.4821e-001i	-3.24e-002±3.24e-001i	-2.90e-001±2.90e-001i	0.0±2.7746e+001i	0.0±4.0000e+002
Autovectores	-6.9045e-001	6.8943e-001	5.4086e-002±1.3389e-002i	0.0±3.8143e-004i	-1.5405e-004±0.0i
	-1.6844e-002±3.3912e-001i	2.9539e-002±4.3667e-001i	-6.6639e-001	-2.4118e-002±1.7628e-004i	-1.0405e-005±0.0i
	-6.9366e-002±2.6517e-001i	-1.6523e-001±4.5817e-001i	5.1386e-001±3.8051e-001i	1.1454e-003±2.0028e-003i	-1.6996e-003±0.0i
	2.1904e-004±3.6510e-004i	8.8639e-005±1.7905e-005i	-2.7868e-006±1.1246e-005i	0.0±2.6648e-002i	1.4534e-004±0.0i
	0.0±0.0i	0.0±0.0i	0.0±0.0i	0.0±0.0i	0.0±1.8211e-003i
	4.2433e-001±2.4042e-001i	-2.2338e-002±2.2343e-001i	-1.9568e-002±1.1802e-002i	-1.0583e-002 ±0.0i	-4.4431e-005±6.1620e-002i
	-1.0773e-001±2.1428e-001i	-1.4247e-001±4.5752e-003i	1.9325e-001±1.9325e-001i	4.8910e-003±6.6918e-001i	-1.5067e-004±4.1619e-003i
	-4.9703e-002±1.8712e-001i	-1.4313e-001±6.8392e-002i	-2.5937e-001±3.8671e-002i	5.5569e-002±3.1780e-002i	2.8157e-004±6.7982e-001i
	-7.4830e-006±3.0065e-004i	-8.6745e-006±2.8146e-005i	-2.4533e-006±4.0696e-006i	7.3937e-001	4.1919e-005±5.8136e-002i
	0.0±0.0i	0.0±0.0i	0.0±0.0i	0.0±0.0i	7.2845e-001

Tabla 6.23: Autoestructura de controlador K_6 (función ofeasvd).

El valor de la matriz del controlador estático es la siguiente:

$K6 =$

-6.8274e+000 8.0130e+000 2.8326e+000 -8.5107e+001 6.0404e+003 -2.7872e+001 2.7899e+000 -1.2563e+001 7.8369e-001 1.3502e+003
 -4.0875e+000 -5.0879e+000 6.4384e-001 3.3493e+002 3.1650e+004 -1.4351e-001 -2.0967e+001 -2.0281e+000 9.3258e+002 8.4735e+001
 -3.8227e+000 -6.4953e-002 -5.2441e+000 -1.8855e+003 4.0003e+003 -3.9594e+001 -2.3021e-001 -1.9095e+001 -3.7092e+001 1.2058e+004

En cuanto a las simulaciones relacionadas con el modelo lineal, se han llevado a cabo excitaciones de tipo escalón unitario, que se muestran en la Figura 6.16. En ella se observa el carácter poco amortiguado de la respuesta, aunque produce una deformación inapreciable en los paneles flexibles, lo que es entendido como un grado de desacople elevado.

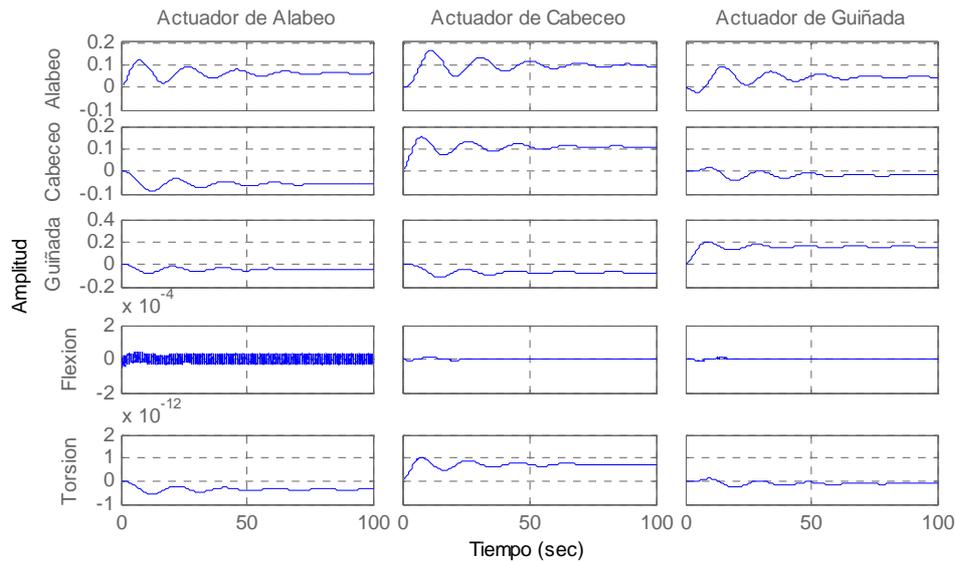


Figura 6.16: Excitación escalón unitario con el controlador $K6$.

Con el objeto de completar la simulación con el controlador se realiza el proceso inverso, deformando los paneles para conocer la repercusión sobre los modos orbitales. Se observa en la Figura 6.17 la incidencia de las deformaciones longitudinales sobre la orientación del satélite.

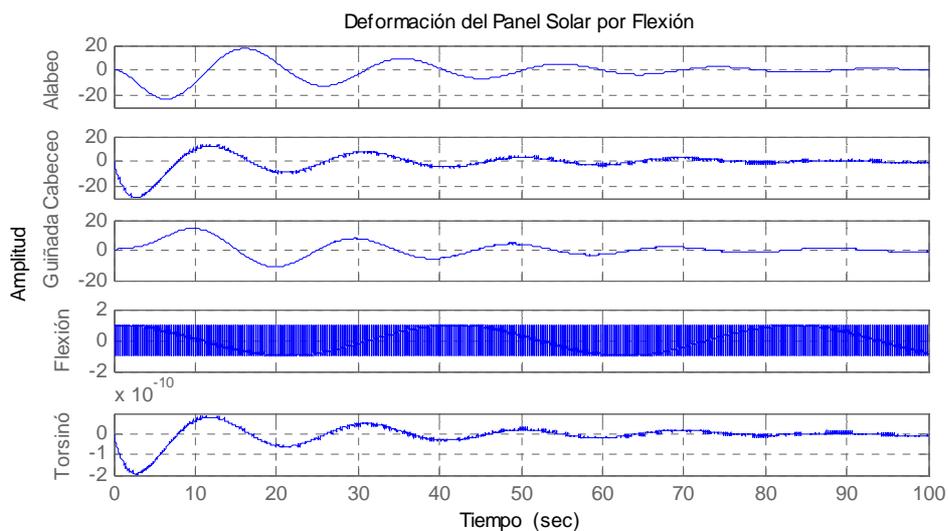


Figura 6.17: Repercusión de los modos orbitales frente a vibración longitudinal de los paneles solares.

Se observa un transitorio de desorientación en los tres modos orbitales, que recuperan la orientación original, volviendo a cero en 60 segundos en el mejor de los canales (cabeceo). Es necesario indicar que las magnitudes obtenidas se deben a los altos valores introducidos en la simulación por vibración de los paneles solares. En cuanto a la vibración por torsión se observa que el movimiento está completamente desacoplado, y que la repercusión debida a flexión sobre la torsión no tiene efecto.

Para el caso de torsión que se muestra en la Figura 6.18 los efectos de una amplitud elevada en la frecuencia de oscilación a torsión repercute sobre la flexión del panel y sobre el resto de los modos. Esta situación es puramente matemática, y no se producirá en el caso real.

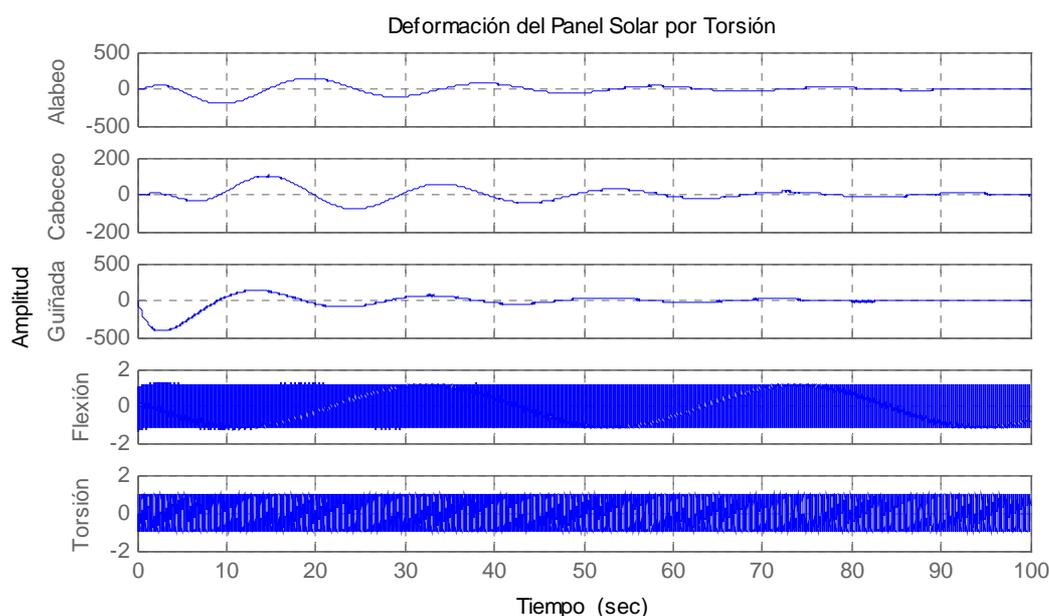


Figura 6.18: Repercusión de los modos orbitales frente a vibración transversal de los paneles solares.

6.6.2.2. CONTROLADOR OBTENIDO CON LA FUNCIÓN *gpofea*.

El tipo de asignación que lleva a cabo este controlador está basado en realimentación de la salida y por medio de una asignación genérica paramétrica. Esta función por tanto utiliza métodos de proyección para obtener el controlador.

Una de las características más interesantes del controlador obtenido por aplicación de esta función es la precisión de los autovalores obtenidos comparados con los deseados. Además, el valor del número de condición no es demasiado elevado comparado con el resto de funciones. La Tabla 6.24 compara los autovalores deseados con los obtenidos, mientras que la Tabla 6.25 muestra las características paramétricas del sistema en lazo cerrado.

Modo Dinámico	Autovalores deseados	Autovalores obtenidos
Alabeo	-6.2e-001±3.5e-001i	-6.1457e-001 ± 3.4821e-001i
Cabeceo	-3.3e-002±3.3e-001i	-3.24e-002 ± 3.24e-001i
Guiñada	-3.0e-001±3.0e-001i	-2.90e-001 ± 2.90e-001i
Flexión	-0±2.7746e+001i	0.0±2.77e+001i
Torsión	-0±4.0e+002i	0.0±4.0000e+002i

Tabla 6.24: Autovalores deseados y obtenidos para el controlador K7 (función gpofea).

Modo Dinámico		Autovalores	Amortiguamiento	Frecuencia Natural (rad/seg)	Sensibilidad de los Autovalores	Número de Condición
Modos Orbitales	Alabeo	-6.1457e-001 ± 3.4821e-001i	8.70e-001	7.06e-001	3.0334	516.3714
	Cabeceo	-3.24e-002 ± 3.24e-001i	9.95e-002	3.26e-001	2.2445e	
	Guiñada	-2.90e-001 ± 2.90e-001i	7.07e-001	4.10e-001	2.9328	
Modos de Deformación	Flexión	0.0±2.77e+001i	0.0	2.77e+001	1.3892e+001	
	Torsión	0.0±4.0000e+002i	0.0	4.00e+002	2.0000e+002	

Tabla 6.25: Características de los autovalores obtenidos con el controlador K7.

Es interesante resaltar que los números de condición obtenidos tienen un valor menor que los obtenidos en el caso del controlador de la función “ofeasvd”. Los resultados de los autovectores de la Tabla 6.26 muestran que los modos de alabeo, cabeceo y guiñada están completamente desacoplados de los modos de deformación.

La matriz del controlador estático obtenido es la siguiente:

$K7 =$

-5.3113e+000 3.0103e+000 1.2302e+000 1.1525e-001 2.7131e+000 -2.7210e+001 -2.7455e+000 -3.1659e+000 -3.8973e-001 6.7928e-002
2.4561e+000 -7.0778e+000 5.4009e+000 -1.4652e-001 -4.5686e-002 6.7181e-001 -2.2372e+001 1.0288e+001 4.3804e-001 6.1713e-002
-3.9136e+000 -8.0796e-001 -1.0188e+001 1.2521e-001 -2.1979e+000 -2.4095e+001 2.8011e+001 -1.9300e+001 -1.2233e+000 6.7038e-002

Los valores de los autovectores indican esta situación, así como la comprobación gráfica que presenta la Figura 6.20. En esta tabla se muestran diversos elementos de los autovectores con valores de 0.0; esto indica que el desacoplo es total del modo correspondiente. El acoplamiento más alto se corresponde con el valor más alto del elemento del autovector para cada uno de los autovalores.

Autovectores Obtenidos					
	Modos Orbitales			Modos de Deformation	
	Alabeo	Cabeceo	Guiñada	Flexión	Torsión
Autovectores Obtenidos	-6.1457e-002±3.4821e-002i	-3.24e-002 ± 3.24e-001i	-2.90e-001 ± 2.90e-001i	0.0±2.77e+001i	0.0±4.0000e+002i
Autovectores	2.4090e-002±1.0359e-001i	2.5596e-001±2.4473e-001i	-7.0996e-001	0.0±5.1549e-004i	0.0±0.0i
	-3.3757e-001±3.9892e-002i	-3.9603e-001±3.2110e-001i	3.3614e-001±1.2886e-001i	-1.4947e-005±1.1270e-006i	0.0±0.0i
	7.3504e-001	-7.2024e-001	3.5360e-001±3.1200e-001i	5.7370e-005±1.9684e-006i	0.0±0.0i
	-6.2417e-005±2.0123e-005i	2.6552e-005±3.8112e-005i	3.7663e-008±1.4764e-004i	0.0±3.6014e-002i	0.0±0.0i
	0.0±0.0i	0.0±0.0i	0.0±0.0i	0.0±0.0i	0.0±2.5000e-003i
	-5.0874e-002±5.5272e-002i	-8.7606e-002±7.5021e-002i	2.0589e-001±2.0589e-001i	-1.4303e-002 ±0.0i	0.0±4.2609e-006i
	1.9357e-001±1.4206e-001i	-9.1232e-002±1.3875e-001i	-1.3485e-001±6.0110e-002i	3.1269e-005±4.1471e-004i	-2.6921e-005±4.1958e-006i
	-4.5173e-001±2.5595e-001i	2.3337e-002±2.3341e-001i	-1.2070e-002±1.9303e-001i	-5.4616e-005±1.5918e-003i	0.0±5.1292e-006i
	4.5367e-005±9.3671e-006i	-1.3212e-005±7.3700e-006i	4.2804e-005±4.2827e-005i	9.9925e-001	0.0±4.0200e-006i
	0.0±0.0i	0.0±0.0i	0.0±0.0i	0.0±0.0i	1.0000e+000

Tabla 6.26: Autoestructura obtenida con el controlador $K7$.

La posición de los autovalores en el plano complejo para el sistema en lazo cerrado mostrados en la Figura 6.19 indica la estabilidad conseguida para el sistema y la posición de los autovalores correspondientes a flexión y torsión. Estos permanecen en las mismas posiciones que para el sistema en lazo abierto tal y como fue requerido por los autovalores deseados. El controlador es muy estable para los autovalores deseados, tal y como se muestra en la Figura 6.20. El tiempo de respuesta es lento, lo que repercute en las deformaciones por flexión y torsión. Una característica interesante de este controlador es que la función obtiene exactamente los autovalores deseados. Esta cualidad hace que el diseño del controlador con esta función sea considerada muy interesante desde la perspectiva de obtener valores exactos a los autovalores, limitándolos de forma precisa a la zona definida de posición de los autovalores deseados en el plano complejo.

La Figura 6.20 muestra la respuesta temporal con excitación escalón unitario. Las maniobras orbitales están desacopladas de los modos de deformación, y estos a su vez, entre sí. El desacoplo de los modos de alabeo y guiñada casi es adecuado, y el de cabeceo induce un error en el modo de alabeo. Estas situaciones se deben corregir con valores diferentes de autovalores, ya que el número de condición de este controlador no es demasiado alto, lo que le hace menos sensible.

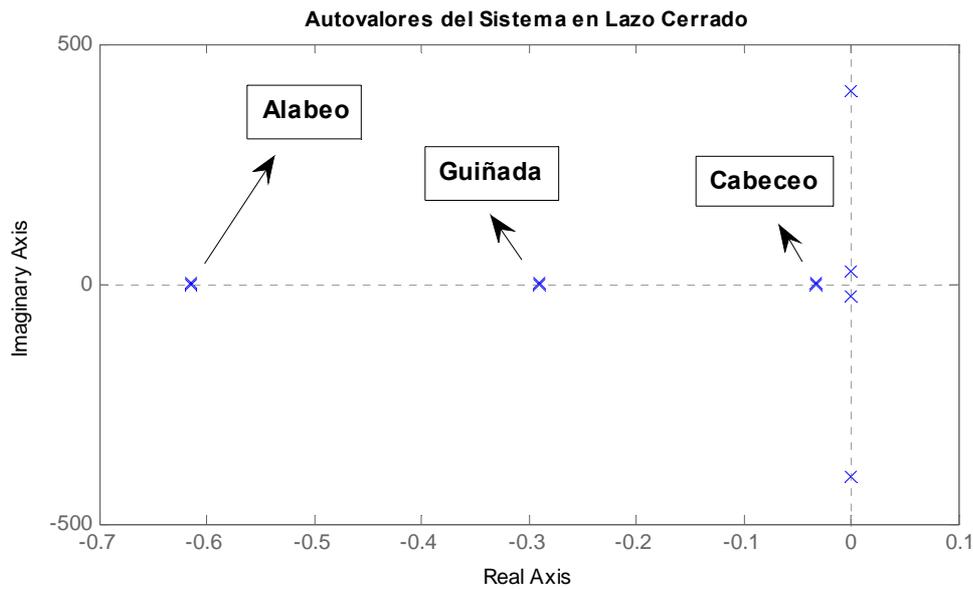


Figura 6.19: Autovalores del sistema en lazo cerrado.

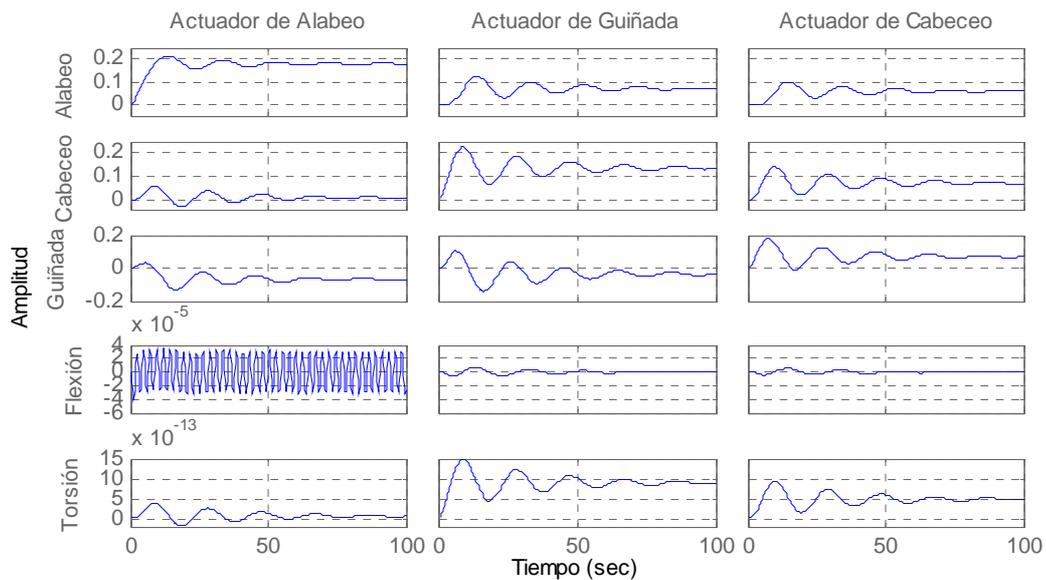


Figura 6.20: Excitación Escalón unitario con el controlador $K7$.

Las simulaciones que presenta la Figura 6.21 muestran las situaciones en que los paneles vibran de forma longitudinal, al igual que se hizo con los controladores anteriores. Se ha elegido un tiempo de simulación de 25 segundos para comprobar la repercusión inicial del proceso. Se observa en la figura que una oscilación mantenida debida a la flexión de cualquier panel, repercute con pequeñas alteraciones sobre la actitud del satélite, introduciendo además una vibración constante en el canal de alabeo. Esto es debido al acoplamiento entre esta maniobra y la deformación del panel por flexión. La repercusión sobre la torsión del panel es cero, presentándose en la figura la solución matemática.

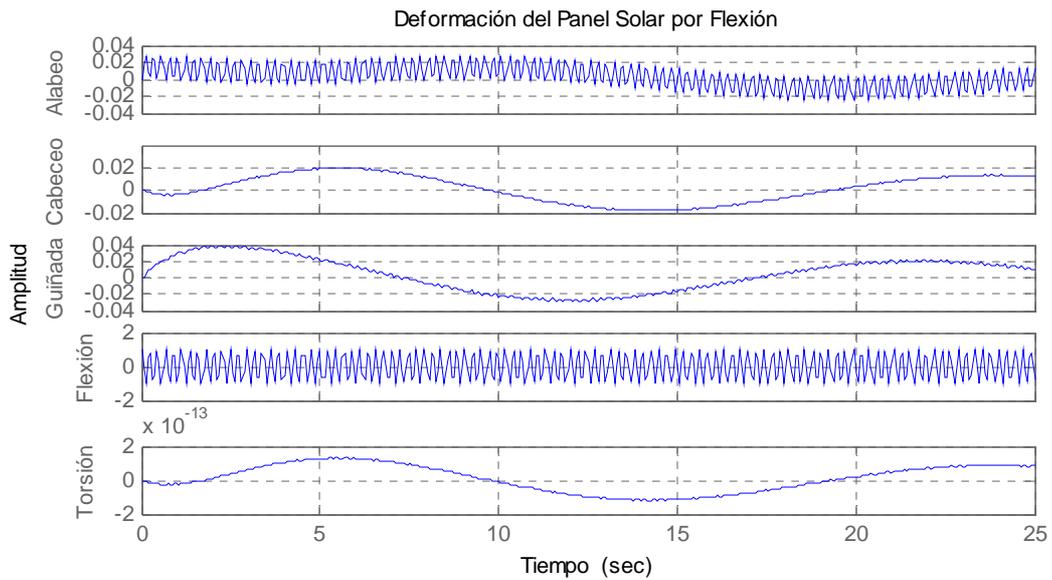


Figura 6.21: Deformación de los paneles solares debida a flexión con el controlador $K7$.

En cuanto a las repercusiones que se encuentran en los canales de actitud debido a una oscilación mantenida en el modo de torsión, se observa en la Figura 6.22 una ínfima repercusión. Concretamente una oscilación mantenida en torsión de amplitud elevada no repercute de forma significativa sobre el resto de los modos.

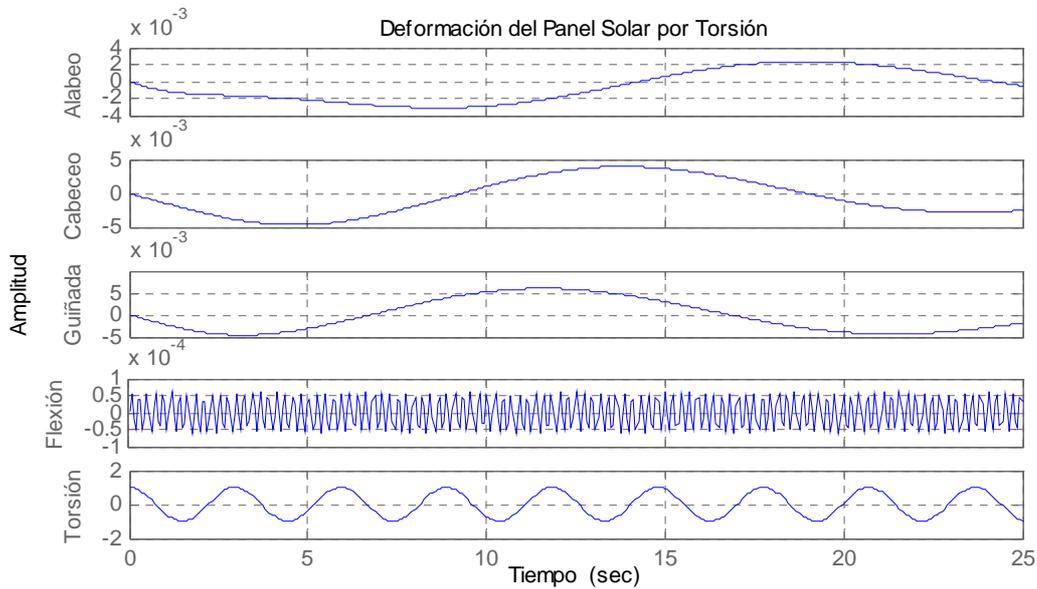


Figura 6.22: Deformación de los paneles solares debida a flexión con el controlador $K7$.

6.6.2.3. CONTROLADOR OBTENIDO CON LA FUNCIÓN pofea.

Al igual que en el caso anterior, este controlador permite obtener valores de los autovalores próximos a los deseados, permitiendo con ello abordar otras estrategias en las que los autovalores deseados estén posicionados en posiciones diferentes en el plano complejo. La Tabla 6.27 muestra los autovalores obtenidos, y como estos son equivalentes a los deseados.

Modo Dinámico	Autovalores deseados	Autovalores obtenidos
Alabeo	-6.2e-001±3.5e-001i	-6.1457e-001 ± 3.4821e-001i
Cabeceo	-3.3e-002±3.3e-001i	-3.24e-002 ± 3.24e-001i
Guiñada	-3.0e-001i±3.0e-001i	-2.90e-001 ± 2.90e-001i
Flexión	-0±2.7746e+001i	0.0±2.77e+001i
Torsión	-0±4.0e+002i	0.0±4.0000e+002i

Tabla 6.27: Autovalores deseados y obtenidos.

El número de condición obtenido con este controlador es de valor mayor que el obtenido con el controlador anterior (gpofea). Luego, este tipo de controlador, según los datos de la Tabla 6.28 sería menos robusto. La Tabla 6.29 muestra el acoplamiento de los autovalores con los autovectores del sistema. Se puede comprobar que la torsión está desacoplada del resto de modos del sistema (valor 0.0), y que los movimientos orbitales también están desacoplados de la flexión.

Modo Dinámico		Autovalores	Amortiguamiento	Frecuencia Natural (rad/seg)	Sensibilidad de los Autovalores	Número de Condición
Modos Orbitales	Alabeo	-6.1457e-001 ± 3.4821e-001i	8.70e-001	7.06e-001	4.4476e+002	1590.7916
	Cabeceo	-3.24e-002 ± 3.24e-001i	9.95e-002	3.26e-001	2.0123e+002	
	Guiñada	-2.90e-001 ± 2.90e-001i	7.07e-001	4.10e-001	5.1407e+002	
Modos de Deformación	Flexión	0.0±2.77e+001i	0.0	2.77e+001	2.8642e+001	
	Torsión	0.0±4.0000e+002i	0.0	4.00e+002	2.7456e+002	

Tabla 6.28: Características de los autovalores obtenidos con el controlador K8.

La Tabla 6.29 muestra el acoplamiento de los autovalores con los autovectores del sistema. Como en los casos anteriores los autovectores con valor cero o muy pequeño (tendiendo a cero) indican que se ha conseguido desacoplo entre los modos del sistema. De esta forma, se observa que la maniobra de alabeo está desacoplada de la deformación por flexión y por torsión y que a la vez se encuentra ligeramente acoplada con la maniobra de guiñada. La maniobra de cabeceo se encuentra también desacoplada de los efectos de torsión y flexión, obteniendo el mismo comportamiento para guiñada. Por tanto, se ha conseguido un desacoplo entre las maniobras del

satélite y las deformaciones, aislando o reduciendo en gran medida los efectos de unos modos sobre otros.

Autovectores Obtenidos					
	Modos Orbitales			Modos de Deformation	
	Alabeo	Cabeceo	Guiñada	Flexión	Torsión
Autovectores Obtenidos	-6.1457e-001 ± 3.4821e-001i	-3.24e-002 ± 3.24e-001i	-2.90e-001 ± 2.90e-001i	0.0±2.7746e+001i	0.0±4.0000e+002i
Autovectores	-6.9045e-001	6.8943e-001	5.4086e-002±1.3389e-002i	0.0±3.8143e-004i	-1.5405e-004±0.0i
	-1.6844e-002±3.3912e-001i	2.9539e-002±4.3667e-001i	-6.6639e-001	-2.4118e-002±1.7628e-004i	-1.0405e-005±0.0i
	-6.9366e-002±2.6517e-001i	-1.6523e-001±4.5817e-001i	5.1386e-001±3.8051e-001i	1.1454e-003±2.0028e-003i	-1.6996e-003±0.0i
	2.1904e-004±3.6510e-004i	8.8639e-005±1.7905e-005i	-2.7868e-006±1.1246e-005i	0.0±2.6648e-002i	1.4534e-004±0.0i
	0.0±0.0i	0.0±0.0i	0.0±0.0i	0.0±0.0i	0.0±1.8211e-003i
	4.2433e-001±2.4042e-001i	-2.2338e-002±2.2343e-001i	-1.9568e-002±1.1802e-002i	-1.0583e-002±0.0i	-4.4431e-005±6.1620e-002i
	-1.0773e-001±2.1428e-001i	-1.4247e-001±4.5752e-003i	1.9325e-001±1.9325e-001i	4.8910e-003±6.6918e-001i	-1.5067e-004±4.1619e-003i
	-4.9703e-002±1.8712e-001i	-1.4313e-001±6.8392e-002i	-2.5937e-001±3.8671e-002i	5.5569e-002±3.1780e-002i	2.8157e-004±6.7982e-001i
	-7.4830e-006±3.0065e-004i	-8.6745e-006±2.8146e-005i	-2.4533e-006±4.0696e-006i	7.3937e-001	4.1919e-005±5.8136e-002i
	0.0±0.0i	0.0±0.0i	0.0±0.0i	0.0±0.0i	7.2845e-001

Tabla 6.29: Autoestructura obtenida con el controlador $K8$.

El valor de la matriz del controlador estático es el siguiente:

$K8 =$

-6.8274e+000 8.0130e+000 2.8326e+000 -8.5107e+001 6.0404e+003 -2.7872e+001 2.7899e+000 -1.2563e+001 7.8369e-001 1.3502e+003
-4.0875e+000 -5.0879e+000 6.4384e-001 3.3493e+002 3.1650e+004 -1.4351e-001 -2.0967e+001 -2.0281e+000 9.3258e+002 8.4735e+001
-3.8227e+000 -6.4953e-002 -5.2441e+000 -1.8855e+003 4.0003e+003 -3.9594e+001 -2.3021e-001 -1.9095e+001 -3.7092e+001 1.2058e+004

La respuesta temporal del sistema con excitación escalón unitario se muestra en la Figura 6.23, en la que se puede apreciar que la respuesta entra en régimen permanente a partir de los 50 segundos aproximadamente, y que los tres canales de actitud generan ligeros errores de apuntamiento en el resto. Esto implica que no se ha conseguido un desacoplamiento perfecto en las maniobras de actitud. En lo que a deformaciones de los paneles se refiere, sí se observa que el desacoplo con las maniobras de actitud se ha conseguido satisfactoriamente. La representación gráfica de la respuesta del sistema se corresponde con los datos de los autovectores de la Tabla 6.29. Esto implica, al igual que en el controlador anterior, que las deformaciones de los paneles solares serán mínimas.

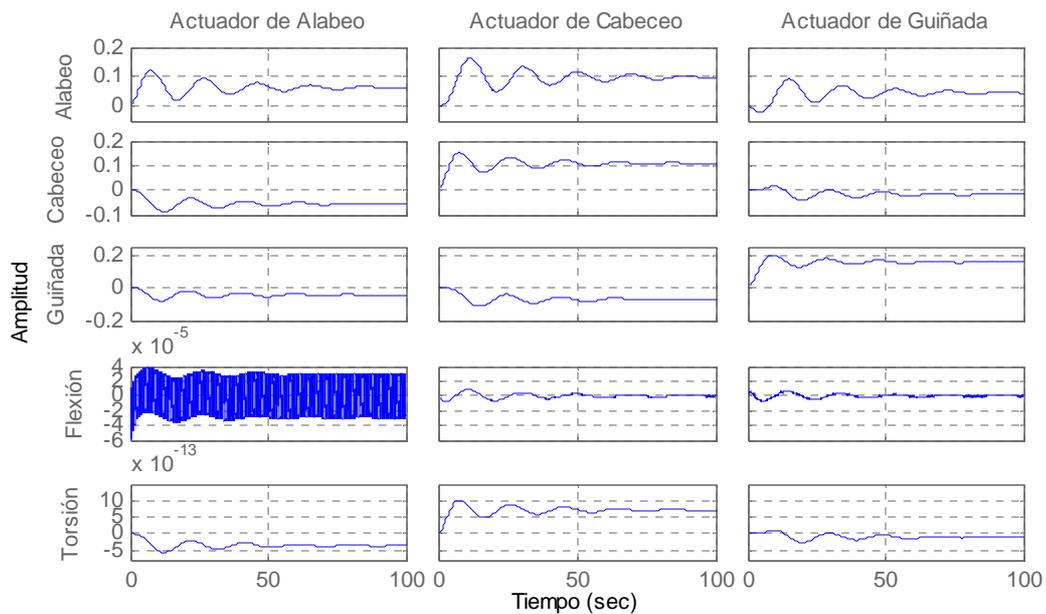


Figura 6.23: Respuesta del sistema lineal a excitación escalón unitario con el controlador $K8$.

6.6.3. DISEÑO DE CONTROLADORES CON TÉCNICAS DE ASIGNACIÓN ROBUSTA POR DESCOMPOSICIÓN QR

Finalmente se incluye en esta sección un método denominado de asignación robusta de autoestructura tal y como queda referenciado en [1998, Faleiro] y en la Tabla 6.30.

Función	Controlador	Características	Toolbox	Técnica
Asignación de Autoestructura	$K9$	Desacoplado y robusto	[1998, Faleiro]	Descomposición QR y método 0

Tabla 6.30: Funciones para la obtención del controlador por técnicas de asignación recursiva y descomposición en valores singulares.

La característica principal de la función utilizada para obtener este controlador es la necesidad de especificar la autoestructura deseada (autovalores y autovectores). Los datos de entrada son la autoestructura completa (autovalores y autovectores deseados), lo que permitirá definir de una forma más concreta el desacoplo requerido entre todos los modos del sistema, tanto orbitales como de deformación. La Tabla 6.31 muestra los autovalores deseados y los autovalores obtenidos. Se observa las ligeras diferencias existentes entre ambos grupos de autovalores, aunque el orden de magnitud es el mismo. Esto implica que el sistema no cumplirá con los potenciales requisitos de diseño en lo que a amortiguamiento y frecuencia natural se refiere.

Modo Dinámico	Autovalores deseados	Autovalores obtenidos
Alabeo	-6.2e-001±3.5e-001i	-6.15e-001±3.48e-001i
Cabeceo	-3.3e-002±3.3e-001i	-3.61e-002±3.22e-001i
Guiñada	-3.0e-001±3.0e-001i	-2.86e-001±2.89e-001i
Flexión	-0±2.7746e+001i	0.0±2.77e+001i
Torsión	-0±4.0e+002i	0.0±4.0000e+002i

Tabla 6.31: Autovalores deseados y obtenidos con el controlador $K9$.

El orden de magnitud del indicador básico de robustez tenido en cuenta es muy superior al de los controladores anteriores. Este dato se observa en la Tabla 6.32.

Modo Dinámico		Autovalores	Amortiguamiento	Frecuencia Natural (rad/seg)	Sensibilidad de los Autovalores	Número de Condición
Modos Orbitales	Alabeo	-6.15e-001±3.48e-001i	8.70e-001	7.06e-001	8.2076e+005	9.6733e+006
	Cabeceo	-3.61e-002±3.22e-001i	1.11e-001	3.24e-001	1.6408e+004	
	Guiñada	-2.86e-001±2.89e-001i	7.03e-001	4.07e-001	6.2945e+003	
Modos de Deformación	Flexión	0.0±2.77e+001i	0.0	2.77e+001	2.0052e+004	
	Torsión	0.0±4.0000e+002i	0.0	4.00e+002	2.0867e+005	

Tabla 6.32: Características de los autovalores obtenidos.

La matriz de ganancia estática obtenida es la siguiente:

$K9 =$

-6.5793e+000 9.7915e-002 -6.5543e-008 -6.3932e+002 -1.0308e+010 -2.2520e+001 8.3068e-001 -1.4142e-003 -3.0431e-001 6.8751e+006
3.6683e+000 -3.8504e+000 -2.0735e-006 2.0961e+003 -1.9585e+010 8.1707e+000 -3.2544e+000 2.9936e-004 2.8582e+004 4.9141e+007
-1.0889e+001 -1.1074e-001 -1.6076e+001 5.0971e+002 1.3191e+010 -6.0183e+001 -6.6335e-001 -3.9661e+001 -8.7837e-001 2.9351e+005

Los objetivos de desacoplo también se han obtenido con este controlador, ya que como muestran los datos de la Tabla 6.33 existe el desacoplamiento requerido de los modos con las deformaciones por flexión y por torsión. Se presenta además un hecho curioso ya que se observa que los modos de alabeo y guiñada no disponen de parte imaginaria en la componente del autovector relacionada con guiñada y alabeo respectivamente. Esto implica que no se ha conseguido un desacoplo adecuado entre estos modos orbitales induciendo un error importante en la actitud del sistema.

Autovectores Obtenidos					
	Modos Orbitales			Modos de Deformation	
	Alabeo	Cabeceo	Guiñada	Flexión	Torsión
Autovectores Obtenidos	$-6.15e-001 \pm 3.48e-001i$	$-3.61e-002 \pm 3.22e-001i$	$-2.86e-001 \pm 2.89e-001i$	$0.0 \pm 2.7746e+001i$	$0.0 \pm 4.0000e+002i$
Autovectores	$-1.5588e-006 \pm 1.2043e-006i$	$3.7558e-002 \pm 9.8067e-003i$	$6.4859e-001$	$1.8569e-005 \pm 0.0i$	$-1.3020e-004 \pm 7.7104e-004i$
	$-9.4678e-006 \pm 3.4056e-006i$	$9.4961e-001$	$-1.2595e-001 \pm 2.6211e-002i$	$0.0 \pm 3.5994e-002i$	$-2.3584e-012 \pm 1.9153e-003i$
	$8.1678e-001$	$-3.7558e-002 \pm 9.8067e-003i$	$-6.4859e-001 \pm 0.0i$	$0.0 \pm 0.0i$	$-1.2284e-004 \pm 1.1878e-003i$
	$0.0 \pm 0.0i$	$4.4852e-006 \pm 2.3256e-006i$	$1.3307e-006 \pm 1.3282e-004i$	$-1.2973e-003 \pm 0.0i$	$1.2284e-004 \pm 7.2744e-004i$
	$0.0 \pm 0.0i$				
	$1.3773e-006 \pm 0.0i$	$-4.5172e-003 \pm 1.1756e-002i$	$-1.8570e-001 \pm 1.8761e-001i$	$0.0 \pm 5.1521e-004i$	$3.0842e-001 \pm 5.2079e-002i$
	$7.0045e-006 \pm 1.2038e-006i$	$-3.4267e-002 \pm 3.0618e-001i$	$2.8480e-002 \pm 4.3937e-002i$	$-9.9870e-001$	$7.6611e-001$
	$-5.0197e-001 \pm 2.8441e-001i$	$4.5172e-003 \pm 1.1756e-002i$	$-3.8801e-005 \pm 3.7644e-005i$	$2.2243e-005 \pm 0.0i$	$-4.7513e-001 \pm 4.9134e-002i$
	$0.0 \pm 0.0i$	$-9.1167e-007 \pm 1.3622e-006i$	$-3.8801e-005 \pm 3.7644e-005i$	$-1.8568e-005 \pm 3.5994e-002i$	$-2.9098e-001 \pm 4.9134e-002i$
	$0.0 \pm 0.0i$	$0.0 \pm 0.0i$	$0.0 \pm 0.0i$	$0.0 \pm 0.0i$	$1.8640e-004 \pm 1.7227e-005i$

Tabla 6.33: Autoestructura obtenida con el controlador K_9 (función rbsteig).

La Figura 6.24 muestra la respuesta del sistema en lazo cerrado a excitación escalón unitario.

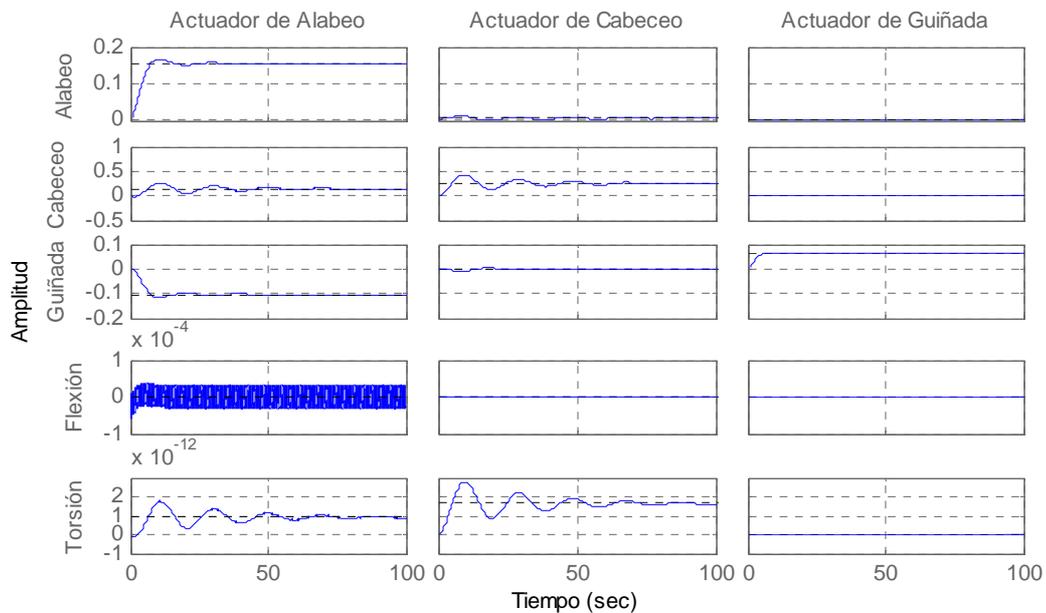


Figura 6.24: Excitación del sistema en lazo cerrado con escalón unitario con el controlador K_9 .

Se observa gráficamente que existe un desacoplo apreciable entre cualquiera de los modos orbitales. La maniobra de alabeo induce un ligero error en el canal de guiñada, que no representa un problema importante debido a la orientación del satélite. El canal de cabeceo se encuentra desacoplado del resto de canales, siendo en el modelo linealizado y con este controlador completamente independiente. Así mismo, los modos de deformación no se ven afectados por las maniobras orbitales, ya que las dimensiones de las amplitudes de las deformaciones son prácticamente cero.

6.7. SIMULACIONES CON EL SISTEMA LINEAL Y NO LINEAL

De los resultados obtenidos del proceso de diseño, correspondiente a las denominadas simulaciones del grupo uno, se han seleccionado tres controladores diseñados por técnicas de asignación diferentes. El proceso de selección seguido obedece a una estrategia basada en la obtención del mejor controlador del grupo anterior en referencia al número de condición de la matriz de autovectores del sistema en lazo cerrado. A la vez, esta estrategia permite comparar los resultados, simulando sobre los sistemas lineal y no lineal, y trabajando sobre la misma autoestructura deseada. Los tres controladores con menor número de condición son los denominados **K4** (función *sfb_proj*), **K5** (función *projea*) y **K7** (función *gpofea*). El objetivo de las simulaciones introducidas en esta sección es comparar los tres controladores con una doble vertiente. Por un lado obtener nuevos controladores con un nuevo grupo de autovalores deseados, pero manteniendo los autovectores. Esto permitirá verificar de nuevo el comportamiento de los sistemas obtenidos frente a nuevas autoestructuras. En segundo lugar, los controladores obtenidos van a ser ensayados en el sistema no lineal. Las simulaciones sobre el sistema no lineal permitirán determinar el funcionamiento de los sistemas obtenidos con el modelo matemático del vehículo (sistema real). El proceso de diseño de estos nuevos controladores es exactamente igual al anterior, en el que se comienza por determinar los autovalores deseados del sistema.

6.7.1. DATOS OBTENIDOS DEL SISTEMA LINEAL

Antes de proceder a la comparación de resultados entre el sistema lineal y no lineal se ha vuelto a llevar a cabo el mismo procedimiento de diseño que en el grupo uno de simulaciones, pero en esta ocasión con los controladores seleccionados. En este proceso de diseño sobre el sistema lineal la nueva autoestructura está formada por los mismos autovectores de la Tabla 6.4 y los autovalores de la Tabla 6.6. Los ensayos realizados sobre el sistema lineal permiten conocer las respuestas temporales de los sistemas en los que se han integrado los distintos controladores y comparar los resultados. Los requisitos impuestos a los autovalores deseados relacionados con los modos orbitales se centran en dotar de un amortiguamiento mayor y una frecuencia natural mayor que la obtenida del sistema nominal en lazo abierto. Así, se ha llegado a la conclusión de mantener los modos de deformación en las posiciones originales del sistema con el objeto de no aumentar las acciones de control. La Tabla 6.34 muestra los autovalores obtenidos para los controladores **K4**, **K5** y **K7**.

Modo Dinámico	Autovalores deseados	Autovalores obtenidos		
		<i>K4</i>	<i>K5</i>	<i>K7</i>
Alabeo	-6.2e-001±3.5e-001i	-5.0923e-001 -5.5092e-001	-6.15e-001 ± 3.48e-001i	-6.1457e-001 ± 3.4821e-001i
Cabeceo	-3.3e-002±3.3e-001i	-5.1178e-001±3.3172e-002i	-3.24e-002 ± 3.24e-001i	-3.24e-002 ± 3.24e-001i
Guiñada	-3.0e-001i±3.0e-001i	-5.0480e-001±3.5156e-002i	-2.90e-001 ± 2.90e-001i	-2.90e-001 ± 2.90e-001i
Flexión	-0±2.7746e+001i	-7.7889e-003±2.7746e+001i	0.0±2.7746e+001i	0.0±2.77e+001i
Torsión	-0±4.0e+002i	0.0±4.0000e+002i	0.0±4.0000e+002i	0.0±4.0000e+002i

Tabla 6.34: Tabla comparativa de autovalores obtenidos.

6.7.2. SIMULACIONES CON CONTROLADORES EA CON LOS SISTEMAS LINEAL Y NO LINEAL. CASOS DE ESTUDIO

En este grupo de simulaciones se van a ensayar los controladores *K5* y *K7* para los sistemas lineal y no lineal. Este tipo de ensayo pretende introducir una componente adicional basada en forzar la posición de los autovalores correspondientes a los modos de deformación a posiciones más amortiguadas. Con esta situación se pretende obtener los controladores mencionados introduciendo amortiguamiento adicional. En este caso, los polos de deformación ya no coincidirán con los autovalores del sistema en lazo abierto.

La simulación consiste en analizar tres casos diferentes que se describen en la Tabla 6.35. El caso 1 es el que se corresponde con el sistema nominal, esto es con los autovalores de flexión y torsión en el mismo lugar que para el sistema en lazo abierto.

CASOS DE ANÁLISIS	CARACTERÍSTICAS	CONTROLADORES
CASO 1	Sistema Nominal. Sin amortiguamiento forzado.	<i>K4</i> <i>K5</i> <i>K7</i>
CASO 2	Amortiguamiento forzado en flexión.	<i>K5</i> <i>K7</i>
CASO 3	Amortiguamiento forzado en torsión.	<i>K5</i> <i>K7</i>

Tabla 6.35: Casos Analizados con los Controladores *K5* y *K7*.

El caso 2 introduce amortiguamiento forzado en el autovalor correspondiente a flexión, mientras que el caso 3 el correspondiente a torsión. La Tabla 6.36 muestra los autovalores deseados para obtener el amortiguamiento requerido. La autoestructura deseada se completa con los autovectores. Los autovectores requeridos van a ser los incluidos en la Tabla 6.4.

Modo	Autovalores Deseados			Amortiguamiento Requerido
	CASO 1	CASO 2	CASO 3	
Alabeo	$-6.15e-002 \pm 3.35e-002i$	$-6.15e-002 \pm 3.35e-002i$	$-6.15e-002 \pm 3.35e-002i$	0.88
Cabeceo	$-8.6e-002 \pm 3.20e-002i$	$-8.6e-002 \pm 3.20e-002i$	$-8.6e-002 \pm 3.20e-002i$	0.94
Guiñada	$-2.90e-001 \pm 2.90e-001i$	$-2.90e-001 \pm 2.90e-001i$	$-2.90e-001 \pm 2.90e-001i$	0.70
Flexión	$-0.0 \pm 2.70e+001i$	$-10.0 \pm 2.70e+001i$	$-0.0 \pm 2.70e+001i$	Caso 1 = 0 Caso 2 = 0.35 Caso 3 = 0
Torsión	$0.0 \pm 4.00e+002i$	$0.0 \pm 4.00e+002i$	$-100.0 \pm 4.00e+002i$	Caso 1 = 0 Caso 2 = 0 Caso 3 = 0.24

Tabla 6.36: Autovalores Deseados para los Casos Analizados.

Para el diseño de estos controladores, basados en los requisitos anteriores se van a obtener las respuestas a excitación escalón para los sistemas lineal y no lineal, así como las acciones de control de los tres actuadores del sistema, concretamente para la maniobra de alabeo. Este último análisis tiene como objetivo valorar el comportamiento de los actuadores en los tres casos de análisis.

6.7.3. CASO 1: AMORTIGUAMIENTO NOMINAL

Este grupo de simulaciones está orientado a realizar los ensayos de comportamiento temporal para el sistema lineal y no lineal. Con este tipo de ensayos se pretende comparar las respuestas de ambos sistemas con los controladores obtenidos de los casos de simulación anteriores. Concretamente en esta sección se va a comprobar el comportamiento de aquellos controladores que tienen menor número de condición. Las simulaciones se van a llevar a cabo sobre los controladores **K4**, **K5** y **K7**. Para ello, se va a excitar el sistema con entradas tipo escalón unitario. En este grupo de simulaciones se ha variado la posición de los autovalores deseados con el objeto de comprobar que el sistema trabaja adecuadamente cuando se modifican los autovalores o autovectores deseados basado en los requisitos de la Tabla 6.36. Los autovectores deseados permanecen con el mismo valor que en el caso de la simulación anterior, ya que los requisitos de desacoplo no se modifican. Respecto de los autovalores deseados, se ha de apreciar que los correspondientes a los modos de flexión y torsión permanecen en la misma posición que los obtenidos en lazo abierto. Es decir, se presupone que la autoestructura obtenida es suficiente para desacoplar los modos orbitales y de deformación. Este tipo de ensayo no induce amortiguamiento adicional para los modos de flexión y torsión.

6.7.3.1. CONTROLADOR **K4** (función `sfb_proj`)

Así, la Figura 6.25 muestra los resultados correspondientes al controlador por selección de respuesta temporal y amortiguamiento del sistema, controlador **K4**, con los datos de tiempo de asentamiento y amortiguamiento que se presentan en la Tabla 6.14. Se observa en ellas que el sistema tiene un comportamiento equivalente para el sistema lineal y no lineal. En lo que a vibración por flexión de los paneles solares, se observa que el comportamiento no lineal del sistema es equivalente en ambos sistemas para la maniobra de alabeo. En la maniobra de guiñada la oscilación por flexión es cero y la torsión inducida en la maniobra de cabeceo también es cero. Un aspecto importante al comparar los resultados de los sistemas lineal y no lineal es la aparición, de forma transitoria, de una oscilación en cabeceo al realizar maniobras de alabeo y cabeceo. Sin embargo, el desacoplo obtenido sobre los modos de alabeo y guiñada al realizar una maniobra es total.

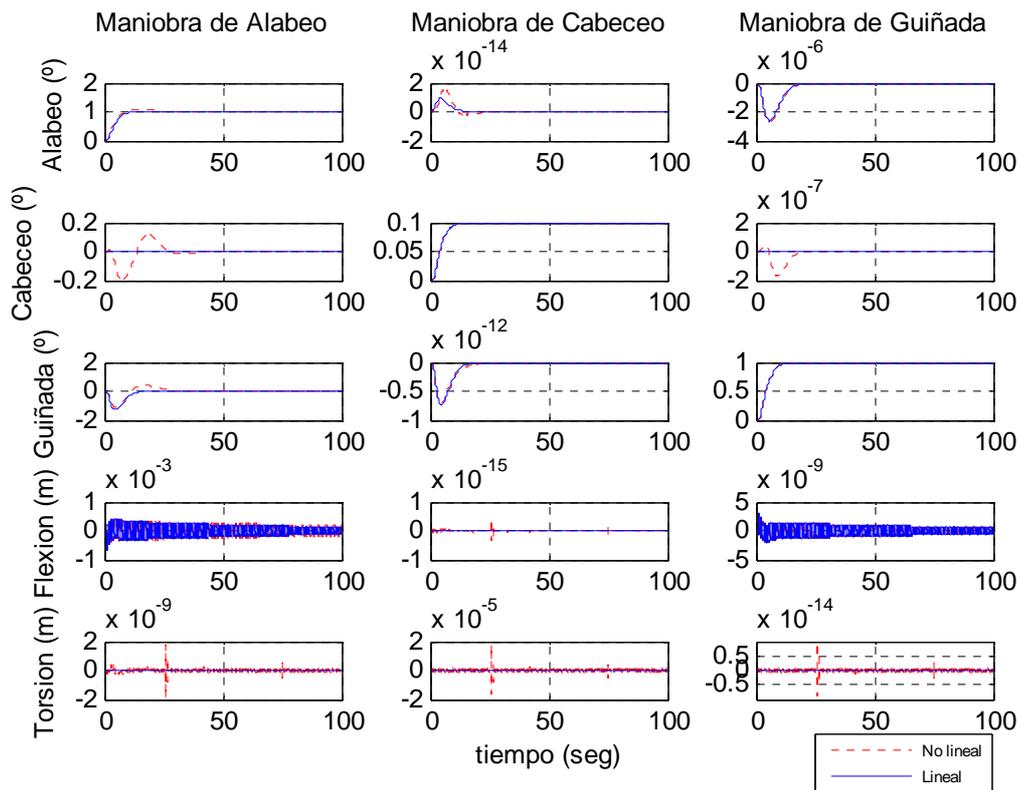


Figura 6.25: Comparación de Respuestas a Excitación Escalón para los Sistemas Lineal y No Lineal con el Controlador por Características del Sistema ($K4$).

6.7.3.2. CONTROLADOR $K5$ (Función proyea)

Las simulaciones llevadas a cabo con este controlador se basan en los mismos autovalores que en el caso del controlador $K4$ anterior. La autoestructura obtenida se ha diseñado por medio de métodos de proyección. Los autovalores de este nuevo controlador denominado $K5$ se han presentado en la Tabla 6.34. Los datos concretos referentes a los autovalores, amortiguamiento y frecuencia natural se ofrecen en la Tabla 6.37. El sistema para este nuevo grupo de autovalores deseados permanece estable, los autovalores obtenidos se aproximan a los autovalores deseados, y el desacoplo se manifiesta en la Figura 6.26. El comportamiento de los sistemas lineal y no lineal es prácticamente equivalente salvo ciertas excepciones. Así, se presenta un cabeceo inducido en el sistema no lineal para la maniobra de alabeo que es prácticamente nulo. Este mismo movimiento en la maniobra de guiñada es cero tanto en el sistema lineal como no lineal, luego el desacoplo es total. En lo que vibración se refiere se pone de manifiesto que la flexión y la torsión son cero para las tres maniobras orbitales. Las oscilaciones de estos modos que aparecen en la gráfica son las soluciones matemáticas del proceso. Puede observarse que la amplitud de estas vibraciones es nula. Así mismo, la maniobra de cabeceo está desacoplada tanto de los modos orbitales como de la deformación por torsión. Las características de desacoplo que ofrece este controlador para la autoestructura deseada son totales, tanto para el sistema lineal como no lineal.

Modo Dinámico		Autovalores	Amortiguamiento	Frecuencia Natural (rad/seg)	Sensibilidad de los Autovalores	Número de Condición
Modos Orbitales	Alabeo	$-6.15e-002 \pm 3.48e-002i$	8.70e-001	7.06e-002	1.4487e+001	4.1922e+002
	Cabeceo	$-8.67e-002 \pm 3.24e-002i$	9.37e-001	9.26e-002	1.5561e+001	
	Guiñada	$-2.90e-001 \pm 2.90e-001i$	7.07e-001	4.10e-001	2.0550	
Modos de Deformación	Flexión	$0.0 \pm 2.70e+001i$	0.0	2.70e+001	1.3532e+001	
	Torsión	$0.0 \pm 4.00e+002i$	0.0	4.00e+002	2.0000e+002	

Tabla 6.37: Datos Paramétricos de los Autovalores Obtenidos con el Controlador K5.

La matriz de control obtenida es la siguiente:

$K5 =$

-6.4824e+000 7.1638e-011 5.2237e-003 -1.7351e+003 -3.3117e-007 -2.2214e+001 9.1508e-010 8.9796e-002 9.8960e-001 7.2654e-008
7.1802e-011 -2.7931e-001 -1.3148e-012 -1.5036e-011 9.9401e-004 4.1012e-010 -6.4409e+000 -8.2066e-012 -1.3510e-011 -1.7344e-004
2.6560e-001 -1.5798e-011 -1.2123e-001 5.4831e-002 -3.8723e-006 -3.5949e+001 -1.9862e-010 -3.9320e+000 4.2473e-001 5.9546e-009

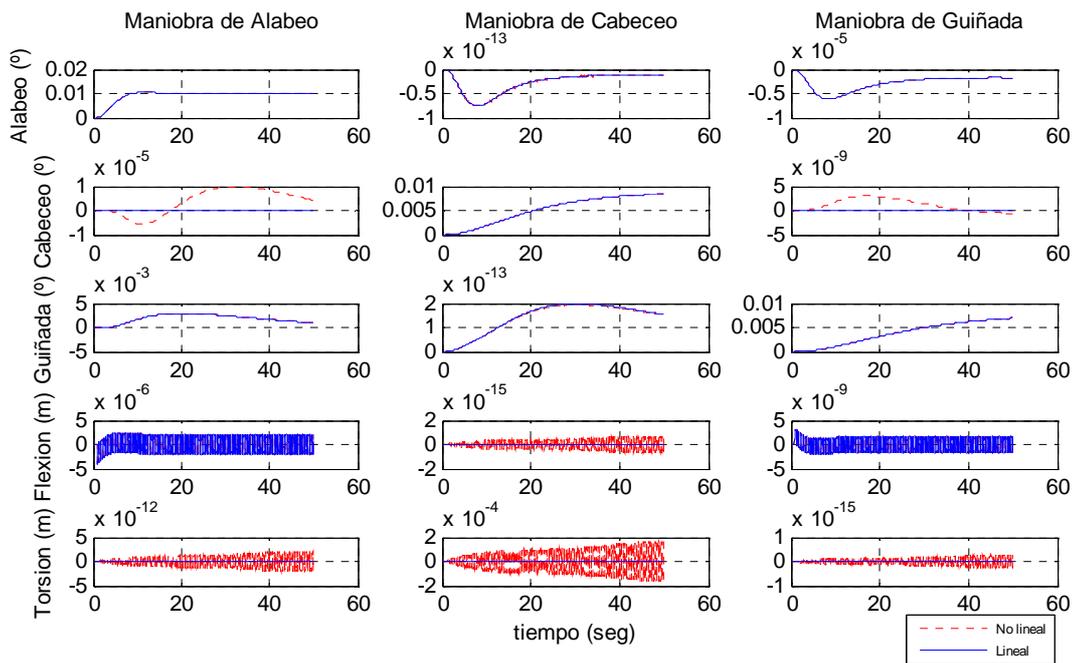


Figura 6.26: Comparación de Respuestas a Excitación Escalón para los Sistemas Lineal y No Lineal con el Controlador por K5.

Las acciones de control de los sistemas lineal y no lineal se muestran en la Figura 6.27, donde se muestra que ambas acciones son idénticas en los dos sistemas, con una vibración prácticamente permanente en el canal de alabeo. El canal de cabeceo y el de guiñada se generan sin ruido para el control del vehículo.

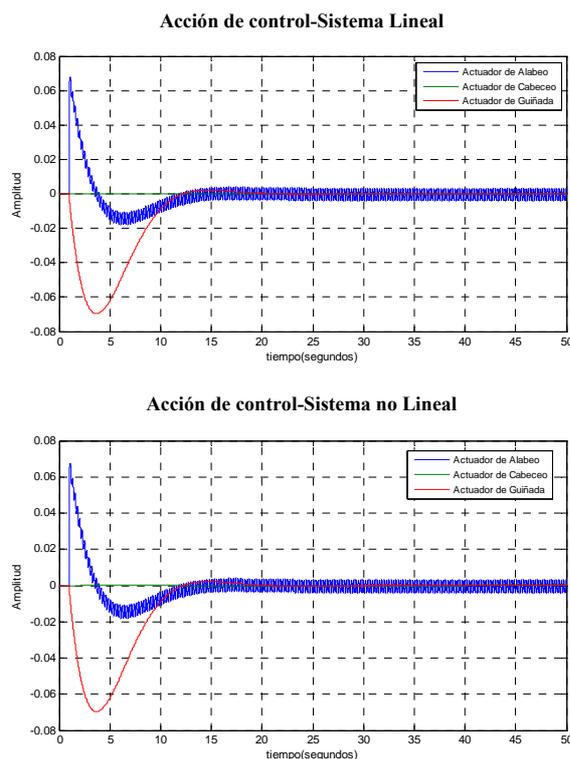


Figura 6.27: Representación de las Acciones de Control en los Sistemas Lineal y No Lineal para una Maniobra de Alabeo con el Controlador K5.

6.7.3.3. CONTROLADOR K7 (Función gpofea)

Las respuestas temporales del controlador **K7** a excitación escalón unitario se representan en la Figura 6.28. Al igual que ocurría en el caso anterior, del análisis de las figuras, se observa que para la autoestructura seleccionada se produce un ligero error en todos los canales orbitales. Es en estos modos donde también se observa que se produce un desacoplo mantenido entre la maniobra de alabeo y guiñada y viceversa. Así, la maniobra de cabeceo induce pequeños errores en el resto de canales. Las amplitudes de la mencionada Figura 6.28 tienen esta amplitud, debido a que valores más altos saturarían al controlador no lineal. La Tabla 6.38 muestra los resultados obtenidos para amortiguación, frecuencia natural y sensibilidad individual de los autovalores.

Modo Dinámico		Autovalores	Amortiguamiento	Frecuencia Natural (rad/seg)	Sensibilidad de los Autovalores	Número de Condición
Modos Orbitales	Alabeo	$-6.1463e-002 \pm 3.3611e-002i$	8.77e-001	7.01e-002	3.5249e+002	2147.7885
	Cabeceo	$-8.4769e-002 \pm 3.0235e-002i$	9.42e-001	9.00e-002	5.2957e+002	
	Guiñada	$-2.8983e-001 \pm 2.8997e-001i$	7.07e-001	4.10e-001	2.1017e+002	
Modos de Deformación	Flexión	$1.6101e-002 \pm 2.6994e+001i$	-5.96e-004	2.70e+001	1.3809e+001	
	Torsión	$0.0 \pm 4.00e+002i$	0.0	4.00e+002	2.0000e+002	

Tabla 6.38: Datos Paramétricos de los Autovalores Obtenidos con el Controlador K7.

Al igual que ocurría con el controlador anterior este también desacopla los modos orbitales y los de flexión en las tres maniobras. La amplitud del modo de torsión con este controlador tiene una amplitud bastante mayor que para el controlador **K5**. En el resto de modos el sistema no lineal tiene el mismo comportamiento que el sistema lineal.

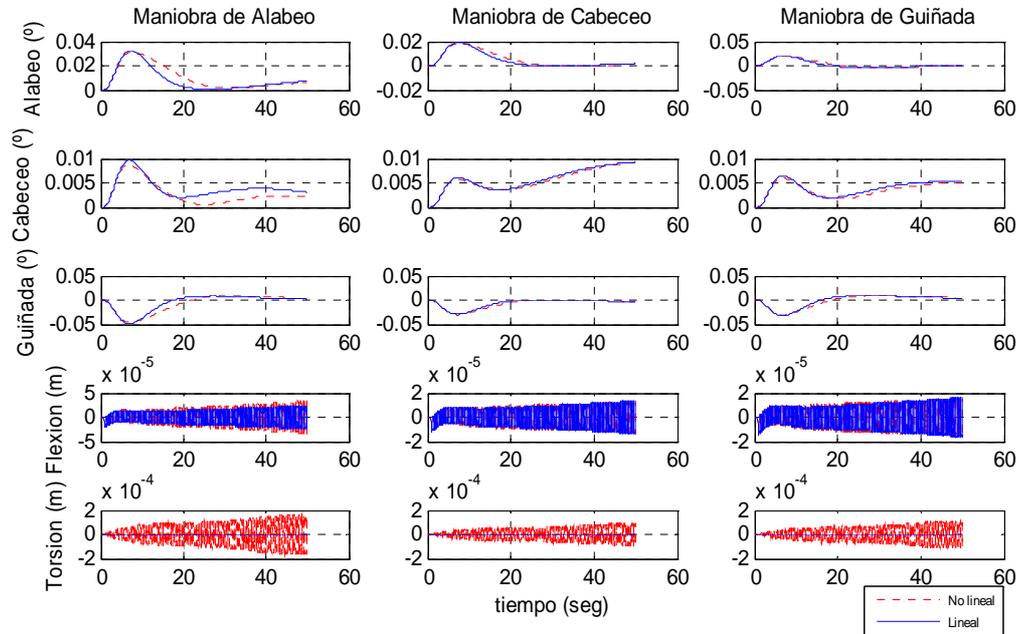


Figura 6.28: Comparación de Respuestas a Excitación Escalón para los Sistemas Lineal y No Lineal con el Controlador (K7**).**

La matriz del controlador **K7** es la siguiente:

K7 =

```
-3.5271e+001 -1.9597e+001 -2.3366e+001 -1.2939e+003 2.4161e+000 -3.6533e+002 -3.6883e+002 -2.8525e+002 -5.4193e+000 -3.7644e-002
-1.0852e+001 -6.1137e+000 -7.2428e+000 -3.9800e+002 2.1942e-001 -1.1076e+002 -1.1559e+002 -8.6821e+001 3.5516e+001 3.6595e-001
4.5577e+001 2.5465e+001 3.0235e+001 1.7070e+003 -3.0364e+000 4.2838e+002 4.7866e+002 3.6503e+002 1.6877e+001 1.8583e-001
```

Las acciones de control se presentan en la Figura 6.29. La tendencia de los dos sistemas es la misma, con ligeras diferencias en la amplitud de las oscilaciones introducidas por este controlador. Si se comparan las acciones de control de los controladores **K5** y **K7** se observa que en este último los controladores generan más acción de control. Esto implica que este controlador demanda más acción de control para la misma maniobra.

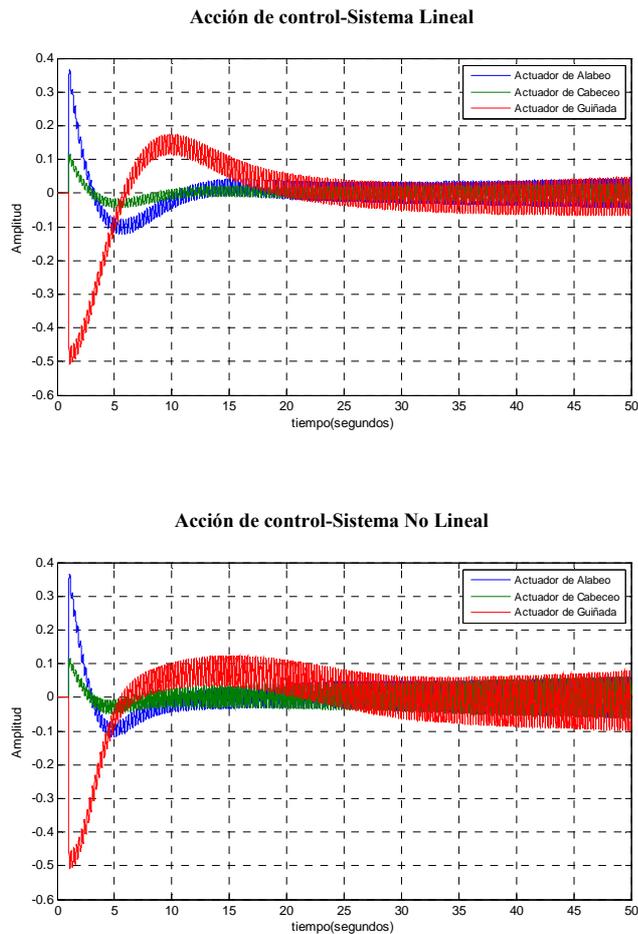


Figura 6.29: Representación de las Acciones de Control en los Sistemas Lineal y No Lineal para una Maniobra de Alabeo con el Controlador $K7$.

6.7.4. CASO 2: AMORTIGUAMIENTO FORZADO EN FLEXIÓN

En este caso de ensayos, y a diferencia de los anteriores, se va a requerir un amortiguamiento adicional para los autovalores relacionados con los modos de flexión de los paneles solares. Este requisito permitirá desacoplar en mayor grado el modo de flexión del resto de modos. A la vez, esta simulación permitirá valorar las autoestructuras obtenidas, comparándolas con las deseadas y permitirá verificar las demandas de control en los mismos términos que en el caso de simulación anterior (CASO 1). Con el requisito de amortiguamiento adicional introducido sobre este polo, tal y como muestra la Tabla 6.39 se está estresando la resolución del problema, ya que el autovalor solicitado se encuentra alejado de la posición original (situada sobre el eje imaginario). Este amortiguamiento adicional se añade al amortiguamiento nominal del sistema que está contemplado en la matriz de rigidez K del modelo matemático. Así mismo, este amortiguamiento tiene su repercusión sobre los autovalores del sistema, ya que afecta a la matriz de estado A . Si la técnica EA empleada obtiene los valores requeridos, también será interesante valorar las repercusiones sobre el resto de modos del sistema.

6.7.4.1. CONTROLADOR K5 (Función projea)

Este segundo controlador se ensaya con los valores de autovalores deseados de la Tabla 6.36. El único autovalor deseado que ha sido modificado es el correspondiente a flexión. Este autovalor ha introducido un amortiguamiento reflejado por la aportación diferente de cero de la parte real del mismo. El autovalor correspondiente a torsión permanece con el mismo valor que para el sistema en lazo abierto. Estos datos se presentan en la Tabla 6.39.

Modo Dinámico		Autovalores	Amortiguamiento	Frecuencia Natural (rad/seg)	Sensibilidad de los Autovalores	Número de Condición
Modos Orbitales	Alabeo	$-6.1457e-002 \pm 3.4821e-002i$	8.70e-001	7.06e-002	1.7567e+001	421.6613
	Cabeceo	$-8.6730e-002 \pm 3.2408e-002i$	9.37e-001	9.26e-002	1.5561e+001	
	Guiñada	$-2.90e-001 \pm 2.90e-001i$	7.07e-001	4.10e-001	3.7327e+001	
Modos de Deformación	Flexión	$-10.0 \pm 2.70e+001i$	3.47e-001	2.88e+001	1.9148e+001	
	Torsión	$0.0 \pm 4.00e+002i$	0.0	4.00e+002	2.0000e+002	

Tabla 6.39: Datos Paramétricos de los Autovalores Obtenidos con el Controlador K5.

La matriz del controlador obtenida es la siguiente:

$K =$

-7.3670e+000 2.5906e-010 5.9277e-003 3.0069e+003 -1.7088e-010 -2.5438e+001 1.5408e-009 1.0215e-001 8.4756e+002 -1.0175e-007
 1.0728e-010 -2.7954e-001 1.2930e-012 -1.0595e-008 -1.8460e-012 5.4479e-010 -6.4435e+000 3.3969e-011 6.5094e-010 -4.3768e-011
 2.7796e-001 -1.9232e-011 -1.2124e-001 -5.9029e+001 3.2940e-012 -3.5906e+001 -2.3856e-010 -3.9322e+000 9.2501e-001 1.9523e-009

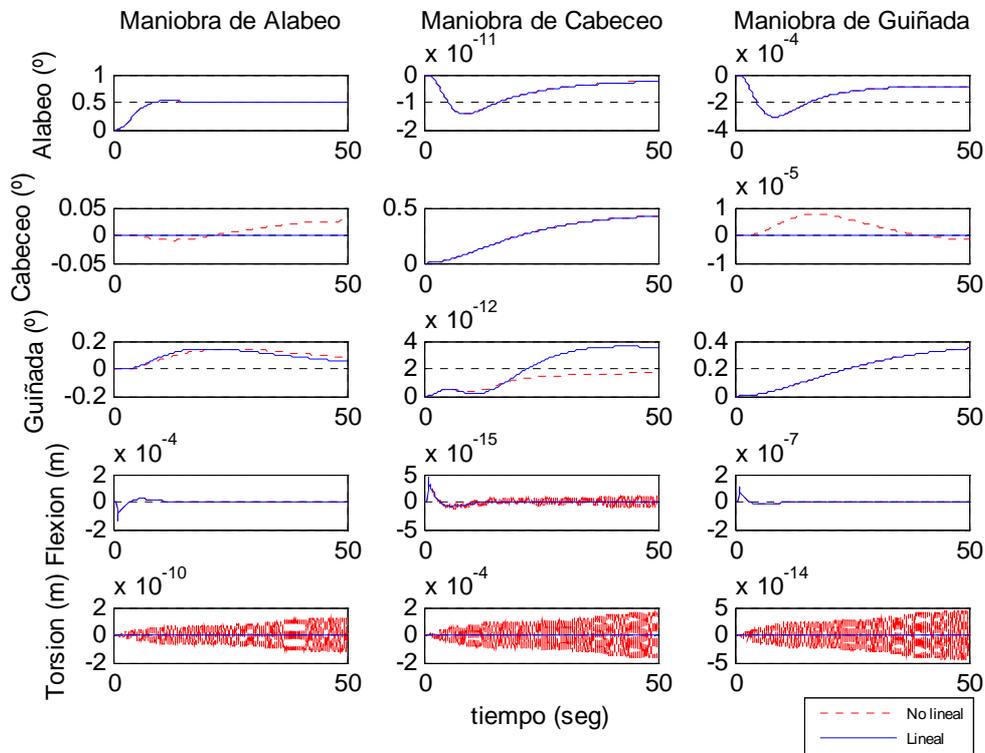
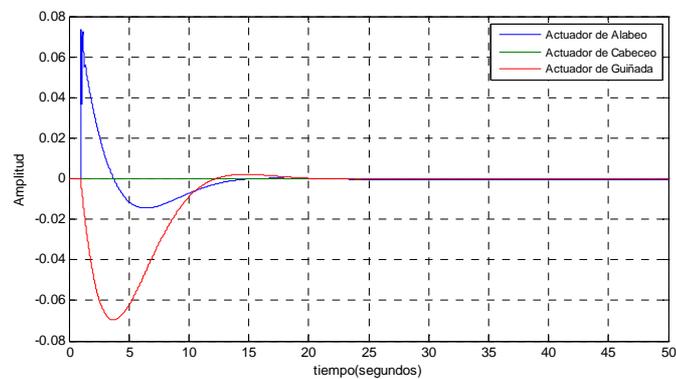


Figura 6.30: Comparación de Respuestas a Excitación Escalón para los Sistemas Lineal y No Lineal con el Controlador con Amortiguación Requerida en la Flexión (K5).

La Figura 6.30 muestra la relación de respuestas de los sistemas lineal y no lineal. Aunque el algoritmo basado en la proyección de autovectores sí logra obtener los autovalores requeridos, comparando los datos de la mencionada figura con los de la Figura 6.26, el amortiguamiento en flexión permanece, se observa además que se ha modificado el valor de amplitud de las deformaciones y que el resto de los modos tienen la misma tendencia. La introducción de un amortiguamiento requerido adicional en el autovalor de flexión no ha modificado sustancialmente el comportamiento del sistema para la misma excitación.

Respecto de las acciones de control mostradas en la Figura 6.31 se observa que tienen la misma tendencia que las del mismo controlador del caso de ensayo dos, ver Figura 6.27. La comparación de estas dos figuras sí introduce una diferencia importante. Con este controlador ha desaparecido la oscilación permanente que introducía el Caso 1.

Acción de control-Sistema Lineal



Acción de control-Sistema No Lineal

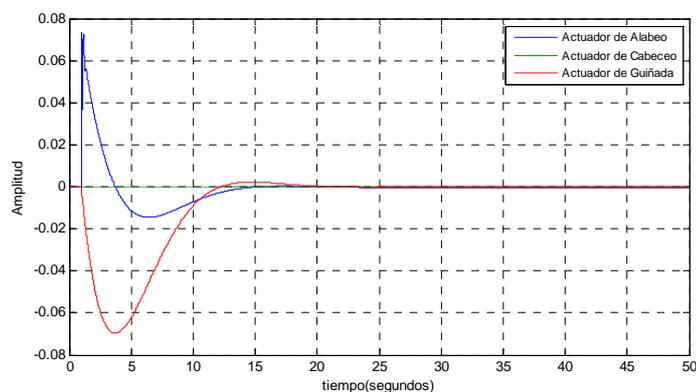


Figura 6.31: Representación de las Acciones de Control en los Sistemas Lineal y No Lineal para una Maniobra de Alabeo con el Controlador $K5$, y con Amortiguamiento Adicional en Flexión.

6.7.4.2. CONTROLADOR K7 (Función gpofea)

El diseño de este controlador se basa en los autovalores deseados en la Tabla 6.36 para el Caso 2. Los datos obtenidos se presentan en la Tabla 6.40. Comparando estos datos con los obtenidos para el controlador **K5** se observa que el número de condición es menor para este controlador que para el **K7**. Esto afecta a la sensibilidad de los autovalores, ya que en el controlador **K7** es mayor que en el controlador **K5**.

Modo Dinámico		Autovalores	Amortiguamiento	Frecuencia Natural (rad/seg)	Sensibilidad de los Autovalores	Número de Condición
Modos Orbitales	Alabeo	-6.1407e-002 ± 3.4807e-002i	8.70e-001	7.06e-002	1.3861e+002	2647.2611
	Cabeceo	-8.6421e-002 ± 3.2386e-002i	9.36e-001	9.24e-002	6.0353e+002	
	Guiñada	-2.8973e-001 ± 2.8999e-001i	7.07e-001	4.10e-001	4.9269e+002	
Modos de Deformación	Flexión	-9.9882 ± 2.70e+001i	3.47e-001	2.88e+001	2.5570e+001	
	Torsión	0.0 ± 4.00e+002i	0.0	4.00e+002	2.0000e+002	

Tabla 6.40: Datos Paramétricos de los Autovalores Obtenidos con el Controlador K7.

La matriz del controlador obtenido es la siguiente:

$K =$

-1.8973e+001 -5.4142e+000 -1.4631e+001 4.3541e+002 9.9258e-001 -2.6361e+002 -1.6476e+002 -2.0848e+002 8.4369e+002 4.9502e-001
-3.7143e+000 -1.2535e+000 -2.9249e+000 6.2072e+001 -1.2379e+000 -5.0368e+001 -3.6840e+001 -4.0830e+001 5.4125e+001 -1.3578e+000
1.9726e+001 5.9978e+000 1.5280e+001 -5.3421e+002 6.6010e-001 2.3080e+002 1.7637e+002 2.1315e+002 -1.2060e+003 9.0570e-001

La respuesta a escalón unitario que se presenta en la Figura 6.32 muestra que la tendencia para el sistema lineal y no lineal es la misma. Se observa que el desacoplo es total entre los modos orbitales y de deformación. Comparando este resultado con el de la Figura 6.28 se observa que la vibración permanente que introducía este controlador en el autovalor de flexión ha desaparecido, ya que la señal es bastante más limpia. Esto implica que se ha conseguido un amortiguamiento adicional en flexión al realizar maniobras de alabeo y que a la vez los modos orbitales permanecen desacoplados.

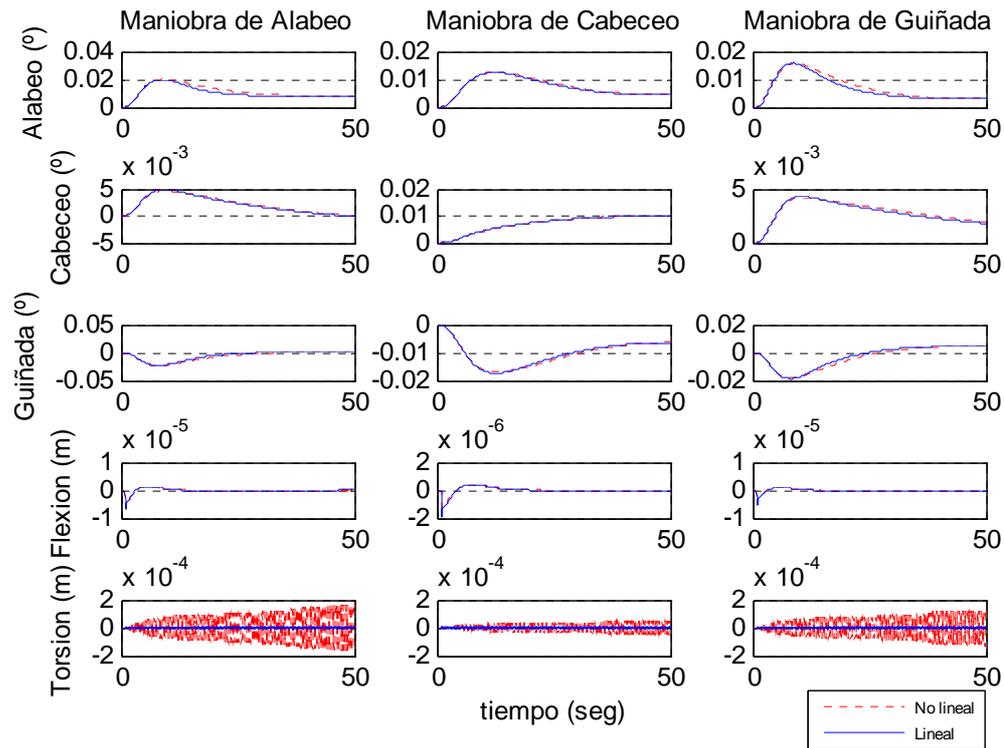
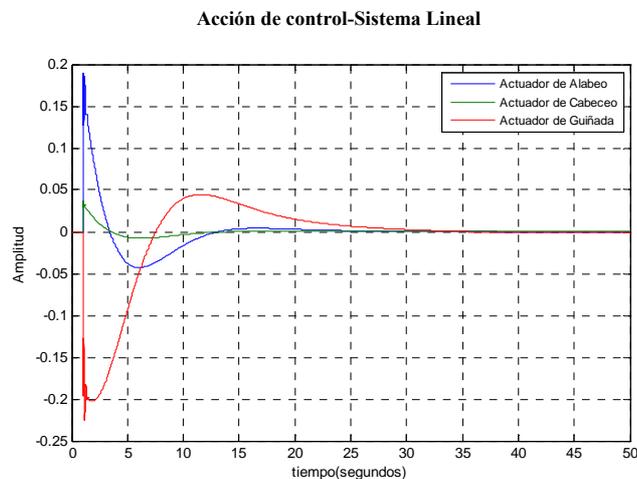


Figura 6.32: Comparación de Respuestas a Excitación Escalón para los Sistemas Lineal y No Lineal con el Controlador con Amortiguación Requerida en la Flexión ($K7$).

Las acciones de control de la Figura 6.33 confirman la misma tendencia para los sistemas lineal y no lineal. Estas acciones de control comparadas con las de la Figura 6.29 si que demuestran que el efecto de introducir un amortiguamiento adicional en flexión elimina la acción oscilatoria de los actuadores. En este sentido la acción de control es más limpia y por tanto menos estresante para los actuadores. Esta condición se presenta sobre todo en la acción del actuador de alabeo.



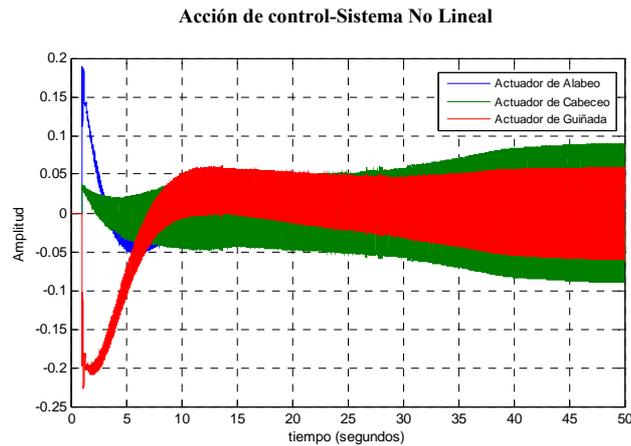


Figura 6.33: Representación de las Acciones de Control en los Sistemas Lineal y No Lineal para una Maniobra de Alabeo con el Controlador $K7$, y con Amortiguamiento Adicional en Flexión.

6.7.5. CASO 3: AMORTIGUAMIENTO FORZADO EN TORSIÓN

Este último caso de simulación introduce amortiguamiento adicional en el modo de torsión. El resto de modos del sistema permanecen con los mismos autovalores requeridos que en la simulación del caso dos. Una vez más se van a ensayar el sistema con los controladores $K5$ y $K7$.

6.7.5.1. CONTROLADOR $K5$ (Función projea)

Los datos que se muestran en la Tabla 6.41 demuestran que el algoritmo utilizado para esta simulación no ha conseguido obtener el autovalor deseado correspondiente a torsión. El resto de autovalores si han sido obtenidos, con lo cual el comportamiento del sistema con este controlador es equivalente al del Caso uno.

Modo Dinámico		Autovalores	Amortiguamiento	Frecuencia Natural (rad/seg)	Sensibilidad de los Autovalores	Número de Condición
Modos Orbitales	Alabeo	$-6.1457e-002 \pm 3.4821e-002i$	8.70e-001	7.06e-002	1.4487e+001	419.221
	Cabeceo	$-8.6765e-002 \pm 3.2408e-002i$	9.37e-001	9.26e-002	1.5561e+001	
	Guiñada	$-2.90e-001 \pm 2.90e-001i$	7.07e-001	4.10e-001	2.0550	
Modos de Deformación	Flexión	$0.0 \pm 2.70e+001i$	0.0	2.70e+001	1.3532e+001	
	Torsión	$0.0 \pm 4.00e+002i$	0.0	4.00e+002	2.0000e+002	

Tabla 6.41: Datos Paramétricos de los Autovalores Obtenidos con el Controlador $K5$.

El controlador obtenido es el siguiente, que es exactamente igual que el controlador obtenido en el Caso Uno.

$K =$

-6.4824e+000 6.9008e-011 5.2237e-003 -1.7351e+003 -2.2795e-011 -2.2214e+001 8.8475e-010 8.9796e-002 9.8960e-001 -2.6558e-009
 1.1066e-010 -2.7954e-001 1.2954e-012 -1.7468e-011 -1.8515e-012 5.5567e-010 -6.4435e+000 3.3967e-011 -2.0024e-011 -4.3768e-011
 2.6560e-001 -1.8639e-011 -1.2123e-001 5.4831e-002 -6.0432e-014 -3.5949e+001 -2.3143e-010 -3.9320e+000 4.2473e-001 -3.4352e-011

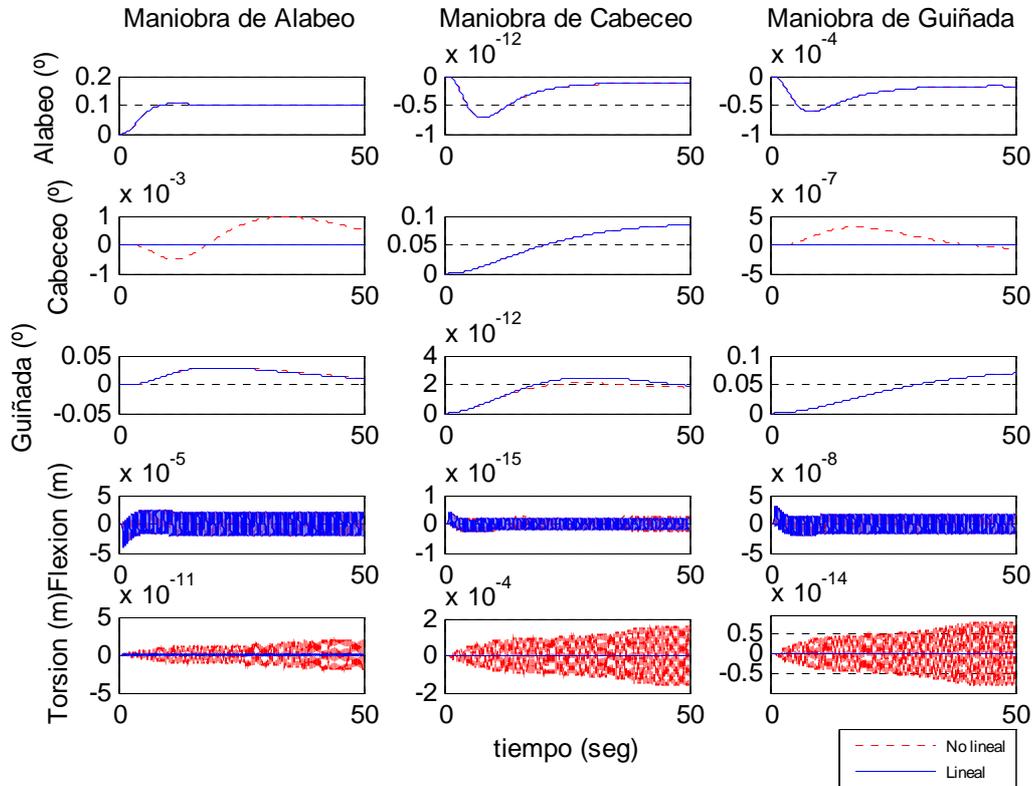
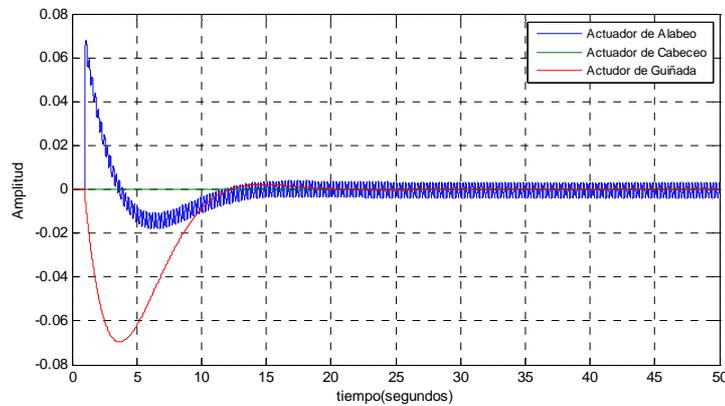


Figura 6.34: Comparación de Respuestas a Excitación Escalón para los Sistemas Lineal y No Lineal con el Controlador con Amortiguación Requerida en la Torsión (K5).

Así mismo, las acciones de control son coincidentes, también, con las del Caso uno simulado.

Acción de control-Sistema Lineal



Acción de control-Sistema No Lineal

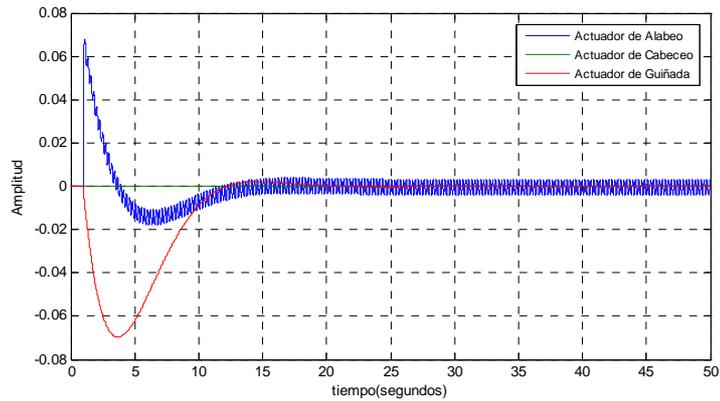


Figura 6.35: Representación de las Acciones de Control en los Sistemas Lineal y No Lineal para una Maniobra de Alabeo con el Controlador K5, y con Amortiguamiento Adicional en Torsión.

La función para calcular este controlador ha fallado en la obtención del autovalor de torsión. Implica que el requisito de amortiguamiento es demasiado alto. Este autovalor es difícilmente excitable por las acciones de control relacionadas con el alabeo y la guiñada. Puede concluirse que la acción de amortiguamiento no es tan necesaria como en el caso de la flexión longitudinal de los paneles solares.

6.7.5.2. CONTROLADOR K7 (Función gpofea)

Los autovalores obtenidos con este controlador para el modo de torsión no coinciden con los requeridos, ver Tabla 6.42. Es el único autovalor, ya que el resto sí coinciden. Al igual que ocurrió en el caso anterior la función y el método de asignación de la autoestructura no ha conseguido obtener el valor requerido. Los datos de los autovalores obtenidos muestran además que el modo de flexión ha sido modificado respecto del valor deseado, ya que se ha introducido una pequeña flexión no requerida en este modo.

Modo Dinámico		Autovalores	Amortiguamiento	Frecuencia Natural (rad/seg)	Sensibilidad de los Autovalores	Número de Condición
Modos Orbitales	Alabeo	-6.1465e-002 ± 3.4814e-002i	8.70e-001	7.06e-002	1.9989e+002	1086.2852
	Cabeceo	-8.6669e-002 ± 3.2415e-002i	9.37e-001	9.26e-002	2.6596e+002	
	Guiñada	-2.89990e-001 ± 2.90e-001i	7.07e-001	4.10e-001	1.9559e+002	
Modos de Deformación	Flexión	-2.74e-003 ± 2.70e+001i	3.47e-001	2.88e+001	1.4079e+001	
	Torsión	0.0 ± 4.00e+002i	0.0	4.00e+002	2.0000e+002	

Tabla 6.42: Datos Paramétricos de los Autovalores Obtenidos con el Controlador K7.

El controlador obtenido es el siguiente:

K =

-4.5107e+001 -4.2153e+001 -5.8748e+001 -1.0477e+003 4.9355e+000 -3.0901e+002 -1.0075e+002 -2.3951e+002 -3.3521e+000 3.2471e+000
 -2.9241e+001 -2.7416e+001 -3.8134e+001 -7.3080e+002 3.3557e+000 -1.9543e+002 -6.4472e+001 -1.5004e+002 -8.3753e+001 2.1999e+000
 5.4018e+001 5.0397e+001 7.0355e+001 1.3137e+003 -6.0759e+000 3.2363e+002 1.1206e+002 2.7520e+002 1.2613e+002 -3.9780e+000

El comportamiento del sistema en lazo cerrado frente a excitación del tipo escalón unitario que se muestra en la Figura 6.36 ofrece un comportamiento similar al de la simulación del Caso uno.

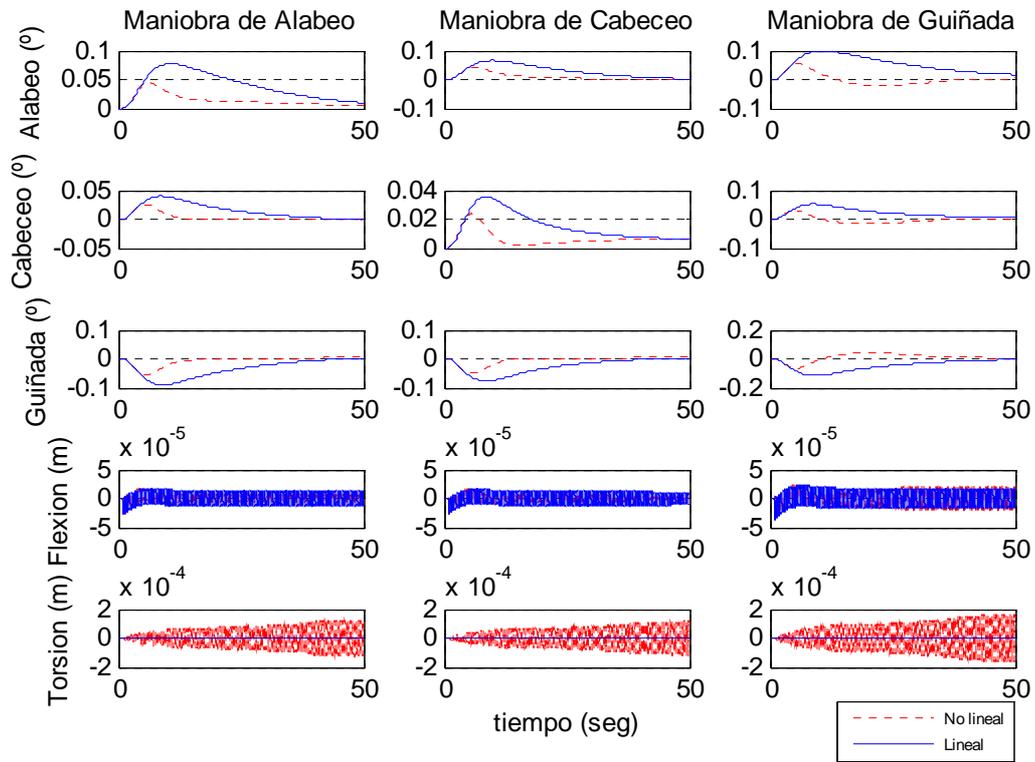
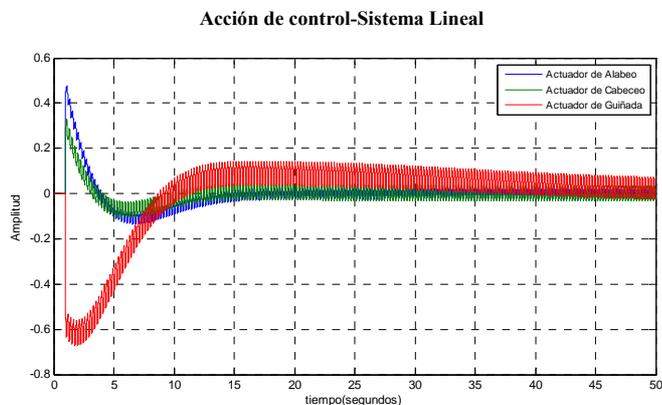


Figura 6.36: Representación de las Acciones de Control en los Sistemas Lineal y No Lineal para una Maniobra de Alabeo con el Controlador $K7$, y con Amortiguamiento Adicional en Torsión.

Como en el controlador anterior las acciones de control son equivalentes a las del Caso Uno para esta función. Se puede concluir que, como en el caso anterior, no se ha llegado a obtener la autoestructura deseada, con lo que el problema de control no está concluido y serán necesarias nuevas hipótesis de diseño.



Acción de control-Sistema No Lineal

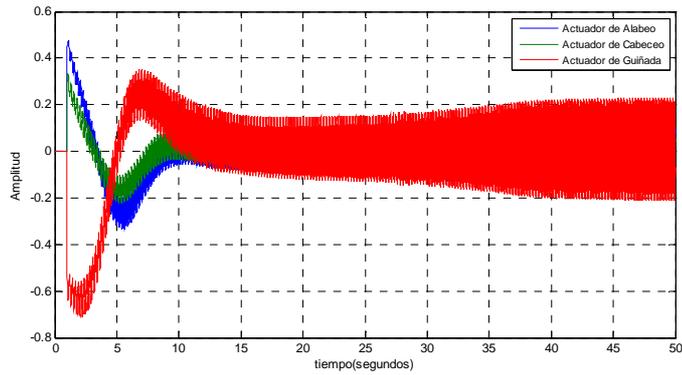


Figura 6.37: Representación de las Acciones de Control en los Sistemas Lineal y No Lineal para una Maniobra de Alabeo con el Controlador $K7$, y con Amortiguamiento Adicional en Torsión.

6.8. ANÁLISIS GLOBAL DE RESULTADOS

En la Tabla 6.43 se muestran los datos relativos a los controladores que han sido utilizados en las simulaciones con el modelo real, no lineal, y el linealizado. La tabla muestra de forma sintética aquellos datos relativos al número de condición, ya que ha sido el índice básico utilizado para la medida de la robustez del sistema.

Técnica	Controlador	Función	Realimentación	Características	Número de Condición
Regulador	$K1$	LQR1	Estados	Regulador Lineal	5.0509e2
Características temporales y amortiguamiento	$K4$	sfb_proj	Estados	Proyección	1.8651e3
Proyección	$K5$	projea	Estados/Salida	Proyección	549.95
Descomposición en valores singulares	$K6$	ofeasvd	Salida	Selección de autovalores: Rango 1 y rango n	1590.7916
Recursiva y descomposición en valores singulares	$K7$	gpofea	Salida	Selección de autovalores	516.3714
Asignación paramétrica	$K8$	pofea	Salida	Selección de autovalores: Rango 1 y rango n	1590.7916
Factorización QR	$K9$	rbsteig	Estados Salida	Factorización QR	9.6733e+006

Tabla 6.43: Datos del número de condición de los controladores diseñados.

La tabla muestra que el controlador $K5$ y $K7$ son los que poseen menor número de condición, lo que de forma preliminar permitiría estimar que son los sistemas más robustos. Atendiendo a la

sensibilidad de los autovalores y en relación con el número de condición del sistema se presentan los datos de la Tabla 6.44. En esta se han analizado los resultados para los controladores mostrados en la Tabla 6.43, al que se han añadido los otros tres controladores LQR diseñados en este capítulo. Los resultados muestran que la sensibilidad de los autovalores obtenidos para cualquiera de los controladores tiene el mismo orden de magnitud, excepto para el controlador **K9**, que poseen ordenes de magnitudes mayores, haciendo que esto sea un índice de poca robustez.

Controlador	Modos	Modo	Autovalores Obtenidos	Sensibilidad de los Autovalores	Número de Condición
K1 LQR1	Orbitales	Alabeo	-3.1541e-003 -9.5859e-002	1.5161e+000 6.0066e+001	5.0509e+002
		Cabeceo	-3.5311e-002±4.3213e-002i	1.1611e+001	
		Guiñada	-1.2128e-001±1.3690e-001i	3.1085e+001	
	Deformación	Flexión	-1.2809e-002±2.7746e+001i	1.3893e+001	
		Torsión	-1.4395e-005±4.0000e+002i	2.0000e+002	
K2 LQR2	Orbitales	Alabeo	-2.3365e-003 -8.1290e-002	5.73 1.74e+02	5.5392e+002
		Cabeceo	-7.6858e-003±3.3305e-002i	1.50e+01	
		Guiñada	-4.0121e-002±7.2664e-002i	9.92e+01	
	Deformación	Flexión	-2.2370e-004±2.7746e+001i	1.39e+01	
		Torsión	-3.4292e-007±4.0000e+002i	2.00e+02	
K3 LQR3	Orbitales	Alabeo	-5.5845e-002 -5.8991e-003	3.7826e+002 4.8360e+001	9.5742e+002
		Cabeceo	-2.4904e-003±3.2504e-002i	1.5399e+001	
		Guiñada	-2.5181e-002±5.0740e-002i	2.0654e+002	
	Deformación	Flexión	-7.0739e-005±2.7746e+001i	1.3892e+001	
		Torsión	-8.6342e-008±4.0000e+002i	2.0000e+002	
K4 Características Temporales (sfb_proj)	Orbitales	Alabeo	-5.0923e-001 -5.5092e-001	5.2020e+002 5.3092e+002	1.8651e+003
		Cabeceo	-5.1178e-001±3.3172e-002i	1.9037e+001	
		Guiñada	-5.0480e-001±3.5156e-002i	6.4019e+002	
	Deformación	Flexión	-7.7889e-003±2.7746e+001i	1.3892e+001	
		Torsión	0.0±4.0000e+002i	2.0000e+002	
K5 Proyección	Orbitales	Alabeo	-6.15e-001 ± 3.48e-001i	4.4448e+001	549.95
		Cabeceo	-3.24e-002 ± 3.24e-001i	1.7065e+000	
		Guiñada	-2.90e-001 ± 2.90e-001i	3.2970e+001	
	Deformación	Flexión	0.0±2.7746e+001i	1.5925e+001	
		Torsión	0.0±4.0000e+002i	2.0000e+002	
K6 Factorización QR	Orbitales	Alabeo	-6.15e-001±3.4821e-001i	4.4476e+002	1590.7916
		Cabeceo	-3.24e-002±3.24e-001i	2.0123e+002	
		Guiñada	-2.90e-001±2.90e-001i	5.1407e+002	
	Deformación	Flexión	0.0±2.77e+001i	2.8642e+001	
		Torsión	0.0±4.00e+002	2.7456e+002	
K7 Autovalores Deseados (gpofea)	Orbitales	Alabeo	-6.1457e-001 ± 3.4821e-001i	3.0334	516.3714
		Cabeceo	-3.24e-002 ± 3.24e-001i	2.2445e	
		Guiñada	-2.90e-001 ± 2.90e-001i	2.9328	
	Deformación	Flexión	0.0±2.77e+001i	1.3892e+001	
		Torsión	0.0±4.0000e+002i	2.0000e+002	
K8	Orbitales	Alabeo	-6.1457e-001 ± 3.4821e-001i	4.4476e+002	1590.7916
		Cabeceo	-3.24e-002 ± 3.24e-001i	2.0123e+002	
		Guiñada	-2.90e-001 ± 2.90e-001i	5.1407e+002	
	Deformación	Flexión	0.0±2.77e+001i	2.8642e+001	
		Torsión	0.0±4.0000e+002i	2.7456e+002	
K9	Orbitales	Alabeo	-6.15e-001±3.48e-001i	8.2076e+005	9.6733e+006
		Cabeceo	-3.61e-002±3.22e-001i	1.6408e+004	
		Guiñada	-2.86e-001±2.89e-001i	6.2945e+003	
	Deformación	Flexión	0.0±2.77e+001i	2.0052e+004	
		Torsión	0.0±4.0000e+002i	2.0867e+005	

Tabla 6.44: Datos de Sensibilidad y Número de Condición para los Controladores **K1 – **K9** del Sistema Lineal.**

Las propuestas de robustez del sistema teniendo en cuenta la sensibilidad de los autovalores y el número de condición del sistema que se pusieron de manifiesto en el CAPÍTULO 5, son ahora utilizadas. Un número de condición elevado implica poca robustez del sistema puesto que los autovalores son sensibles a incertidumbre o falta de modelado en el sistema. Por ello, un valor para el número de condición igual a uno, implica falta de sensibilidad en los autovalores y por tanto robustez elevada.

Los resultados para los ensayos lineales y no lineales desarrollados en los Caso 1 al 3 se muestran en la Tabla 6.45. Los indicadores de número de condición menores se obtienen con el controlador **K5** para cualquiera de los tres casos. Esto conlleva una menor sensibilidad de los autovalores, y por lo tanto mayor robustez. En cuanto a los autovalores obtenidos, todos los controladores y en los tres casos han obtenido los autovalores deseados, excepto en el Caso 3, en que el valor de torsión no ha sido conseguido. Se observa, además, que es posible obtener números de condición sensiblemente menores a los obtenidos en el grupo uno de simulaciones variando los autovalores deseados.

Caso	Controlador	Modos	Autovalores Obtenidos	Sensibilidad de los Autovalores	Numero de Condición
Uno	K5	Alabeo	-6.15e-002 ± 3.48e-002i	1.4487e+001	419.22
		Cabeceo	-8.67e-002 ± 3.24e-002i	1.5561e+001	
		Guiñada	-2.90e-001 ± 2.90e-001i	2.0550	
		Flexión	0.0 ± 2.70e+001i	1.3532e+001	
		Torsión	0.0 ± 4.00e+002i	2.0000e+002	
	K7	Alabeo	-6.1463e-002 ± 3.3611e-002i	3.5249e+002	2147.7885
		Cabeceo	-8.4769e-002 ± 3.0235e-002i	5.2957e+002	
		Guiñada	-2.8983e-001 ± 2.8997e-001i	2.1017e+002	
		Torsión	1.6101e-002 ± 2.6994e+001i	1.3809e+001	
		Torsión	0.0 ± 4.00e+002i	2.0000e+002	
Dos	K5	Alabeo	-6.1457e-002 ± 3.4821e-002i	1.7567e+001	421.6613
		Cabeceo	-8.6730e-002 ± 3.2408e-002i	1.5561e+001	
		Guiñada	-2.90e-001 ± 2.90e-001i	3.7327e+001	
		Flexión	-10.0 ± 2.70e+001i	1.9148e+001	
		Torsión	0.0 ± 4.00e+002i	2.0000e+002	
	K7	Alabeo	-6.1407e-002 ± 3.4807e-002i	1.3861e+002	2647.2611
		Cabeceo	-8.6421e-002 ± 3.2386e-002i	6.0353e+002	
		Guiñada	-2.8973e-001 ± 2.8999e-001i	4.9269e+002	
		Flexión	-9.9882 ± 2.70e+001i	2.5570e+001	
		Torsión	0.0 ± 4.00e+002i	2.0000e+002	
Tres	K5	Alabeo	-6.1457e-002 ± 3.4821e-002i	1.4487e+001	419.221
		Cabeceo	-8.6765e-002 ± 3.2408e-002i	1.5561e+001	
		Guiñada	-2.90e-001 ± 2.90e-001i	2.0550	
		Flexión	0.0 ± 2.70e+001i	1.3532e+001	
		Torsión	0.0 ± 4.00e+002i	2.0000e+002	
	K7	Alabeo	-6.1465e-002 ± 3.4814e-002i	1.9989e+002	1086.2852
		Cabeceo	-8.6669e-002 ± 3.2415e-002i	2.6596e+002	
		Guiñada	-2.89990e-001 ± 2.90e-001i	1.9559e+002	
		Flexión	-2.74e-003 ± 2.70e+001i	1.4079e+001	
		Torsión	0.0 ± 4.00e+002i	2.0000e+002	

Tabla 6.45: Datos de Sensibilidad y Número de Condición para los Controladores K5 y K7 en los Casos 1 – 3.

6.9. CONCLUSIONES

En este capítulo se han presentado las simulaciones realizadas con los controladores obtenidos. Se ha pretendido dar una visión general de la aplicación del método de asignación de autoestructuras a la vez que se ha particularizado para una cierta autoestructura. Se han diseñado diversos controladores por técnicas diferentes, entre las que se encuentran las LQR y las EA. El objetivo de los controladores diseñados basados en técnicas LQR ha sido servir de referencia en cuanto al comportamiento del sistema en lazo cerrado para los controladores basados en técnicas EA. Se han diseñado tres controladores LQR cuyos resultados han resultado bastante amortiguados en su respuesta temporal.

El resto de controladores diseñados basados en técnicas EA han tenido resultados diferentes. El primer grupo de simulaciones, el grupo uno, ha servido como aproximación al controlador que presentaba menor número de condición de la matriz de autovectores del sistema en lazo cerrado, a la vez que ha servido para validar el método de diseño y los requisitos del mismo. El comportamiento dinámico ha sido diferente según se ha mostrado en las figuras de excitación temporal con escalón unitario. El criterio básico de desacople se ha obtenido con ciertos controladores, a la vez que se verificaba el número de condición. De este proceso se han seleccionado los controladores **K5** y **K7** como aquellos que tienen menor número de condición, a la vez que se ha trabajado con el controlador **K4** para comparar resultados.

Estos son los controladores seleccionados del primer grupo de simulación que han servido como referencia para el segundo grupo de simulación (grupo dos). En el grupo 2 de simulaciones se han realizado simulaciones con autovalores deseados diferentes. Con ello se verifica la validez del proceso para una autoestructura diferente (autovalores diferentes) a la del grupo 1. A la vez que se desarrollaba el método se ha introducido como indicador básico de robustez el número de condición de la matriz de autovectores. Con los controladores seleccionados se han llevado a cabo simulaciones con diferentes casos, hasta 3. Estos casos presentaban autovalores diferentes a los grupos 1 y 2. La diferencia se presentaba en los valores deseados para los modos de deformación (flexión y torsión). Con estas últimas simulaciones se ha terminado de verificar el proceso, a la vez que se ha conocido la influencia del movimiento de los autovalores deseados para el sistema. Las respuestas temporales del sistema en lazo cerrado han sido las adecuadas a los requisitos solicitados sobre el sistema. En este caso los resultados han mostrado que el controlador **K5** ha conseguido los objetivos de diseño y mantenido el número de condición menor que el controlador **K7**.

A lo largo de este capítulo se ha venido utilizando el número de condición como un índice de la sensibilidad del sistema. De hecho, ha sido calculado para todos los controladores. El siguiente capítulo tiene como objetivo ensayar y simular el sistema para conocer el comportamiento robusto del mismo con los controladores obtenidos en este capítulo, comparándolo con los resultados de este capítulo.

CAPÍTULO 7

ANÁLISIS DE ROBUSTEZ

7.1. INTRODUCCIÓN

Los controladores diseñados y presentados en el CAPÍTULO 6 permiten obtener varios comportamientos, que es necesario analizar. A lo largo del diseño y desarrollo de los mismos con las diferentes funciones de las herramientas de diseño, se han obtenido diversas prestaciones, y se han ofrecido datos del número de condición. Este número de condición de la matriz de estado del sistema en lazo cerrado ha servido como índice básico de robustez. Concretamente en este capítulo se van a llevar a cabo los correspondientes análisis de robustez de los controladores que disponen de menor número de condición.

La robustez del sistema para los controladores diseñados ha de analizarse desde una perspectiva doble. En primer lugar la influencia de la autoestructura dependiente del método de asignación y en segundo lugar debido a las características de flexibilidad de la estructura del vehículo. Existen diversos trabajos que focalizan la atención sobre las dos características que influyen sobre el comportamiento del sistema. Cabe destacar el trabajo de [1998, Magni], en donde se ofrece un análisis μ de sistemas con estructuras altamente flexibles. En este se comparan diversos controladores entre los que se incluye uno desarrollado por el método EA. Otras aplicaciones en el campo de vehículos flexibles tratan de incrementar la robustez del sistema por diversos métodos entre los que se encuentra el de análisis μ , tal y como se muestra en [2005, Chiappa].

Los métodos clásicos de análisis de robustez se basan en las medidas de los márgenes de ganancia y fase y en el estudio de las funciones de sensibilidad. En este capítulo, la opción que se ha llevado a cabo para el análisis de robustez está basado en el análisis μ . Previamente se va a realizar un examen exhaustivo de aquellos elementos del sistema que pueden verse afectados por incertidumbre y se repasarán los métodos mencionados de análisis de robustez basados en márgenes de ganancia y fase.

7.2. FUNDAMENTO TEÓRICO DE LOS MÉTODOS DE ANÁLISIS DE ROBUSTEZ

En esta sección se va a hacer referencia a los métodos de análisis de robustez clásicos. Por un lado se encuentran los basados en la medida de los márgenes de estabilidad, esto es márgenes de ganancia de fase, y en segundo lugar los de medida de las funciones de sensibilidad del sistema. En la última parte de la sección se hará referencia a las técnicas de medida de robustez por análisis μ .

7.2.1. MÉTODO BASADO EN LOS MÁRGENES DE GANANCIA Y FASE

Los márgenes de ganancia (MG) y de fase (MF) de un sistema de control son utilizados como indicadores de la estabilidad en sistemas SISO. Si este tipo de análisis se extiende a sistemas MIMO, seleccionando las funciones de transferencia interesantes para el análisis del sistema, se pueden tener márgenes independientes para todas las funciones de transferencia del sistema. En función de los autovalores λ_i de la matriz de transferencia del sistema en lazo abierto se definen los márgenes de estabilidad como:

$$\mathbf{MG} = \min_i \{MG(\lambda_i)\}$$

$$\mathbf{MF} = \min_i \{MF(\lambda_i)\}$$

Estos márgenes se pueden utilizar como indicadores de la robustez cualitativa del sistema, ya que no proporcionan la información de los sistemas SISO. Con unos márgenes de ganancia y fase adecuados se puede garantizar la operación estable del sistema frente a cambios en las características de la planta, mientras que unos valores poco satisfactorios de **MG** y **MF** serán indicativos de falta de robustez. El problema que se presenta en sistemas MIMO es la interacción entre las entradas y salidas en el análisis de los márgenes, pudiendo conducir a información poco fiable.

7.2.2. MÉTODO BASADO EN LAS FUNCIONES DE SENSIBILIDAD

El segundo método clásico de valoración de la robustez del sistema está basado en las funciones de sensibilidad. El sistema de control bajo análisis puede ser representado por la forma genérica que muestra la Figura 7.1, donde puede observarse el controlador **K**, la planta **G** y las perturbaciones representadas por **d_i**, **d_o** y **n**.

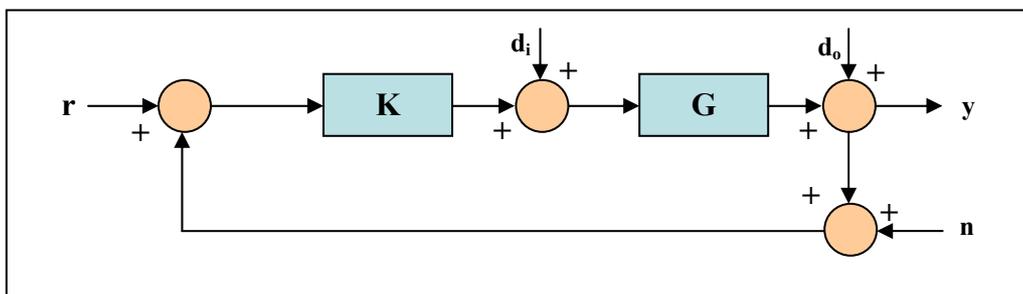


Figura 7.1: Esquema genérico de un sistema de control con perturbaciones.

Las diferencias entre el modelo nominal y el modelo matemático residen en las perturbaciones **d_i** y **d_o**:

- **d_i**: Como esta entrada se encuentra entre el controlador y el satélite, se incluyen los errores debidos a las señales de comando de actuación, a cambios en la aerodinámica, o en las perturbaciones magnéticas y solares. Afectan por tanto a la actuación sobre cualquiera de los ejes del satélite.

- \mathbf{d}_o : Esta perturbación ocurre entre la salida del sistema y el controlador, afectando a la señal de salida debida a ruido y a errores en las medidas.
- \mathbf{n} : Se considera que es ruido de alta frecuencia introducido en los sensores.

Un análisis básico de estabilidad podría realizarse por cualquiera de los métodos tradicionales, Nyquist o Lugar de las Raíces. Sin embargo un análisis en magnitud de los valores singulares permite obtener una medida más precisa. El efecto de las perturbaciones es dependiente de la frecuencia, la respuesta del sistema completo puede obtenerse de forma precisa con diagramas de Bode.

La sensibilidad de la planta a incertidumbre y la del sistema a perturbaciones, que pueden generar a su vez incertidumbre sobre los elementos del sistema, es de suma importancia. La sensibilidad del sistema está relacionada con la respuesta a cambios en la consigna, con la respuesta ante la presencia de perturbaciones y con el ruido introducido en la medida. Por otro lado, la robustez del sistema puede relacionarse de forma directa con la sensibilidad. Esto implica que un sistema muy sensible es considerado como poco robusto.

La relación matemática del comportamiento del sistema frente a perturbaciones, ruido y en general incertidumbre, se presenta con las funciones de sensibilidad. Son cuatro las funciones de transferencia que condensan toda la información sobre la respuesta del sistema. El modelo de control presentado en la Figura 7.1, muestra todas las entradas y salidas al sistema, incluyendo las correspondientes a las perturbaciones. El comportamiento matemático del sistema, teniendo en cuenta las aportaciones de las perturbaciones, puede analizarse mediante las funciones de sensibilidad del sistema, aplicables tanto a la entrada como a la salida [1996, Rodríguez]:

- Función de Sensibilidad: $\mathbf{S}(s) = \mathbf{I} + \mathbf{K}(s)\mathbf{G}(s) = \mathbf{I} + \mathbf{L}(s)$
- Función de Sensibilidad Complementaria: $\mathbf{T}(s) = (\mathbf{I} + \mathbf{L}(s))^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{L}(s)$
- Función en Lazo Abierto a la entrada: $\mathbf{L}_i = \mathbf{K}(s)\mathbf{G}(s)$
- Función en Lazo Abierto a la salida: $\mathbf{L}_o = \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s)$
- Función de Sensibilidad a la entrada: $\mathbf{S}_i = (\mathbf{I} + \mathbf{K}(s)\mathbf{G}(s))^{-1}$
- Función de Sensibilidad a la salida: $\mathbf{S}_o = (\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s))^{-1}$

La función de sensibilidad y la complementaria cumplen:

$$\mathbf{S}(s) + \mathbf{T}(s) = \mathbf{I} \quad (7.1)$$

La función de sensibilidad $\mathbf{S}(s)$ está relacionada con el efecto de perturbaciones de carga tanto a la entrada como a la salida del proceso. En cuanto a la función de sensibilidad complementaria $\mathbf{T}(s)$ está relacionada con el seguimiento de la referencia y del ruido del sensor. La interpretación en frecuencia de estos conceptos se aprecia en la Figura 7.2.

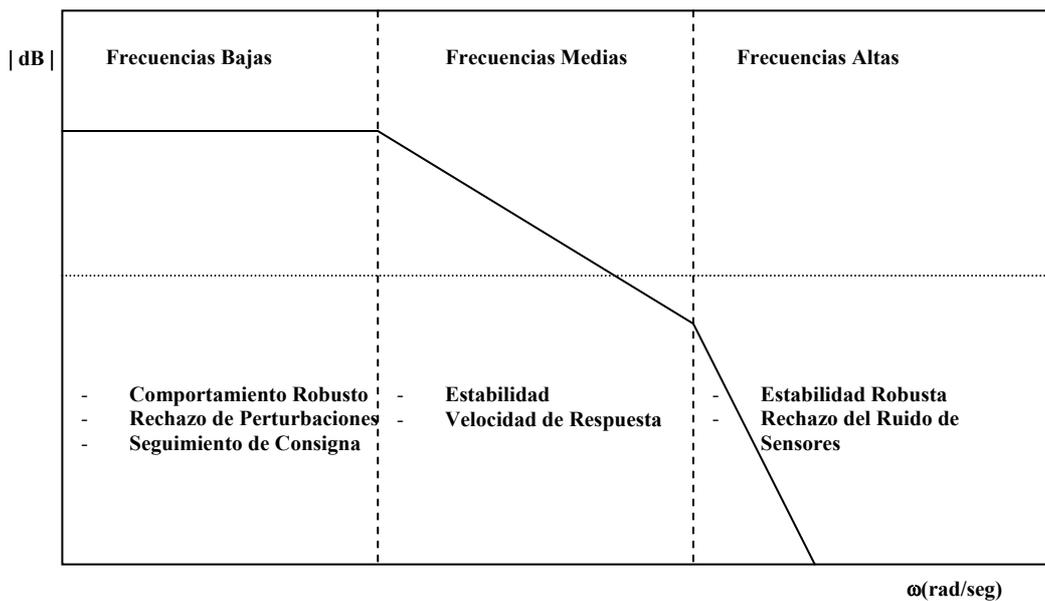


Figura 7.2: Consideraciones de comportamiento del sistema en función de la frecuencia.

De forma adicional a las perturbaciones en un modelo se ha de tener en cuenta la dinámica no modelada que da lugar a incertidumbres en el modelo, y el ruido de la medida. Todas estas han de tenerse en cuenta como incertidumbres de alta frecuencia. Aparece por tanto un parámetro de interés, como es la frecuencia, que permite realizar una clasificación. Esta depende del valor de la frecuencia, lo que a la vez modela el comportamiento del sistema. En función de los conceptos introducidos en la Figura 7.2 se puede realizar la siguiente clasificación:

- **Baja Frecuencia:** En esta zona se requiere alta ganancia lo que permitirá obtener:
 - o Seguimiento adecuado de la referencia.
 - o Rechazo de las perturbaciones.
 - o Reducción de la sensibilidad del sistema frente a cambios menores en la planta.
- **Frecuencia Intermedia:** Son de interés en esta banda de frecuencias:
 - o Los márgenes de ganancia y fase, por lo tanto la estabilidad.
 - o Velocidad de respuesta y ancho de banda.
- **Alta Frecuencia:** El objetivo es disponer de baja ganancia:
 - o Para obtener estabilidad robusta (incertidumbres en los modelos).
 - o Rechazo a ruidos de los sensores.

Mantener un error de seguimiento pequeño y que el efecto de variaciones de los parámetros del sistema también sea pequeño implica una función de sensibilidad de la salida $S_0(s)$ pequeña. Si la sensibilidad complementaria $T(s)$ aumenta, aumentará el ruido de la medida, y presentará mayor sensibilidad a los efectos de la dinámica no modelada de alta frecuencia.

Por otro lado, el esfuerzo de control está relacionado con las funciones $S_i(s)$, $S_0(s)$ y K . La capacidad de rechazo de las perturbaciones que afectan al sistema y la regulación

del mismo dependen directamente de estas funciones. Unas magnitudes bajas para las funciones de sensibilidad $S_i(s)$ y $S_o(s)$ no presentará un esfuerzo de control excesivo. En conclusión, el comportamiento del sistema en lazo cerrado, la capacidad de rechazo a perturbaciones, la sensibilidad, el esfuerzo de control y el seguimiento de errores depende de estas funciones de sensibilidad, tal y como ha quedado expuesto, y del complicado equilibrio en las magnitudes de las funciones presentadas. Se está tratando directamente la robustez del sistema, comprobando que el método presentado es válido para analizar la robustez del sistema frente a perturbaciones e incertidumbres presentes en el sistema en lazo cerrado.

Teniendo en cuenta todas estas consideraciones, una aproximación interesante para las especificaciones del sistema de control pueden darse en el dominio de la frecuencia. Ello lleva a considerar como reglas de diseño útiles las siguientes:

- La alta ganancia del sistema en lazo abierto genera baja sensibilidad. Sin embargo ha de considerarse un adecuado rechazo de las perturbaciones y seguimiento de la referencia. Esto encaja con las prestaciones para el sistema nominal.
- La pequeña ganancia en lazo abierto es interesante para el rechazo al ruido de los sensores. Por lo que la respuesta a ruido de sensores ha de considerarse baja. Esto permite mantener la estabilidad frente a incertidumbres de la planta. Esto se adapta a las especificaciones de un sistema robusto, o estabilidad robusta.
- La obtención de unos adecuados márgenes de estabilidad se consigue acotando la fase del sistema, manteniéndola con un margen adecuado. Esta consideración permite prevenir la amplificación de ruidos y perturbaciones del sistema.

La relación entre las especificaciones objetivo, las funciones de sensibilidad y el tipo de análisis lleva a las consideraciones de:

- Estabilidad Robusta: Una ganancia pequeña en lazo abierto mantiene la estabilidad del sistema frente a incertidumbres en la planta.
- Comportamiento Nominal: Una alta ganancia en lazo abierto lleva a baja sensibilidad y a un buen rechazo de las perturbaciones y seguimiento de la referencia.
- La amplificación de perturbaciones y ruidos se mejora manteniendo un adecuado margen de fase. Esto se produce a frecuencias intermedias.

7.2.3. MÉTODO BASADO EN EL ANÁLISIS μ (MU)

En el análisis de robustez además de los métodos clásicos mencionados se viene utilizando desde su introducción por Doyle el denominado análisis μ . A este tipo de análisis también se le conoce como Valor Singular Estructurado.

Uno de los requisitos para llevar a cabo el análisis μ es el agrupamiento de las incertidumbres en una matriz simple. Esto permitirá modelizar el sistema y prepararlo para el análisis, junto con el modelo de la planta y del controlador. En el análisis μ la única condición referente a la matriz de perturbaciones está referida al límite a la unidad de su norma infinita.

Además de la matriz de perturbaciones, en el análisis se incluyen funciones de peso dependientes de la frecuencia adaptadas al tipo de respuesta del sistema. Estas funciones ponderadas se incluyen en el modelo afectando a cualquier tipo de señal, entrada o salida

7.2.3.1. INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS μ

El método de análisis μ es una potente herramienta para la valoración de la estabilidad de un sistema con incertidumbre paramétrica por medio del valor singular estructurado μ , [1990, Doyle]. El valor del pico del límite superior de μ sobre un rango de frecuencia genera información del margen de estabilidad de un sistema para variaciones de parámetros. Por otro lado, el valor inferior de μ permite conocer la combinación de parámetros que para el caso más desfavorable que desestabilizaría el sistema.

La aplicabilidad del análisis μ está condicionada por la disponibilidad de unos adecuados modelos con incertidumbre basados en técnicas de Transformación Lineal Fraccional - LFT. Estos modelos han de incluir posibles perturbaciones, además de los correspondientes errores de modelado. Al analizar la robustez del sistema en este tipo de plantas se pone de manifiesto la estabilidad frente a incertidumbres simultáneas. Desde la perspectiva del sistema y por medio del análisis μ se puede determinar la Estabilidad Robusta, el Comportamiento Nominal y el Comportamiento Robusto.

7.2.3.2. TRANSFORMACIONES LFT Y VALOR SINGULAR ESTRUCTURADO μ .

Los conceptos necesarios relacionados con las transformaciones LFT y el análisis de robustez μ que se presentan a continuación están basados en [2001, Balas] y en [1999, Lind].

Se define una matriz compleja M que está relacionada con dos pares de señales denominadas r_1, v_1 y r_2, v_2 . Se sabe además que $M \in C^{m \times m}$. El lazo entre el modelo M y la matriz de incertidumbre Δ se puede cerrar de dos formas generando una LFT denominada superior y otra denominada inferior con unas submatrices del modelo M . Gráficamente este concepto se muestra en la Figura 7.3.

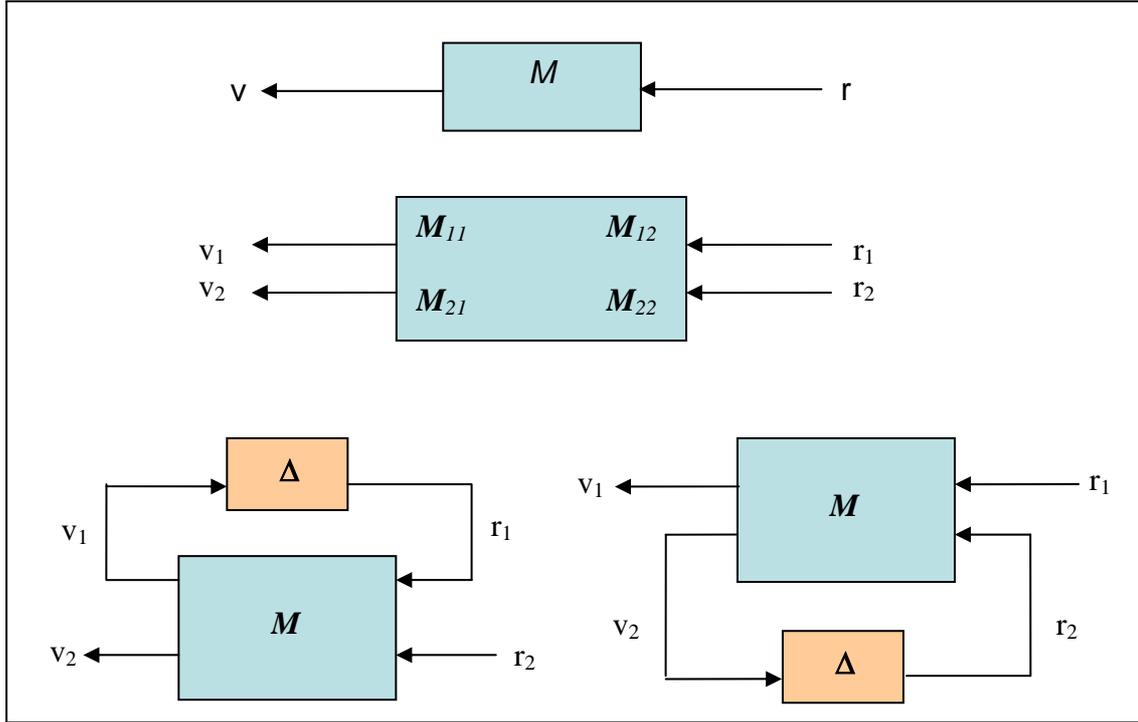


Figura 7.3: Representación gráfica del modelo LFT superior e inferior.

Las funciones de transferencia para las submatrices de la matriz M se representan por:

$$\begin{aligned} v_1 &= \mathbf{M}_{11}r_1 + \mathbf{M}_{12}r_2 \\ v_2 &= \mathbf{M}_{21}r_1 + \mathbf{M}_{22}r_2 \end{aligned} \quad (7.2)$$

Mientras que las transformaciones lineales fraccionales quedan determinadas por $F_u(M, \Delta)$ y por $F_l(M, \Delta)$, representando los subíndices la LFT superior para u y la LFT inferior para l :

$$F_u(M, \Delta) = \mathbf{M}_{22} + \mathbf{M}_{21}(I - \Delta\mathbf{M}_{11})^{-1}\Delta\mathbf{M}_{12} \quad (7.3)$$

$$F_l(M, \Delta) = \mathbf{M}_{11} + \mathbf{M}_{12}(I - \Delta\mathbf{M}_{22})^{-1}\Delta\mathbf{M}_{21} \quad (7.4)$$

Siendo: $v_2 = F_u(M, \Delta)r_2$ y $v_1 = F_l(M, \Delta)r_1$

Las LFT's pueden ser utilizadas para describir las incertidumbres en los elementos de una matriz. Por lo tanto, para el caso de la matriz de incertidumbre Δ , sus elementos pueden pertenecer a un conjunto dado por:

$$\Delta := \left\{ \left[\Delta = \text{diag} [\delta_1 I_2, \delta_2, \delta_3, \Delta_4] \right] : \delta_1, \delta_2 \in \mathfrak{R}, \delta_3 \in C, \Delta_4 \in C^{2 \times 2} \right\} \quad (7.5)$$

Generalmente Δ puede estar normalizada de forma que su valor singular máximo sea menor que o igual que la unidad: $\bar{\sigma}(\Delta) \leq 1$. La cuestión que se plantea está relacionada con el tamaño y tipo de incertidumbre que puede albergar Δ sin que la LFT llegue a ser

singular. La respuesta a esta pregunta depende del tipo de sistema, ya que la estructura de Δ depende del mismo, por ello se define un indicador que represente a esta estructura. Este indicador es el Valor Singular Estructurado (SSV) o valor μ , definido como:

$$\mu(\mathbf{M}) = \frac{1}{\min_{\Delta \in \Delta} \{\bar{\sigma}(\Delta) : \Delta \in \Delta \det(\mathbf{I} - \Delta \mathbf{M}) = 0\}} \quad (7.6)$$

Esta definición del Valor Singular Estructurado indica que μ es el valor recíproco del valor de Δ más pequeño que se puede encontrar en el conjunto de incertidumbres Δ que hace que la matriz $\mathbf{I} - \Delta \mathbf{M}$ sea singular. Si no existe este valor Δ , el Valor Singular Estructurado μ se toma con valor cero.

7.2.3.3. TEOREMAS APLICABLES EN EL ANÁLISIS μ

Los análisis que se deben realizar al sistema, con el objeto de conocer su comportamiento en frecuencia, y por lo tanto conocer aquellas frecuencias que no se ajusten a los requisitos de diseño, se sucintan en tres teoremas [1990, Doyle]:

- **Comportamiento Nominal:** Se satisface si y solo si: $\mathbf{M}_{22}(j\omega) < 1 \quad \forall \omega$
- **Estabilidad Robusta:** Se obtiene si y solo si: $\mathbf{M}_{11}(j\omega) < 1 \quad \forall \omega$
- **Comportamiento Robusto:** Tiene un comportamiento robusto si y solo si: $\mu(\mathbf{M}(j\omega)) < 1 \quad \forall \omega$

7.2.3.4. BLOQUE DE PERTURBACIONES.

Existen varios aspectos relacionados con la construcción del bloque de perturbaciones al especificar la estructura de la incertidumbre:

- El tipo de perturbación: Parámetro real o dinámica no modelada.
- Dimensión de la perturbación.
- Los elementos del sistema que son afectados por la incertidumbre.

En el cálculo del SVD μ , la matriz de perturbación esta representada por una matriz compuesta por elementos reales, complejos o mixtos. A modo de ejemplo, la matriz de incertidumbre puede venir dada en su formato de incertidumbre mixta por:

$$\Delta := \left\{ \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_4 \end{bmatrix} : \delta_1 \in \mathfrak{R}, \delta_2 \in \mathfrak{R}, \delta_3 \in \mathfrak{R}, \delta_4(s) \right\} \quad (7.7)$$

En la expresión anterior Δ representa la estructura de la incertidumbre, que junto con el modelo nominal determina el modelo LFT. Una vez que la incertidumbre ha sido determinada, el siguiente paso se centra en la determinación del tamaño de las perturbaciones que mantienen al sistema con una estabilidad robusta. El proceso de

determinación del Valor Singular Estructurado se centra en conocer la repuesta en frecuencia del sistema \mathbf{M} con respecto al conjunto de incertidumbre determinado por Δ . Este procedimiento lleva a obtener el valor $\mu_{\Delta}(\mathbf{M}(j\omega))$, que expresado de este modo enfatiza la dependencia de \mathbf{M} respecto de Δ para cualquier frecuencia. Con este proceso se obtienen los límites superior e inferior de μ_{Δ} , determinándose como margen de estabilidad con respecto a la incertidumbre estructural que afecta a \mathbf{M} el que viene dado por:

$$\frac{1}{\max_{\omega} \mu_{\Delta}(\mathbf{M}(j\omega))} \quad (7.8)$$

Como el valor de μ_{Δ} no se calcula exactamente, las conclusiones respecto de la estabilidad, comportamiento robusto y nominal han de tomarse respecto de los límites superior e inferior obtenidos.

7.2.3.5. INCERTIDUMBRES

Una de las principales fuentes de incertidumbre en un sistema de control procede de la planta, en la que no se han tenido en cuenta ciertas dinámicas, esto es debido a dinámicas no modeladas, o a que ciertos comportamientos han desaparecido en el proceso de linealización.

Al sistema multivariable se le pueden aplicar incertidumbres de tipo aditivo o multiplicativo. Una forma típica de modelar la incertidumbre introducida por la dinámica no modelada del sistema consiste en incluir un modelo de incertidumbre multiplicativa. Las incertidumbres de tipo multiplicativo satisfacen las propiedades de ser pequeñas a frecuencias bajas, y elevadas a frecuencias altas. Estas dos características se adaptan al modelo, siendo conocido a frecuencias bajas, y más impreciso a frecuencias altas. La incertidumbre de tipo multiplicativo puede afectar a la entrada o a la salida, o puede afectar a ambas simultáneamente, [2001, Balas].

La dinámica no modelada de alta frecuencia, esto es la debida a sensores, actuadores y modelos de orden reducido de la planta, afecta al nivel de incertidumbre a medida que aumenta la frecuencia.

El modelo matemático obtenido en esta tesis puede ser considerado como un modelo modal, ya que la matriz de estado describe las propiedades asociadas con la dinámica modal. Los elementos de la matriz de estado del sistema están relacionados con los autovalores, la frecuencia natural y el amortiguamiento de los modos del sistema. A su vez, los elementos modales están formulados por una combinación de términos de las ecuaciones que representan el movimiento del sistema. Es por tanto, muy complicado asociar la incertidumbre paramétrica del sistema con un modelo modal para describir potenciales errores de modelado. Este tipo de incertidumbre puede sintetizarse en potenciales errores en la frecuencia natural, en el amortiguamiento y en las funciones de transferencia de la dinámica del sistema.

Por otro lado es necesario tener en cuenta las especiales características del modelo matemático obtenido. Las aportaciones de los elementos de la matriz de estado considerados en el modelo matemático, en especial el módulo de Young, hace que estos sean diferentes en varios órdenes de magnitud. El número de condición de la matriz de estado es el correspondiente a un sistema mal condicionado, con lo que la sensibilidad del sistema debería ser considerada alta.

7.3. ANÁLISIS DE ROBUSTEZ

A lo largo de esta tesis se ha tratado de resaltar la importancia que ha de tener el profundo conocimiento del sistema para el diseñador del controlador por el método de Asignación de Autoestructuras. Debido a ello el análisis de robustez que está basado en el análisis μ del sistema comienza con un análisis paramétrico del sistema, continuando con un análisis del efecto del amortiguamiento.

7.3.1. ANÁLISIS PARAMETRICO DEL SISTEMA

En este análisis se pretende correlacionar los elementos de las matrices de Masa, Giroscópica y Rigidez con los elementos de la matriz de estado, y determinar cómo afectan estos a la robustez del sistema. Los elementos de la matriz de estado se encuentran relacionados con la flexión y torsión de los paneles solares, con el amortiguamiento y con la frecuencia de los autovalores del sistema. La variación de cualquiera de ellos puede conducir a comportamientos no deseados del sistema, e incluso a la inestabilidad del mismo. Con el objeto de determinar el grado de robustez del sistema frente a variaciones paramétricas se presenta en la Tabla 7.1 la relación entre los elementos de la matriz de estado y las características de flexión y torsión de los paneles solares, junto con la dependencia de la estructura con el amortiguamiento. Recordando las matrices del sistema:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} I_x + I_{x2} + I_{x2} & 0 & 0 & Q_{x1} & 0 & Q_{x2} & 0 \\ 0 & I_y + I_{y1} + I_{y2} & 0 & 0 & Q_{y1} & 0 & Q_{y2} \\ 0 & 0 & I_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_{x1} & 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{y1} & 0 & 0 & J_{y1} & 0 & 0 \\ Q_{x2} & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & Q_{y2} & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{y2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_y - I_z - I_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I_x + I_z - I_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 4\omega_0^2(I_Y - I_Z) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3\omega_0^2(I_X - I_Z) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_0^2(I_Y - I_X) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{F1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{T1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{F2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{T2} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_{n \times m} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}G \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \begin{bmatrix} 0_{(n-m) \times m} \\ I_m \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad C = [I], \quad D = [0]$$

La Tabla 7.1 relaciona los parámetros del modelo flexible con los elementos de la matriz de estado, relacionándolo a la vez con las características dinámicas del sistema.

PARÁMETRO	ELEMENTOS DE LA MATRIZ DE ESTADO	CARACTERÍSTICA DINÁMICA
Q_{X1}	A(6,1) A(6,4) A(6,8) A(6,9) A(9,1) A(9,4) A(9,8) A(9,9)	Flexión
Q_{Y1}	A(6,10) A(7,5) A(10,2)	Torsión
J_{Y1}	A(7,2) A(7,5) A(7,10) A(10,2) A(10,5) A(10,10)	Torsión
m_1	A(6,1) A(6,4) A(6,8) A(6,9) A(9,1) A(9,4) A(9,8) A(9,9)	Flexión
I_X	A(6,1) A(6,4) A(6,8) A(6,9) A(7,2) A(8,3) A(8,6) A(9,1) A(9,4) A(9,8) A(9,9) A(10,2)	Alabeo
I_Y	A(6,1) A(6,9) A(7,2) A(7,5) A(7,10) A(8,3) A(8,6) A(9,1) A(9,8) A(10,2)	Cabeceo
I_Z	A(6,1) A(6,8) A(7,2) A(7,5) A(7,10) A(8,3) A(8,6) A(9,1) A(9,8) A(10,2)	Guiñada
δ	A(9,9) A(10,10)	Amortiguamiento del sistema. Afecta a torsión y flexión

Tabla 7.1: Relación entre el comportamiento dinámico del sistema y los elementos de la matriz de estado.

Con el objeto de comprobar la acción del amortiguamiento sobre él y cómo se transmite la perturbación del sistema al realizar cualquier maniobra de orientación, se muestra en

la Figura 7.4 los diagramas de Bode en amplitud. El amortiguamiento referido es el que posee el vehículo flexible debido a los materiales utilizados en su fabricación. En el modelado de este tipo de vehículos se ha de considerar el amortiguamiento real que afectará a los elementos $A(9,9)$ y $A(10,10)$ de la matriz de estado, y que no han sido incluidos en el desarrollo del modelo matemático. El valor de estos elementos determina el comportamiento de los valores de los picos de resonancia relacionados con los modos de flexión. Se observa en el gráfico que los picos de resonancia coincidentes con los modos flexibles están muy atenuados en el sistema amortiguado. En el sistema que consideramos como no amortiguado se observan los picos de resonancia en cualquiera de las maniobras. De estos gráficos se deduce la necesidad de dotar al modelo matemático de un coeficiente de amortiguamiento adecuado próximo a la situación real.

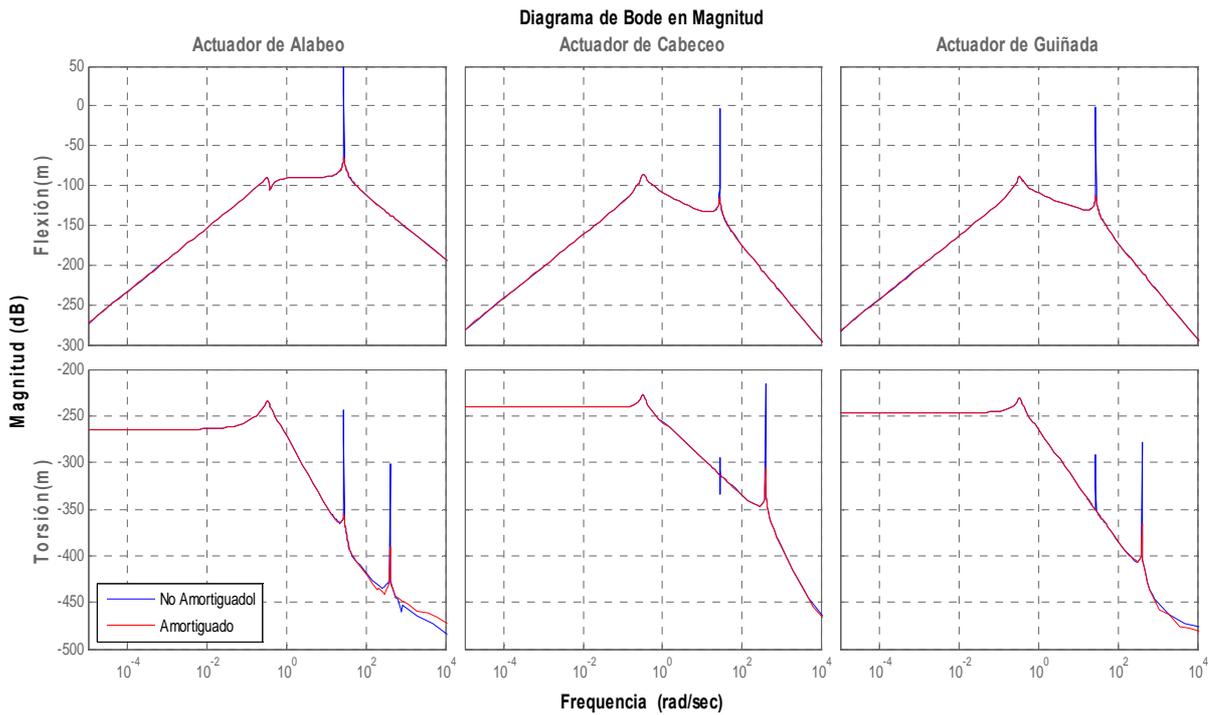


Figura 7.4: Transmisión de la vibración de los paneles solares y su relación con la maniobra de orientación del vehículo.

7.3.2. REPERCUSIÓN DEL AMORTIGUAMIENTO SOBRE EL COMPORTAMIENTO DEL SISTEMA

La variación del amortiguamiento del sistema lleva a diferentes situaciones en lo que a posición de los autovalores relacionados con la flexión y torsión de los paneles solares se refiere. En particular se han realizado dos ensayos que se muestran en las figuras siguientes. La variación del amortiguamiento manteniendo la frecuencia natural lleva a la posición de autovalores que se muestra en la Figura 7.5. La frecuencia natural de los modos flexibles mostrados en esta figura se corresponden con los modos de deformación 1-1 tanto para flexión como para torsión. La oscilación que se obtiene viene producida exclusivamente por la variación en el valor del amortiguamiento alrededor del valor por defecto del sistema.

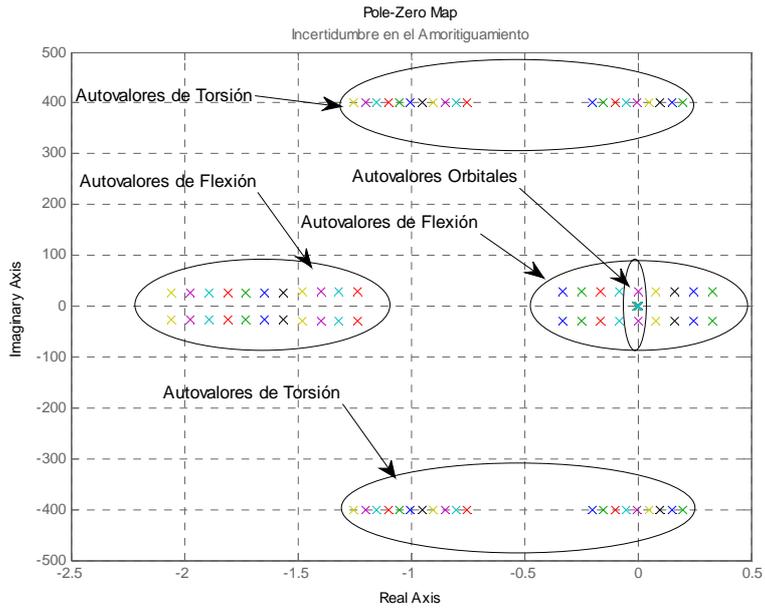


Figura 7.5: Autovalores del sistema con variación en el amortiguamiento de la flexión y torsión.

La Figura 7.6 muestra el proceso de variación tanto en el amortiguamiento como en la frecuencia de los polos de los modos de deformación. Esta situación se corresponde con una variación paramétrica de la frecuencia de oscilación de los modos flexibles y del amortiguamiento de la estructura. La primera característica, la variación de la frecuencia, está relacionada con la variación de los parámetros físicos de los paneles solares, esto se refiere en particular a diferentes valores del módulo de Young. Ambas situaciones han de ser tenidas en cuenta en el análisis de robustez.

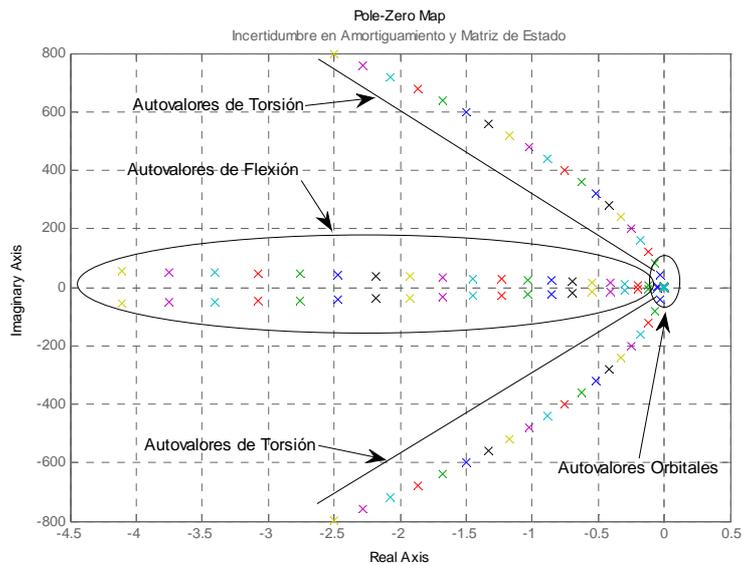


Figura 7.6: Autovalores del sistema con variación en el amortiguamiento y frecuencia de la flexión y torsión.

7.3.3. ANÁLISIS DE ROBUSTEZ POR MÉTODOS DE MARGEN DE FASE Y DE GANANCIA

Es importante conocer los datos de robustez en el sentido clásico, esto es márgenes de ganancia y de fase, del sistema nominal. Esta información servirá como datos básicos de robustez de la planta nominal con el controlador diseñado. Este tipo de análisis se va a realizar para el sistema amortiguado y no amortiguado para comprobar las diferencias. Las siguientes figuras muestran de forma gráfica los márgenes de ganancia y de fase para los sistemas en lazo abierto y cerrado y con condiciones de sistema amortiguado y no amortiguado. Los resultados numéricos se van a mostrar en la Tabla 7.2. Los datos de este análisis permiten conocer el efecto del amortiguamiento sobre el sistema, ya que este es el más coincidente con el modelo real.

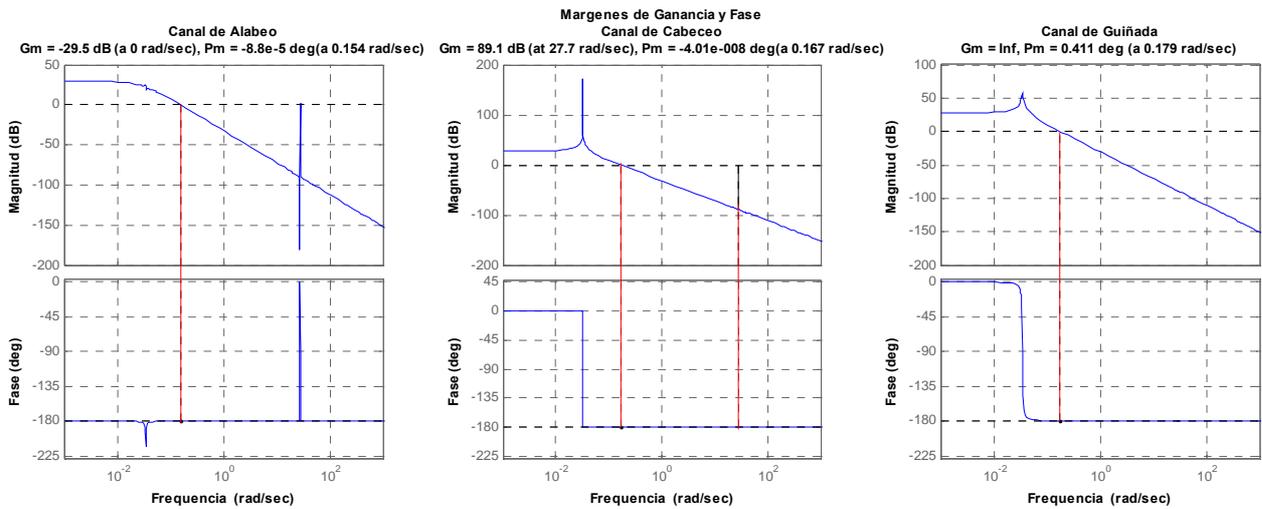


Figura 7.7: Márgenes de ganancia y fase para los tres canales controlados del sistema en lazo abierto y no amortiguado.

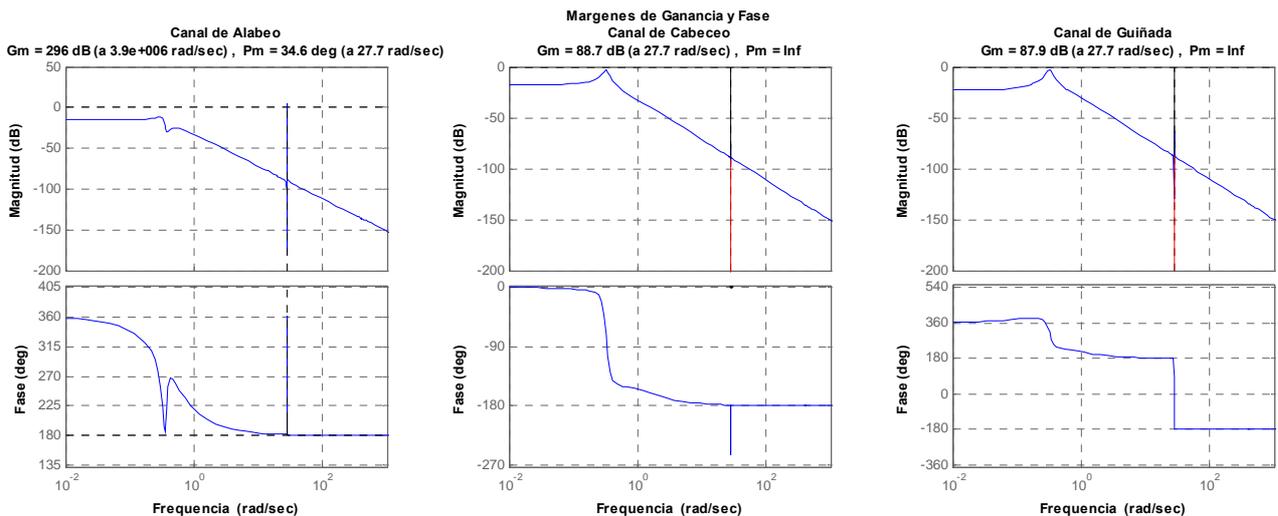


Figura 7.8: Márgenes de ganancia y fase para los tres canales controlados del sistema en lazo cerrado y no amortiguado.

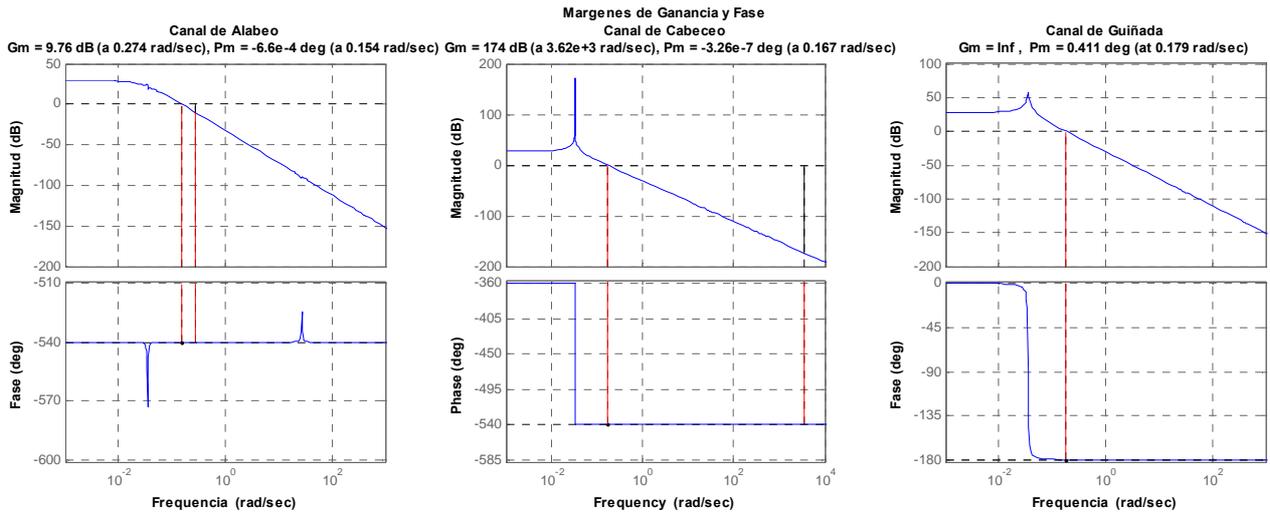


Figura 7.9: Márgenes de ganancia y fase para los tres canales controlados del sistema en lazo abierto y amortiguado.

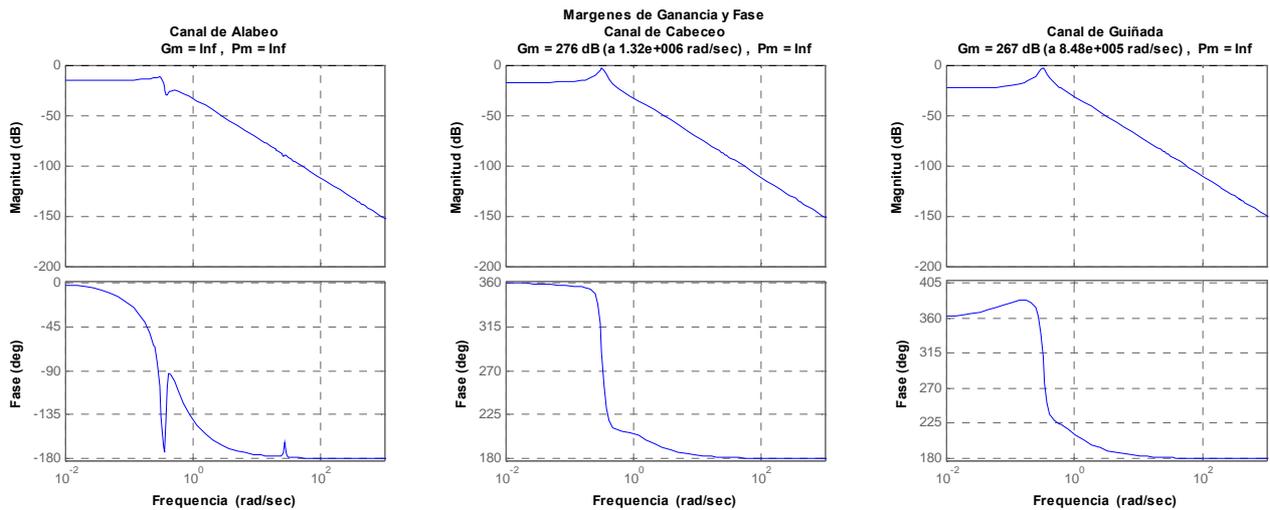


Figura 7.10: Márgenes de ganancia y fase para los tres canales controlados del sistema en lazo cerrado y amortiguado.

Las siguientes figuras muestran los gráficos de respuesta en frecuencia comparativas para los sistemas en lazo abierto y cerrado, tanto amortiguado como no amortiguado.

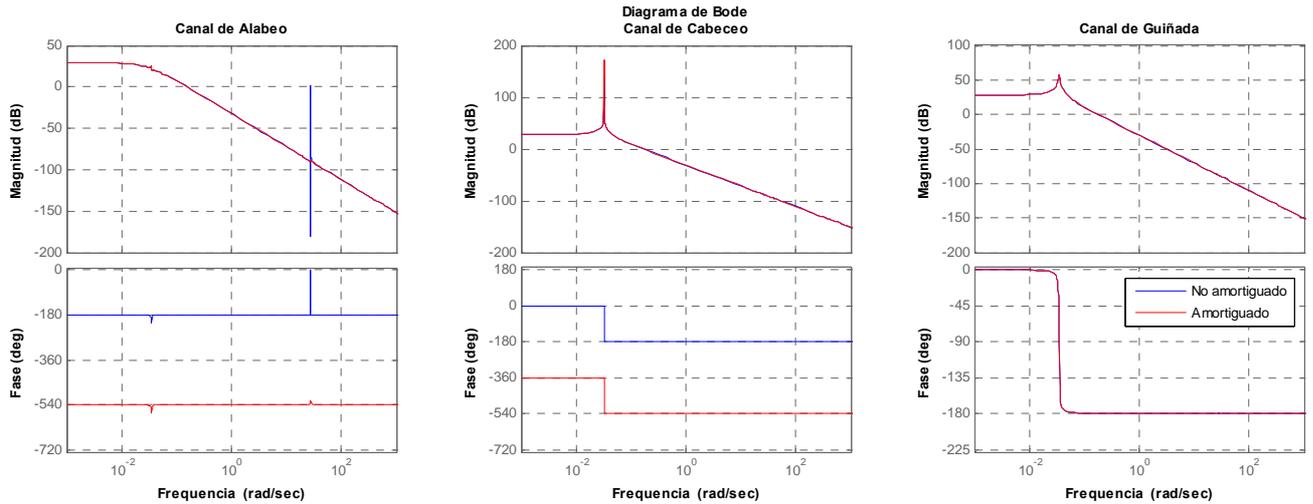


Figura 7.11: Diagramas de Bode del sistema en lazo abierto amortiguado y no amortiguado.

En la Figura 7.11 se observa que la ganancia de los picos de resonancia coincidentes con el primer modo de flexión está atenuada en el modelo con amortiguamiento ante cualquier maniobra de orientación. Respecto de la fase se observan diferentes comportamientos en función del canal de maniobra, aunque el resultado es similar tanto para el sistema amortiguado como para el no amortiguado.

Las respuestas comparativas de los sistemas en lazo cerrado se muestran en la Figura 7.12. En estos gráficos se observa que los picos de resonancia de los modos flexibles se encuentran atenuados debido al efecto del controlador, y que la respuesta del sistema a bajas frecuencias es adecuada, estando muy atenuada a frecuencias altas. El ancho de banda del sistema no va más allá de 1 rad/seg, lo que implica que no se excitarían los modos de flexión y torsión de los paneles solares por encontrarse más alejados.

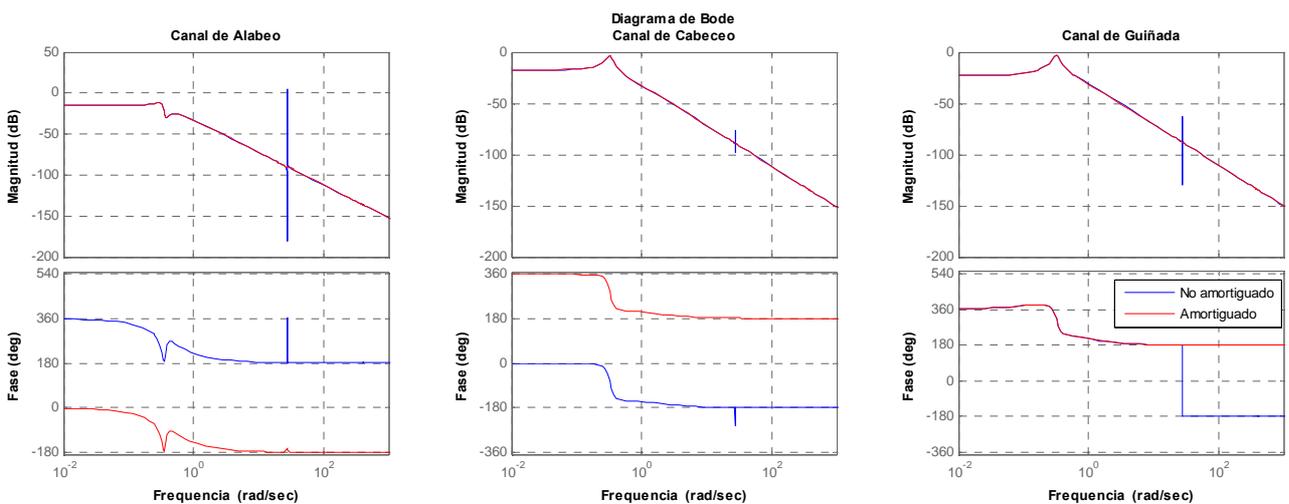


Figura 7.12: Diagrama de Bode comparativo de los sistemas en lazo cerrado amortiguado y no amortiguado.

La Tabla 7.2 muestra los resultados del análisis clásico de robustez que ha sido representado gráficamente por la Figura 7.7, Figura 7.8, Figura 7.9, Figura 7.10, Figura 7.11 y Figura 7.12. El sistema ha sido analizado tanto en lazo abierto como cerrado y para el sistema amortiguado y no amortiguado.

Márgenes	Canal	Sistema No Amortiguado		Sistema Amortiguado	
		Lazo Abierto	Lazo Cerrado	Lazo Abierto	Lazo Cerrado
Margen de Ganancia	Alabeo	-29.5 dB(0 rad/s)	269 dB (3.9e+6 rad/s)	9.76 dB (0.274 rad/s)	inf
	Cabeceo	89.1 dB(27.7 rad/s)	88.7 dB (27.7 rad/s)	174 dB (3.62e+3 rad/s)	276 dB (1.32e+6 rad/s)
	Guiñada	inf	87.9 dB (27.7 rad/s)	Inf	267 dB (8.48e+5 rad/s)
Margen de Fase	Alabeo	-8.8e-5 deg (0.154 rad/s)	34.6 deg (27.7 rad/s)	-6.6e-4 deg(0.154 rad/s)	inf
	Cabeceo	-4.01e-8 deg (0.167 rad/s)	inf	-3.26e-7 deg (0.167 rad/s)	inf
	Guiñada	0.411 deg (0.179 rad/s)	inf	0.411 deg (0.179 rad/s)	inf

Tabla 7.2: Datos de márgenes de ganancia y fase.

De los datos que se muestran en la tabla se obtienen las siguientes conclusiones:

- El sistema en lazo abierto y no amortiguado no dispone de márgenes adecuados tanto de ganancia como de fase, ya que el sistema es inestable.
- En lazo abierto y sistema amortiguado, crecen los márgenes de ganancia, pero se mantienen a cero los de fase.
- En el sistema en lazo cerrado se aprecia una diferencia notable respecto del mismo amortiguado. Es la presencia en el análisis de la frecuencia de resonancia del panel en flexión. En el sistema amortiguado esta frecuencia está apreciablemente atenuada.
- Respecto de los márgenes de fase, se presentan valores demasiado elevados (infinito) en todos los canales.

Se concluye por tanto, que una situación ideal del sistema realimentado, para tratar de conjugar el ancho de banda con la estabilidad no aparece explícitamente. Esto no conlleva a que el sistema sea inestable o no disponga de ancho de banda adecuado para los propósitos del diseño, pero que implica cierta precaución en presencia de incertidumbre y perturbaciones que puedan afectar al sistema. En cuanto al sistema, el amortiguado es el sistema más coincidente con el sistema real, ya que este considera los efectos del amortiguamiento real que disponen este tipo de vehículos. Este modelo es el que se ha tomado para llevar a cabo el análisis μ del sistema.

7.3.4. ANÁLISIS μ DEL SISTEMA

El diagrama de bloques de la Figura 7.13 muestra el sistema que se ha desarrollado y modelado para llevar a cabo el análisis μ del sistema. Esta es una Transformación Lineal Fraccional (LFT) del sistema. Este análisis se va a realizar sobre los controladores **K1**, **K5** y **K7**, ya que son los que poseen un número de condición menor.

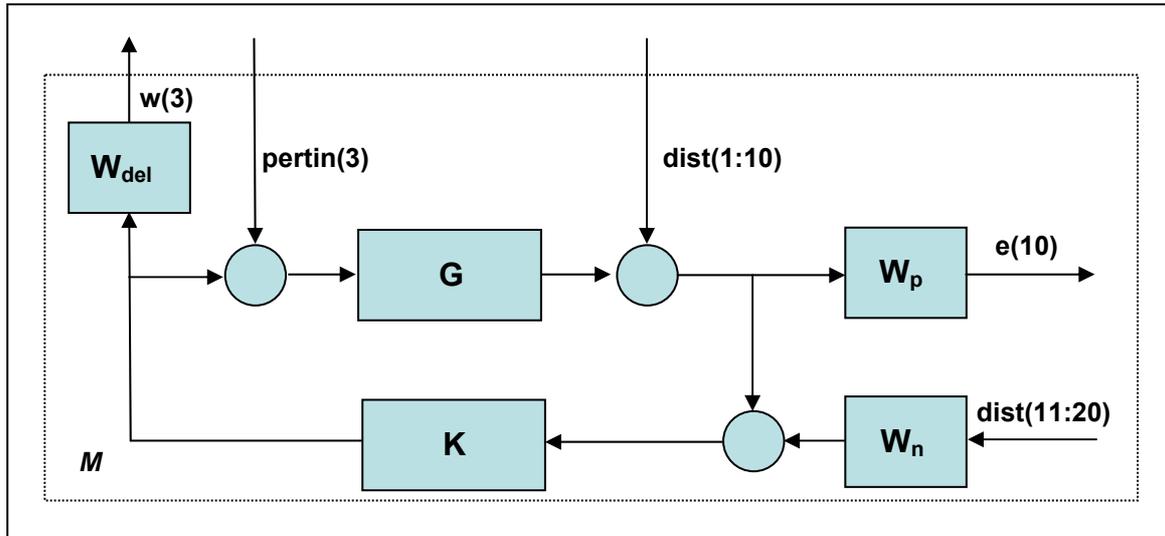


Figura 7.13: Diagrama de bloques del sistema y controlador de la transformación lineal fraccional.

La matriz M de la transformación lineal fraccional se integran todos los bloques de peso de la señal de control, salida y ruido en el sensor, así como la planta del sistema y el controlador obtenido por medio del proceso EA.

Los bloques introducidos en este diagrama son los siguientes:

- G : Representa el modelo matemático del sistema.
- K : Controlador.
- W_{del} : Función de peso de la señal de control.
- W_p : Función de peso de la salida.
- W_n : Función de peso del ruido del sensor.

Y las perturbaciones se conocen como:

- $pert(3)$: Es la perturbación al modelo, por la que se obtienen varias plantas.
- $dist(1:10)$: Es la perturbación en la salida del modelo.
- $dist(11:20)$: Es la perturbación de la medida del sensor.

De esta forma el bloque M está constituido por 23 estados, 13 salidas y 23 entradas, como muestra la Figura 7.14 de forma sintetizada, y correspondiendo a la expresión:

$$M := F_L(G, K)$$



Figura 7.14: Bloque M sintetizando entradas y salidas.

Este bloque del sistema lineal fraccional se completa con las incertidumbres introducidas al modelo, y denominadas Δ , quedando integradas en la transformación según muestra la Figura 7.15

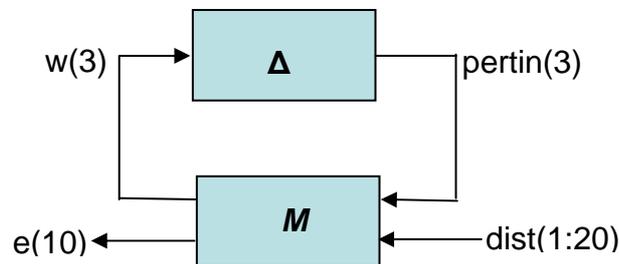


Figura 7.15: Transformación Lineal Fraccional para el Sistema Completo.

La expresión matemática que relaciona ambas matrices en la transformación es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} e \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dist \\ pertin \end{bmatrix}$$

En el desarrollo del análisis μ la matriz M_{11} es función de transferencia que ve la perturbación Δ en la estabilidad robusta, teniendo como objetivo de robustez el cumplimiento de $\|M_{11}\|_{\infty} < 1$.

Para el caso de comportamiento robusto, la matriz M_{22} es la función de transferencia nominal de $dist$ a e en el análisis del comportamiento robusto. Al igual que en el caso anterior el objetivo de robustez es $\|M_{22}\|_{\infty} < 1$

En el análisis μ se obtienen los límites superiores e inferiores. Estos son los índices de robustez o comportamiento del sistema. El límite superior proporciona una condición suficiente de estabilidad, mientras que el límite inferior proporciona una condición suficiente de inestabilidad, esto siempre con un nivel de incertidumbre estructurada. El cálculo de estos límites depende del carácter de la matriz de perturbación Δ . Esta es una matriz diagonal compuesta por perturbaciones parciales pudiendo estar compuesta por valores reales o complejos.

- Incertidumbres Reales: Los algoritmos utilizados en el análisis generalmente obtienen un valor superior aceptable, mientras que el inferior suele estar próximo a cero. La obtención de los límites es complicada. Las incertidumbres reales se refieren a tolerancias de los parámetros reales del problema.
- Incertidumbres complejas: Este tipo de incertidumbres está relacionada con las dinámicas no modeladas o con las incertidumbres del modelo. Generalmente los límites superior e inferior convergen a valores comunes, teniendo un carácter conservativo.

7.3.5. FUNCIONES DE PONDERACIÓN

El objetivo de las funciones de ponderación introducidas en el modelo lineal fraccional de la Figura 7.13 es modelar el comportamiento del sistema en el rango de frecuencia seleccionado. A estas funciones se les ha denominado **Wp**, **Wn** y **Wdel**. La expresión general que modela las funciones de peso se define de la siguiente forma:

$$W_s(s) = \frac{s + \omega_{B1}}{s + \omega_{B2}} M \quad (7.9)$$

Donde ω_{B1} es el cero de la función, ω_{B2} es el polo de la misma y M es el pico máximo de la función en el barrido de frecuencia. Por tanto los requisitos para las funciones individuales de las funciones de transferencia del peso de la función son las siguientes:

- Función de peso a la salida - w_p : Introduce una ganancia del 40 % a frecuencias altas, ya que las frecuencias de corte de la función son bajas. El objetivo que persigue es dar más peso a las frecuencias altas.
- Función de peso del ruido de la medida - w_n : La ganancia es alta a frecuencias muy altas. El objetivo es presentar perturbación a frecuencias altas, representando por tanto el ruido de la medida.
- Función de peso de la señal de control - w_{del} : Las frecuencias de corte de esta función son medias, con lo cual se obtiene ganancia a partir de frecuencias entorno a 100 rad/seg. Con ello se introduce perturbación en las señales de control.

Las funciones de transferencia se han modelado de la siguiente forma:

$$w_p = 0.4 \frac{s + 0.5}{s + \frac{1}{0.5}}$$

$$w_n = 20 \frac{s + 100}{2 + 500s}$$

$$w_{del} = 10 \frac{s + 2}{\frac{s}{60} + 2}$$

Y la representación gráfica de las mismas la que muestra la Figura 7.16

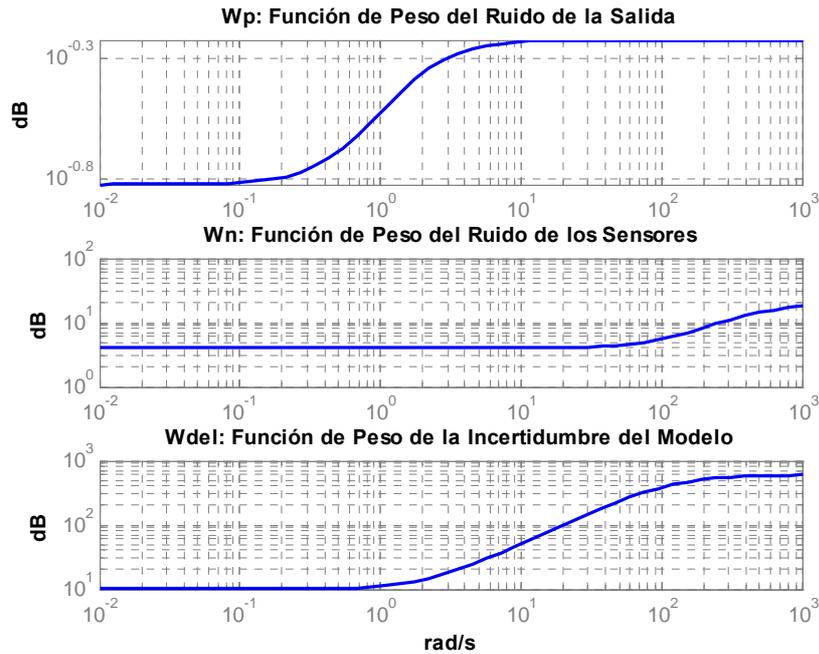


Figura 7.16: Diagrama de Bode de las Funciones de Transferencia de los Pesos de las Señales del Sistema.

Los controladores analizados lo han sido con las mismas funciones de peso y con las mismas incertidumbres y perturbaciones. El método del análisis μ consiste básicamente en los siguientes pasos:

- Captura del modelo lineal como una función de parámetros con incertidumbre.
- Utilizar para el análisis una transformación lineal fraccional, LFT.
- Análisis μ de los controladores seleccionados.

Mediante el análisis μ se van a realizar los ensayos de estabilidad robusta, comportamiento robusto y comportamiento nominal. Estos se van a realizar con los controladores **K1**, **K5** y **K7** seleccionados del CAPÍTULO 6. Además, se van a analizar los casos 1 y 2 introducidos en el mencionado capítulo.

7.3.6. ESTABILIDAD ROBUSTA

La incertidumbre que genera el modelo debido a dinámicas no modeladas, hace que el modelo nominal se transforme en un conjunto de plantas. La estabilidad del sistema nominal no garantiza que el conjunto de posibles plantas lo vayan a ser. El análisis permitirá determinar el rango de estabilidad del sistema para el conjunto de plantas.

El análisis está basado en el esquema de interconexión mostrado en la Figura 7.17, en donde **M** representa el sistema y Δ la incertidumbre. El análisis de la robustez de un sistema de control con incertidumbres está basado en considerar que el sistema **M**, en que está incluido el controlador, es “visto” por la incertidumbre Δ . Sólo interesa conocer como la perturbación ve al sistema, ya que tanto referencias como perturbaciones no afectan a la estabilidad [2004, Hoekstra].

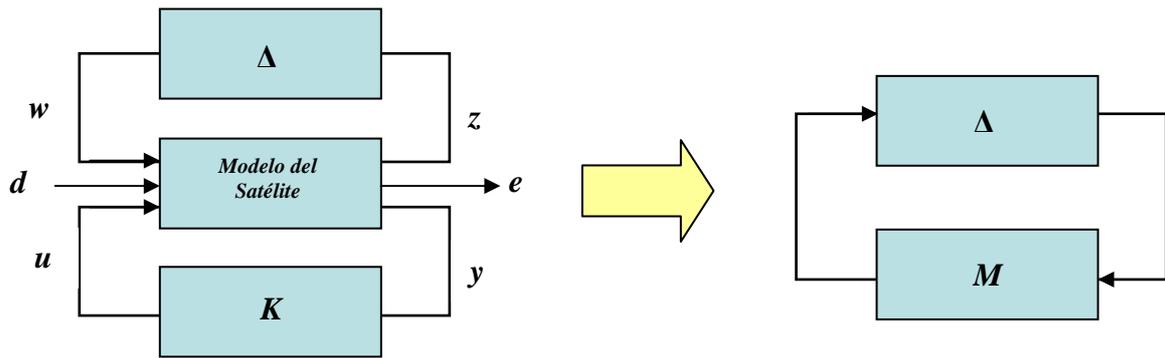


Figura 7.17: Representación genérica de las perturbaciones, planta y controlador.

En la Figura 7.17 w y z representan las señales de la perturbación, d y e representan errores diversos y u e y representan las señales de entrada y salida respectivamente. De forma adicional se considera que la matriz M está compuesta por el lazo inferior que interconexiona el controlador K con el modelo del vehículo rígido-flexible, dado por $M := F_L(G, K)$. El sistema M será estable para todas las incertidumbres Δ si y solo si:

$$\mu[M(j\omega)] < 1 \quad \forall \omega.$$

La matriz Δ que representa las incertidumbres dadas por la ecuación (7.10), se genera como una matriz diagonal [2001, Balas]. De esta forma se representa la incertidumbre como estructura, pudiendo ser los elementos de la matriz iguales o diferentes, estando representados por:

$$\Delta(s) = \begin{bmatrix} \delta_1(s) & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2(s) & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3(s) \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

Las $\delta_i(s)$ de la expresión anterior representan incertidumbres conocidas para el sistema. Para el tipo de incertidumbres estructuradas se va utilizar el análisis μ , o del valor singular estructurado para M dado por:

$$\frac{1}{\mu(M)} \quad (7.11)$$

Para los cálculos de la estabilidad robusta sólo es necesario considerar la submatriz M_{11} , por lo que la transformación considerada es la de la Figura 7.18.

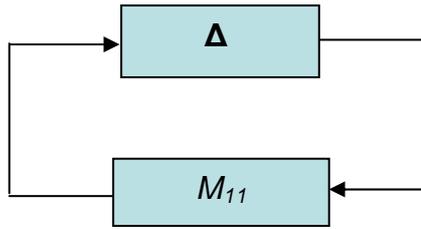


Figura 7.18: Transformación lineal utilizada para la medida de estabilidad robusta.

Los análisis de estabilidad robusta se han efectuado para los casos 1 y 2 y con incertidumbres real y compleja. El objetivo de estos análisis es valorar el comportamiento robusto de estos controladores y determinar la influencia del amortiguamiento forzado en el modo de flexión (caso 2 del análisis) en la estabilidad del sistema. Las gráficas representadas por la Figura 7.19 y Figura 7.20 representan el análisis de estabilidad robusta para los casos 1 y 2 respectivamente y para los controladores **K1**, **K5** y **K7**.

De los datos mostrados, se observa que para el caso 1 de la Figura 7.19 el controlador **K7** no tiene robustez a la estabilidad, mientras que los dos anteriores **K1** y **K5** si son robustos.

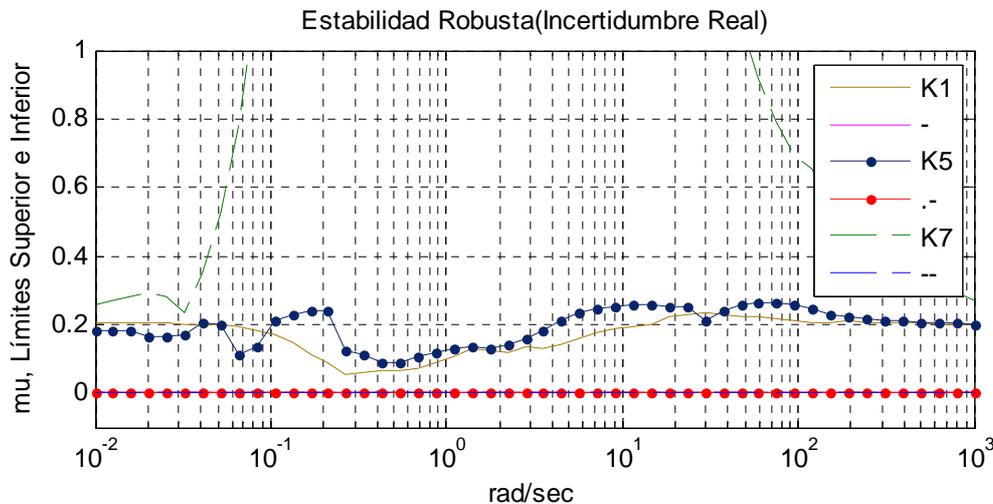


Figura 7.19: Estabilidad Robusta - Caso 1 – Incertidumbre Real.

En lo que al caso 2 se refiere, se observa de la Figura 7.20 que el comportamiento es similar al caso anterior pero con ligeras diferencias. Los controladores **K1** y **K5** son estables mientras que el controlador **K7** gana estabilidad a ciertas frecuencias. Analizando la gráfica con mayor detalle se observa que el pico superior del análisis dispone de un valor muy bajo a frecuencias próximas a la del modo de flexión (27 rad/seg).

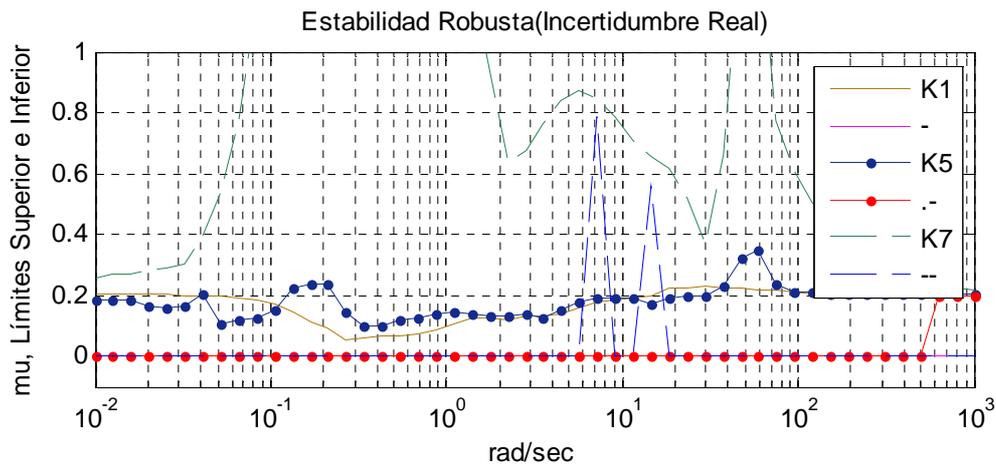


Figura 7.20: Estabilidad Robusta - Caso 2 – Incertidumbre Real.

Del análisis anterior se puede concluir que para los ensayos del sistema con incertidumbre real los controladores que permanecen estables para los dos casos son el **K1** y el **K5**, mientras que el controlador **K7** dentro de su inestabilidad se hace estable a ciertas frecuencias.

Los valores de cero en los límites inferiores de las gráficas del análisis μ conllevan una diferencia apreciable entre los límites de cada controlador. Esta situación sólo se produce cuando la incertidumbre es real. La diferencia entre los límites superior e inferior del análisis se puede reducir añadiendo cierta cantidad de incertidumbre compleja.

Los ensayos con incertidumbre compleja se muestran en la Figura 7.21 y Figura 7.22. Concretamente para el caso 1 la estabilidad robusta tiene el mismo comportamiento que en caso de incertidumbre real, es decir, los controladores **K1** y **K5** son estables, permaneciendo inestable el controlador **K7**. De los datos presentados en la Figura 7.21 se observa que se presenta un pico de ganancia próxima al valor uno en el controlador **K5** y a la frecuencia del modo de flexión. Esto implica que el sistema se hace muy sensible a inestabilidad a la mencionada frecuencia. A diferencia de lo que sucedía en el análisis con incertidumbre real, con la incertidumbre compleja coinciden los límites superior e inferior del análisis μ .

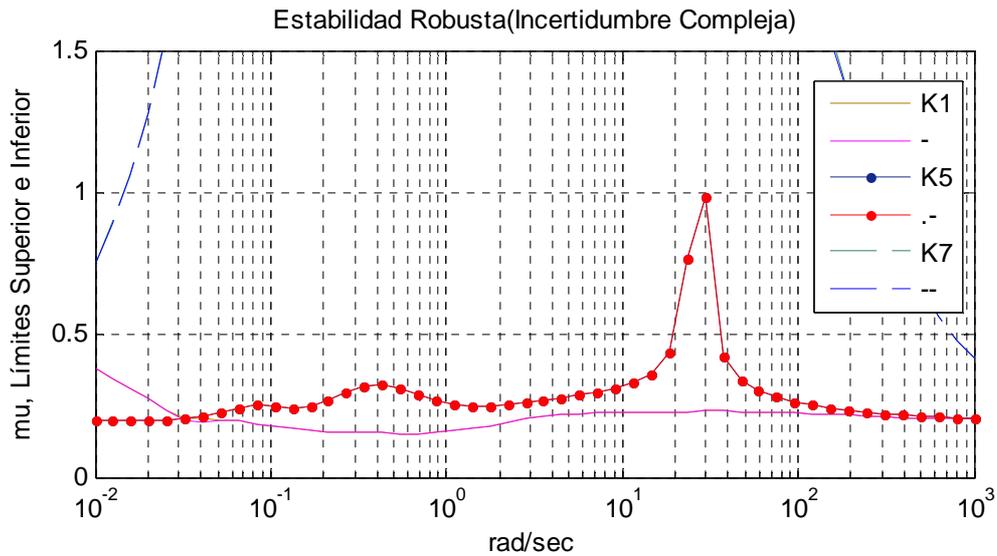


Figura 7.21: Estabilidad Robusta - Caso 1 – Incertidumbre Compleja.

La Figura 7.22 muestra los resultados relacionados con el caso 2. En esta situación el único sistema que permanece estable es el **K1**, mientras que los sistemas **K5** y **K7** son inestables. Concretamente el pico de ganancia del controlador **K5** se ha incrementado a la frecuencia del modo de flexión.

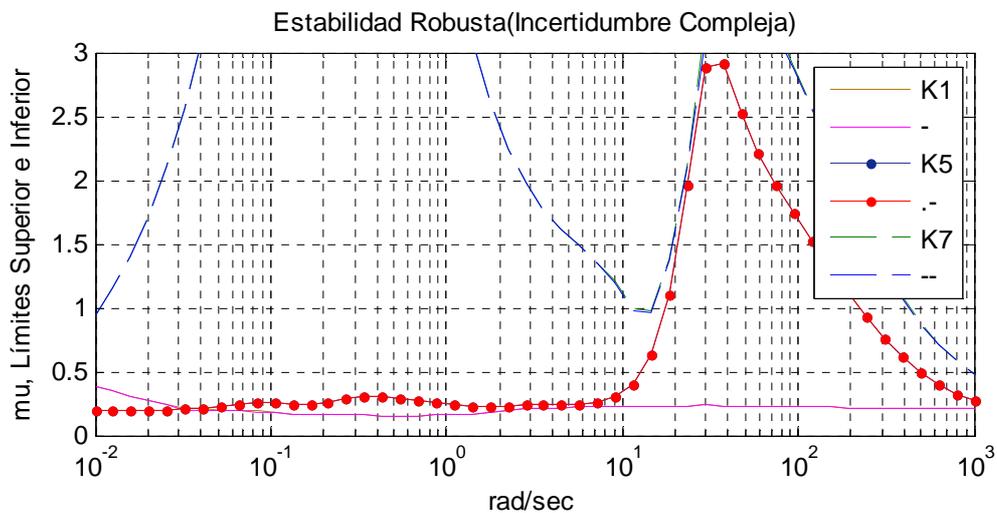


Figura 7.22: Estabilidad Robusta - Caso 2 – Incertidumbre Compleja.

Es interesante conocer a partir de los análisis anteriores el valor más pequeño de la perturbación que desestabilice el sistema. Esta información nos permite conocer la sensibilidad de los sistemas en lazo cerrado.

Cada uno de los gráficos anteriores de los distintos análisis μ realizados facilita información sobre los valores máximos de pico para cada uno de los controladores. La perturbación desestabilizadora tiene la misma estructura que Δ , con estructura diagonal

y con valor $\frac{1}{\max_{\omega} \mu_{\Delta}(M(j\omega))}$. El denominador de esta expresión representa el pico

máximo del análisis μ , y su inverso normalizado según la norma H_{∞} es la perturbación más pequeña que puede desestabilizar el sistema en lazo cerrado. En la Tabla 7.3 este dato está representado por **1/pkvnorm**. La Tabla 7.3 muestra los valores de pico normalizados y sus inversos correspondientes al análisis de estabilidad robusta presentado en las gráficas anteriores. Esto implica que se garantiza estabilidad en el sistema en lazo cerrado para valores de μ con incertidumbre diagonal que se encuentren por debajo de **1/pkvnorm**. En este sentido el controlador que admite más perturbación con incertidumbre real es el **K5** para ambos casos, exceptuando el controlador **K1** que sirve como referencia. La situación se repite en los casos con incertidumbre compleja. Comparando los resultados del controlador **K5** se observa que con incertidumbre real el margen de desestabilización es mayor que con incertidumbre compleja.

Controlador	Caso	Incertidumbre real		Incertidumbre compleja	
		pkvnorm	1/pkvnorm	pkvnorm	1/pkvnorm
K1		2.3200e-001	4.3104e+000	5.3653e-001	1.8638e+000
K5	1	2.6503e-001	3.7732e+000	1.3953e+000	7.1669e-001
K7	1	1.4351e+001	6.9683e-002	2.3866e+001	4.1901e-002
K5	2	3.4801e-001	2.8735e+000	4.1157e+000	2.4297e-001
K7	2	8.4623e+000	1.1817e-001	1.4304e+001	6.9911e-002

Tabla 7.3: Valores de pico normalizados y sus inversos para los controladores K1, K5 y K7.

En conclusión el controlador **K5** es estable con incertidumbre real para los casos 1 y 2 y se desestabiliza en caso 2 con incertidumbre compleja. En cuanto al controlador **K7** la situación está marcada por la inestabilidad para ambos tipos de incertidumbres. Los valores numéricos verifican los datos gráficos, ya que el controlador **K7** dispone de un rango más estrecho para inestabilizarse que el controlador **K5**.

7.3.7. COMPORTAMIENTO ROBUSTO

El comportamiento robusto en sí mismo, es una medida de la habilidad del vehículo controlado para mantener su comportamiento nominal en presencia de perturbaciones al sistema. Matemáticamente estas perturbaciones se manifiestan como alteraciones de los elementos de las matrices de estado **A** y de control **B**. Por tanto, el problema es establecer mediante algún método el cambio que se producirá tanto en los autovalores como en los autovectores del sistema frente a ligeros cambios en los elementos de las mencionadas matrices. Si el comportamiento robusto pudiera ser incrementado, el mismo sistema de control operaría sobre un rango mayor de perturbaciones.

El problema del análisis del comportamiento robusto se centra en determinar si el sistema en lazo cerrado satisface las especificaciones nominales para el conjunto de plantas mencionado. La Figura 7.23 muestra de forma gráfica la transformación que se va a utilizar para realizar el análisis del comportamiento robusto.

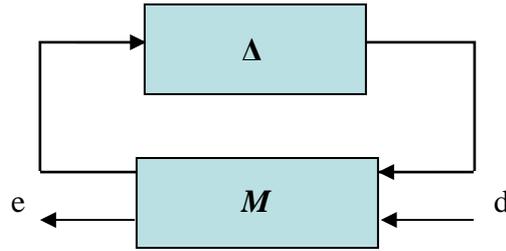


Figura 7.23: Transformación lineal utilizada para la medida del Comportamiento Robusto.

El sistema $M(s)$ de la Figura 7.23 se supone que es estable, puesto que se ha obtenido del modelo nominal, junto con su controlador. Para determinar el comportamiento robusto por medio de un análisis μ , se ha de cumplir que para cualquier valor de la frecuencia $\mu(M) < 1, \forall \omega$.

Si esta condición se cumple el sistema es estable y por tanto dispone de un comportamiento robusto aceptable. Como en el análisis de estabilidad robusta, en este se generan incertidumbres reales y complejas.

El primer análisis de comportamiento se realiza con incertidumbre real. Para el caso 1 los resultados se muestran en la Figura 7.24. En ella las gráficas muestran que los tres controladores tienen un comportamiento robusto, y que los valores máximos alcanzados no llegan al 25% del valor máximo marcado como objetivo. Los límites inferiores con valor cero indican que no se ha encontrado ninguna perturbación que modifique el comportamiento del sistema.

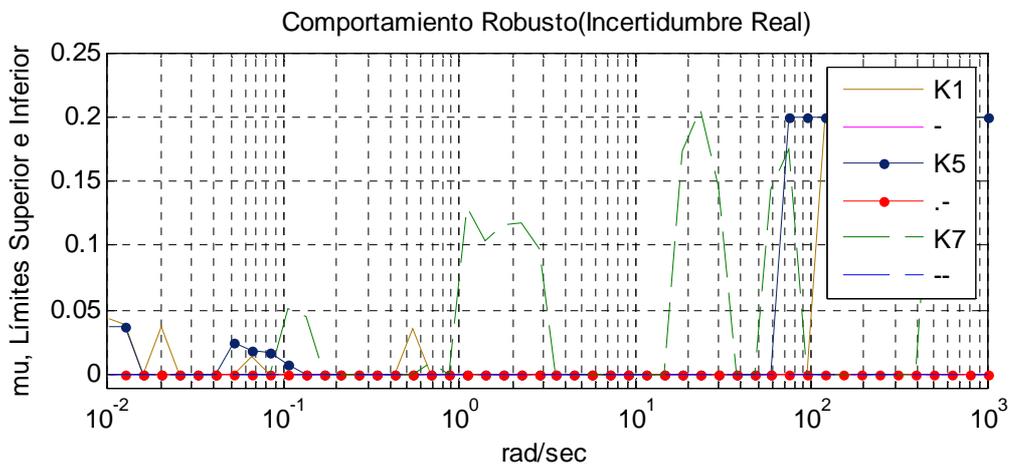


Figura 7.24: Comportamiento Robusto - Caso 1 – Incertidumbre Real.

La Figura 7.25 presenta los resultados para el caso 2. En esta los datos presentan la misma situación anterior, esto es, todos los controladores se mantienen por debajo del 25% del valor máximo marcado como objetivo. De las dos gráficas anteriores se desprende que el controlador **K7** es el que más oscila en los valores máximo de pico. No obstante, su comportamiento es robusto.

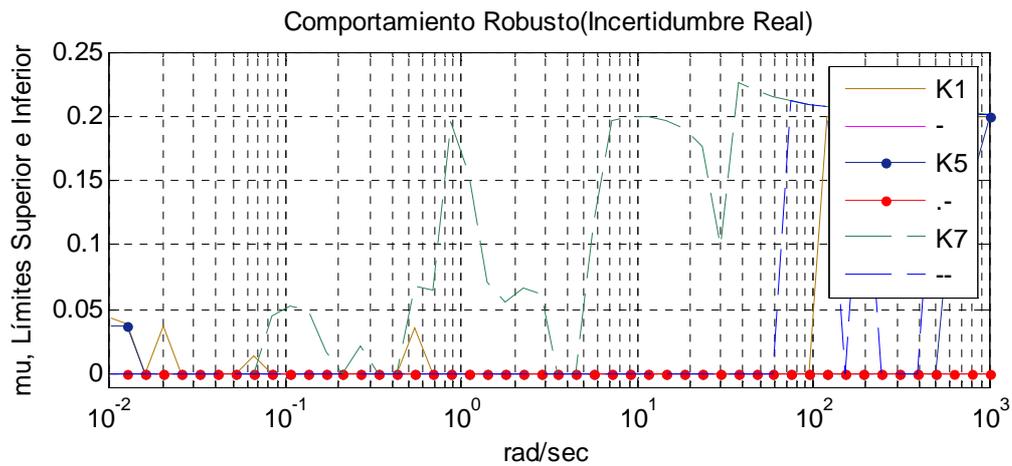


Figura 7.25: Comportamiento Robusto - Caso 2 – Incertidumbre Real.

En lo que ha incertidumbre compleja se refiere los resultados gráficos se muestran en la Figura 7.26 y Figura 7.27 para los casos 1 y 2 respectivamente. La situación ha cambiado comparándola con la simulación con incertidumbre real. En el caso 1 y 2 el comportamiento de los controladores **K1** y **K5** es idéntico, coincidiendo sus valores para los valores máximos y mínimos del análisis μ . Sin embargo el controlador **K7** tiene un comportamiento distinto. En el caso 1 pierde la robustez a frecuencias medias, ver Figura 7.26. Mientras en el caso 2 el sistema permanece robusto pero con un pico en el controlador **K7** próximo a 0.8 a frecuencias medias.

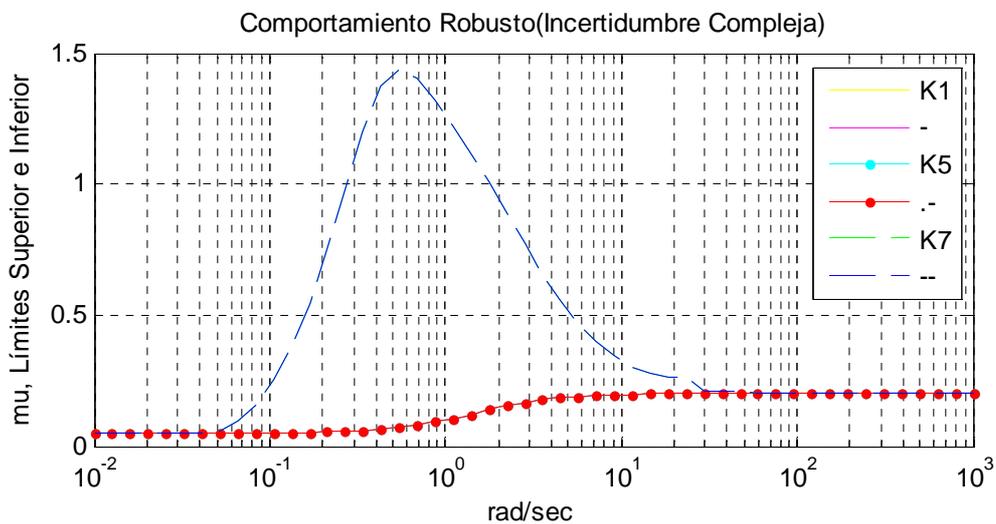


Figura 7.26: Comportamiento Robusto - Caso 1 – Incertidumbre Compleja.

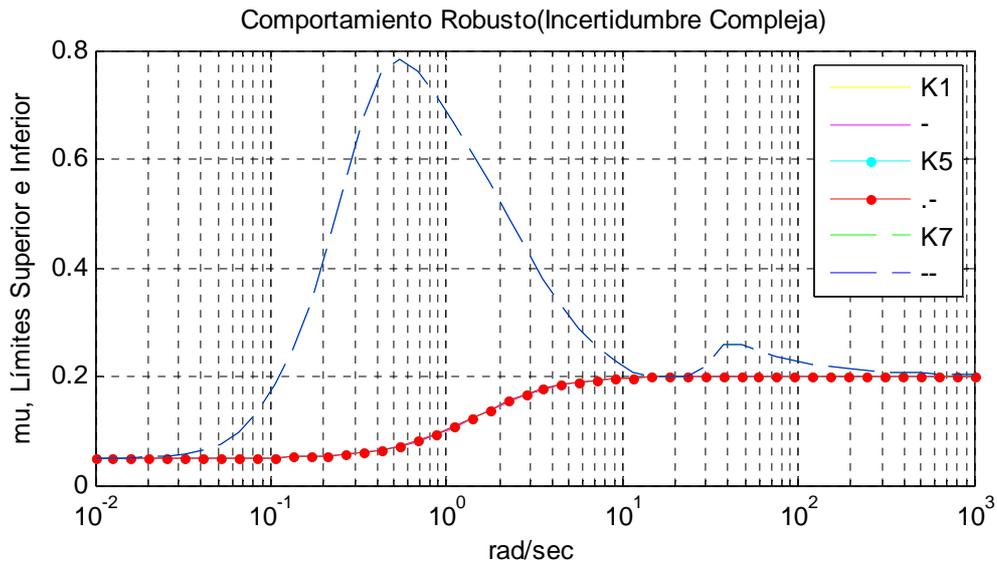


Figura 7.27: Comportamiento Robusto - Caso 2 – Incertidumbre Compleja.

El comportamiento robusto por tanto está garantizado tanto para incertidumbres complejas como reales, ya que sus valores están por debajo del valor unitario.

7.3.8. COMPORTAMIENTO NOMINAL

Este análisis se ha realizado para incertidumbres reales y complejas, al igual que en el análisis de estabilidad y de comportamiento robusto. En cuanto a perturbaciones de carácter real, los resultados gráficos se muestran en la Figura 7.28 para el caso 1 y en la Figura 7.29 para el caso 2. Los datos gráficos muestran que el controlador **K7** es inestable tanto para el caso uno como para el caso 2 en todo el rango de frecuencias considerado. El controlador **K5** es estable en el caso 1 mientras que en el caso 2 alcanza en valor uno del análisis a las frecuencias próximas a 100 rad/seg, inestabilizando el sistema.

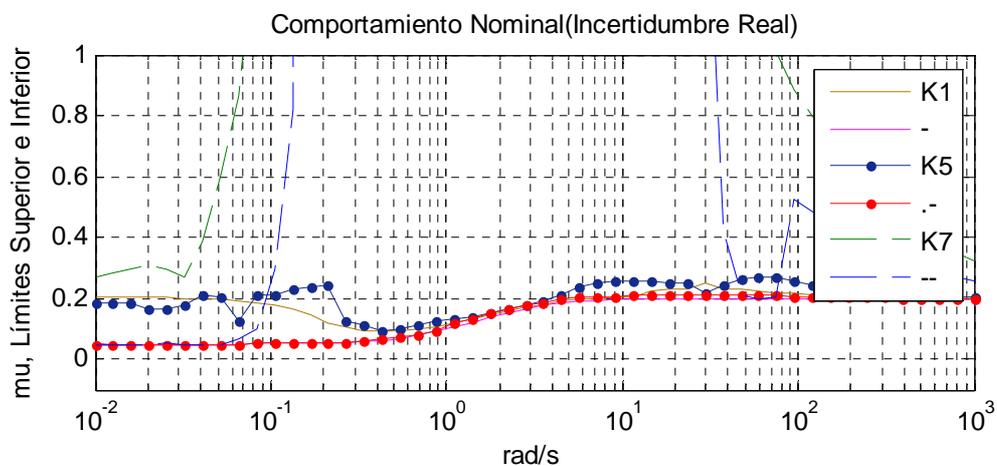


Figura 7.28: Comportamiento Nominal - Caso 1 – Incertidumbre Real.

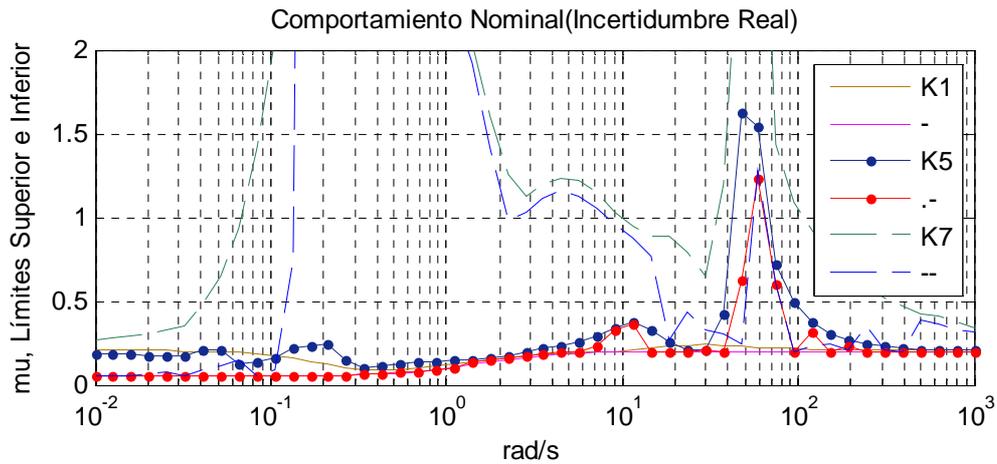


Figura 7.29: Comportamiento Nominal - Caso 2 – Incertidumbre Real.

En los análisis con incertidumbres complejas, la situación para el controlador **K7** no cambia. En lo que al controlador **K5** respecta se mantiene estable en el caso 1, presentando un pico de valor próximo a uno en la frecuencia de 30rad/seg, esto es, próxima a la frecuencia del modo de flexión del vehículo, ver Figura 7.30. El controlador **K5** en el caso 2 tiene un comportamiento nominal inestable a frecuencias por encima de 15 rad/seg y hasta 300 rad/seg aproximadamente, ver Figura 7.31 . Esto indica que el comportamiento en el modo de torsión que está en 400 rad/seg se mantiene estable en el caso nominal.

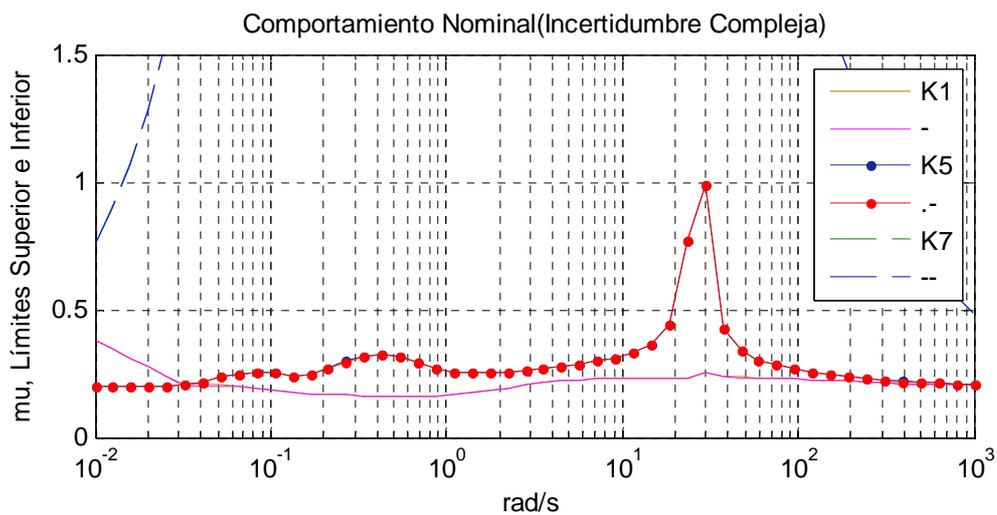


Figura 7.30: Comportamiento Nominal - Caso 1 – Incertidumbre Compleja.

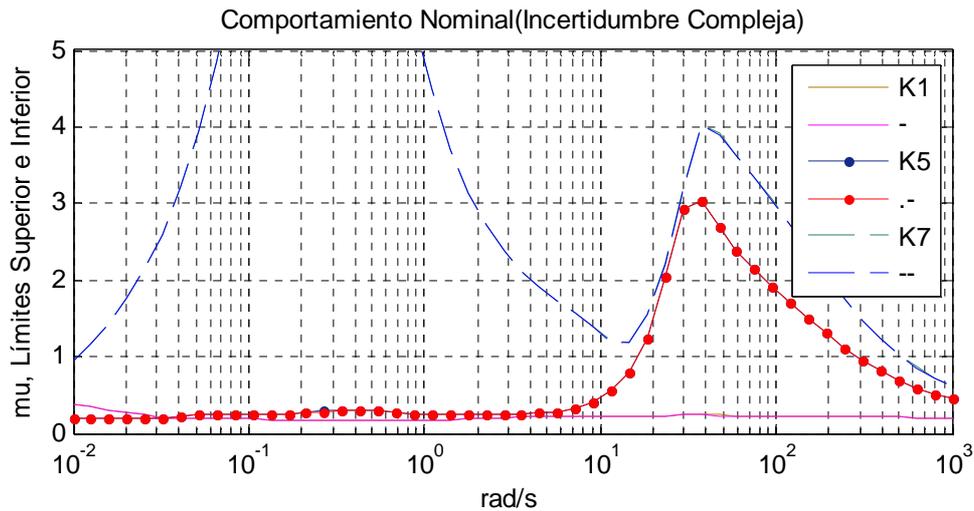


Figura 7.31: Comportamiento Nominal - Caso 2 – Incertidumbre Compleja.

En resumen, el controlador **K7**, según este análisis tiene un comportamiento nominal muy sensible que podría ser inestabilizado por cualquier tipo de perturbación. Este comportamiento se mantiene para incertidumbre real y compleja. El controlador **K5** tiene un comportamiento nominal aceptable en el caso 1 tanto para incertidumbre real como compleja y presenta picos de inestabilidad con ambos tipos de incertidumbre para ambos casos.

7.3.9. ESTUDIO DEL CONTROLADOR **K5**

Los análisis μ realizados sobre los controladores **K5** y **K7** para los casos 1 y 2 ensayados en el CAPÍTULO 6 han permitido conocer más a fondo el comportamiento de los sistemas en lazo cerrado. Los análisis han permitido conocer el comportamiento robusto y la estabilidad de los mismos. Los datos han mostrado que el comportamiento del sistema en lazo cerrado con el controlador **K5** es menos crítico que con el controlador **K7**. Merece la pena profundizar aún más en el sistema con este controlador y comparar específicamente su comportamiento para los casos 1 y 2 recopilando la información de la sección anterior. La estabilidad robusta con incertidumbre real se muestra en la Figura 7.32. Se observa que el pico más elevado del valor μ se presenta por frecuencias comprendidas entre la frecuencia de flexión y la torsión. Pero de ningún modo, este pico afecta a la estabilidad, ya que se encuentra muy por debajo del valor límite. Tanto el caso 1 como el caso 2 tienen un comportamiento similar, permaneciendo estable el sistema en los dos casos.

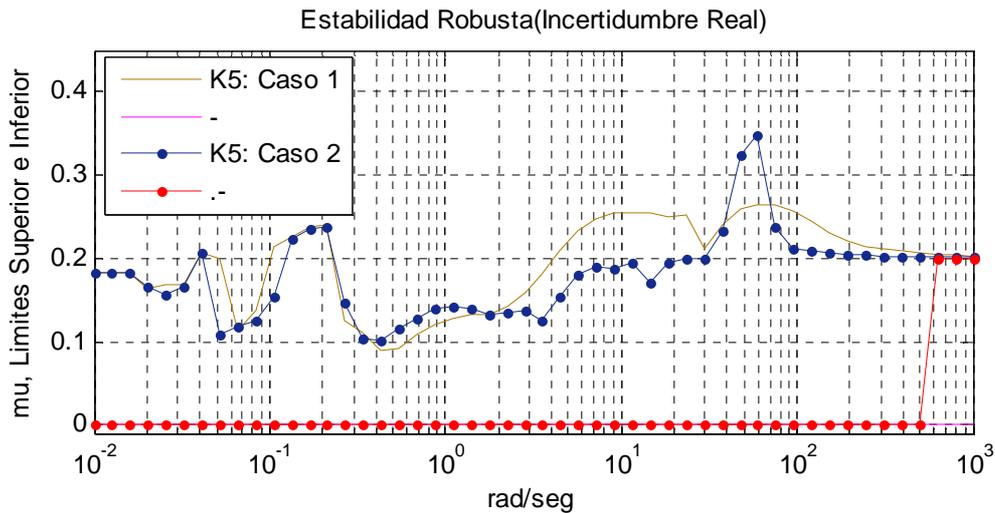


Figura 7.32: Estabilidad Robusta – Incertidumbre Real.

En cuanto al comportamiento robusto con incertidumbre real, ambos sistemas siguen una trayectoria similar, ver la Figura 7.33. En ningún caso el sistema deja de ser robusto, pero se observa que en el caso 1 el controlador presenta valores por encima de cero a frecuencias en torno a 80 rad/seg mientras que en el caso 2 esto sucede a frecuencias altas por encima de la frecuencia de torsión. Este tipo de respuestas gráficas indican que los valores de μ son muy pequeños y que a las frecuencias de interés el sistema es robusto.

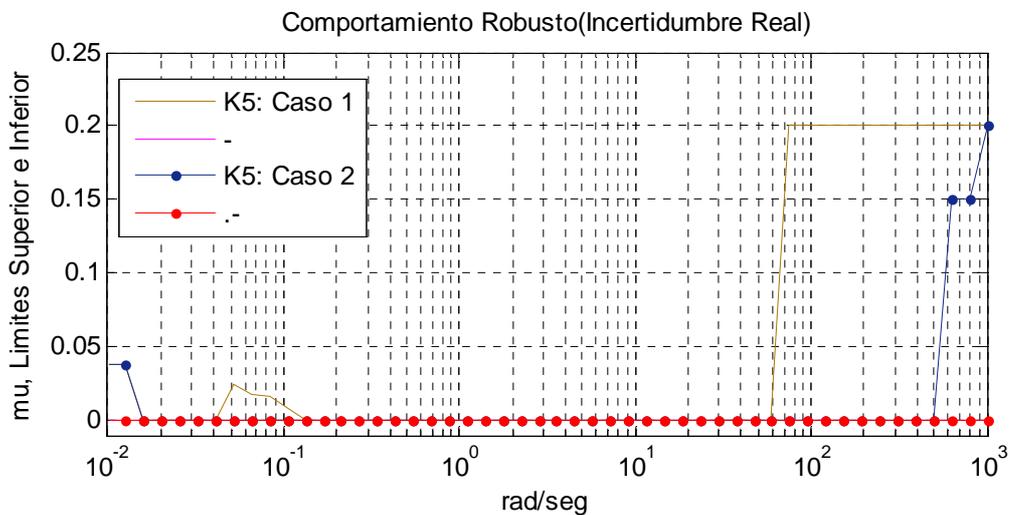


Figura 7.33: Comportamiento Robusto – Incertidumbre Real.

La Figura 7.34 muestra el comportamiento nominal con incertidumbre real. El comportamiento del caso 1 es estable con valores de μ por debajo del 50% del valor máximo. En el caso 2 se alcanza el valor máximo de uno a frecuencias comprendidas entre los modos de flexión y de torsión. Esto implica que cualquier incertidumbre que afectara al sistema en este rango de frecuencias inestabilizaría el sistema, presentando mayor sensibilidad en este rango.

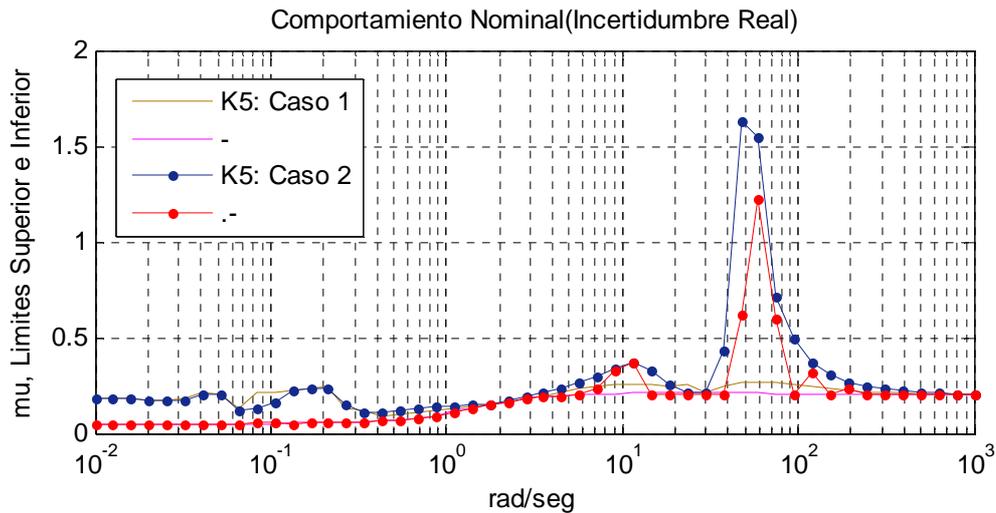


Figura 7.34: Comportamiento Nominal – Incertidumbre Real.

Los resultados recopilados para la incertidumbre compleja se muestran en los siguientes gráficos. La Figura 7.35 presenta los resultados de estabilidad robusta. En el caso 2 el sistema se hace inestable a frecuencias medias y altas, presentando un pico elevado en el caso 1 a la frecuencia de 30 rad/seg. Este resultado presenta inestabilidad al compararlo con los resultados para el análisis con incertidumbre real.

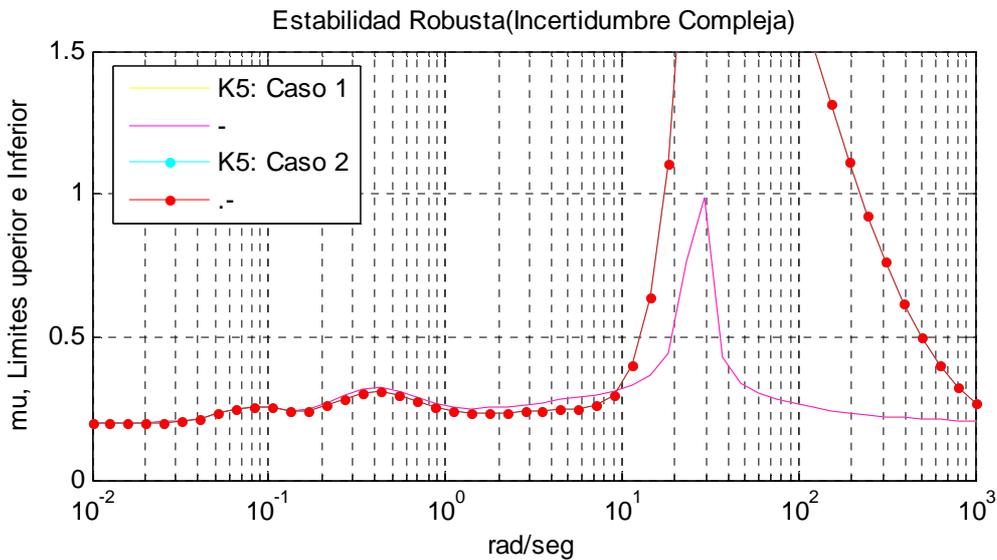


Figura 7.35: Estabilidad Robusta – Incertidumbre Compleja.

La Figura 7.36 presenta los resultados de comportamiento robusto. La respuesta frecuencial del análisis indica que ambos casos coinciden y que el sistema en lazo cerrado es robusto para el rango de frecuencias analizado.

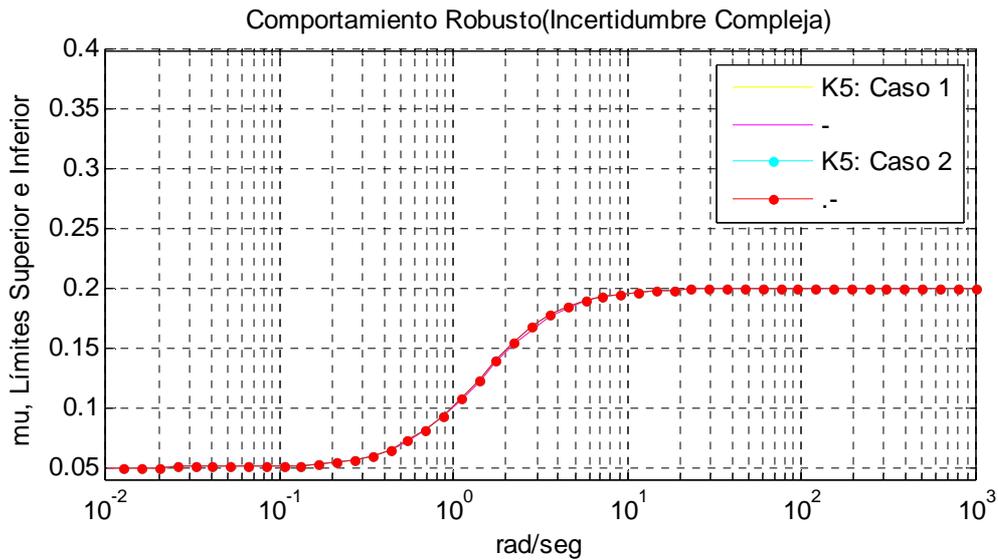


Figura 7.36: Comportamiento Robusto – Incertidumbre Compleja.

El comportamiento nominal del sistema se presenta en la Figura 7.37. El sistema del caso 2 tiene un comportamiento muy crítico comparado con el sistema del caso 1. La frecuencia a la cual se presenta el pico está relacionada con el modo de flexión del vehículo. Comparando estos resultados con los de incertidumbre real se observa que en el caso 2 el comportamiento es el mismo, con picos elevados en el mismo rango de frecuencias.

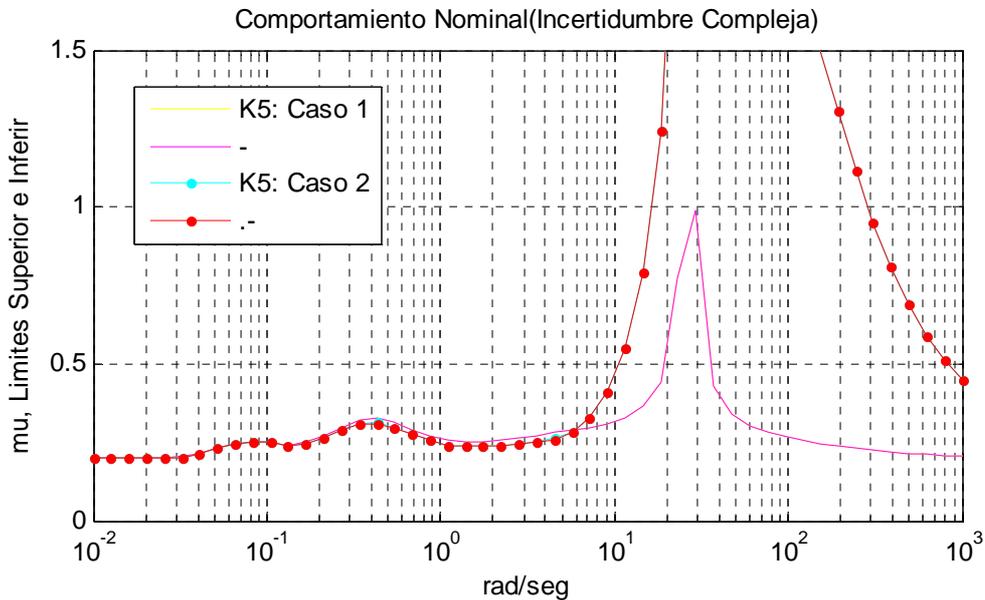


Figura 7.37: Comportamiento Nominal – Incertidumbre Compleja.

Respecto de la comparación de los controladores $K5$ y $K7$ se puede llevar a cabo un sencillo análisis también basado en la comparación de resultados. Se trata de comparar los resultados para estos controladores obtenidos en el CAPÍTULO 6 respecto de la sensibilidad de los autovalores y el número de condición. La Tabla 6.45 presenta estos resultados, a partir de los que se observa que la sensibilidad de los autovalores del

controlador **K5** es menor que los del controlador **K7** y el número de condición del controlador **K5** es menor que el del **K7**. La Tabla 7.4 presenta los datos recopilados de la Tabla 6.45. Estos datos, que fueron tomados como índice básico de robustez, quedan verificados por los datos obtenidos del análisis μ , en los que el sistema **K5** presenta mayor grado de robustez.

Caso	Controlador	Modos	Autovalores Obtenidos	Sensibilidad de los Autovalores	Numero de Condición
Uno	K5	Alabeo	$-6.15e-002 \pm 3.48e-002i$	1.4487e+001	419.22
		Cabeceo	$-8.67e-002 \pm 3.24e-002i$	1.5561e+001	
		Guiñada	$-2.90e-001 \pm 2.90e-001i$	2.0550	
		Flexión	$0.0 \pm 2.70e+001i$	1.3532e+001	
		Torsión	$0.0 \pm 4.00e+002i$	2.0000e+002	
	K7	Alabeo	$-6.1463e-002 \pm 3.3611e-002i$	3.5249e+002	2147.7885
		Cabeceo	$-8.4769e-002 \pm 3.0235e-002i$	5.2957e+002	
		Guiñada	$-2.8983e-001 \pm 2.8997e-001i$	2.1017e+002	
		Flexión	$1.6101e-002 \pm 2.6994e+001i$	1.3809e+001	
		Torsión	$0.0 \pm 4.00e+002i$	2.0000e+002	
Dos	K5	Alabeo	$-6.1457e-002 \pm 3.4821e-002i$	1.7567e+001	421.6613
		Cabeceo	$-8.6730e-002 \pm 3.2408e-002i$	1.5561e+001	
		Guiñada	$-2.90e-001 \pm 2.90e-001i$	3.7327e+001	
		Flexión	$-10.0 \pm 2.70e+001i$	1.9148e+001	
		Torsión	$0.0 \pm 4.00e+002i$	2.0000e+002	
	K7	Alabeo	$-6.1407e-002 \pm 3.4807e-002i$	1.3861e+002	2647.2611
		Cabeceo	$-8.6421e-002 \pm 3.2386e-002i$	6.0353e+002	
		Guiñada	$-2.8973e-001 \pm 2.8999e-001i$	4.9269e+002	
		Flexión	$-9.9882 \pm 2.70e+001i$	2.5570e+001	
		Torsión	$0.0 \pm 4.00e+002i$	2.0000e+002	

Tabla 7.4: Sensibilidad de los Autovalores y Número de Condición para los Controladores **K5 y **K7**.**

En conclusión, los análisis comparativos del controlador **K5** para los casos 1 y 2 permiten determinar que la estabilidad robusta es estable con incertidumbre real e inestable con incertidumbre compleja a frecuencias próximas al modo de flexión. En cuanto al comportamiento robusto, los datos muestran las mismas respuestas y mismos valores de μ tanto con incertidumbres reales como complejas. Y por último, el comportamiento nominal es adecuado, por debajo del límite máximo de uno para el caso 1, presentando criticidad en el caso 2 tanto con incertidumbre real como compleja.

7.4. MEJORA DE LA ROBUSTEZ DEL SISTEMA

Según [2002, Magni] cuando las matrices del sistema **A**, **B**, **C**, y **D** están sujetas a altas variaciones el problema de mantener la estabilidad y el comportamiento del sistema se enmarca dentro de la robustez del sistema. Si por el contrario las variaciones propias del sistema en lazo cerrado son de una dimensión pequeña el concepto es el de “insensibilidad”, y en sentido contrario el de sensibilidad.

En el sentido de reducir la sensibilidad de los autovalores frente a perturbaciones las ideas reflejadas en [1998, Liu] ponen de manifiesto la necesidad de posicionar los autovalores en ciertas regiones del plano complejo. Conceptos adicionales de posición óptima de los autovalores introducidos por la denominada forma YJB en honor a sus autores (Youla, Jabr y Bongiorno) excluye el concepto de sensibilidad tratados por los métodos EA. Hasta ahora los índices tratados en el CAPÍTULO 6, como son los de

sensibilidad de los autovalores y número de condición se encuentran más relacionados con la sensibilidad del sistema que con la robustez. Sólo el análisis μ está relacionado con la robustez. Aunque según se ha mostrado en la sección anterior los resultados están directamente relacionados. Aunque en los trabajos de [1998, Liu] se manifiesta que la reducción de sensibilidad no está relacionada con la robustez del sistema, los datos han manifestado justamente lo contrario, según los análisis realizados a los controladores **K5** y **K7**. Según [2002, Magni] una mejora en la medida de la sensibilidad puede resultar en una degradación significativa de la medida de robustez sobre el dominio de la frecuencia.

Las técnicas utilizadas para el diseño de sistemas robustos con métodos EA conjugan el diseño de sistemas en el dominio del tiempo y en dominio de la frecuencia. Esto último se consigue minimizando funciones de coste como índices de robustez expresados en el dominio de la frecuencia, en lo que se denomina diseño de control multiobjetivo. Las técnicas empleadas incluyen el diseño de sistemas de control robusto H_∞ junto con algoritmos genéticos.

Desde un punto de vista puramente práctico, la obtención de un sistema robusto se centra en la minimización del índice μ . Esto se consigue optimizando el controlador **K** o calculando la matriz de perturbaciones Δ que permita reducir el mencionado valor singular. En este caso estaríamos ante un proceso iterativo que tiene como objetivo obtener la solución óptima. Aunque los resultados del análisis μ muestran que este valor es diferente para los controladores EA obtenidos por diferentes métodos. Luego en sí mismo, es factible pensar que el proceso de obtención del controlador introduce aspectos relacionados con la robustez del sistema, mediante una mejora de su sensibilidad.

7.5. CONCLUSIONES

Este capítulo se ha dedicado a analizar la robustez del sistema con los controladores seleccionados del CAPÍTULO 6. Por tanto, trata de complementar el diseño de los controladores por el método EA, analizando la estabilidad robusta, el comportamiento robusto y el comportamiento nominal.

Se ha determinado la influencia paramétrica de los elementos de la matriz de estado y su relación con los modos del sistema. Este estudio permite conocer la influencia de cada uno de ellos sobre los modos, y como se ven afectados estos frente a cualquier variación de tipo paramétrico. Cualquier perturbación que afecte a los parámetros del sistema tendrá su repercusión sobre los modos del mismo.

Se han introducido en este estudio los márgenes de ganancia y fase del sistema nominal, determinando que estos no ofrecen la suficiente garantía de que el comportamiento del sistema sea estable frente a perturbaciones e incertidumbre. Así mismo, se ha observado que estos análisis en sistemas MIMO pueden conducir a informaciones no correctas debido a la repercusión interna de los modos del sistema.

Este hecho ha motivado que el análisis de robustez se halla llevado a cabo por medio del análisis μ . Este método ha sido aplicado a todos los controladores diseñados. Se ha

observado que los datos se corresponden con los de robustez básica contenido en el CAPÍTULO 6. Aunque en este capítulo se utilizó como índice de robustez el número de condición, con el análisis μ los datos coinciden.

Las simulaciones han sido realizadas con incertidumbres de carácter real y complejo. Si bien las incertidumbres de tipo complejo ofrecen soluciones más conservadoras en el cálculo del valor μ , desde el objetivo de este análisis es válido ya que permite conocer aquellas frecuencias a las que el sistema puede perder la estabilidad o no disponer de un comportamiento adecuado.

De los cálculos llevados a cabo se ha determinado que la estabilidad robusta se consigue para todos los controladores, pero que algunos de ellos muestran valores singulares alrededor de las frecuencias de los modos flexibles. La situación se reproduce en el análisis del comportamiento nominal y robusto.

CAPÍTULO 8

CONCLUSIONES

Esta tesis ha cubierto los aspectos básicos y fundamentales de los sistemas rígido-flexibles con una aplicación muy determinada relacionada con los vehículos espaciales. En particular se ha materializado esta aproximación con un satélite flexible, compuesto de una parte rígida y otra deformable, como son los paneles solares.

El tema de la flexibilidad en vehículos para diversas aplicaciones está de completa actualidad a juzgar por la bibliografía referenciada. Esto lleva inexorablemente a definir y diseñar diferentes estrategias de control, que conducen al diseño de diversas leyes de control por diferentes métodos, y que tienen como principal objetivo la atenuación y falta de excitación de los modos de vibración de este tipo de vehículos. De forma conjunta al análisis de vehículos flexibles discurre el estudio y análisis de nuevas estrategias de control que permitan optimizar la utilización de los mismos.

En particular esta tesis se ha centrado en el diseño de leyes de control basadas en un método de análisis y síntesis modal como el denominado de Asignación de Autoestructuras (EA). Este método, desde la perspectiva del diseño de controladores y aplicaciones determinadas, se postulaba como el más interesante para el propósito principal de la tesis, que es obtener desacoplo de los modos rígidos frente a los flexibles de cualquier vehículo flexible, atenuando o haciendo desaparecer las vibraciones de los elementos flexibles adosados al cuerpo principal del vehículo.

Uno de los desafíos más importantes que han aparecido ha sido el desarrollo de un modelo matemático dinámico representativo del sistema real. Esta fue la intención inicial, para lo cual en el modelo matemático no se simplificaron los modos de deformación de los elementos flexibles. De hecho se han tenido en cuenta las posibles deformaciones de los paneles solares, tal como la deformación por flexión y por torsión.

A partir de este modelo se han realizado diversos diseños de controladores por métodos EA, pero siempre teniendo como idea principal el desacoplo de los modos dinámicos del sistema. Todas las simulaciones se han realizado sobre el sistema lineal y no lineal. Además, el desarrollo de las simulaciones ha finalizado con un análisis de robustez del sistema, realizado por análisis μ .

Se han utilizado las técnicas más habituales de asignación de autoestructuras para el diseño de los controladores del CAPÍTULO 6. Se han utilizados técnicas de proyección, técnicas iterativas y de minimización de funciones de coste. Independientemente de las técnicas utilizadas el objetivo no se ha perdido, desacoplar los modos del sistema y obtener cierto grado de robustez en el sistema.

Todos los controladores obtenidos en el CAPÍTULO 6 han requerido la definición de una autoestructura deseada. Respecto de los autovalores deseados de los modos orbitales se ha seguido la estrategia de requerir unos autovalores amortiguados, frente a la estrategia seguida para los modos de deformación, en que los autovalores deseados

permanecen en la misma posición que en lazo abierto. Se han valorado diferentes soluciones, algunas de las cuales podían conducir a inestabilidad en el sistema.

En cuanto a los autovectores, se ha perseguido el propósito de obtener desacoplo. Los elementos que han requerido desacoplo en cada uno de los autovectores siempre ha sido menor que el número de entradas al sistema. Esta característica está relacionada con el tipo de vehículo analizado.

Las autoestructuras obtenidas prácticamente han estado muy próximas a las autoestructuras requeridas, lo que implica que las funciones utilizadas permiten asegurar, por ejemplo, los mismos autovalores que los deseados. Esta característica conlleva algún coste, como por ejemplo perder el desacoplo de los modos o esfuerzos de control elevados en algunos métodos.

Respecto de la técnica de Asignación de Autoestructuras se ha de mencionar que sigue siendo una técnica en continuo análisis, ya que en la literatura especializada aparecen aplicaciones y mejoras de la misma.

Las deformaciones causadas en los elementos adosados a satélites, considerados flexibles han sido y son objeto de estudio continuo por parte de los investigadores del sector. Concretamente en los trabajos aquí presentados, y bajo el método de deformación considerado, modos supuestos, se ha demostrado que la deformación está íntimamente relacionada con las perturbaciones aplicadas a los elementos flexibles. Se considera por tanto que bajo la denominación de perturbación se encuentran las maniobras de actitud y las perturbaciones externas debidas a la órbita desarrollada.

De forma adicional, también se ha demostrado que las deformaciones causadas en los paneles solares debidas a perturbaciones externas causan errores de apuntamiento y actuando por tanto el subsistema de control de actitud para corregir la situación. Esta característica es debida al acoplamiento existente entre los modos del sistema.

Se ha de mencionar que los investigadores en deformaciones en estructuras tratan de aportar sus experiencias en la literatura especializada, sobre todo en cuanto a atenuación y supresión de vibraciones. En particular un área de interés está en las técnicas empleadas en la colocación de sensores y actuadores.

El método seguido en esta tesis, referido al análisis del sistema y síntesis de controladores, ha permitido conocer en profundidad las importantes características de este tipo de vehículos. Se concluye, en este aspecto que el conocimiento exhaustivo, realizado por un análisis modal, permite disponer de más y mejores datos para el diseño y desarrollo del controlador.

El método seguido en lo que se refiere a diseño de controladores ha permitido valorar los aspectos inherentes a la técnica EA y observar como a partir de los mismos datos se obtienen diferentes controladores. Esto conlleva ligeras diferencias en el comportamiento del sistema en lazo cerrado, que pueden afectar a la estabilidad. Por tanto, diferentes controladores ofrecen diferentes comportamientos frente a la sensibilidad y a la robustez del sistema.

Aunque en el desarrollo del método, identificando los autovalores y autovectores deseados, siempre se ha perseguido obtener el máximo desacoplo de los modos, siempre se ha trabajado con la idea adicional de dotar al sistema de cierto grado de robustez.

A lo largo del CAPÍTULO 6 se ha mostrado que en el análisis de los controladores diseñados se ha utilizado una referencia básica, como es el número de condición de la matriz de autovectores del sistema en lazo cerrado, para conocer un dato básico de robustez. Este dato básico ha sido utilizado para seleccionar aquellos controladores que presentaban mejores prestaciones. Este método ha resultado útil, ya que el análisis real de robustez por medio del análisis μ , ha permitido verificar los resultados.

Las simulaciones del CAPÍTULO 6 también han permitido verificar el modelo no lineal mediante comparación con el sistema linealizado. Estos ensayos han sido realizados en el Grupo dos de ensayos, en los que se han comparado ambos modelos. Los resultados mostraron similares tendencias para los dos modelos lo que indica su idoneidad.

El CAPÍTULO 7 que se ha dedicado al análisis de la robustez del sistema ha verificado que el controlador diseñado con la mencionada técnica de proyección ha obtenido los mejores resultados de robustez. Las simulaciones de análisis de robustez se han realizado para verificar el comportamiento nominal, el comportamiento robusto y la estabilidad robusta. En los ensayos se ha verificado que los datos obtenidos concuerdan con el índice básico de robustez utilizado, esto es el número de condición.

A lo largo de la tesis, además de requerir ciertas condiciones de trabajo a un vehículo rígido-flexible, se ha presentado un método de análisis y síntesis basado en las técnicas de Asignación de Autoestructuras. Como se ha mostrado el método ha consistido en la fase preliminar en el análisis del sistema en lazo abierto y en la identificación de los modos del sistema, esto es un análisis modal. Estos datos han servido como la mejor referencia para requerir el comportamiento del sistema en lazo cerrado y establecer los criterios de diseño. El método ha continuado con la definición de la autoestructura deseada y el diseño de la ley de control por diferentes métodos. La verificación del comportamiento del sistema en lazo cerrado ha permitido comprobar los requisitos del sistema. El procedimiento de diseño finalizaba con el análisis de robustez del mismo.

En lo que a trabajos futuros se refiere, es interesante resaltar los aspectos relacionados con la robustez del sistema. Utilizar métodos de asignación de autoestructuras basados en algoritmos genéticos, técnicas QFT o procesos de ortogonalización de los autovectores se vienen presentando en la literatura reciente. Concretamente los métodos de ortogonalización se postulan de nuevo como métodos de obtener baja sensibilidad en la autoestructura.

REFERENCIAS

[1983, Andry]: Andry, A. N.; Shapiro, E. Y.; Chung, J. C. “*Eigenstructure Assignment for Linear Systems*”. IEEE Transactions On Aerospace And Electronic Systems Vol. AES-19, no. 5 Septiembre de 1983, pp. 711-729.

[2006, Antequera]: Antequera, N., Santos, M. y De la Cruz, J.M. “*A Helicopter Control based on Eigenstructure Assignment*” IEEE 2006.

[1996, Bak] “*Onboard Attitude Determination for a Small Satellite*” Spacecraft Guidance, Navigation and Control Systems, 26 – 29 Noviembre de 1996, Estec, The Netherlands.

[2001, Balas]: Balas, G. J., Doyle, J. C., Glover, K., Packard, A. y Smith, R. “ *μ -Analysis and síntesis Toolbox*”. User’s Guide, Matlab. 2001.

[2001, Baruh]: H. Baruh. “*Control of the Elastic Motion of Lightweight Structures*”. Structural Dynamics Conference. 2001 AIAA.

[2005, Bodineau]: “*(μ) – Iteration Technique Applied to the Control of Satellites with Large Flexible Appendages*”. 6th International ESA Conference on Guidance, Navigation and Control Systems, 17 – 20 de Octubre de 2005.

[2007, Bong]: Bong, Y.; Choi, J. W. “*Eigenstructure Assignment Considering Probability of Instability with Flight Control Application*”. International Journal of Control, Automation and Systems. Vol. 5, No. 6, Diciembre de 2007.

[1998, Bong Bie]: “*Space Vehicle Dynamics and Control*”. AIAA Education Series.

[2002, Braembussche]: Pieter Van den Braembussche, Jean de Lafontaine, Pierrick Vuilleumier. “*Proba Attitude Control and Guidance In-orbit Performance*”. Proceedings of the 5th ESA International Conference on Spacecraft Guidance, Navigation and Control Systems. Frascati, Italia, 22-25 de Octubre de 2002.

[2001, Boulet]: Boulet, B., Francis, B. A., Hughes, P. C., Hong, T. “ *μ Synthesis for a Large Flexible Space Structure Experimental Testbed*” Journal of Guidance, Control and Dynamics. Vol. 24, n° 5, Septiembre-Octubre de 2001.

[1989, Burrows]: Burrows, S. P., Patton R. J., Szymanski J. E. “*Robust Eigenstructure Assignment with a Control Design Package*”. IEEE Control Systems Magazine. Junio de 1989.

[2003, Bruyère]: Bruyère, L., White, B.A., Tsourdos, A. “*Dynamic Inversion for Missile Lateral Velocity Control Via Polynomial Eigenstructure Assignment*”. AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit. 11-14 de Agosto de 2003, Austin, Texas.

[2005, Bruyère]: Bruyère, L., Tsourdos, A., White, B. A. "Robust Analysis for Missile Lateral Acceleration Control Using Finite Inclusion Theorem". Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 28, Julio-Agosto de 2005.

[2008, Cai]: Cai, G.P. and Lim, C. W. "Dynamics studies of a flexible hub-beam system with significant damping effect". Journal of Sound and Vibration 318 (2008) 1 – 17.

[1991, Champetier]: Champetier C., Desplats, E., Pelipenko, P. "Modern Control Techniques for Space AOC/GNC Systems", European Space Agency (ESA). Spacecraft, guidance, navigation and control systems. Proceedings of the First ESA International Conference, ESTEC, Noordwijk, The Netherlands, 4-7 de Junio de 1991.

[2005, Chen]: "Robust Control of Uncertain Flexible Spacecraft Using Disturbance Observer Based Control Strategies". 6th International ESA Conference on Guidance, Navigation and Control Systems, 17 – 20 de Octubre de 2005.

[2005, Chiappa]: Chiappa, C., Bodineau, G. Boulade, S. Beugnon, C. "μ - Iteration Technique : Application to Attitude Control of Satellite with Large Flexible Appendages". Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference 2005.

[1993, Ching-Fang Li]: Ching-Fang Li. "Advanced Control Systems Design". Prentice Hall Series in Advanced Guidance and Control and their Applications, 1993.

[1996, Chobotov]: Chobotov Vladimir A. "Orbital Mechanics Second Edition". AIAA, Education Series, 1996.

[1998, Choi]: Choi, J.W.: "A Simultaneous Assignment Methodology of Right/Left Eigenstructures", IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems. Vol. 34 Issue:2 , Abril de 1998.

[1994, Chouaib]: Chouaib, I., Pradin, B. "On Mode Decoupling and Minimum Sensitivity by Eigenstructure Assignment". IEEE Transactions on Automatic Control. 1994.

[1987, Clark]: Clark, W., Shelley, Franz J. "Experiments in Eigenstructure Assignment for Active Mode Localization in a Flexible Beam". Proceedings of the American Control Conference. Junio de 1987.

[2003, Clarke]: Clarke, T., Ensor, J., Griffin, J. "Desirable Eigenstructure for Good Short-Term Helicopter ". Proceedings of the Institution for Mechanical Engineering Vol. 217 Part G: Journal of Aerospace Engineering, 2003.

[2002, Crassidis]: Crassidis, Agamemnon, L., Markofski, Andrew R. "VISTA Pole and Zero Placement Using Eigenstructure Assignment". AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference and Exhibit, 5-8 de Agosto de 2002, Monterey, California.

[1994, Davidson]: Davidson, J.B., Dominich A. "Gain Weighted Eigenspace Assignment". NASA Technical Memorandum 109130, Mayo de 1994.

- [1997, De la Cruz]: De la Cruz, J. M., Ruipérez, P., Aranda, J. “*RCAM Design Challenge Presentation Document: An Eigenstructure Assignment Approach*”. GARTEUR/TP-088-22. Abril de 1997.
- [1997, De la Cruz]: De la Cruz, J.M.; Aranda, J. (1997) “*Método de Asignación de Autoestructura para Diseño de Sistemas MIMO*”. XVII Curso de Automática en la Industria, 16 – 20 de Junio de 1997.
- [1998, Di Gennaro]: Gennaro, S. Di. “*Active Vibration supresión in Flexible Spacecraft Attitude Tracking*”. Journal of Guidance, Control and Dynamics, vol. 21, nº 3, Mayo-Junio de 1998.
- [1990, Doyle]: Doyle, J, Francis, B. y Tannenbaum, A. “*Feedback Control Theory*” 1990.
- [2001, Döll]: Döll, C.; Le Gorrec, Y., Ferreres, G. y Magni, J. F. “*A Robust Self-Scheduled Missile Autopilot: Design by Multi-model Eigenstructure Assignment*” Control Engineering Practice 9. 2001.
- [2008, Douik]: Douik, A., Liouane, H. y Messaoud, H. “*Optimised Eigenstructure Assignment by Ant Systems and LQR Approaches*”. International Journal of Computer Science and Applilcations. Vol. 5, No 4, 2008.
- [2002, Duan]: Duan G. R. “*Parametric Eigenstructure Assignment via State Feedback: A Simple Numerically Reliable Approach*”. Proceedings of the 4º World Congress on Intelligent Control and Automation”. Junio de 2002.
- [2003, Duan]: Duan G. R. “*Parametric Eigenstructure Assignment Via Output Feedback Base don Singular Value Decompositions*”. IEE Proceedings on Control Theory Applications. Vol. 150, Nº 1. Enero de 2003.
- [1991, Elices]: Elices, T. “*Introducción a la Dinámica Espacial*”, Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial, 1991.
- [1991, ESA]: Spacecraft Guidance, Navigation and Control Systems. *Proceedings of the First ESA International Conference*. Estec, Noordwijk, 4 – 7 de Junio de 1991.
- [1997, Faleiro]: Faleiro, L., Pratt, R. “*RCAM Design Challenge Presentation Document: An Eigenstructure Assignment Approach*”. GARTEUR/TP-088-18. Abril de 1997.
- [1998, Faleiro]: Faleiro, L. “*The Application of eigenstructure Assignment to the Design of Flight Control Systems*”. Tesis Doctoral. Universidad de Loughborough. Noviembre de 1998.
- [1989, Garrad]: Garrad, W. L., Low, E., Prouty, S. “*Design of Attitude and Rate Command Systems for Heilicopters Using Eigenstructure Assignment*”. Journal of Guidance. VOL. 12, NO. 6, Noviembre-Diciembre de 1989.

[2003, Ganet]: Ganet-Choeller, M., Rongier, I. “*Scheduled Robust Attitude Control Law for Flexible Launchers using Eigenstructure Assignment and H_∞ Techniques*”. 11-14 de Agosto de 2003, Austin, Texas.

[2000, Grewal]: Grewal, A., Modi, V. J. “*Multibody Dynamics and Robust Control of Flexible Spacecraft*” IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 36, nº 2, Abril de 2000.

[2007, Hu]: Hu, Q. “*Attitude Manoeuvre and Vibration Control of Flexible Spacecraft using Computed Feed-Forward Input Commands and Proportional-Derivative Feedback*”. JAERO196 IMechE 2007 Proc. IMechE Vol. 221 Part G: J. Aerospace Engineering DOI: 10.1243/09544100JAERO196

[2004, Hughes]: Peter C. Hughes. “*Spacecraft Attitude Dynamics*” John Wiley & Sons. 2004.

[IPS Radio and Space Services]: “*Satellite Orbital Decay Calculations*”. The Australian Space Weather Agency.

[2004, Hoekstra]: Hoekstra, D. “*QFT Robust Control Design and MU analysis for a Solar Orbital Transfer Vehicle*”. Department of Mechanical Engineering Eindhoven University of Technology, The Netherlands. ESA Contract 16885/02/NL/LvH, 2004.

[2007, Ishimura]: Ishimura, K. and Higuchi, K. “*Coupling between structural deformation and attitude motion of large planar space structures suspended by multi-tethers*”. Acta Astronautica 60, 691 – 710, 2007.

[1994, Jacobsen]: Jacobsen, Elling W., Skigestad, S. “*Inconsistencies in Dynamic Models for Ill-Conditioned Plants: Application to Low-Order Models of Distillation Columns*”. Engineering Chemistry, 1994.

[2008, Jiang]: Jiang, Y. y Ma, G. “*Attitude Manoeuvring and Vibration Reducing Control of Flexible Spacecraft Using Smart Materials*”. JAERO282. IMechE 2008 Proc. IMechE Vol. 222 Part G: J. Aerospace Engineering. DOI: 10.1243/09544100JAERO282

[1989, Juang]: Juang, J., Lim, K., Junkins, J. L. “*Robust Eigensystem Assignment for Flexible Structures*”. Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol.12, Nº3, Mayo-Junio de 1989.

[1986, Junkins]: Junkins, J. L. y Turner, J. D. “*Optimal Spacecraft Rotational Maneuvers*” Ed. Elsevier. 1986. ISBN 0-444-42619-1.

[1987, Junkins]: Junkins, J. L., Rew D. W, Juang, J. N.. “*Robust Eigenstructure Assignment by a Projection Method: Applications Using Multiple Optimization Criteria*”. Journal of Guidance Control and Dynamics. Vol.12, Nº 3, 1987.

[1985, Kautsky]: Kautsky, J., Nichols, N.K., Van Dooren, P., “*Robust Pole Assignment in Linear State Feedback*”. International Journal of Control, Vol. 41, pp. 1129-1155, 1985.

- [1975, Kimura]: Kimura, H. "Pole Assignment by Gain Output Feedback". IEEE Transactions on Automatic Control, Agosto de 1975.
- [1987, King Hele]. "Satellite Orbits in an Atmosphere: Theory and Applications". Blakie and Son, Ltd, 1987.
- [2004, Kojima]: Yasushi Kojima, Shigemune Taniwaki, Yoshiaki Ohkami. "Attitude Vibration Caused by a Stick-Slip Motion for Flexible Solar Array Earth Observation Satellite". Journal of Vibration and Control (2004).
- [2005, Kron]: Kron, A. Lafontaine, J.; LePeuvédic, C. "Mars Entry and Aerocapture Robust Control Using Static Output Feedback and LPV Techniques". 6th International ESA Conference on Guidance, Navigation and Control Systems, 17 – 20 Octubre de 2005.
- [2004, Kyongsoo]: Kyongsoo, Kim. Thesis (2004). "Controlling the Primary Mirror in a Space-Based Telescope utilizing an Eigenstructure Assignment Technique"(2004).
- [2002, Le Du]: Michel Le Du, Jérôme Maureau, Pascal Prieur. "Myriade: an adaptive AOCs concept". Proceedings of the 5th ESA International Conference on Spacecraft Guidance, Navigation and Control Systems. Frascati, Italia, 22-25 de Octubre de 2002.
- [1994, Li]: Li, Z., Bainum, P. "Vibration Control of Flexible Spacecraft Integrating a Momentum Exchange Controller and a Distributed Piezoelectric Actuator". Journal of Sound and Vibration, 1994.
- [1999, Lind]: Lind, R. y Marty, B. "Robust Aeroservoelastic Stability Analysis: Flight Test Applications". Advances in Industrial Control, Springer, 1999. ISBN: 1852330961.
- [1998, Liu]: Liu, G. P., Patton, R. J."Eigenstructure Assignment for Control System Design". John Wiley and Sons, 1998.
- [1999, Liu]: Liu, P. and Patton, R.J., "Eigenstructure Assignment Toolbox for Use with MATLAB", Pacilantic International Ltd. Oxford. 1999. ISBN 0953389014.(1999).
- [2001, Lohsoonthorn]: Lohsoonthorn, P., Jonckheere, E., Dalzell, S."Eigenstructure vs H_∞ Constrained Design for Hypersonic Winged Cone". Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 24, N°4, Julio – Agosto de 2001.
- [1993, Maciejowski]: Maciejowski, J.M. "Multivariable Feedback Design" Addison-Weley Publishing Company. ISBN 0-201-18243-2, 1993.
- [1977, MacFarlane]: MacFarlane, AGJ "Relationships between recent developments in linear control theory and classical design techniques in 'Control system design by pole-zero assignment'", edited by F. Fallside, Academic Press Inc. (London) Ltd., 1977.
- [1998, Magni]: Magni, J. F. " μ -Analysis for Flexible Systems" Réunion du Groupe Robustesse. Marzo de 1998.

[2002, Magni]: Magni, Jean-Francois. “*Robust Modal Control with a Toolbox for Use with MATLAB*”. ONERA-Toulouse. Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2002.

[2007, Maganti]: Maganti, G. B., Sahjendra, N. S. .”*Simplified Adaptive Control of an Orbiting Flexible Spacecraft*” *Acta Astronautica* 61, pp- 575-589, Abril de 2007.

[2002, Matthieu]: Matthieu Jeanneer, Celine Beugnon, Benoit Frapard, Benoit Clément, Arnaud Biard.”*An H_{∞} Control Design Approach for Space Vehicles Application to Ariane 5E/CB*”. Proceedings of the 5th ESA International Conference on Spacecraft Guidance, Navigation and Control Systems. Frascati, Italia, 22-25 de Octubre de 2002.

[2006, Mehrabian]: Mehrabian, A. R., Roshanian, J. “*Skid-to-turn missile autopilot design using scheduled eigenstructure assignment technique*” *Proc. IMechE* 2006, Vol. 220 Part G: J. Aerospace Engineering. Enero de 2006. DOI: 10.1243/09544100G03204

[1970, Meirovitch]: Leonard Meirovitch. “*Methods of Analytical Dynamics*”. McGraw-Hill, 1970.

[1987, Meirovich]: Meirovich, L., Quinn, R. D.”*Equations of Motion for Maneuvering Flexible Spacecraft*” *Journal of Guidance*, Vol 10, no. 5, Septiembre – Octubre de 1987.

[1995, Meirovich]: Meirovitch, L. and Stemple, T. “*Hybrid equations of motion for flexible multibody systems using quasicordinates*”. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol 18, no. 4, Julio –Agosto de 1995.

[2003, Mengali]: Mengali, G. “*Role of Eigenvectors in Aircraft Dynamics Optimization*”. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 26, No. 2, Marzo-Abril de 2003.

[2002, Merkel]: Merkel, M. Heinrich, M., Cark, U.”*Enhanced Eigenstructure Assignment for Aeroelastic Control Application*”. Aerospace, Science and Technology. German Aerospace Congress, 2002.

[1976, Moore]: Moore, B. C.”*On the Flexibility Offered by State Feedback in Multivariable Systems Beyond Closed Loop Eigenvalue Assignment*”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Octubre de 1976.

[1988, Mudge]: Mudge, S.K., Patton, R. J.”*Analysis of the Technique of Robust Eigenstructure Assignment with Application to Aircraft Control*”. *IEE Proceedings*, Vol. 135, N° 4, Julio de 1988.

[1971, NASA SP-8058]: NASA Space Vehicle Design Criteria(Guidance and Control). “*Spacecraft Aerodynamic Torques*”. Enero de 1971.

[1969, NASA SP-8018]: NASA Space Vehicle Design Criteria (Guidance and Control). “*Spacecraft Magnetic Torques*”. Marzo de 1969.

[1969, NASA SP-8027]: NASA Space Vehicle Design Criteria(Guidance and Control). “*Spacecraft Radiationc Torques*”. Octubre de 1969.

[1987, Nichols]: Nichols N. K. “*Robustness in Partial Pole Placement*”. IEEE Transactions on Automatic Control. Vol. AC-32, Nº 8, Agosto de 1987.

[2007, Nieto-Wire]: Nieto-Wire y Sobel, C.”*Eigenstructure Assignment for a Tailless Aircraft*”. AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit, 20 – 23 de Agosto de 2007, Hilton Head, Carolina del Sur.

[2009, Nieto-Wire]: Nieto-Wire, C. y Sobel, K.”*Reconfigurable Delta Operator Eigenstructure Assignment for a Tailless Aircraft*”. AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, Chicago, Illinois, Agosto de 2009. AIAA-2009-6306.

[2002, Oliva]: Oliva, A. P., Leite Filho, W. C.”*Eigenstructure versus Optimal Control for Decoupling*”. Control Engineering Practice, 2002.

[2002, Ortega]: Guillermo Ortega Hernando, Mike Steinkopf, Klaus Mehlem. “*Dynamic Inversion v.s. Predictive Control for a Re-entry Crew Return Vehicle*”. Proceedings of the 5th ESA International Conference on Spacecraft Guidance, Navigation and Control Systems. Frascati, Italia, 22-25 de Octubre de 2002.

[1994, Patton]: Patton, R. J.; Liu, G. P. “*Robust Control Design Via Eigenstructure Assignment, Genetic Algorithms and Gradient-Based Optimisation*”. IEE Proceedings- Control theory applications, Mayo de 1994, volumen 141, issue 3, p 202-208.

[1998, Patrick]: Patrick C. Murphy, John B. Davidson.”*A Control Law Design Method Facilitating Control Power, Robutness, Agility, and Flying Qualities Tradeoffs: CRAFT*”. NASA Technical Report. NASA/TP-1998-208463. Septiembre de 1998.

[2008, Pomfret]: Pomfret, A., Griffin, S., Clarke, T. : ”*Eigenstructure Assignment for Helicopter*” Proceedings of the 17th World Congress. The International Federation of Automatic Control Seoul, Korea, July 6-11, 2008-IFAC.

[2009, Pomfret]: Pomfret, A., Clarke, T.”*Desirable eigenstructure for good short-termhelicopter handling qualities: the rate command response case*” JAERO584 Proc. IMechE Vol. 223 Part G: J. Aerospace Engineering. Abril de 2009. DOI: 10.1243/09544100JAERO584

[1977, Porter]: Porter, B. y D’azzo, J, “*On the Flexibility Offered by State Feedback in Multivariable Systems*”. IEEE Transactions on Automatic Control. Octubre de 1977.

[2000, Pratt]: Pratt, R.W. “*Flight Control Systems: Parctical Sigues in Design and Implementation*”. Control Engineering Series 57. Edited by Roger W. Pratt, The Institution of Electrical Engineers.

[2007, Quinglei]: Quinglei, H; Xie, L. y Gao, H. “*Adaptative Variable Structure and Active Vibration Reduction for Flexible Spacecraft ander input Nonlinearity*”. Journal of Vibrations and Control. 13; 1573. 2007. DOI: 10.1177/1077546307078242.

[2008, Quinglei]: Quinglei Hu. “*Input Shaping and Variable Structure Control for Simultaneous Precision Positioning and Vibration Reduction of Flexible Spacecraft*”

with Saturation Compensation” Journal of Sound and Vibration 318, pp. 18-35, May 2008.

[2007, Rahnamai]: Rahnamai, K., Arabshahi, P., Gray, A. “*Fuzzy Supervised Optimal Regulator for Spacecraft Formation Flying*” Fuzzy Information Processing Society, 2003. 22nd International Conference of the North American 24-26 Julio de 2003.

[2008, Rastgaar]: Rastgaar, M. “*Vibration Suppression Using Orthogonal Eigenstructure Control*”. Tesis Doctoral. Facultad de Virginia, EEUU. Julio de 2008.

[2009, Rastgaar]: Rastgaar, M., Ahmadian, M., Southward, S. C. “*Active Vibration Cancellation of Tonal Disturbance Using Orthogonal Eigenstructure Control*”. Proceedings of SPIE, Vol. 7288, 728823-1. Active and Passive Smart Structures and Integrated Systems, 2009.

[2009, Rastgaar]: Rastgaar, M. A., Ahmadian, M. y Southward, S. C. “*Orthogonal Eigenstructure Control with Non-Collocated Actuators and Sensors*”. Journal of Vibration and Control, Marzo de 2009. DOI: 10.1177/1077546308091218

[1997, Reynolds]: Reynolds R. G. “*Quaternion Parameterization and Global Attitude Estimation*”. Flight Mechanics Symposium 1997. NASA Conference Publication 3345.

[1996, Rodríguez]: Rodríguez, F. R., López, M. J. “*Control Adaptativo y Robusto*”. Universidad de Sevilla. 1996. ISBN: 8447203190.

[2002, Rossi]: Matteo Rossi, Marco Lovera. “*A Predictive Approach to Formation Keeping for Constellations of Small Spacecraft in Elliptic Orbits*”. Proceedings of the 5th ESA International Conference on Spacecraft Guidance, Navigation and Control Systems. Frascati, Italia, 22-25 de Octubre de 2002.

[1995, Sarafin]: Sarafin, Thomas P. “*Spacecraft Structures and Mechanisms – From concept to launch*”. Kluwer Academic Publishers, 1995.

[2003, Satoh]: Satoh, A., Sugimoto, K. Nara Institute of Science and Technology. “*Partial Eigenstructure Assignment Approach for Robust Flight Control*” Journal of Guidance, Vol. 27, n° 1, 2003.

[1988, Sehnal] Sehnal, L., Pospíšilova, L. “*Thermosferic Model TD-88*” Informe basado en “*Preprint of Centre of Scientific Information, Astronomical Institute of the Czechoslovak Academy of Sciences, v.1,n.1,1-7, 1988*”. (www.asu.cas.cz/~bezdek/density_therm/td88)

[2003, Sembely]: Sembely, X, Vaillon, L., Portigliott, S. “*Control Design and Experimental Validation for the Active Equipment for Vibration Isolation (AEVI)*”. Proceedings of the 5th International ESA conference on Spacecraft Guidance, Navigation and Control Systems(ESA SP – 516, Febrero de 2003).

[1981, Shuster]: Shuster M. D. et al. “*Three Axis Determination from Vector Observations*”. AIAA 81-4003. Enero-Febrero de 1981, Volumen 4, Número 1.

[1997, Sidi]: Sidi, M. J., "Spacecraft Dynamics and Control. A Practical Engineering Approach". Cambridge University Press, 1997.

[1984, Sinha]: Sinha, P.K. "Multivariable Control. An Introduction". Electrical Engineering and Electronics. Ed. Marcel Dekker, Inc. New York and Basel. 1984. ISBN: 0824718585.

[1991, Slotine]: Slotine, J. J., Li, W "Applied Nonlinear Control" Ed. Prentice Hall, Inc. 1991.

[1985, Sobel y Shapiro]: Sobel, M. K.; Shapiro, E. Y "Eigenstructure Assignment for Design of Multimode Flight Control Systems". IEEE Control Systems Magazine. Mayo de 1985.

[1985, Sobel]: Sobel, K. M., Shapiro, E. Y. "Application of Eigenstructure Assignment to Flight Control Design: Some Extensions" Journal of Guidance, VOL. 10, NO. 1, Febrero de 1987.

[1978, Srinathkumar]: Srinathkumar, S. "Eigenvalue/Eigenvector Assignment Using Output Feedback". NASA Technical Paper 1118. Febrero de 1978.

[2008, Srinathkumar]: Srinathkumar, S. "Eigenstructure Control: A Flight Vehicle Handling Qualities Design Tool". Proceedings of the International Conference on Aerospace Science and Technology 26-28 de Junio de 2008, Bangalore, India.

[2010, Thimmaraya]: Thimmaraya, R., Nararaj, C. y Lee, D. "Linear Time-Varying Tracking Control with Application to Unmanned Aerial Vehicles". 2010 AACC. 2010 American Control Conference Marriott Waterfront, Baltimore, MD, USA June 30-July 02, 2010.

[2002, Timosenko]: Timosenko, S. P., Gere, J. "Resistencia de Materiales" Ed. Thompson, 2002. 5^a ed. I.S.B.N. : 84-9732-065-4 .

[2004, Tsai]: Tsai, H., Lin, J., Chiang, T., Cheng, C. "Optimal Satellite Attitude Control Systems Design by Combination of Eigenstructure Assignment and LEQG/LTR Methods". Proceedings of the 5th World Congress on Intelligent Control and Automation. Junio de 2004.

[2009, Tsakiris]: Tsakiris, M. C., Lopes, C. G. "A Robust Affine Projection Algorithm with Feedback Compensation of the Condition Number". 2009 IEEE.

[1977, Villa]: Villa, José Ramón. "Minisat-01 Attitude Control System: System Design and Software Development". Dasia 97, Data Systems in Aerospace. Sevilla, España, 26-29 de Mayo de 1977.

[2006, Wen-Hua]: Wen-Hua Chen. "Robust Control of Uncertain Flexible Spacecraft Using Disturbance Observer Based Control Strategies". Proceedings of the 6th International ESA Conference on Guidance, Navigation and Control Systems, Loutraki, Greece, 17-20 de October de 2005 (ESA SP-606, January 2006).

- [1990, Wertz]: Wertz, J. “*Spacecraft Attitude Determination and Control*”. Kluwer Academic publishers, 1990.
- [1985, Wie]: Wie, B., Lehner, J. A., Plescia, C. T. “*Roll/Yaw Control of a Flexible Spacecraft Using Skewed Bias Momentum Wheels*” *Journal of Guidance*, vol. 8, n° 4. Julio –Agosto de 1985.
- [1965, Wilkinson]: Wilkinson, J. H. “*The Algebraic Eigenvalue Problem*”. Oxford Science Publications. Oxford University Press, 1965.
- [1992, Wilson]: Wilson, Robert F., Cloutier, James R., Yedavalli, R. K. “*Control Design for Robust Eigenstructure Assignment in Linear Uncertain Systems*”. *IEEE Control Systems*. Octubre de 1992.
- [1967, Wonham]: Wonham, W. M. “*On Pole Assignment in Multi-input Controllable Linear Systems*”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-12(6), 1967.
- [2004, Wu]: Wu, F., Wei, W., Grimble, M.J. “*Robust MIMO Control-System Design Using Eigenstructure Assignment and QFT*”. IEE, 2004.
- [2009, Yanguo]: Yanguo, S., Huanjin, W.: “*Design of Flight Control System for a Small Unmanned Tilt Rotor Aircraft*”. Elsevier Ltd, *Chinese Journal of Aeronautics*, 22 – 2009. DOI: 10.1016/S1000-9361(08)60095-3
- [2005, Xue]: Xue, Y.; Duan, G-R. “*Eigenstructure Assignment for Linear Systems with Constrained Output Via State Feedback – a Parametric Approach* “. *Proceedings of the fourth international conference on machine learning and cybernetics*, Guangzhou, 18-21de Agosto de 2005.

ANEXOS

ANEXO I

OBTENCIÓN DE LAS ECUACIONES DINÁMICAS DEL MODELO RÍGIDO.

Este anexo desarrolla las ecuaciones dinámicas del sistema considerándolo rígido. Los paneles solares se consideran rígidos, no existen por tanto deformaciones.

La ecuación de Euler que determina el movimiento del satélite es la siguiente, basada en su movimiento angular en coordenadas inerciales es:

$$\vec{T} = \dot{\vec{H}}_I = \dot{\vec{H}}_B + \vec{\omega} \wedge \vec{H}_B$$

El vector \vec{T} está compuesto de los pares de control y de los pares de fuerza perturbadores correspondientes a la órbita y a la posición en la órbita del satélite.

$$\vec{T} = \vec{T}_C + \vec{T}_D$$

Respecto del momento angular del satélite, está compuesto de la suma del momento angular del satélite más el momento angular de los elementos de intercambio de momento angular, tal como las ruedas de reacción:

$$\vec{H} = \vec{H}_B + \vec{h}_w$$

$$\vec{H}_B = \begin{bmatrix} H_X \\ H_Y \\ H_Z \end{bmatrix}$$

$$\vec{h}_w = \begin{bmatrix} h_{wx} \\ h_{wy} \\ h_{wz} \end{bmatrix}$$

Así la ecuación general del movimiento del satélite en ejes cuerpo queda planteada de la siguiente forma [1990, Wertz]:

$$\vec{T} = \dot{\vec{H}}_B + \dot{\vec{h}}_w + \vec{\omega} \wedge \vec{H}_B + \vec{\omega} \wedge \vec{h}_w$$

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{H}_X + \dot{h}_{wx} + (\omega_y h_z - \omega_z h_y) + (\omega_y h_{wz} - \omega_z h_{wy}) \\ \dot{H}_Y + \dot{h}_{wy} + (\omega_z h_x - \omega_x h_z) + (\omega_z h_{wy} - \omega_x h_{wx}) \\ \dot{H}_Z + \dot{h}_{wz} + (\omega_x h_y - \omega_y h_x) + (\omega_x h_{wy} - \omega_y h_{wx}) \end{bmatrix}$$

De las posibles perturbaciones a que se encuentra sometida el satélite, se considera la de gradiente de gravedad en el siguiente cálculo por estar esta siempre presente con una elevada influencia, en órbitas de baja cota [1997, SIDI]:

$$\vec{G} = \begin{bmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\omega_0^2 (I_z - I_y) \phi \\ 3\omega_0^2 (I_z - I_x) \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_x \dot{\omega}_x - \omega_z \omega_y I_y + \omega_z \omega_y I_y = G_x + T_x$$

$$I_y \dot{\omega}_y + \omega_x \omega_z I_x - \omega_x \omega_z I_z = G_y + T_y$$

$$I_z \dot{\omega}_z - \omega_x \omega_y I_x + \omega_x \omega_y I_y = G_z + T_z$$

$$I_x \ddot{\phi} + 4\omega_0^2 (I_y - I_z) \phi + \omega_0 \dot{\psi} (I_y - I_z - I_x) = T_x$$

$$I_y \ddot{\theta} + 3\omega_0^2 (I_x - I_z) \theta = T_y$$

$$I_z \ddot{\psi} + \omega_0 (I_x + I_z - I_y) \dot{\phi} + \omega_0^2 \psi (I_y - I_x) = T_z$$

La ecuación de Euler linealizada puede hacerse extensiva a la instalación de las ruedas de reacción. En este caso aparecen términos relacionados con el momento angular de la rueda y su derivada, h_w y \dot{h}_w .

$$I_x \ddot{\phi} + 4\omega_0^2 \phi (I_y - I_z) + \omega_0 (I_y - I_z - I_x) \dot{\psi} + \dot{h}_{wx} - \omega_0 h_{wz} = T_x$$

$$I_y \ddot{\theta} + 3\omega_0^2 (I_x - I_z) \theta = T_y + \dot{h}_{wy}$$

$$I_z \ddot{\psi} + \omega_0 (I_x + I_z - I_y) \dot{\phi} + \omega_0^2 (I_y - I_x) \psi + h_{wz} + \omega_0 h_{wx} = T_z$$

ANEXO II

ECUACIONES DE LAGRANGE PARA EL MOVIMIENTO DEL SISTEMA.

En el desarrollo de la formulación lagrangiana para el sistema sometido a las acciones de la gravedad terrestre ha de tenerse en cuenta la velocidad angular del satélite, trasladada desde ejes cuerpo a ejes inerciales.

$$\boldsymbol{\omega}_b^{bi} = \boldsymbol{\omega}_b^{bo} + \boldsymbol{\omega}_b^{oi} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{xb}^{oi} \\ \omega_{yb}^{oi} \\ \omega_{zb}^{oi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\psi} \operatorname{sen} \theta + \dot{\theta} \operatorname{sen}^2 \theta + \dot{\phi} - \omega_0 \cos \theta \operatorname{sen} \psi \\ \dot{\psi} \operatorname{sen} \phi \cos \theta + \dot{\theta} \cos \phi - \omega_0 \cos \phi \cos \psi - \omega_0 \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi \\ \dot{\psi} \cos \phi \cos \theta - \dot{\theta} \operatorname{sen} \phi \cos \theta + \omega_0 \operatorname{sen} \phi \cos \psi - \omega_0 \cos \phi \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi \end{bmatrix}$$

Esta velocidad será linealizada, teniendo en cuenta la hipótesis de ángulos pequeños.

$$\begin{aligned} \omega_x &\approx \dot{\phi} - \omega_0 \psi - \dot{\psi} \theta && \rightarrow \dot{\omega}_x \approx \ddot{\phi} - \omega_0 \dot{\psi} \\ \omega_y &\approx \dot{\theta} - \omega_0 + \dot{\psi} \phi && \rightarrow \dot{\omega}_y \approx \ddot{\theta} \\ \omega_z &\approx \dot{\psi} + \omega_0 \phi - \dot{\theta} \phi && \rightarrow \dot{\omega}_z \approx \dot{\psi} + \omega_0 \dot{\phi} \end{aligned}$$

Las coordenadas generalizadas serán las velocidades angulares alrededor de los ejes cuerpo, junto con las componentes de deformación debidas a la flexión y torsión de los paneles solares:

$$\mathbf{u} = [\phi \quad \theta \quad \psi \quad q_1 \quad r_1 \quad q_2 \quad r_2]^T \quad \dot{\mathbf{u}} = [\dot{\phi} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\psi} \quad \dot{q}_1 \quad \dot{r}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{r}_2]^T$$

La energía cinética total está compuesta de las aportaciones del cuerpo del satélite rígido, y la de los paneles solares, considerados flexibles:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{T}_{Rig} + \mathbf{T}_{Flex} \\ \mathbf{T}_{Rig} &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2) \\ \mathbf{T}_{Flex} &= E_{C_Flexion} + E_{C_Torsion} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 [\dot{\phi} \quad \dot{q}_i] \begin{bmatrix} I_{Xi} & Q_{Xi} \\ Q_{Xi} & m_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{q}_i \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} [\dot{\theta} \quad \dot{r}_i] \begin{bmatrix} I_{Yi} & Q_{Yi} \\ Q_{Yi} & J_{Yi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{r}_i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La energía potencial está compuesta de las aportaciones de la gravedad terrestre, junto con la obtenida por deformación de los paneles solares:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_G + \mathbf{V}_D$$

$$\mathbf{V}_G = -\frac{\mu m}{R_B} - \frac{\mu}{2R_B^3} \operatorname{tr}(\mathbf{I}) + \frac{3\mu}{2R_B^3} \mathbf{R}_L^T \mathbf{I} \mathbf{R}_L$$

En la expresión anterior $\mathbf{R}_L = R_{13} \vec{i} + R_{23} \vec{j} + R_{33} \vec{k}$, representa la componente vertical local de influencia de la gravedad. Sus componentes son las de la matriz de rotación $\mathbf{R}_{\psi\theta\phi}$.

$$\mathbf{R}_L^T \mathbf{I} \mathbf{R}_L = \begin{bmatrix} -\text{sen}\theta & \text{sen}\phi \cos\theta & \cos\phi \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\phi \cos\theta \\ \cos\phi \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V}_D = E_{D_Flexion} + E_{D_Torsión} = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} q_i^2 \int EI_x (\phi''(\xi))^2 d\xi + \sum_{i01}^2 \frac{1}{2} r_i^2 \int GK (\psi'(\xi))^2 d\xi$$

$$\mathbf{V}_D = \sum_{i=1}^2 \left[\frac{1}{2} K_{Fi} q_i^2 + \frac{1}{2} K_{Ti} r_i^2 \right]$$

El lagrangiano se desarrolla a continuación, obteniendo todas las componentes de energía:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \right) - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{Q}_{nc} \quad \mathbf{Q}_{nc} = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \\ 0_{(n-m)} \end{bmatrix}$$

Desarrollo del término correspondiente a $\dot{\mathbf{u}}$:

Se desarrollan las derivadas parciales de las componentes de energía cinética y potencial respecto de las componentes de la derivada del vector de coordenadas generalizadas $\dot{\mathbf{u}}$.

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} - \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} = \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} = \frac{\partial \mathbf{T}_{Rig}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} + \frac{\partial \mathbf{T}_{Flex}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} = \frac{\partial \mathbf{T}_{Rig}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} + \frac{\partial (E_{C_Flexion} + E_{C_Torsion})}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} = \frac{\partial \mathbf{V}_G}{\partial \dot{\mathbf{u}}} + \frac{\partial \mathbf{V}_D}{\partial \dot{\mathbf{u}}} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}_{Rig}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} = \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{T}_{Rig}}{\partial \dot{\phi}} = I_x \omega_x \frac{\partial \omega_x}{\partial \dot{\phi}} + I_y \omega_y \frac{\partial \omega_y}{\partial \dot{\phi}} + I_z \omega_z \frac{\partial \omega_z}{\partial \dot{\phi}} = I_x \omega_x \\ \frac{\partial \mathbf{T}_{Rig}}{\partial \dot{\theta}} = I_x \omega_x \frac{\partial \omega_x}{\partial \dot{\theta}} + I_y \omega_y \frac{\partial \omega_y}{\partial \dot{\theta}} + I_z \omega_z \frac{\partial \omega_z}{\partial \dot{\theta}} = I_y \omega_y \\ \frac{\partial \mathbf{T}_{Rig}}{\partial \dot{\psi}} = I_x \omega_x \frac{\partial \omega_x}{\partial \dot{\psi}} + I_y \omega_y \frac{\partial \omega_y}{\partial \dot{\psi}} + I_z \omega_z \frac{\partial \omega_z}{\partial \dot{\psi}} = I_z \omega_z \\ \frac{\partial \mathbf{T}_{Rig}}{\partial \dot{q}_i} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{T}_{Rig}}{\partial \dot{r}_i} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}_{Flex}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} = \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{T}_{Flex}}{\partial \dot{\phi}} = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{2} [1 \ 0] \begin{bmatrix} I_{x_i} & Q_{x_i} \\ Q_{x_i} & m_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{q}_i \end{bmatrix} + \frac{1}{2} [\dot{\phi} \ \dot{q}_i] \begin{bmatrix} I_{x_i} & Q_{x_i} \\ Q_{x_i} & m_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \sum_{i=1}^2 (I_{x_i} \dot{\phi} + \dot{q}_i Q_{x_i}) \\ \frac{\partial \mathbf{T}_{Flex}}{\partial \dot{\theta}} = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{2} [1 \ 0] \begin{bmatrix} I_{y_i} & Q_{y_i} \\ Q_{y_i} & J_{y_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{r}_i \end{bmatrix} + \frac{1}{2} [\dot{\theta} \ \dot{r}_i] \begin{bmatrix} I_{y_i} & Q_{y_i} \\ Q_{y_i} & J_{y_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \sum_{i=1}^2 (I_{y_i} \dot{\theta} + \dot{r}_i Q_{y_i}) \\ \frac{\partial \mathbf{T}_{Flex}}{\partial \dot{\psi}} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{T}_{Flex}}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{2} [0 \ 1] \begin{bmatrix} I_{x_i} & Q_{x_i} \\ Q_{x_i} & m_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{q}_i \end{bmatrix} + \frac{1}{2} [\dot{\phi} \ \dot{q}_i] \begin{bmatrix} I_{x_i} & Q_{x_i} \\ Q_{x_i} & m_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \sum_{i=1}^2 (Q_{x_i} \dot{\phi} + \dot{q}_i m_i) \\ \frac{\partial \mathbf{T}_{Flex}}{\partial \dot{r}_i} = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{2} [0 \ 1] \begin{bmatrix} I_{y_i} & Q_{y_i} \\ Q_{y_i} & J_{y_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{r}_i \end{bmatrix} + \frac{1}{2} [\dot{\theta} \ \dot{r}_i] \begin{bmatrix} I_{y_i} & Q_{y_i} \\ Q_{y_i} & J_{y_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \sum_{i=1}^2 (Q_{y_i} \dot{\theta} + \dot{r}_i J_{y_i}) \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} - \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_{Rig}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} + \frac{\partial \mathbf{T}_{Flex}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} = \frac{\partial \mathbf{T}_{Rig}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} + \frac{\partial (E_{C_Flexion} + E_{C_Torsion})}{\partial \dot{\mathbf{u}}} - \frac{\partial \mathbf{V}_G}{\partial \dot{\mathbf{u}}} - \frac{\partial \mathbf{V}_D}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \right) = \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^2 (I_{x_i} \dot{\omega}_x + I_{x_i} \dot{\phi} + \dot{q}_i Q_{x_i}) = \sum_{i=1}^2 (I_{x_i} \dot{\omega}_x + I_{x_i} \ddot{\phi} + \dot{q}_i Q_{x_i}) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^2 (I_{y_i} \dot{\omega}_y + I_{y_i} \dot{\theta} + \dot{r}_i Q_{y_i}) = \sum_{i=1}^2 (I_{y_i} \dot{\omega}_y + I_{y_i} \ddot{\theta} + \dot{r}_i Q_{y_i}) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\psi}} \right) = \frac{d}{dt} I_z \dot{\omega}_z = I_z \dot{\omega}_z \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^2 (Q_{x_i} \dot{\phi} + \dot{q}_i m_i) = \sum_{i=1}^2 (Q_{x_i} \ddot{\phi} + \dot{q}_i m_i) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{r}_i} \right) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^2 (Q_{y_i} \dot{\theta} + \dot{r}_i J_{y_i}) = \sum_{i=1}^2 (Q_{y_i} \ddot{\theta} + \dot{r}_i J_{y_i}) \end{cases}$$

Desarrollo del vector de coordenadas generalizadas \mathbf{u} .

Se obtienen a continuación todas las derivadas parciales de las componentes de energía cinética y potencial respecto de las coordenadas generalizadas del vector $\dot{\mathbf{u}}$.

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{u}} - \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{T}_{Rig}}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial \mathbf{T}_{Flex}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{T}_{Rig}}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial (E_{C_Flexion} + E_{C_Torsion})}{\partial \mathbf{u}} \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{V}_G}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial \mathbf{V}_D}{\partial \mathbf{u}} \end{cases}$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}_{Rig}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{T}_{Rig}}{\partial \phi} = I_x \omega_x \frac{\partial \omega_x}{\partial \phi} + I_y \omega_y \frac{\partial \omega_y}{\partial \phi} + I_z \omega_z \frac{\partial \omega_z}{\partial \phi} = 0 + 0 + I_z (\dot{\psi} + \phi \omega_0) \omega_0 = \omega_0 (-I_y + I_z) \dot{\psi} + \phi (-I_y + I_z) \omega_0^2 \\ \frac{\partial \mathbf{T}_{Rig}}{\partial \theta} = I_x \omega_x \frac{\partial \omega_x}{\partial \theta} + I_y \omega_y \frac{\partial \omega_y}{\partial \theta} + I_z \omega_z \frac{\partial \omega_z}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{T}_{Rig}}{\partial \psi} = I_x \omega_x \frac{\partial \omega_x}{\partial \psi} + I_y \omega_y \frac{\partial \omega_y}{\partial \psi} + I_z \omega_z \frac{\partial \omega_z}{\partial \psi} = I_x (\dot{\phi} - \omega_0 \psi) (-\omega_0) + 0 + 0 = -I_x \omega_0 \dot{\phi} + \omega_0^2 (I_x - I_y) \psi \\ \frac{\partial \mathbf{T}_{Rig}}{\partial q_i} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{T}_{Rig}}{\partial r_i} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}_{Flex}}{\partial \mathbf{u}} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{V}_G}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial \mathbf{V}_D}{\partial \mathbf{u}}$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}_G}{\partial \mathbf{u}} = \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{V}_G}{\partial \phi} = \frac{3}{2} \omega_0^2 [2 \text{sen} \phi \cos \phi \cos^2 \theta I_y - 2 \text{sen} \phi \cos \phi \cos^2 \theta I_z] = 3 \omega_0^2 (I_y - I_z) \phi \\ \frac{\partial \mathbf{V}_G}{\partial \theta} = \frac{3}{2} \omega_0^2 [2 \text{sen} \theta \cos \theta I_x - 2 \text{sen} \theta \cos \theta \text{sen}^2 \phi I_y - 2 \text{sen} \phi \cos \phi \cos^2 \theta I_z] = 3 \omega_0^2 (I_x - I_z) \theta \\ \frac{\partial \mathbf{V}_G}{\partial \psi} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{V}_G}{\partial q_i} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{V}_G}{\partial r_i} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}_D}{\partial \mathbf{u}} = \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{V}_D}{\partial \phi} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{V}_D}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{V}_D}{\partial \psi} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{V}_D}{\partial q_i} = \sum_{i=1}^2 q_i K_{F_i} \\ \frac{\partial \mathbf{V}_D}{\partial r_i} = \sum_{i=1}^2 r_i K_{T_i} \end{cases}$$

Composición de las matrices de Masa, Giroscópica y de Rigidez.

Con los resultados obtenidos se van a componer las matrices de masa, giroscópica y de rigidez:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \right) - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (\mathbf{T} - \mathbf{V})}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \right) - \frac{\partial (\mathbf{T} - \mathbf{V})}{\partial \mathbf{u}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (\mathbf{T}_{Rig} + \mathbf{T}_{Flex} - \mathbf{V}_G - \mathbf{V}_D)}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \right) - \frac{\partial (\mathbf{T}_{Rig} + \mathbf{T}_{Flex} - \mathbf{V}_G - \mathbf{V}_D)}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{Q}_{nc}$$

$$\sum_{i=1}^2 (I_x \dot{\omega}_x + I_{x_i} \ddot{\phi} + \ddot{q}_i Q_{x_i}) - [\omega_0 (-I_y + I_z) \dot{\psi} + \phi (-I_y + I_z) \omega_0^2] + 3\omega_0^2 (I_y - I_z) \phi = Q_x$$

$$\sum_{i=1}^2 (I_y \dot{\omega}_y + I_{y_i} \ddot{\theta} + \ddot{r}_i Q_{y_i}) - 3\omega_0^2 (I_x - I_z) \theta = Q_y$$

$$I_z \dot{\omega}_z - (-I_x \omega_0 \dot{\phi} + \omega_0^2 (I_x - I_y) \psi) = Q_z$$

$$\sum_{i=1}^2 (Q_{x_i} \ddot{\phi} + \ddot{q}_i m_i) - \sum_{i=1}^2 q_i K_{F_i} = 0$$

$$\sum_{i=1}^2 (Q_{y_i} \ddot{\theta} + \ddot{r}_i J_{y_i}) - \sum_{i=1}^2 r_i K_{T_i} = 0$$

$$\begin{bmatrix} I_x + I_{x2} + I_{x2} & 0 & 0 & Q_{x1} & 0 & Q_{x2} & 0 \\ 0 & I_y + I_{y1} + I_{y2} & 0 & 0 & Q_{y1} & 0 & Q_{y2} \\ 0 & 0 & I_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_{x1} & 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{y1} & 0 & 0 & J_{y1} & 0 & 0 \\ Q_{x2} & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & Q_{y2} & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{y2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{q}_1 \\ \ddot{r}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{r}_2 \end{bmatrix} + \omega_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_y - I_z - I_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I_x + I_z - I_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \\ q_1 \\ r_1 \\ q_2 \\ r_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\omega_0^2 (I_y - I_z) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3\omega_0^2 (I_x - I_z) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_0^2 (I_y - I_x) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{F1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{T1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{F2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{T2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \\ q_1 \\ r_1 \\ q_2 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Una vez que se han conformado las matrices, se representa de forma matemática compacta la dinámica del sistema, como un sistema de segundo orden que tiene como expresión:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{Q}_{nc}$$

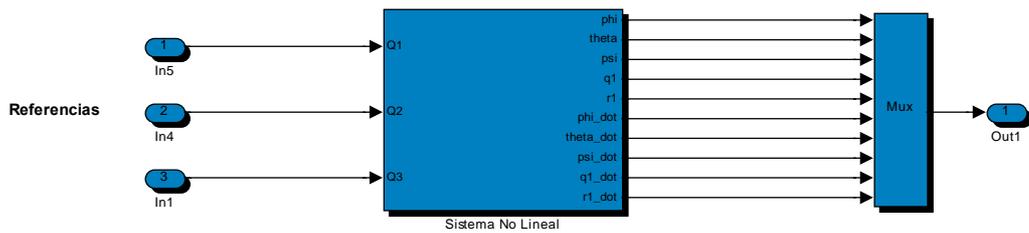
En esta expresión \mathbf{Q}_{nc} representa las fuerzas ejercidas sobre el satélite de carácter no conservativo, entre las que se encuentran las acciones de control aplicadas para controlar la actitud.

ANEXO III

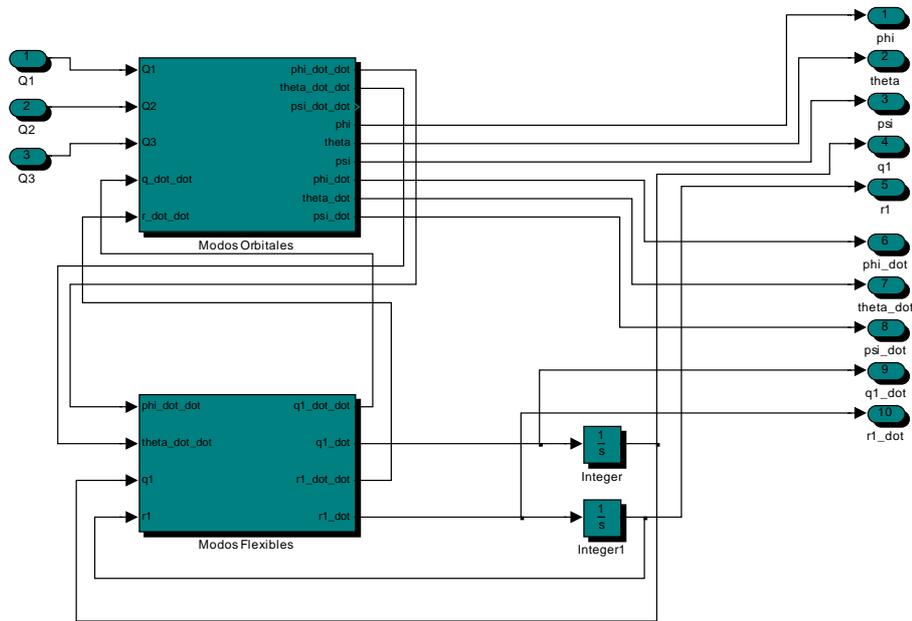
DIAGRAMAS SIMULINK

En este anexo se presentan los diagramas Simulink correspondientes al modelo no lineal. Este modelo se ha utilizado para obtener los diagramas de fase, y para realizar las simulaciones del sistema no lineal.

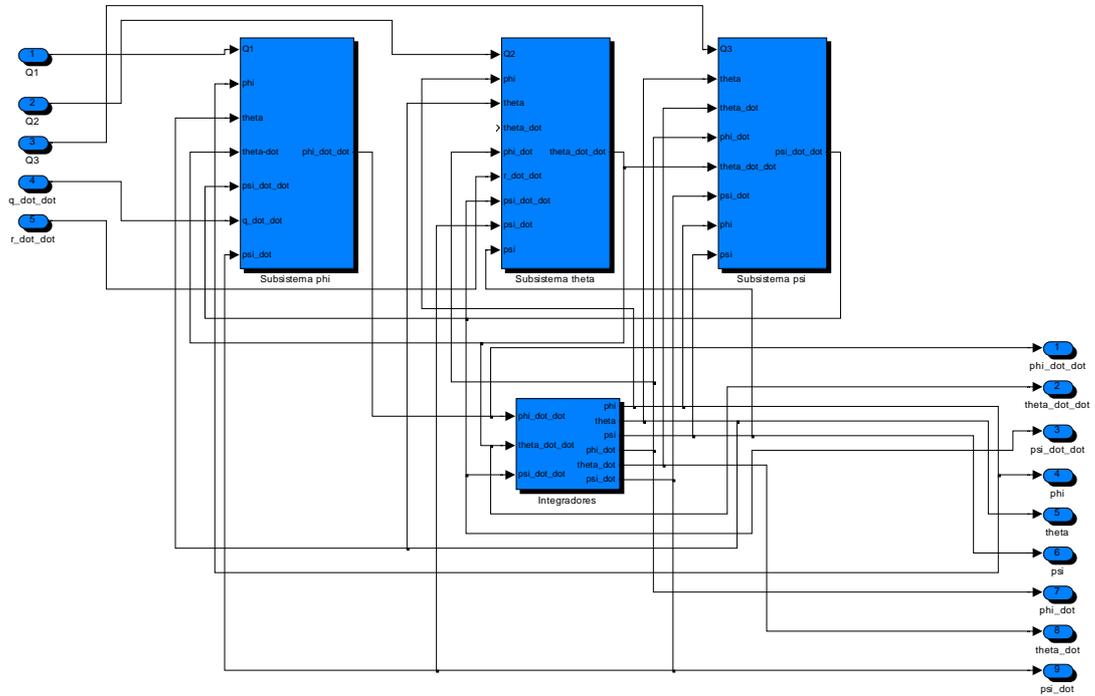
1. Nivel Principal



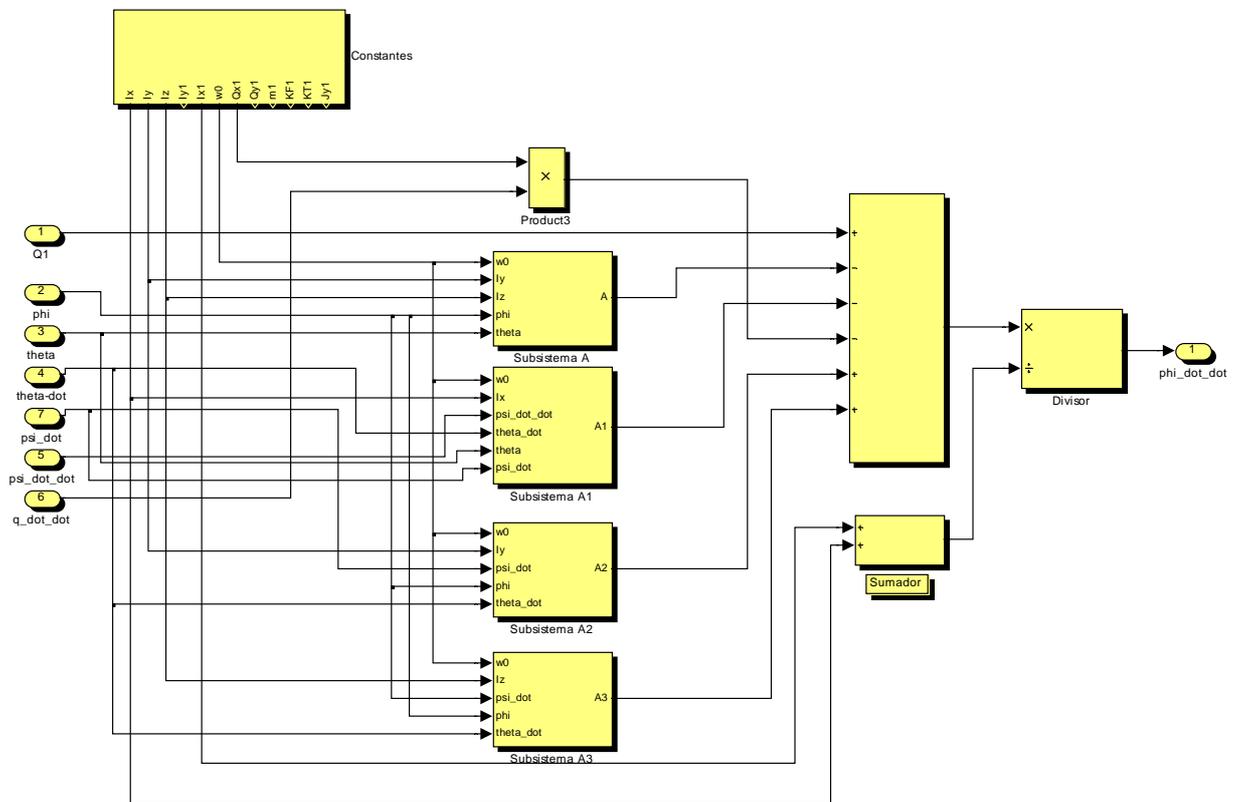
2. Nivel Secundario



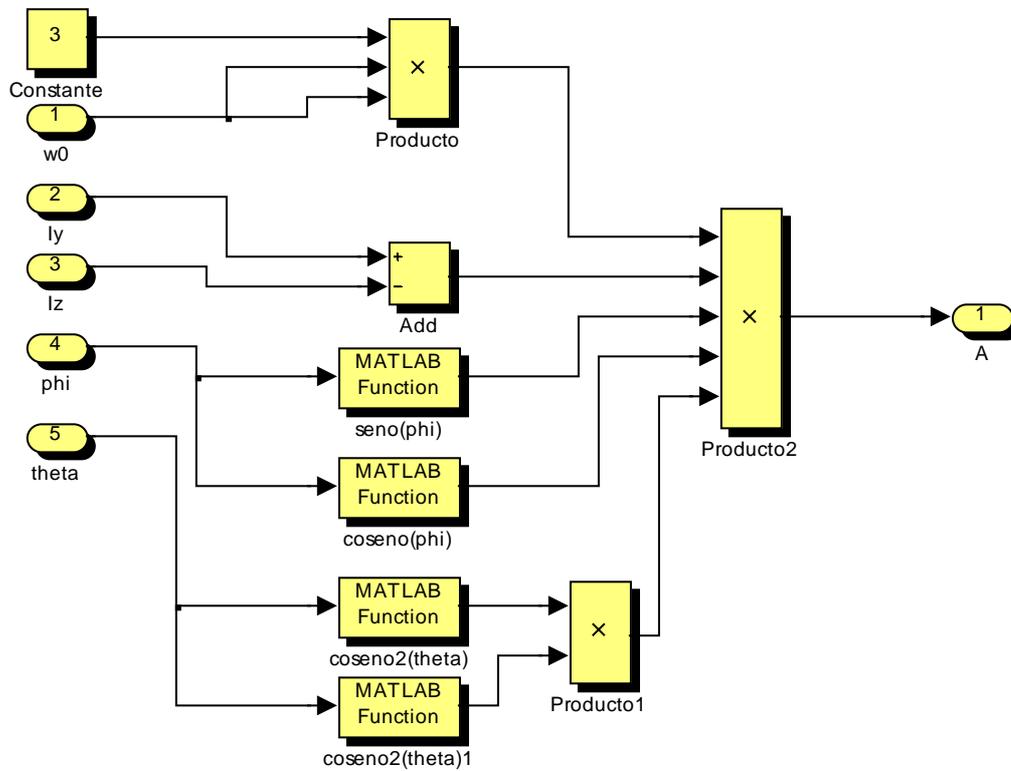
3. Modos Orbitales



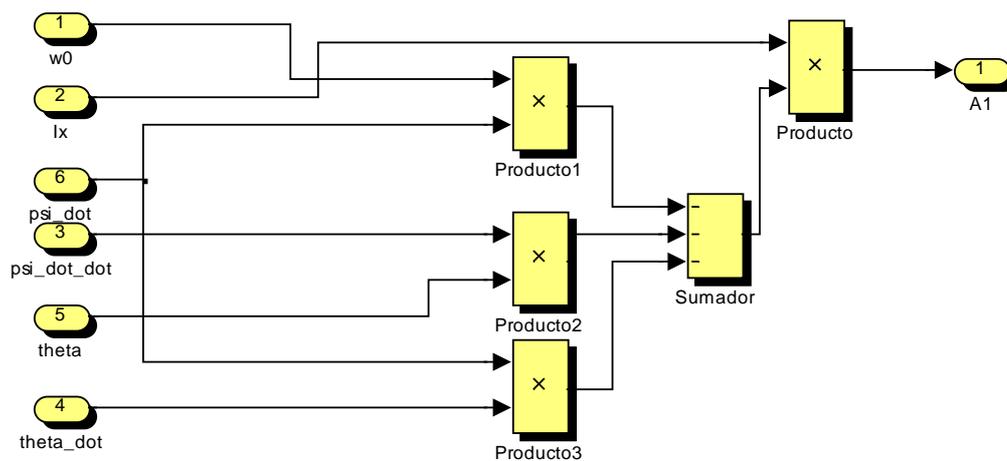
3.1.1. Subsistema phi



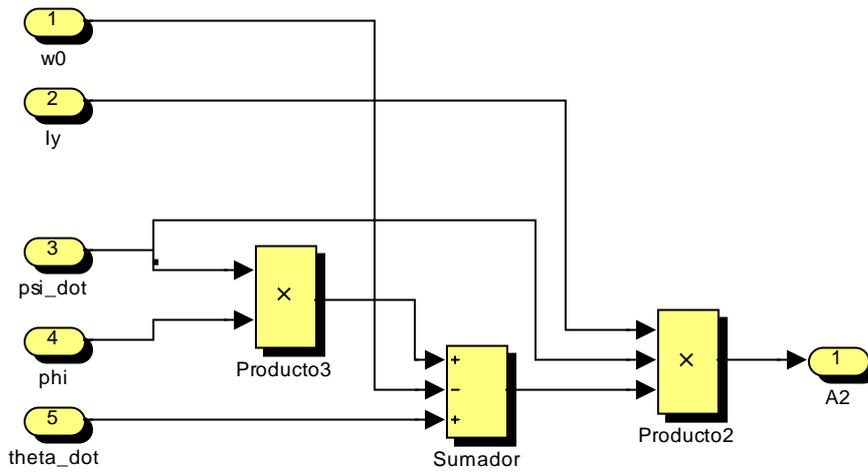
3.1.1.1. Subsistema phi - Subsistema A



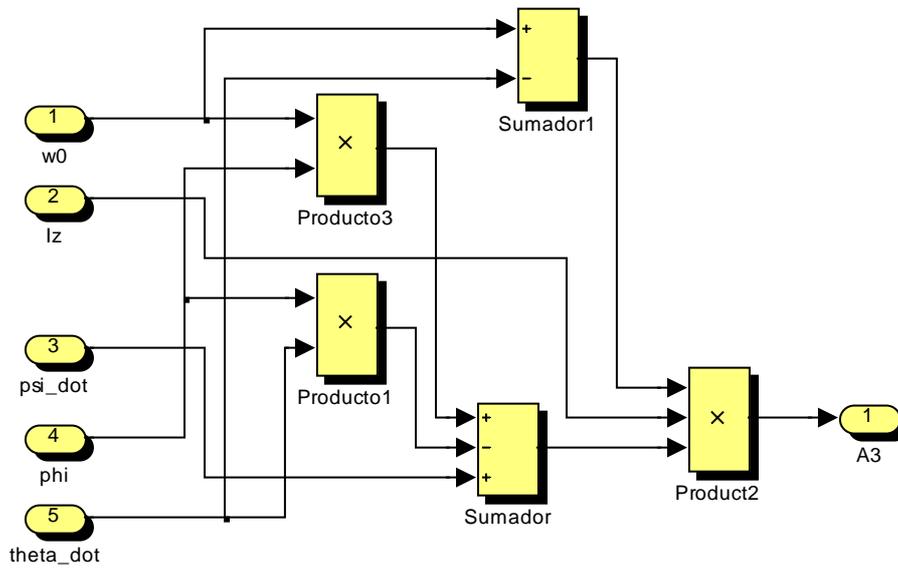
3.1.1.2. Subsistema phi - Subsistema A1



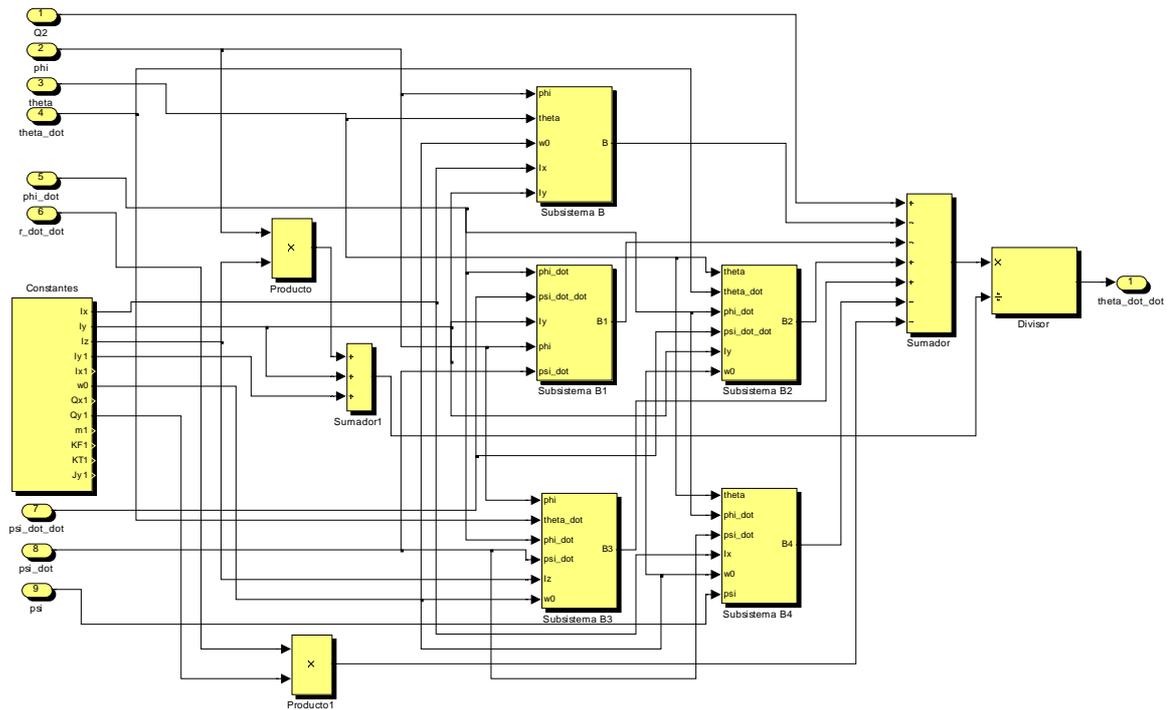
3.1.1.3. Subsistema phi - Subsistema A2



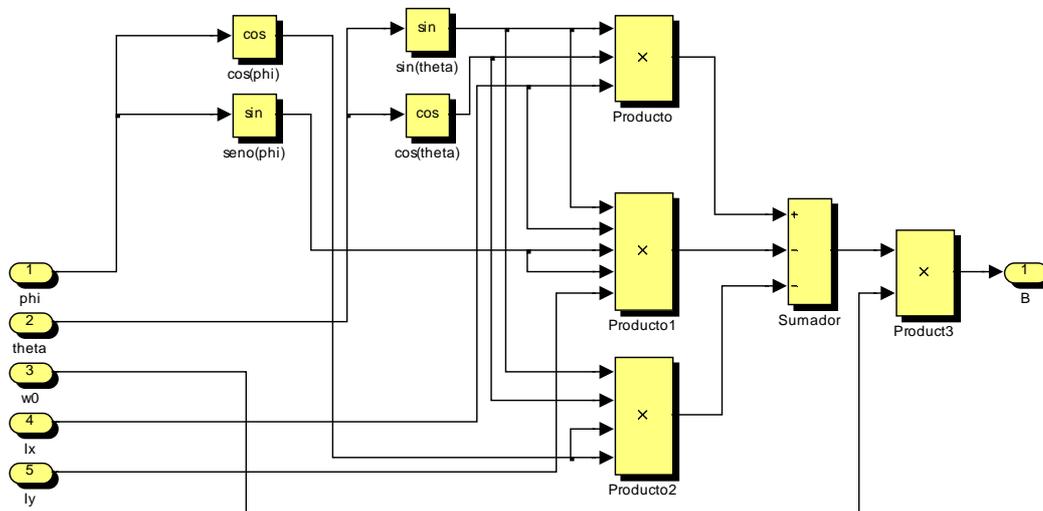
3.1.1.4. Subsistema phi - Subsistema A3



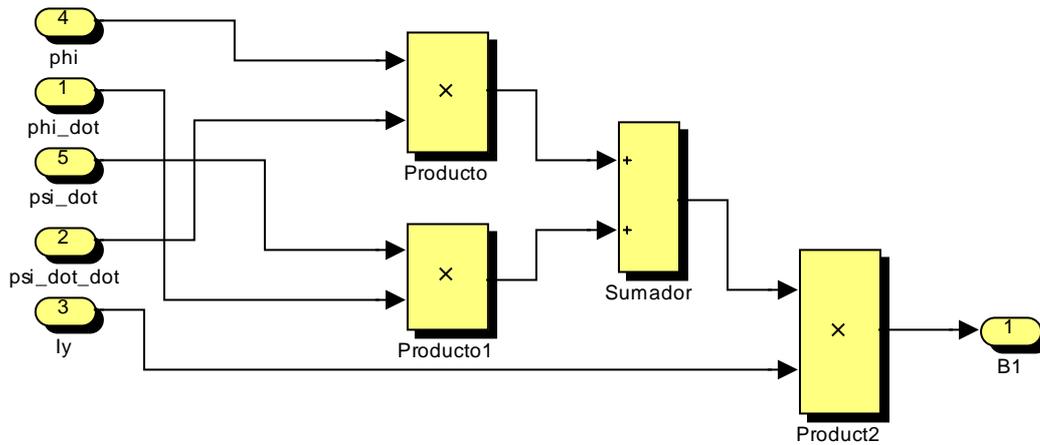
3.1.2. Subsistema Theta.



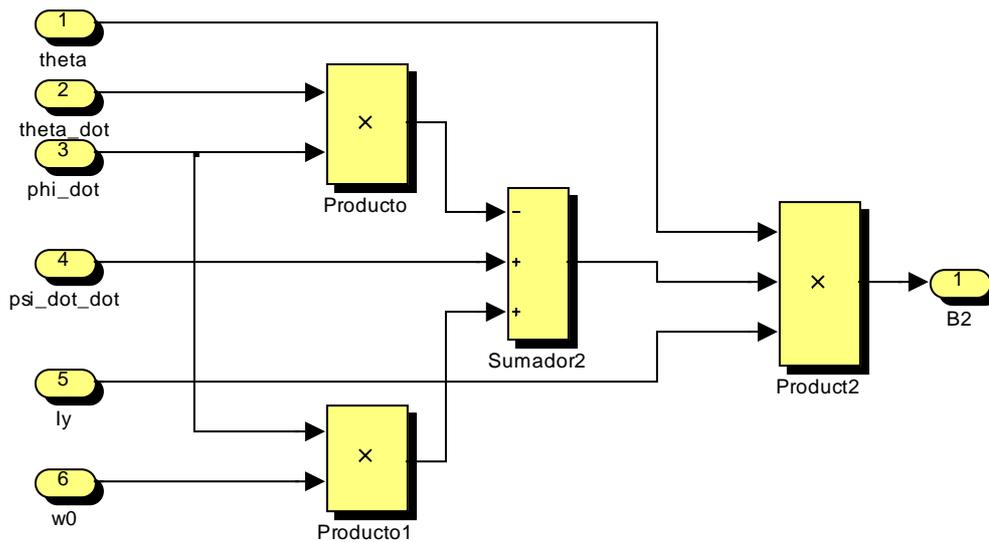
3.1.2.1. Subsistema Theta – Subsistema B.



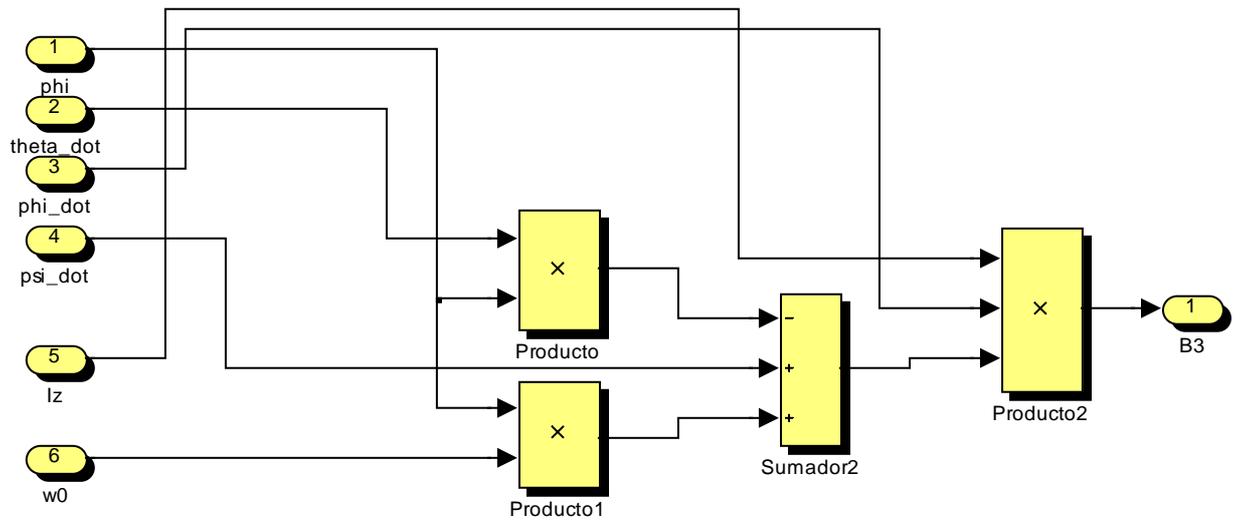
3.1.2.2. Subsistema Theta – Subsistema B1.



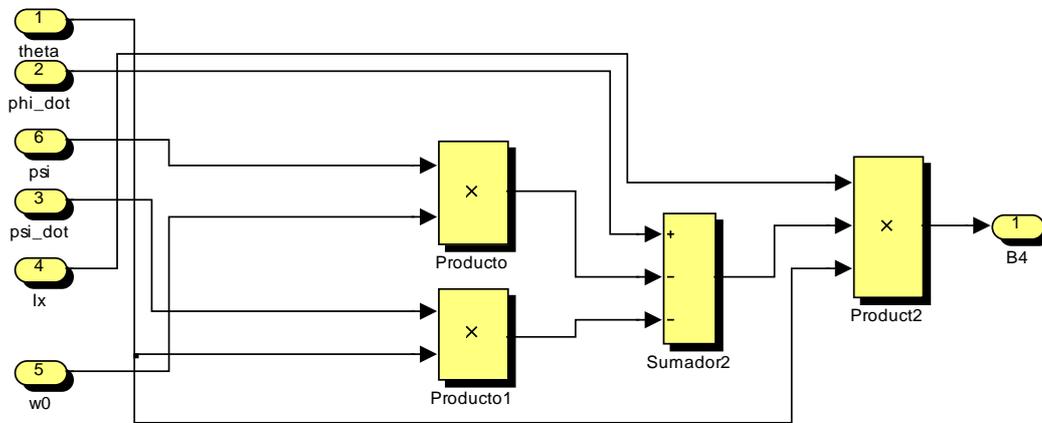
3.1.2.3. Subsistema Theta – Subsistema B2



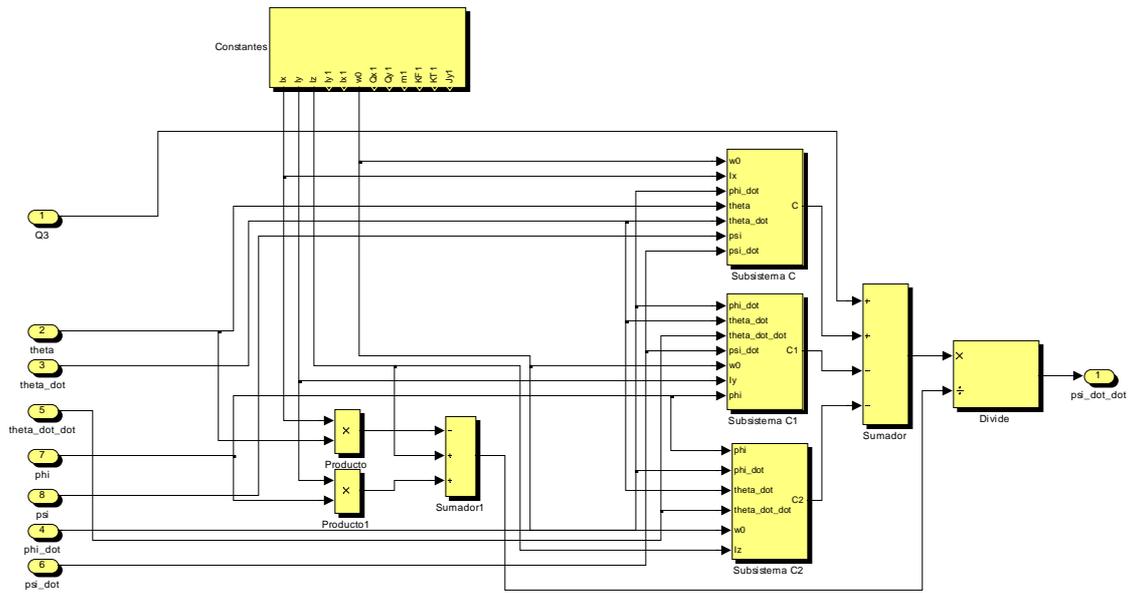
3.1.2.4. Subsistema Theta – Subsistema B3



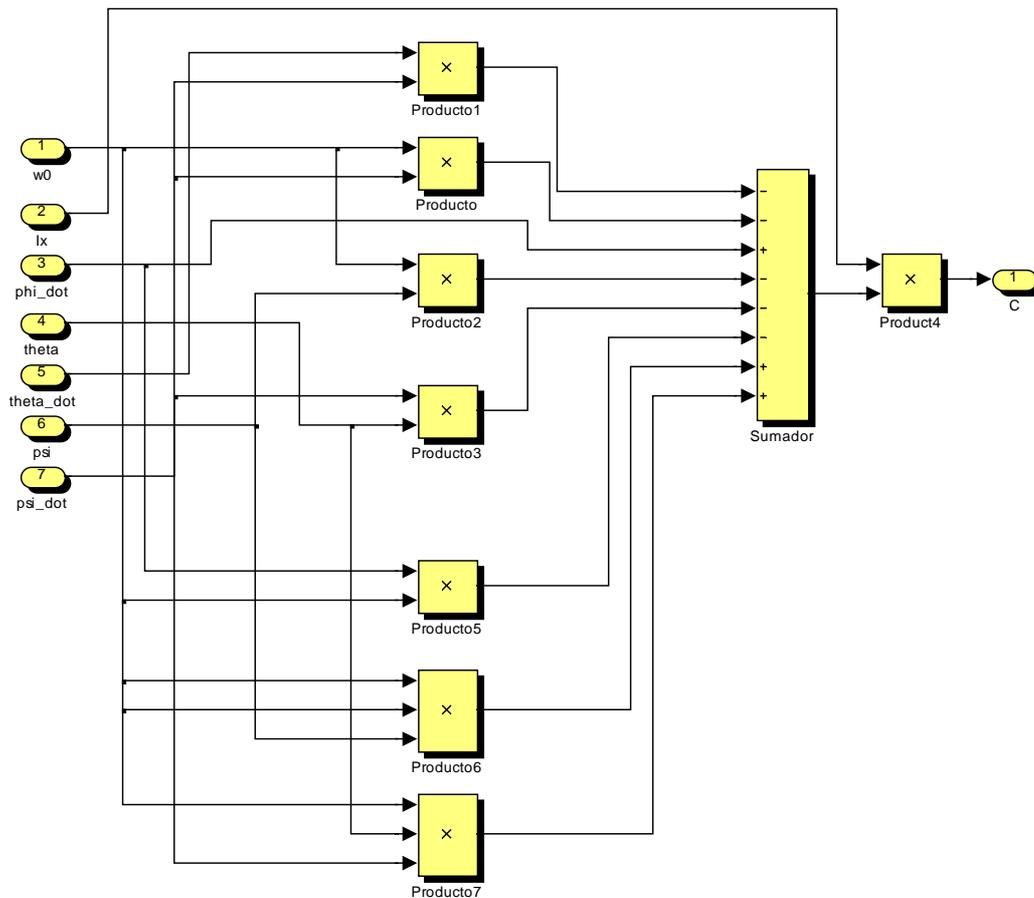
3.1.2.5. Subsistema Theta – Subsistema B4



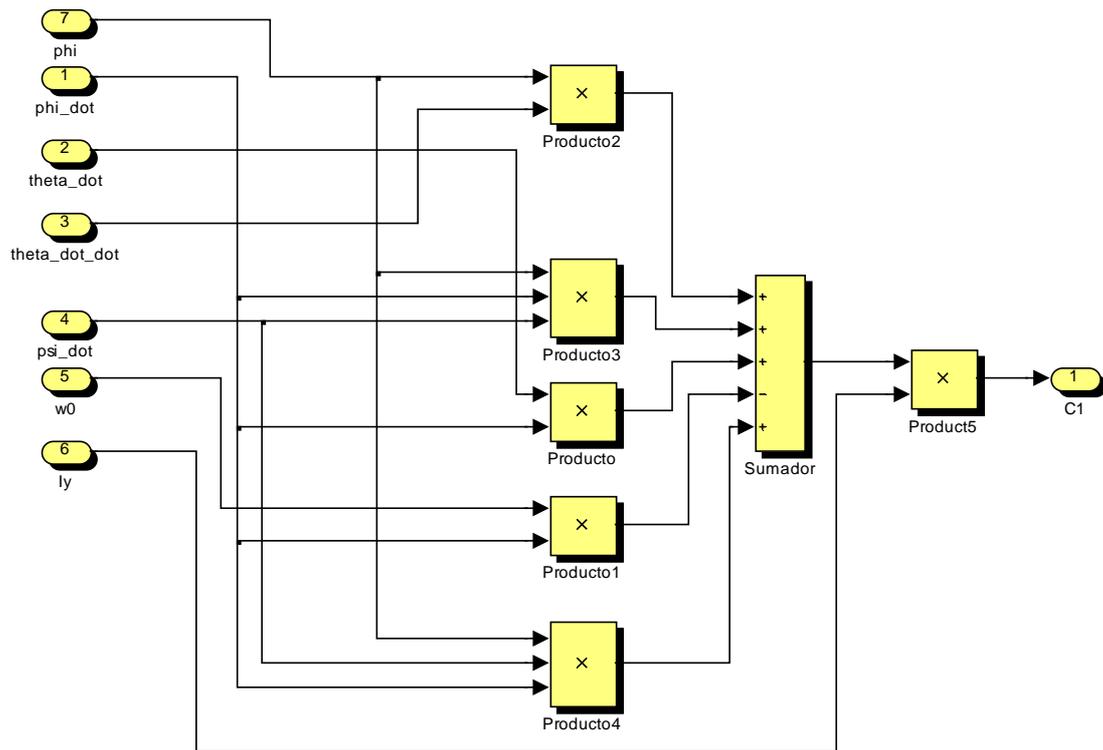
3.1.3. Subsistema Psi.



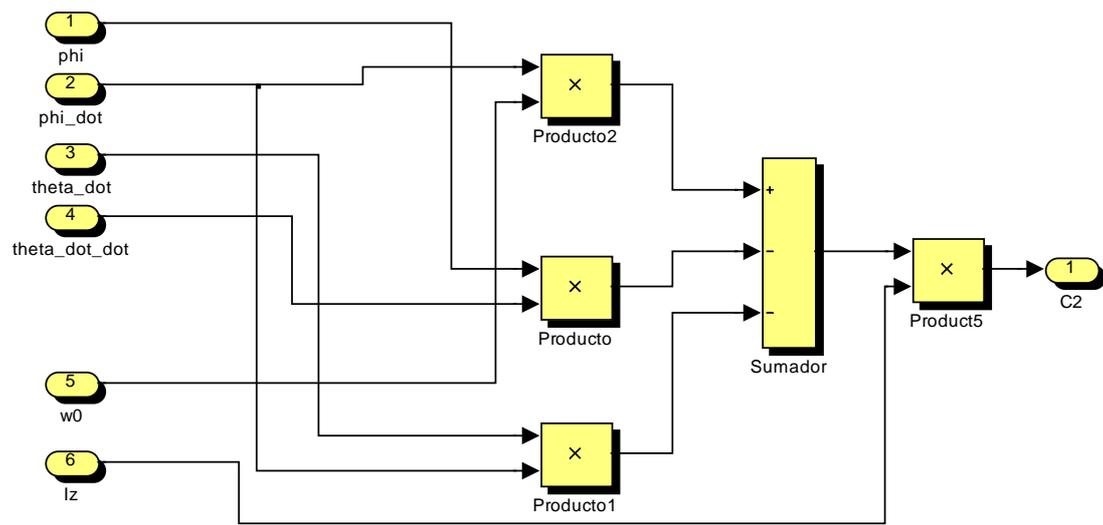
3.1.3.1. Subsistema Psi – Subsistema C.



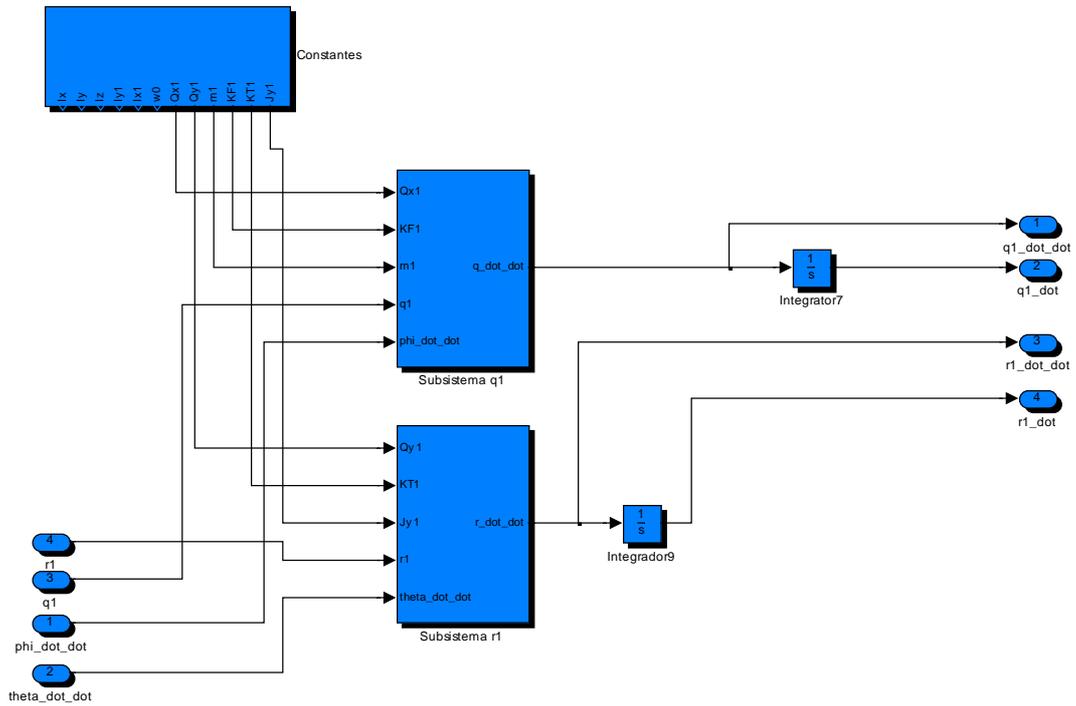
3.1.3.2. Subsistema Psi – Subsistema C1.



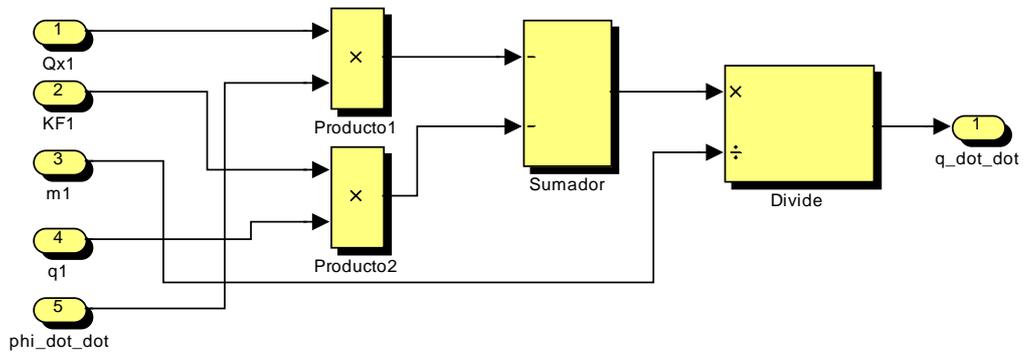
3.1.3.3. Subsistema Psi – Subsistema C2.



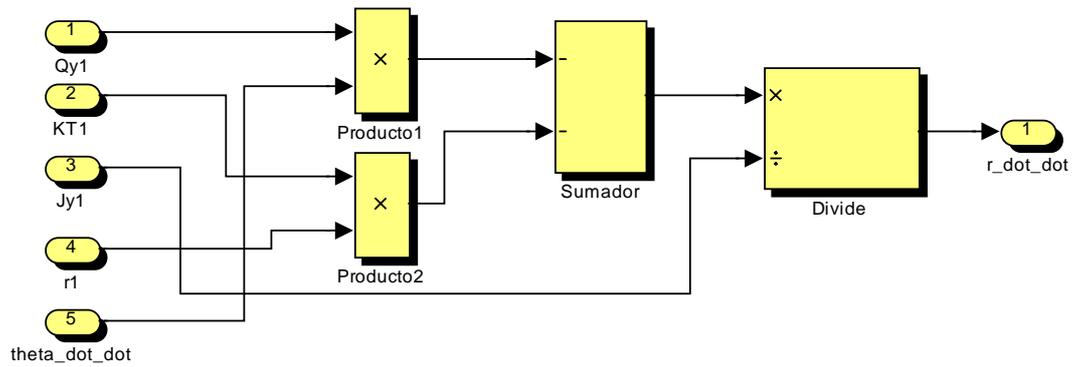
3.2. Modos Flexibles



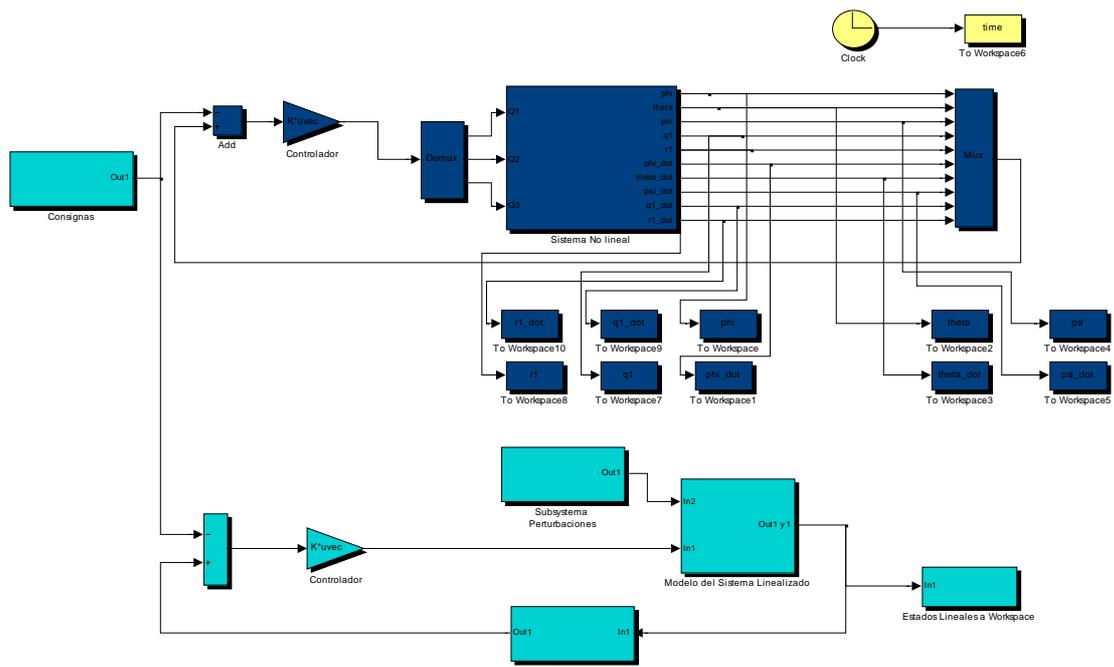
3.2.1. Modos Flexibles – Subsistema q1.



3.2.2 Modos Flexibles – Subsistema r1.



4. Modelo Lineal y No Lineal utilizado para comparación de resultados.



ANEXO IV

Este anexo describe las funciones de software utilizadas en el diseño y desarrollo de los controladores del CAPÍTULO 6.

CONTROLADORES BASADOS EN MÉTODOS DE PROYECCIÓN.

Controlador	Características	Toolbox	Técnica
sfb_proj	Características temporales Realimentación de estados	[2002, Magni]	Proyección y Mínima Energía
projea	Proyección de Autovectores	[1999, Liu]	Asignación recursiva Proyeccion

Controlador: sfb_proj

Propósito de la función: Calcula un controlador por realimentación de estados por el método de proyección de la autoestructura en lazo abierto.

Entradas a la función:

- sys: sistema LTI . Se ignoran las matrices C y D.
- Tr: tiempo de asentamiento.
- Damp: Coeficiente de Amortiguamiento Mínimo para los autovalores en lazo cerrado.
- key == 'p': Proyección ortogonal de todos los autovectores.
- == 'm': Asignación de mínima energía. C_ratio If the controllability
- C: Este coeficiente establece el grado de controlabilidad máximo de los autovalores: Por defecto es 100.

Salidas de la función:

- K: Ganancia del controlador por realimentación de estados.
- V,W,pol: Autoestructura asignada.

Llamada a la función: [k,V,W,pol] = sfb_proj(sys,Tr,Damp[,key[,C_ratio]]);

Descripción: Los polos en lazo cerrado son automáticamente seleccionados a partir de los parámetros de diseño que sirven como entrada a la función dados por el mínimo coeficiente de amortiguamiento y el tiempo de establecimiento. Los autovectores por la derecha correspondientes a los autovalores en lazo abierto que satisfacen el tiempo de asentamiento y el amortiguamiento requeridos son reasignados. Esta función sólo trabaja con autovalores no repetidos en lazo abierto.

Controlador: projea

Esta función calcula un controlador K por realimentación de estados y por el método de proyección. El controlador es obtenido por optimización de los autovalores y autovectores por la derecha de $(A+BK)$ a los deseados en la matriz de Jordan D, o a los dados en el vector Rd.

Entradas a la función:

- A: Matriz de estado del sistema.
- B: Matriz de control del sistema.
- D: Matriz de Jordan para los autovalores deseados.
- Rd: Vector que contiene los autovectores deseados.

Salidas de la función:

- K: Matriz de ganancia del controlador.
- a: Vector de autovalores conseguidos en lazo cerrado.
- Ra: Matriz de autovalores por la derecha.
- Wa: Matriz de vector de parámetros por la derecha.

Llamada a la función: $[k,a,Ra,Wa] = \text{projea}(A,B,D, Rd);$

Descripción: Esta función proyecta los autovectores deseados en el subespacio de autovectores alcanzables por un método de mínimos cuadrados basado en un criterio de minimización de una función de coste.

CONTROLADORES BASADOS EN TÉCNICAS DE ASIGNACIÓN RECURSIVA Y DESCOMPOSICIÓN EN VALORES SINGULARES.

Controlador	Características	Toolbox	Técnica
ofeasvd	Descomposición en Valores Singulares	[1999, Liu]	Método de descomposición en valores singulares (SVD)
gpofea	Selección de autovalores	[1999, Liu]	Asignación paramétrica
pofea	Asignación Paramétrica	[1999, Liu]	Asignación paramétrica recursiva.

Controlador: ofeasvd.

Este controlador calcula un controlador por asignación de autoestructuras por realimentación de la salida utilizando descomposición en valores singulares (SVD).

Llamada a la función: $K = \text{ofeasvd}(A,B,C,d,n1)$

Entradas a la función:

- A, B, C: Matrices del sistema.
- d: Autovalores deseados.

- N1: Indica la actualización de rango 1 o rango n, utilizada para minimizar la sensibilidad del sistema en lazo cerrado.

Salidas de la función:

- K: Matriz del controlador.

Llamada a la función: $[K,a] = \text{ofeasvd}(A,B,C,d,N1)$;

Descripción: Esta función asigna los autovalores deseados por métodos KNV, método 0 o método 1.

Controlador: gpofea.

Esta función genera un controlador K por realimentación de la salida, utilizando el método de asignación paramétrico genérico.

Llamada a la función: $[K,a,Ra,La] = \text{gpofea}(A,B,C,d)$

Entradas a la función:

- A,B,C: Matrices del sistema.
- d: Autovalores deseados.

Salidas de la función:

- K: Matriz del controlador.
- a: Vector de autovalores conseguidos.
- Ra: Matriz de autovectores por la derecha.
- La: Matriz de autovectores por la izquierda.

Llamada a la función: $[K,a, Ra,La] = \text{gpofea}(A,B,C,d)$;

Descripción: Esta función realiza una asignación paramétrica genérica.

Controlador: pofea

Esta función calcula la matriz de ganancia de un controlador K por el método de asignación de autoestructuras por realimentación de la salida paramétrico (Roppenecker and O'Reilly, 1989).

Entradas a la función:

- A,B,C: Matrices del sistema.
- D: autovalores deseados.
- N1: Indica el método para minimizar la sensibilidad del sistema en lazo cerrado mediante el rango 1 o n.

Salidas de la función:

- K: Matriz de ganancia del controlador.
- a: Autovalores alcanzados (conseguidos) del sistema en lazo cerrado.

Llamada a la función: $[K,a] = \text{pofea}(A,B,C,d,n1)$

Descripción: Esta función lleva a cabo una asignación paramétrica del sistema **A, B, C**.

CONTROLADORES BASADOS EN TÉCNICAS DE ASIGNACIÓN ROBUSTA.

Controlador	Características	Toolbox	Técnica
rbsteig	Desacoplado y robusto	[1998, Faleiro]	Factorización QR y método 0

Controlador: rbsteig

Entradas a la función:

- A,B,C: Matrices del sistema.
- Ad: Autovalores deseados.
- Vd: Autovectores deseados.
- -1 : Índice de autovectores.

Salidas de la función:

- K: Matriz de ganancia estática del controlador.

Llamada a la función: $[K] = \text{rbsteig}(A,B,C,Ad,Vd,-1)$

Descripción: Esta función utiliza técnicas de descomposición QR para el cálculo del controlador.

