



UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A  
DISTANCIA

Departamento de Sistemas de Comunicación y Control

E.T.S.I. INFORMÁTICA

CONTROL PREDICTIVO DE ORDEN FRACCIONARIO

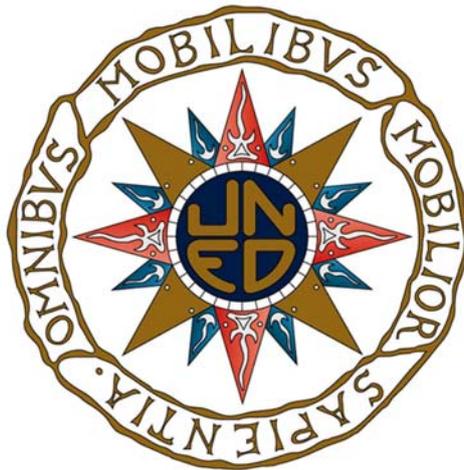
TESIS DOCTORAL

Miguel Romero Hortelano

Ingeniero en Automática y Electrónica Industrial por la Universidad de Córdoba

Madrid, 2010





UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A  
DISTANCIA

Departamento de Sistemas de Comunicación y Control

E.T.S.I. INFORMÁTICA

CONTROL PREDICTIVO DE ORDEN FRACCIONARIO

TESIS DOCTORAL

Autor de la Tesis:

D. Miguel Romero Hortelano

Ingeniero en Automática y Electrónica Industrial por la Universidad de Córdoba

Director de la Tesis:

Dr. D. Ángel Pérez de Madrid y Pablo



¡Oh excelso muro, oh torres coronadas  
De honor, de majestad, de gallardía!  
¡Oh gran río, gran rey de Andalucía,  
De arenas nobles, ya que no doradas!

¡Oh fértil llano, oh sierras levantadas,  
Que privilegia el cielo y dora el día!  
¡Oh siempre gloriosa patria mía,  
Tanto por plumas cuanto por espadas!

Si entre aquellas ruinas y despojos  
Que enriquece Genil y Dauro baña  
Tu memoria no fue alimento mío,

Nunca merezcan mis ausentes ojos  
Ver tu muro, tus torres y tu río,  
Tu llano y sierra, ¡oh patria, oh flor de España!

“ A Córdoba “

D. Luis de Góngora y Argote  
(Córdoba, 1561 – ibídem, 1627)



## ***Agradecimientos***

*Aunque en este caso el final del trabajo sólo representa el principio del camino, no quisiera desaprovechar la ocasión de agradecer a todas aquellas personas que me han ayudado a completar esta primera etapa.*

*En primer lugar mi agradecimiento a mi director de tesis, el Dr. D. Ángel Pérez de Madrid y Pablo, por acogerme bajo su tutela y encauzar mi investigación convenientemente. Agradecerle también su tenacidad y palabras de ánimo en los momentos difíciles que han ido apareciendo durante este periodo, los cuales no han sido pocos.*

*A la Dra. D<sup>a</sup>. Carolina Mañoso Hierro por ofrecerse voluntariamente al tedioso trabajo de revisar este documento y por sus valiosas sugerencias, que sin duda, han sido tenidas en cuenta.*

*Al departamento de Sistemas de Comunicación y Control de la UNED donde he tenido la oportunidad de desarrollar y poner fin al presente trabajo. También al departamento de Informática y Automática de la UNED donde, inicialmente, tuve la oportunidad de comenzar mi investigación.*

*A todos mis compañeros de departamento por su ayuda desinteresada cuando ésta era necesaria, y por compartir sus inquietudes sobre los temas más variopintos en tantas y tan “animadas” sobremesas durante estos años.*

*Al Dr. D. Blas Vinagre Jara por ofrecerme la posibilidad de ampliar mis conocimientos sobre cálculo fraccional, y por poner a mi disposición los medios de su departamento durante mis numerosas estancias en la Universidad de Extremadura.*

*Cómo no, a Emiliano e Inés, mis buenos amigos pacenses, con los que tan buenos ratos he pasado, y por la oportunidad que me brindaron de conocer la excelsa belleza que atesora su tierra.*

*Un recuerdo muy especial a mis antiguos compañeros de la sala 5.06 con los que compartí tantos y tan buenos momentos.*

*A mi “familia adoptiva” en Madrid: Chelsea, Javi, Karolina y Rafa. Por hacerme sentir en casa estando tan lejos. Espero que seáis muy felices en vuestras vidas.*

*A MariValle por sus palabras de ánimo y por su cariño durante el último periodo de realización del presente trabajo.*

*A mis padres y hermanos por su apoyo y por su cariño durante estos casi cinco años fuera de la tierra. Aunque viva tan lejos, sabed que mi hogar sigue siendo el mismo.*

*Por último, a mi abuelo. Quisiera hoy tener especialmente presente a unas de las personas que más han influido en mi vida. Nunca se me olvidará que fuiste tú él que empezó a enseñarme a leer, él que compartió su sabiduría conmigo, y él que me regaló gran parte de su tiempo y compañía. No quisiera terminar sin decir que “Abuelo, por todo esto te estaré... Eternamente Agradecido”.*

# ***ÍNDICE GENERAL***

Capítulo 1. Objetivos y estructura de la Tesis .....	1
1.1. Origen y objetivos de la Tesis.....	2
1.2. Estructura de la Tesis .....	5
1.3. Contribuciones y publicaciones .....	7
Capítulo 2. Control predictivo basado en modelos.....	11
2.1. Fundamentos del MPC.....	11
2.1.1. Introducción histórica .....	12
2.1.2. Metodología de los controladores predictivos basados en modelos .....	13
2.1.3. Función de coste .....	16
2.1.4. Ecuaciones de predicción.....	18
2.1.5. Obtención de la ley de control .....	19
2.2. Control predictivo generalizado.....	21
2.2.1. Ecuaciones de predicción.....	21
2.2.2. Versatilidad de GPC .....	23
2.2.3. Recomendaciones de ajuste del controlador .....	24
2.2.4. Lazo cerrado.....	25
2.2.5. El prefiltro polinómico $T(z^{-1})$ .....	27
2.2.6. Estudio de la robustez .....	29
2.3. Conclusiones .....	32
Capítulo 3. Cálculo Fraccionario: Aplicación al control de sistemas.....	33
3.1. Definiciones básicas.....	34
3.1.1. Propiedades elementales de las derivadas fraccionarias.....	37

3.2. Cálculo fraccionario en control.....	41
3.3. Estabilidad en sistemas de control fraccionario.....	43
3.3.1. Condiciones de estabilidad.....	46
3.3.2. Criterio de estabilidad.....	46
3.3.3. Respuesta en el dominio temporal y en el de la frecuencia.....	47
3.4. La función de transferencia fraccional de orden $\alpha$ .....	51
3.4.1. Respuesta escalón.....	52
3.4.2. Respuesta en frecuencia.....	53
3.4.3. Lazo Cerrado.....	55
3.5. Controladores fraccionarios.....	60
3.5.1. Controladores Crone.....	61
3.5.2. Controladores PID fraccionarios.....	62
3.5.3. Controladores $H_2$ y $H_\infty$ .....	67
3.6. Aproximaciones de los operadores fraccionarios.....	68
3.6.1. Simulación numérica de sistemas fraccionarios.....	70
3.7. Aproximaciones racionales basadas en los polinomios de Chebyshev.....	76
3.7.1. Introducción a los polinomios de Chebyshev.....	77
3.7.2. Aproximación de Chebyshev–Padé.....	79
3.7.3. Aproximación racional de Chebyshev.....	83
3.7.4. Comparación en el dominio temporal.....	88
3.7.5. Comparación en el dominio de la frecuencia.....	91
3.7.6. Distribución de ceros y polos: estabilidad.....	94
3.7.7. Comparación con distinto grado.....	95
3.8. Conclusiones.....	97
Capítulo 4. Control GPC de una planta fraccionaria.....	99

4.1. Obtención del modelo .....	101
4.2. Control GPC con modelos aproximados.....	102
4.2.1. Estudio del comportamiento dinámico y de la estabilidad .....	107
4.2.2. Estudio de la robustez .....	109
4.2.3. Estudio de la sensibilidad.....	113
4.2.4. Resumen utilizando diferentes funciones de generación .....	115
4.3. La fragilidad del controlador.....	116
4.4. Recomendaciones para el diseño. Mejora de la robustez.....	122
4.4.1. Mejora de la respuesta del modelo a bajas frecuencias .....	126
4.4.2. Uso del prefiltro del controlador $T(z^{-1})$ .....	129
4.4.3. Ajuste de los parámetros $N_u$ y $\lambda$ .....	132
4.5. Conclusiones .....	134
Capítulo 5. Integral definida fraccionaria .....	137
5.1. Resultado principal: integral definida fraccionaria .....	138
5.2. Evaluación numérica.....	139
5.2.1. Ejemplos de aplicación .....	144
5.3. Principales propiedades.....	147
5.4. Conclusiones .....	149
Capítulo 6. Control Predictivo Generalizado Fraccionario (FGPC).....	151
6.1. Definición de FGPC: Generalización de la metodología GPC .....	152
6.1.1. Función de coste fraccionaria .....	153
6.1.2. Obtención de la ley de control .....	155
6.1.3. Analogías y diferencias entre GPC y FGPC .....	158
6.1.4. Ejemplo de control FGPC .....	159
6.2. Análisis de la robustez de un sistema controlado por FGPC .....	163

6.2.1. Influencia en la sensibilidad del polinomio $T(z^{-1})$ .....	164
6.3. Método de sintonía para controladores FGPC.....	167
6.3.1. Especificaciones para el diseño y formulación del problema.....	168
6.3.2. Ejemplo de sintonía utilizando optimización .....	171
6.4. Conclusiones.....	177
Capítulo 7. Resultados experimentales.....	179
7.1. Control de un servomotor usando FGPC.....	179
7.1.1. Descripción del sistema .....	180
7.1.2. Diseño de los controladores.....	181
7.1.3. Conclusiones.....	187
7.2. Control de un sistema AGV en red mediante FGPC .....	187
7.2.1. Modelado del sistema .....	189
7.2.2. Diseño de los controladores.....	193
7.2.3. Resultado de la simulación .....	196
7.2.4. Conclusiones.....	199
7.3. Control de un sistema <i>Smart wheel</i> en red mediante FGPC.....	199
7.3.1. Plataforma experimental.....	200
7.3.2. Diseño de los controladores.....	202
7.3.3. Resultado de la simulación .....	203
7.3.4. Conclusiones.....	205
7.4. Conclusiones del capítulo .....	205
Capítulo 8. Conclusiones y Trabajos futuros.....	207
8.1. Conclusiones.....	207
8.2. Trabajos futuros .....	210
Bibliografía.....	211

Anexo I. Comparación estadística entre las aproximaciones de Chebyshev	227
I.1    Comparación de las respuestas escalón .....	227
I.2    Comparación en el dominio de la frecuencia.....	230
I.3    Distribución de ceros y polos.....	236
Anexo II. Comparación entre la estabilidad y las respuestas temporales de sistemas de control GPC para el integrador fraccionario de orden 0.4.....	249
II.1    Función de transferencia de las aproximaciones .....	250
II.2    Respuestas de los sistemas de control.....	253
II.3    Conclusiones.....	257
Anexo III. Un ejemplo de aplicación de los operadores fraccionarios en el diseño de un filtro digital .....	259
III.1    Introducción .....	259
III.2    Diseño del filtro .....	260
III.3    Ejemplo de diseño.....	262



## ***LISTA de ABREVIATURAS Y SIGLAS***

ADERSA	Association pour le developpement de l'enseignement et de la recherche en systematique appliquee.
AGV	Autonomous/automatic guided vehicle.
ARIMAX	Auto—regressive integrated moving—average with exogenous input.
CARIMA	Controlled auto—regressive integrated moving—average.
CFE	Continued fraction expansion (Aproximación).
CGPC	Continuous—time Generalized Predictive Control.
CRONE	Commande robuste d'ordre non—entier.
CP	Chebyshev—Padé (Aproximación).
CPBM	Control predictivo basado en modelos.
CSOIS	Center for self-Organizing and Intelligent Systems.
DMC	Dynamic matrix control.
ECM	Error cuadrático medio.
EHAC	Extended Horizon Adaptive Control.
EPSAC	Extended Prediction Self Adaptive Control.
FGPC	Fractional—order generalized predictive control.
FIR	Finite impulse response.
GL	Grünwald—Letnikov (Aproximación).
GPC	Generalized predictive control.
IDCOM	Identification and command.
IIR	Infinite impulse response filter.
IMC	Internal model control.

INV	Aproximación usando <i>inyfreqs</i> .
MAC	Model algorithmic control.
MPC	Model predictive control.
NCS	Network control systems.
PFC	Predictive functional control.
PID	Controlador proporcional integral derivador.
PI <sup>λ</sup> D <sup>μ</sup>	Controlador proporcional integral derivador fraccionario.
RC	Racional de Chebyshev (Aproximación).
SISO	Single—input and single—output.
USB	Universal serial bus.

## ***LISTA de SÍMBOLOS PRINCIPALES***

$(\cdot)^*$	Valor óptimo de $(\cdot)$ .
$(\cdot)'$	Matriz transpuesta.
$(\cdot)(t+k t)$	Valor predicho de $(\cdot)$ con la información disponible en el instante $t$ .
$\gamma$	Factor de peso en los errores predichos.
$\Gamma$	Vector de coeficientes $\gamma$ .
$\sigma$	Desviación típica.
$\Delta$	Operador incremento, definido como $1 - z^{-1}$ .
$\xi$	Perturbación no medible, ruido blanco de media cero.
$\tau$	Retardo de emisión o recepción de una red.
$A, B$	Polinomios numerador y denominador de una función de transferencia.
$D^\alpha$	Operador diferencial.
$d$	Retardo.
$e$	Error.
$E(\cdot)$	Valor esperado de $(\cdot)$ .
$\bar{E}$	Vector de errores predichos.
$\bar{E}_0$	Vector diferencia entre el error predicho y la respuesta libre.
$F^\alpha$	Función primitiva de orden $\alpha$ de la función $f$ .
$G$	Matriz de coeficientes de respuesta a escalón.
$I^\alpha$	Operador integral indefinida.
${}^\alpha I_a^b$	Operador integral definida de orden $\alpha$ .

$j$	Unidad imaginaria, definida como $\sqrt{-1}$ .
$J$	Función de coste.
$K$	Matriz de ganancias de un controlador predictivo con las ligaduras desactivadas.
$MG$	Margen de ganancia.
$MF$	Margen de fase.
$MQ$	Error cuadrático medio.
$N$	Número de predicciones a realizar.
$N_1, N_2$	Horizontes inferior y superior de coste.
$N_u$	Horizonte de control.
$r$	Punto de consigna.
$s$	Variable compleja empleada en la transformada de Laplace.
$R$	Polinomio que define a un controlador GPC con las ligaduras desactivadas.
$S$	Polinomio que define a un controlador GPC con las ligaduras desactivadas.
$S$	Función de sensibilidad.
$T$	Polinomio que actúa como filtro de las perturbaciones.
$T$	Función de sensibilidad complementaria.
$T_s$	Periodo de muestreo.
$u$	Variable de control.
$y$	Respuesta de un proceso.
$y_c$	Respuesta controlada.
$y_f$	Respuesta libre.
$z$	Variable compleja empleada en la transformada $z$ .

## ***LISTA de FIGURAS***

Fig 1.1. Diagrama de bloques simplificado de un sistema de control predictivo. ....	3
Fig 2.1 Metodología del control predictivo basado en modelos. ....	14
Fig 2.2 Estructura básica de un MPC.....	15
Fig 2.3 Modelo total del proceso como suma de submodelos aditivos.....	15
Fig 2.4 Analogía del control predictivo basado en modelos.....	16
Fig 2.5 Efectos que contribuyen a la respuesta total del proceso. ....	18
Fig 2.6 Esquema general del lazo de control. ....	25
Fig 2.7 Diagrama del GPC en lazo cerrado con perturbación a su salida.....	31
Fig 3.1 Superficie de Riemann correspondiente a $\omega = \log (s)$ .....	44
Fig 3.2 Superficie de Riemann correspondiente a $\omega = s^{1/2}$ .....	45
Fig 3.3 Respuesta temporal de una función de transferencia sin raíces en la hoja principal de Riemann. ....	48
Fig 3.4 Respuesta temporal de una función de transferencia con raíz estructural $\text{Re}(s) < 0 \text{ Im}(s) = 0$ .....	48
Fig 3.5 Respuesta temporal de una función de transferencia con raíz estructural $\text{Re}(s) < 0 \text{ Im}(s) \neq 0$ .....	49
Fig 3.6 Respuesta temporal de una función de transferencia con raíz estructural $\text{Re}(s) = 0 \text{ Im}(s) \neq 0$ .....	49
Fig 3.7 Respuesta temporal de una función de transferencia con raíz estructural $\text{Re}(s) > 0 \text{ Im}(s) \neq 0$ .....	50
Fig 3.8 Respuesta temporal de una función de transferencia con raíz estructural $\text{Re}(s) > 0 \text{ Im}(s) = 0$ .....	50
Fig 3.9 Respuesta escalón de diversos integradores fraccionarios. ....	52

Fig 3.10 Respuesta escalón de diversos derivadores fraccionarios. ....	53
Fig 3.11 Diagrama de Bode de los operadores fraccionarios $\alpha > 0$ . ....	54
Fig 3.12 Diagrama de Bode de los operadores fraccionarios $\alpha < 0$ . ....	55
Fig 3.13 Sistema de control del operador integral fraccionaria. ....	55
Fig 3.14 Respuesta escalón de $F(s)$ con ganancia unitaria para varios valores de $\alpha$ . ....	57
Fig 3.15 Magnitud de la respuesta en frecuencia con ganancia unitaria para varios valores de $\alpha$ . ....	58
Fig 3.16 Fase de la respuesta en frecuencia con ganancia unitaria para varios valores de $\alpha$ . ....	59
Fig 3.17 Ilustración gráfica de las aportaciones de un PID fraccionario (sombreado). ....	63
Fig 3.18 Diagrama de bloques para control de modelo interno (a) y su equivalente (b). ....	64
Fig 3.19 Representación gráfica de los seis primeros polinomios de Chebyshev. ....	77
Fig 3.20 Comparación respuesta escalón entre $G(s)$ y su aproximación $G_{CP}(z^{-1})$ . ....	81
Fig 3.21 Comparación respuesta en frecuencia entre $G(s)$ y su aproximación $G_{CP}(z^{-1})$ . ....	82
Fig 3.22 Diagrama de polos y ceros de la aproximación $G_{CP}(z^{-1})$ . ....	83
Fig 3.23 Comparación respuesta escalón entre $G(s)$ y su aproximación $G_{RC}(z^{-1})$ . ....	86
Fig 3.24 Comparación respuesta en frecuencia entre $G(s)$ y su aproximación $G_{RC}(z^{-1})$ . ....	87
Fig 3.25 Diagrama de polos y ceros de la aproximación $G_{RC}(z^{-1})$ . ....	88
Fig 3.26 Comparación entre la respuesta real al escalón y la de las aproximaciones. ....	90

Fig 3.27 Comparación entre la respuesta real en frecuencia y las de las aproximaciones. ....	92
Fig 3.28 Diagrama de polos y ceros de $G_{RC}$ . ....	94
Fig 3.29 Comparación entre la respuesta real al escalón y la de las aproximaciones con distinto grado. ....	96
Fig 3.30 Comparación entre la respuesta real en frecuencia y las de las aproximaciones con distinto grado. ....	97
Fig 4.1 Diagrama de bloques simplificado de un sistema de control predictivo. ....	100
Fig 4.2 Esquema de control GPC en lazo cerrado. ....	100
Fig 4.3 Respuesta al escalón de las aproximaciones de $s^{-0.4}$ . ....	105
Fig 4.4 Respuesta al escalón de las aproximaciones de $s^{-0.4}$ dentro del intervalo correspondiente a la ventana de predicción. ....	106
Fig 4.5 Diagrama de Bode de las aproximaciones de $s^{-0.4}$ . ....	107
Fig 4.6 Simulación del sistema de control GPC usando varias aproximaciones de $s^{-0.4}$ . ....	108
Fig 4.7 Diagrama de Nyquist del sistema de control GPC para las aproximaciones CFE, INV y GL. ....	110
Fig 4.8 Diagrama de Nyquist del sistema de control GPC para las aproximaciones CP y RC. ....	111
Fig 4.9 Diagrama de Nyquist del sistema de control GPC para la aproximación CRN. ....	112
Fig 4.10 Función de sensibilidad $S$ y sensibilidad complementaria $T$ para el sistema de control GPC. ....	114
Fig 4.11 Simulación del sistema de control GPC con controladores con la máxima resolución en sus coeficientes. ....	118
Fig 4.12 Simulación del sistema de control GPC con controladores con una resolución de 6 cifras en sus coeficientes. ....	119

Fig 4.13 Simulación del sistema de control GPC con controladores con una resolución de 4 cifras en sus coeficientes. ....	120
Fig 4.14 Simulación del sistema de control GPC con controladores con una resolución de 3 cifras en sus coeficientes. ....	121
Fig 4.15 Respuesta escalón de las aproximaciones CP y RC del integrador de orden 0.4. ....	123
Fig 4.16 Simulación del sistema de control GPC del integrador fraccionario de orden 0.4 para las aproximaciones de CP y RC. ....	124
Fig 4.17 Diagrama de Nyquist del sistema de control GPC con modelo de orden 0.4 obtenido con la aproximación de CP. ....	125
Fig 4.18 Diagrama de Nyquist del sistema de control GPC con modelo de orden 0.4 obtenido con la aproximación de RC. ....	126
Fig 4.19 Comparación de la respuesta en frecuencia de la inicial y la nueva aproximación de RC con mejora a bajas frecuencias. ....	127
Fig 4.20 Diagrama de Nyquist del sistema de control GPC usando la nueva aproximación RC con respuesta mejorada a bajas frecuencias. ....	128
Fig 4.21 Respuesta del sistema GPC usando la nueva aproximación RC con respuesta mejorada a bajas frecuencias. ....	129
Fig 4.22 Respuesta del sistema GPC usando la aproximación RC con el polinomio $T = A$ . ....	130
Fig 4.23 Diagrama de Nyquist del sistema de control GPC usando la aproximación RC con el polinomio $T = A$ . ....	130
Fig 4.24 Respuesta del sistema GPC usando la aproximación RC con el polinomio $T = A(1 - 0.8z^{-1})$ . ....	131
Fig 4.25 Diagrama de Nyquist del sistema de control GPC usando la aproximación RC con el polinomio $T = A(1 - 0.8z^{-1})$ . ....	132
Fig 4.26 Diagrama de Nyquist del sistema de control GPC usando la aproximación RC con los nuevos parámetros $N_u$ y $\lambda$ . ....	133

Fig 4.27 Respuesta del sistema GPC usando la aproximación RC con los nuevos parámetros $N_u$ y $\lambda$ .....	134
Fig 5.1 Integral definida usando la formula de Euler. ....	147
Fig 6.1 Diagrama de bloques simplificado de un sistema de control predictivo. ....	152
Fig 6.2 Relación GPC – FGPC.....	159
Fig 6.3 Esquema del vehículo montado sobre rail.....	160
Fig 6.4 Respuesta de los 3 tipos de controladores predictivos propuestos. .	162
Fig 6.5 Funciones de sensibilidad $\mathcal{S}$ y sensibilidad complementaria $\mathcal{T}$ .....	163
Fig 6.6 Análisis de sensibilidad del sistema variando el prefiltro $T(z^{-1})$ . ....	165
Fig 6.7 Simulación del sistema de control FGPC para varios valores de $T(z^{-1})$ . ....	166
Fig 6.8 Margen de ganancia para el controlador GPC.....	172
Fig 6.9 Margen de fase para el controlador GPC.....	173
Fig 6.10 Margen de ganancia para el controlador FGPC.....	174
Fig 6.11 Margen de fase para el controlador FGPC. ....	175
Fig 6.12 Simulación de la respuesta escalón de los sistemas optimizados GPC y FGPC.....	176
Fig 6.13 Funciones de sensibilidad $\mathcal{S}$ y de sensibilidad complementaria $\mathcal{T}$ .177	
Fig 7.1 Esquema de conexión de la plataforma experimental. ....	180
Fig 7.2 Tarjeta de adquisición de datos y planta servomotor.....	181
Fig 7.3 Margen de ganancia para el control de velocidad. ....	183
Fig 7.4 Margen de fase para el control de velocidad. ....	184
Fig 7.5 Control de velocidad usando los controladores predictivos propuestos. ....	184
Fig 7.6 Margen de ganancia para el control de posición. ....	186

Fig 7.7 Margen de fase para el control de posición.....	186
Fig 7.8 Control de posición usando los controladores predictivos propuestos.....	187
Fig 7.9 Modelo de la red de comunicación con pérdidas de información y retardos en la transmisión.....	190
Fig 7.10 Modelo cinemático de la bicicleta.....	190
Fig 7.11 Diagrama de control del vehículo.....	192
Fig 7.12 Descripción del cambio de carril del vehículo.....	193
Fig 7.13 Margen de ganancia de acuerdo con $\alpha$ y $\beta$ .....	194
Fig 7.14 Margen de fase de acuerdo con $\alpha$ y $\beta$ .....	195
Fig 7.15 Respuesta ideal al escalón.....	195
Fig 7.16 Cambio de posición lateral del vehículo considerando sólo ruido en el sensor.....	197
Fig 7.17 Cambio de posición lateral del vehículo considerando los efectos de la red de comunicación y poco ruido en el sensor.....	197
Fig 7.18 Cambio de posición lateral del vehículo considerando los efectos de la red de comunicación y mucho ruido en el sensor.....	198
Fig 7.19 Esfuerzos de control: (a) con pequeño nivel de ruido, (b) con gran nivel de ruido.....	198
Fig 7.20 El sistema <i>Smart Wheel</i> del CSOIS.....	200
Fig 7.21 Esquema del modelo del tráfico de la red de comunicación.....	201
Fig 7.22 Diagrama del sistema de control completo.....	204
Fig 7.23 Esfuerzos de control.....	204
Fig 7.24 Respuesta escalón del <i>Smart Wheel</i> con los controladores propuestos.....	205
Fig III.1 Respuesta en frecuencia de la magnitud.....	264
Fig III.2 Pesos frente a la frecuencia para $\alpha = 0.9$ .....	264

## ***LISTA de TABLAS***

Tabla 2.1 Variables de diseño de algunos controladores predictivos ( $d$ : tiempo de retardo conocido).....	23
Tabla 2.2 Casos especiales de GPC ( $n$ : número de estados, E: estabilizable; D: detectable; O: observable, C: controlable).....	24
Tabla 3.1 Comparación entre aproximaciones del integrador fraccionario de orden $-0.5$ usando Euler.....	90
Tabla 3.2 Comparación en magnitud entre aproximaciones del integrador fraccionario de orden $-0.5$ usando Euler. ....	92
Tabla 3.3 Comparación de fase entre aproximaciones del integrador fraccionario de orden $-0.5$ usando Euler. ....	93
Tabla 4.1 Error cuadrático medio (ECM) de las aproximaciones de $s^{-0.4}$ . ...	107
Tabla 4.2 Características cuantitativas de los sistemas de control GPC.....	109
Tabla 4.3 Márgenes de ganancia y fase para los sistemas de control GPC.	113
Tabla 4.4 Error cuadrático medio de las respuestas con diferente número de cifras significativas. ....	121
Tabla 5.1 Propiedades de la integral definida fraccionaria.....	147
Tabla 7.1 Resumen de los resultados en el dominio de la frecuencia.....	203
Tabla I.1 Comparación usando Euler para discretizar y CP para aproximar	227
Tabla I.2 Comparación usando Euler para discretizar y RC para aproximar	228
Tabla I.3 Comparación utilizando Tustin para discretizar y CP para aproximar .....	228
Tabla I.4 Comparación usando Tustin para discretizar y RC para aproximar .....	229
Tabla I.5 Comparación usando Al-Alaoui para discretizar y CP para aproximar .....	229

Tabla I.6 Comparación usando Al-Alaoui para discretizar y RC para aproximar.....	230
Tabla I.7 Comparación de magnitud usando Euler para discretizar y CP para aproximar.....	230
Tabla I.8 Comparación de magnitud usando Euler para discretizar y RC para aproximar.....	231
Tabla I.9 Comparación de fase usando Euler para discretizar y CP para aproximar.....	231
Tabla I.10 Comparación de fase usando Euler para discretizar y RC para aproximar.....	232
Tabla I.11 Comparación de magnitud usando Tustin para discretizar y CP para aproximar.....	232
Tabla I.12 Comparación de magnitud usando Tustin para discretizar y RC para aproximar.....	233
Tabla I.13 Comparación de fase usando Tustin para discretizar y CP para aproximar.....	233
Tabla I.14 Comparación de fase usando Tustin para discretizar y RC para aproximar.....	234
Tabla I.15 Comparación de magnitud usando Al-Alaoui para discretizar y CP para aproximar.....	234
Tabla I.16 Comparación de magnitud usando Al-Alaoui para discretizar y RC para aproximar.....	235
Tabla I.17 Comparación de fase usando Al-Alaoui para discretizar y CP para aproximar.....	235
Tabla I.18 Comparación de fase usando Al-Alaoui para discretizar y RC para aproximar.....	236
Tabla I.19 Ceros de las aproximaciones obtenidas usando Euler para discretizar y CP para aproximar.....	236

Tabla I.20 Ceros de las aproximaciones obtenidas usando Euler para discretizar y RC para aproximar .....	237
Tabla I.21 Polos de las aproximaciones obtenidas usando Euler para discretizar y CP para aproximar.....	238
Tabla I.22 Polos de las aproximaciones obtenidas usando Euler para discretizar y RC para aproximar .....	239
Tabla I.23 Ceros de las aproximaciones obtenidas usando Tustin para discretizar y CP para aproximar.....	240
Tabla I.24 Ceros de las aproximaciones obtenidas usando Tustin para discretizar y RC para aproximar .....	241
Tabla I.25 Polos de las aproximaciones obtenidas usando Tustin para discretizar y CP para aproximar.....	242
Tabla I.26 Polos de las aproximaciones obtenidas usando Tustin para discretizar y RC para aproximar .....	243
Tabla I.27 Ceros de las aproximaciones obtenidas usando AI -Alaoui para discretizar y CP para aproximar.....	244
Tabla I.28 Ceros de las aproximaciones obtenidas usando AI -Alaoui para discretizar y RC para aproximar .....	245
Tabla I.29 Polos de las aproximaciones obtenidas usando AI - Alaoui para discretizar y CP para aproximar.....	246
Tabla I.30 Polos de las aproximaciones obtenidas usando AI - Alaoui para discretizar y RC para aproximar .....	247
Tabla II.1 Parámetros del sistema de control GPC usando CP con Euler ...	254
Tabla II.2 Parámetros del sistema de control GPC usando CP con Tustin..	254
Tabla II.3 Parámetros del sistema de control GPC usando CP con AI – Alaoui.....	255
Tabla II.4 Parámetros del sistema de control GPC usando RC con Euler...	255
Tabla II.5 Parámetros del sistema de control GPC usando RC con Tustin .	255

Tabla II.6 Parámetros del sistema de control GPC usando RC con Al – Alaoui .....	255
Tabla II.7 Parámetros del sistema de control GPC usando CFE con Euler..	256
Tabla II.8 Parámetros del sistema de control GPC usando CFE con Tustin	256
Tabla II.9 Parámetros del sistema de control GPC usando CFE con Al– Alaoui .....	256
Tabla II.10 Parámetros del sistema de control GPC usando INV con Euler	256
Tabla II.11 Parámetros del sistema de control GPC usando INV con Tustin .....	257
Tabla II.12 Parámetros del sistema de control GPC usando INV con Al– Alaoui .....	257
Tabla II.13 Parámetros del sistema de control GPC usando CRN .....	257
Tabla III.1 Comparación estadística de los filtros en términos de error.....	263

# Capítulo 1

## Objetivos y estructura de la Tesis

La herramienta matemática conocida como *cálculo fraccionario*,<sup>1</sup> la cual tiene su origen en la extensión del significado *clásico* del cálculo, permite la derivación e integración de una función usando cualquier orden: racional, real, o imaginario. Dentro del campo de las matemáticas podemos encontrar varios ejemplos de extensión del significado, como puede ser el paso de los números reales a los números complejos, o la generalización del cálculo del factorial de un número entero al cálculo del factorial de un número complejo mediante la utilización de la función gamma.

De forma general podemos afirmar que la teoría de control de sistemas tiene su propósito en idear un algoritmo matemático que le confiera a la planta a controlar ciertas características para que el conjunto, planta-controlador, se comporte de una determinada manera según unos parámetros de diseño.

En la actualidad podemos encontrar numerosos casos estudiados donde el uso de controladores fraccionarios permite ampliar las posibles acciones de control, de tal forma que el diseñador dispone de un abanico más amplio de posibilidades donde elegir para su diseño. Así pues, muchas metodologías de control han sido

---

<sup>1</sup> Podemos encontrar autores en lengua castellana que hacen uso de los términos fraccional y fraccionario para referirse al término en lengua inglesa “fractional”. El autor de esta Tesis ha preferido la utilización del término fraccionario ya que éste está aceptado por la R.A.E., con la siguiente definición: “Pertenciente o relativo a la fracción de un todo.”

generalizadas usando el *cálculo fraccionario*, sirviendo éste como base para definir las ecuaciones dinámicas que rigen el comportamiento de los controladores. Por ejemplo, podemos citar, con carácter meramente ilustrativo, el caso de la generalización del conocido controlador clásico PID al novedoso controlador fraccionario  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ .

Particularmente, esta Tesis se centra en la idea de extender la metodología de control predictivo basado en modelos, generalizando su formulación mediante las herramientas de *cálculo fraccionario*. Debido a la amplia gama de controladores predictivos existentes, en esta Tesis hemos elegido uno de ellos, concretamente el así llamado GPC (Generalized Predictive Control), ya que esta estrategia de control posee un gran nivel de aceptación tanto a nivel académico como industrial.

### **1.1. Origen y objetivos de la Tesis**

El presente trabajo se inició en el marco de la investigación del autor en el proyecto de investigación TEDICO (Técnicas en el espacio de parámetros, multifrecuenciales y de cálculo de orden fraccionario para el diseño de controladores), DPI2004-05903, dirigido por el Dr. D. Roberto Hernández Berlinches. Uno de los objetivos de este proyecto era aportar nuevos resultados para el diseño de controladores predictivos usando como herramienta el cálculo fraccionario, convirtiéndose éste en el punto de partida de esta Tesis.

Esta Tesis tiene por objetivo fundamental la aplicación de las herramientas de cálculo fraccionario al control predictivo basado en modelos, con la idea de extender la metodología y generalizar su formulación, de tal forma que podamos conjugar las ventajas de ambas disciplinas.

Para alcanzar este objetivo se va a estudiar el sistema de control desde todos sus elementos constituyentes. Como encontramos resumido en la Fig 1.1, los sistemas de control predictivo se caracterizan, principalmente, por tres elementos bien diferenciados: la planta, el predictor y el optimizador. Por consiguiente, el diseño y generalización de estos controladores se plantea mediante tres actuaciones diferentes: en la planta, en el modelo y en la función de coste.

A continuación se presentan resumidas las actuaciones que se van a llevar a cabo sobre estos tres elementos:

- Sobre el bloque planta: Se plantea el control predictivo sobre plantas de naturaleza fraccionaria respetando sus características especiales (como veremos posteriormente, existen herramientas que nos permiten obtener simulaciones precisas de las mismas).
- Sobre el bloque predictor: Para obtener la necesaria predicción del proceso, se estudian modelos de orden bajo que capten de la manera más precisa posible la dinámica fraccionaria de las plantas a controlar tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia.
- Sobre el bloque optimizador: La inclusión explícita de los operadores fraccionarios en el controlador se consigue mediante la inclusión de éstos en la función de coste que utiliza el optimizador para determinar la ley de control. Como consecuencia se presentará un nuevo tipo de controlador llamado FGPC (Fractional-order Generalized Predictive Control).

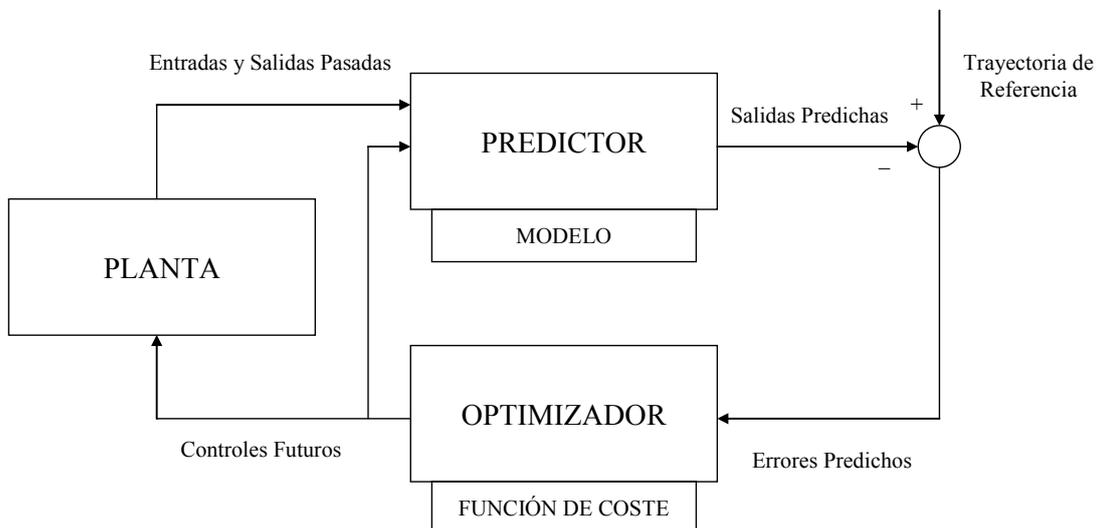


Fig 1.1 Diagrama de bloques simplificado de un sistema de control predictivo.

Como consecuencia de estas actuaciones nos hemos propuesto una serie de objetivos parciales los cuales se citan y se resumen a continuación:

## 1. Objetivos y estructura de la Tesis

---

- Estudiar nuevas aproximaciones racionales que permitan obtener funciones de transferencia que capten el comportamiento fraccionario de estos sistemas de forma más precisa, tanto en el dominio temporal como en el de la frecuencia.
- Estudiar el controlador GPC cuando trata de controlar una planta de naturaleza fraccionaria.
- Proponer herramientas para estudiar la estabilidad y robustez de los controladores GPC cuando controlan plantas con naturaleza fraccionaria.
- Dar una serie de recomendaciones para el diseño de estos controladores GPC que controlan plantas de naturaleza fraccionaria, desde el punto de vista de la robustez, además de realizar un estudio de la fragilidad de los controladores resultantes.
- Generalizar el significado de la integral definida para el caso de considerar un orden de integración real, estudiando sus principales propiedades.
- Demostrar un teorema cuya conclusión es la generalización de la conocida regla de Barrow para el caso fraccionario.
- Formular un nuevo tipo de controlador predictivo que haga uso de la integral definida fraccionaria en su función de coste.
- Proponer un método de sintonía para este nuevo controlador predictivo de manera que se satisfaga una serie de criterios en el dominio del tiempo y de la frecuencia.
- Poner en práctica este nuevo controlador fraccionario y el método de sintonía propuesto con plantas reales en el laboratorio, o con modelos obtenidos a partir de la identificación de sistemas reales.

## 1.2. Estructura de la Tesis

Esta Tesis se ha estructurado en un total de ocho capítulos y tres anexos cuyos contenidos son los siguientes:

- Capítulo 1. Comprende esta introducción.
- Capítulo 2. En este capítulo se revisan, de forma introductoria, los fundamentos del control predictivo basado en modelos, analizando la metodología común de todos los controladores predictivos. En segundo lugar, se centra en la exposición de las características propias de uno de los controladores predictivos más usados, el control predictivo generalizado o GPC.
- Capítulo 3. Este capítulo se dedica a un estudio introductorio del cálculo fraccionario, sus conceptos y definiciones básicas, con un claro enfoque para su aplicación en la teoría de control. Además, se hace una revisión de los principales controladores fraccionarios existentes en la actualidad. Finalmente, se propone un nuevo tipo de aproximación racional de los operadores fraccionarios basada en los polinomios de Chebyshev.
- Capítulo 4. En este capítulo se contempla el control predictivo GPC de una planta de naturaleza fraccionaria, centrándose en el estudio para la elección del modelo de la planta a controlar. También se propone el uso del criterio de Nyquist para el estudio de la estabilidad de estos sistemas, ya que en la actualidad se carece de técnicas numéricas tipo Routh o Jury. Como conclusión del capítulo se ofrecen una serie de recomendaciones prácticas para el diseño, de tal forma que permita mejorar la estabilidad y aumentar la robustez de los sistemas de control obtenidos.
- Capítulo 5. En este capítulo se busca una generalización del concepto de integral definida, extendiendo el significado de la misma para el caso de un orden de integración real. Además, se demuestra un teorema cuya conclusión es la generalización de la conocida regla de

Barrow para el caso de integrales definidas con órdenes fraccionarios. Esta formulación matemática sirve de base para la definición del controlador predictivo de orden fraccionario que se presenta en el capítulo siguiente.

- Capítulo 6. Este capítulo se centra en la definición del nuevo tipo de controlador predictivo FGPC, resultado de la generalización del controlador predictivo GPC usando las herramientas de cálculo fraccionario descritas en el capítulo anterior. En este capítulo también se presenta un estudio de la robustez de este nuevo controlador usando como medidas cuantitativas los márgenes de ganancia y fase y las funciones de sensibilidad. Para finalizar este capítulo se propone un método de sintonía para este nuevo controlador, que persigue la consecución de una serie de objetivos en el dominio del tiempo y de la frecuencia, haciendo uso de un algoritmo de optimización numérica.
- Capítulo 7. En este capítulo se presentan varios resultados experimentales que tienen como objetivo la validación del controlador FGPC como tal. Se presentan resultados en el control de un servomotor, de un *Smart Wheel* y el control de un sistema en red usando como planta un vehículo AGV.
- Capítulo 8. En este último capítulo se resumen las principales conclusiones y aportaciones de esta Tesis y se proponen una serie de perspectivas para futuras líneas de investigación.
- Anexo I. En este anexo se presentan una serie de tablas que muestran la comparación estadística de las dos aproximaciones de Chebyshev expuestas en el capítulo 3 de esta Tesis.
- Anexo II. En este anexo se presenta un extenso estudio del comportamiento temporal de diferentes sistemas de control GPC, cuando la planta a controlar es el integrador fraccionario de orden 0.4.
- Anexo III. En este anexo se presenta un ejemplo de aplicación de las integrales definidas de orden fraccionario en la definición de una

función de coste, la cual sirve como base para el diseño de un filtro IIR.

### **1.3. Contribuciones y publicaciones**

Durante el periodo de investigación que ha dado como fruto la presente Tesis doctoral se han presentado la mayoría de los resultados en forma de artículos en revista, capítulos de libros, comunicaciones en congresos y reuniones técnicas. Estos trabajos son enunciados a continuación:

#### **Artículos en revista**

- Romero, M., A.P. de Madrid y B.M. Vinagre (2010). Arbitrary Real-Order Cost Functions for Signals and Systems. *Signal Processing*, Elsevier. (En prensa.)

#### **Capítulos de libro**

- Romero, M., A.P. de Madrid, C. Mañoso y R. Hernández (2009). Generalized Predictive Control of arbitrary real order. *New Trends in Nanotechnology and Fractional calculus Applications*, pp. 411–418. D. Baleanu *et al.* (eds.). Springer.
- Romero, M., I. Tejado, B.M. Vinagre y A.P. de Madrid (2009). Position and velocity control of a servo by using GPC of arbitrary real order. *New Trends in Nanotechnology and Fractional calculus Applications*, pp. 369–376. D. Baleanu *et al.* (eds.). Springer.

#### **Comunicaciones a congresos**

- Tejado, I., M. Romero, B.M. Vinagre, A.P. de Madrid. (2010). Control de Velocidad de una Rueda Inteligente a través de Internet. *XXXI Jornadas de Automática*. Jaén, España.
- Romero, M., A.P. de Madrid y C. Mañoso. (2010). Discrete Approximations to Fractional-Order Operators Based on Chebyshev Polynomials. *4<sup>th</sup> IFAC Workshop on Fractional Differentiations and its Applications*. Badajoz, España.

- Romero, M., A.P. de Madrid, C. Mañoso y B.M. Vinagre. (2010). Fractional–Order Generalized Predictive Control: Formulation and some Properties. *11<sup>th</sup> International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision (ICARCV–2010)*. Singapur.
- Tejado, I., M. Romero, B.M. Vinagre, A.P. de Madrid y Y.Q. Chen. (2009). Characterization and Modeling of Network Traffic to Control a Smart Wheel Remotely. *Symposium on Fractional Signals and System*. Lisboa, Portugal.
- Romero, M., I. Tejado, J.I. Suárez, B.M. Vinagre y A.P. de Madrid. (2009). GPC Strategies for the Lateral Control of a Networked AGV. *IEEE International Conference on Mechatronics (ICM–2009)*. Málaga, España.
- Romero, M., I. Tejado, B.M. Vinagre y A.P. de Madrid. (2008). Fractional–Order Generalized Predictive Control of a Servomotor Plant. *3<sup>rd</sup> IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications (FDA–2008)*. Ankara, Turquía.
- Romero, M., A.P. de Madrid, C. Mañoso y R. Hernández. (2008). Fractional–Order Generalized Predictive Control. *3<sup>rd</sup> IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications (FDA–2008)*. Ankara, Turquía.
- Romero, M., B.M. Vinagre y A.P. de Madrid. (2008). GPC Control of a Fractional–Order Plant: Improving Stability and Robustness. *International Federation of Automatic Control World Congress (IFAC–2008)*. Seúl, Corea.
- Romero, M., A.P. de Madrid, C. Mañoso y R. Hernández. (2007). Control of Fractional Order Plants by Predictive Control. *Symposium on Applied Fractional Calculus (SAFC07)*. Badajoz, España.
- Romero, M., A.P. de Madrid, C. Mañoso y R. Hernández. (2007). Application of Generalized Predictive Control to a Fractional–Order

Plant. *6<sup>th</sup> International Conference on Multibody Systems, Nonlinear Dynamics, and Control (ASME–IDETC07)*. Las Vegas, USA.

- Romero, M., A.P. de Madrid, C. Mañoso y R. Hernández. (2007). Fractional Order Calculus: Fundamentals and some Applications. *11<sup>th</sup> International Conference on Computer Aided System Theory (Eurocast–2007)*. Las Palmas de Gran Canarias, España.
- Romero, M., A.P. de Madrid, C. Mañoso y R. Hernández. (2006). Discretization of the Fractional–Order Differentiator/Integrator by the Rational Chebyshev Approximation. *7<sup>th</sup> Portuguese Conference on Automatic Control (Controlo–2006)*. Lisboa, Portugal.

#### **Proyectos de Investigación**

- Proyecto COVARSIH (Control y coordinación de un sistema de vehículos autónomos en red en el marco de los sistemas híbridos). Investigador principal: Dr. D. Blas Manuel Vinagre Jara. Referencia: TRA2008–06602–C03–02.
- Proyecto TEDICO (Técnicas en el espacio de parámetros, multifrecuenciales y de cálculo de orden fraccionario para el diseño de controladores). Investigador principal: Dr. D. Roberto Hernández Berlinches. Referencia: DPI2004–05903.

#### **Reuniones Técnicas**

- Nuevas aplicaciones de operadores fraccionarios en control: Control Predictivo. Jornadas de ingeniería de control organizadas por el Comité Español de Automática (CEA). Madrid (España). Mayo 2007.

#### **Estancias en otras Universidades**

- Durante el periodo de realización de esta Tesis, el autor ha tenido la oportunidad de disfrutar de varias estancias breves en el Departamento de Electrónica e Ingeniería Electromecánica de la Escuela de Ingenierías Industriales de la Universidad de Extremadura, junto al

## 1. Objetivos y estructura de la Tesis

---

profesor Dr. D. Blas Manuel Vinagre Jara, durante un periodo total aproximado de 6 meses.

# Capítulo 2

## Control predictivo basado en modelos

En este capítulo se revisarán, de forma introductoria, los fundamentos del control predictivo basado en modelos, analizando la metodología común de todas las estrategias de control que se agrupan bajo este nombre.

En segundo lugar, se centrará en la exposición de las características propias de uno de los controladores predictivos más usados tanto en el ámbito académico como en el industrial, el control predictivo generalizado o GPC, tratando temas de versatilidad, ajuste del controlador y robustez.

### 2.1. Fundamentos del MPC

El control predictivo basado en modelos (CPBM) o *Model Predictive Control* (MPC) es una metodología de control avanzada, que hace uso de un modelo dinámico de la planta a controlar para predecir y optimizar el futuro comportamiento del proceso mediante la minimización de una determinada función de coste.

Esta metodología de control ha sido desarrollada y usada ampliamente tanto a nivel industrial como académico y se ha convertido en un estándar, debido a su intrínseca habilidad de manejar restricciones o ligaduras en plantas multivariadas de gran escala.

## 2. Control predictivo basado en modelos

---

Además de por su innato manejo de restricciones, las razones de su gran penetración a nivel industrial las podemos resumir en:

- La idea subyacente es fácil de entender.
- Su formulación básica se puede extender a plantas multivariables sin apenas modificación.
- Su carácter predictivo lo hace ideal para compensar intrínsecamente los tiempos muertos y retardos.
- Es muy útil cuando se conocen las referencias futuras, como ocurre en el caso de robótica o procesos por lotes.
- Es más avanzado, potente y versátil que el control PID clásico, incluso para plantas monovariables sin restricciones, sin ser más difícil de ajustar, incluso si se presentan lazos de control con retardos temporales considerables.

### 2.1.1. Introducción histórica

Los primeros trabajos en control predictivo pertenecen a dos autores: por un lado Martín Sánchez (1974, 1976a, 1976b, 1977), que consideró los principios metodológicos básicos y las primeras aplicaciones prácticas del *control adaptativo predictivo*, y por otro lado Jacques Richalet y su grupo (1978), que investigaron el *control predictivo heurístico basado en modelos*, que se desarrolló en una organización sin fines de lucro, *Adersa* (Association pour le Developpement de l'Enseignement et de la Recherche en Systematique Appliquee). Un tiempo después esta disciplina aparece en Estados Unidos debido al interés y el trabajo de una industria química, la *Shell Oil Co.* (Cutler y Ramaker, 1979).

La popularidad de MPC fue en aumento rápidamente tanto en el ámbito académico como en el industrial, principalmente en este último. Así, a mediados de los ochenta empiezan a surgir distintos controladores bajo la misma metodología que van consolidando la teoría de control predictivo como una forma de control. Podemos destacar los siguientes trabajos: el Predictor-Based Self-Tuning Control (Peterka, 1984), el Extended Horizon Adaptive Control (Ydstie, 1984), el Multistep Multivariable Adaptive Control (Greco, *et al.*, 1984), el Extended Prediction Self

Adaptive Control (de Keyser y Cauwenberghe, 1985), el Generalized Predictive Control (GPC) (Clarke, *et al.*, 1987a,1987b), y el Unified Predictive Control (Soeterboek, 1992).

Pero a pesar de su éxito, estas formulaciones carecían de teorías formales que proporcionaran resultados de estabilidad y robustez. Así, por ejemplo, los primeros trabajos sobre el controlador GPC (Clarke y Mohtadi, 1989), (Robinson y Clarke, 1989), (Robinson y Clarke 1991) incluían únicamente algunos resultados de estabilidad usando representación en variables de estado y después se incorporaron algunos otros resultados sobre polinomios de filtrado que mejoraban la robustez.

En los noventa aparecen nuevos trabajos que se centran en la estabilidad y la robustez, destacamos el Constrained Receding Horizon Predictive Control (Clarke y Scattolini, 1991), el Stabilising Input/Output Receding Horizon Control (Mosca, *et al.*, 1990) y el Stable Generalized Predictive Control (Kouvaritakis, *et al.*, 1992).

Es importante destacar que el desarrollo del control predictivo ha sido tal que sus aplicaciones abarcan campos muy dispares, tales como la industria petroquímica (Cutler y Ramaker, 1979) y (Luyben, 1992), control de sistemas flexibles (Lambert, 1987b), plantas solares (Camacho, 1994), tratamiento de aguas residuales (Moreno, 1994), dosificación de anestesia (Linkens y Mahfouf, 1994), generación de electricidad (Rossiter, *et al.*, 1991), la industria cementera (Martín Sánchez y Rodellar, 1996), control del tráfico (Sáez, *et al.*, 2007), etc.

En la actualidad existen excelentes trabajos de revisión que presentan una visión global y objetiva del control predictivo destacamos los libros (Maciejowski, 2002), (Rossiter, 2003), (Camacho y Bordóns, 2004) y (Martín Sánchez y Rodellar, 2005), los cuales constituyen un punto de referencia obligado.

### **2.1.2. Metodología de los controladores predictivos basados en modelos**

La metodología común que comparten todos los controladores predictivos la podemos enunciar de la siguiente manera: en cada instante de tiempo “presente”,  $t$ , la salida futura del proceso,  $y(t+k|t)$ ,<sup>1</sup> es predicha dentro de una ventana temporal

---

<sup>1</sup> Esta notación indica el valor de la variable en el instante futuro  $t+k$ , calculado en  $t$ .

## 2. Control predictivo basado en modelos

---

definida por  $k = 1, 2, \dots, N$ , usando para ello un modelo de la planta a controlar (de Keyser, 1992), (Camacho y Bordóns, 2004). De forma gráfica la encontramos resumida en la Fig 2.1. En la Fig 2.2 podemos observar la estructura básica de un MPC con ligaduras.

Esta metodología define, también, una *trayectoria de referencia*,  $r(t+k|t)$ , que describe cómo se desea conducir la salida del proceso desde su valor actual,  $y(t)$ , hacia sus puntos de consigna futuros,  $w(t+k|t)$ , durante todo el horizonte de predicción dentro de la ventana temporal definida por  $k$ .

El escenario de control futuro se calcula de manera que minimice una determinada *función de coste* o *función objetivo*, que depende de los errores predichos futuros,  $[r(t+k|t) - y(t+k|t)]$ . Esta función objetivo es, normalmente, una función cuadrática, aunque pueden definirse otras, como por ejemplo una función de valor absoluto (Richalet, 1993).

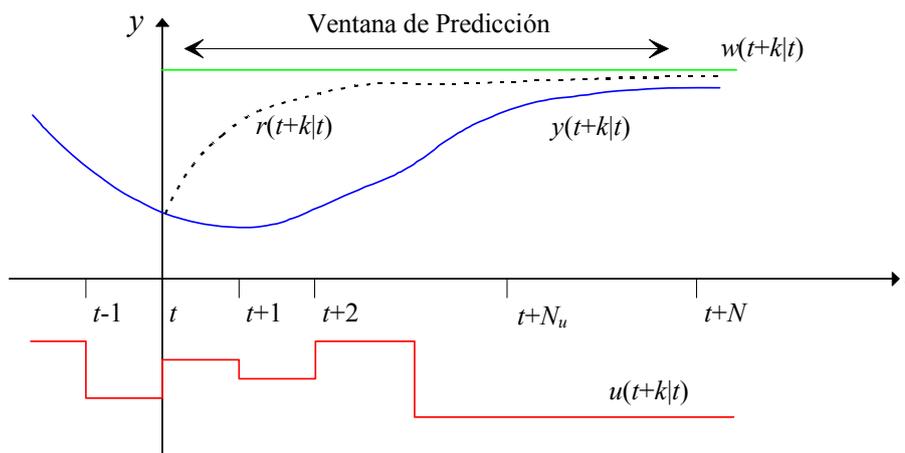


Fig 2.1 Metodología del control predictivo basado en modelos.

Las diferentes estrategias de controladores predictivos usan diferentes modelos para representar la relación existente entre las salidas y las entradas medibles. Algunas de ellas son variables manipuladas y otras pueden considerarse como perturbaciones medibles, compensables mediante alguna acción *feedforward*. Un modelo de las perturbaciones puede ser tomado en cuenta para describir el comportamiento no reflejado por el modelo del proceso, incluyendo el efecto de las entradas no medibles, ruido y errores de modelado. Así pues, el modelo puede ser

separado en dos partes o submodelos aditivos:<sup>2</sup> el modelo de la planta real y el modelo de las perturbaciones, siendo ambas partes necesarias para realizar las predicciones (ver Fig 2.3).

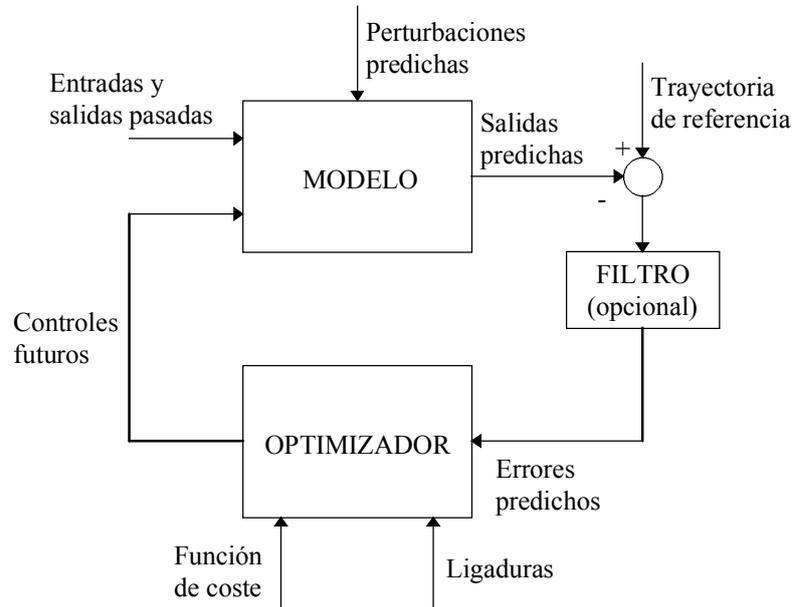


Fig 2.2 Estructura básica de un MPC.

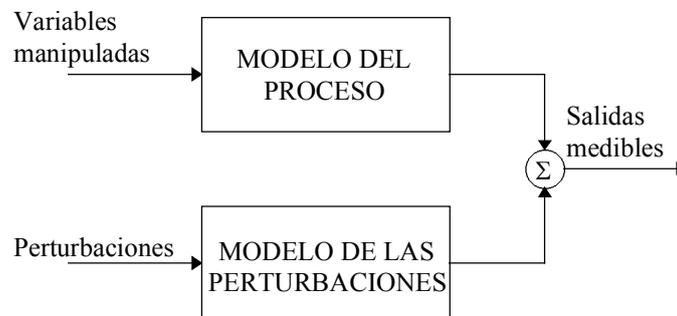


Fig 2.3 Modelo total del proceso como suma de submodelos aditivos.

Dentro de la estrategia de control predictivo, y para el cálculo de la señal de control, es muy importante el concepto de **horizonte móvil** o **deslizante**. Sólo se le aplica a la planta el primer elemento de la secuencia de control “óptima” calculada,  $u(t|t)$ , los demás elementos se desprecian, ya que en el siguiente intervalo de muestreo ya se conoce el valor siguiente de la salida del sistema,  $y(t+1)$ , y se pueden

<sup>2</sup> Al ser los modelos lineales se puede aplicar el principio de superposición.

## 2. Control predictivo basado en modelos

---

actualizar las secuencias de datos. Por consiguiente, utilizaremos  $u(t+1|t+1)$  en lugar de  $u(t+1|t)$ , ya que esta última puede verse más afectada por los errores de modelización, perturbaciones, etc.

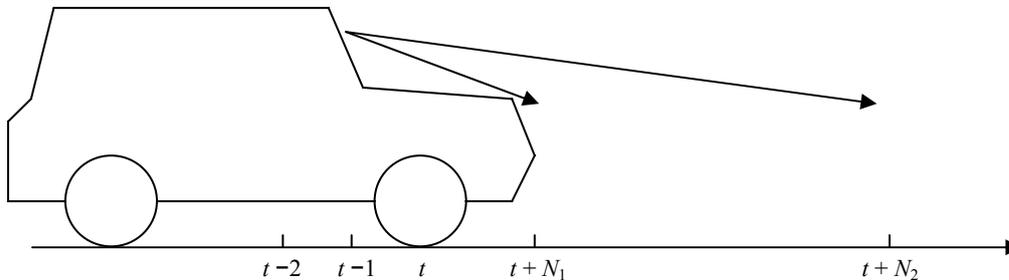


Fig 2.4 Analogía del control predictivo basado en modelos.

Para entender la mecánica del MPC resulta muy interesante la analogía que se hace en (Camacho y Bordóns, 2004), y que podemos observar en la figura anterior, donde se identifica al controlador predictivo con el conductor de un vehículo, que calcula en el instante  $t$  la trayectoria futura del vehículo, tomando como referencia las condiciones de la vía dentro de su campo visual definido entre los instantes  $N_1$  y  $N_2$ . Al instante siguiente,  $t+1$ , el conductor del vehículo recalculará de nuevo la trayectoria futura del vehículo, ya que su campo visual ha variado y se encuentra definido, en este momento, entre los instantes  $N_1+1$  y  $N_2+1$ . Por tanto, el campo visual del conductor depende del instante de tiempo considerado, y por consiguiente, podemos afirmar que tenemos un horizonte móvil o deslizante.

### 2.1.3. Función de coste

Los algoritmos de MPC utilizan diferentes funciones de coste para obtener la ley de control. La idea general consiste en penalizar las discrepancias entre la salida predicha del proceso y la trayectoria de referencia, por una parte, y los esfuerzos de control, por la otra. Normalmente es una función cuadrática, de la forma:

$$J(\Delta u, t) = E \left\{ \sum_{j=N_1}^{N_2} \gamma(j) [r(t+j|t) - y(t+j|t)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j) [\Delta u(t+j-1|t)]^2 \right\} \quad (2.1)$$

Sometido a:  $H\Delta u \leq h$ ,

donde:

- $E\{\cdot\}$  indica el valor esperado.
- $r(t+j|t)$  es la futura trayectoria de referencia.
- $y(t+j|t)$  es la predicción óptima de la salida  $j$  pasos hacia delante calculada con datos conocidos en el instante  $t$ .
- $\Delta u(t+j|t)$  son los incrementos de la señal de control calculados con las predicciones hechas en el instante  $t$ .
- $N_1$  es el **horizonte inferior de coste** y  $N_2$ , el **horizonte superior de coste**. Marcan los instantes de tiempo en los que se desea que la salida del proceso siga a la referencia, es decir, definen lo que se denomina un **horizonte de coincidencia**. Así, por ejemplo, si el proceso tiene un retardo  $d$ , se toma un valor de  $N_1 > d$ , ya que no tendría sentido tener en cuenta los instantes previos, puesto que la salida del proceso no comenzará a evolucionar hasta el instante  $t+d$ .  $N$  es el número de predicciones a realizar  $N = N_2 - N_1 + 1$ .
- $N_u$  es el **horizonte de control**; se determina de tal forma que  $N_u \leq N_2$ . Éste cuantifica el número de grados de libertad de la señal de control, e influye en la actividad del controlador: valores pequeños producen señales de control suaves, mientras que valores grandes originan señales de control más agresivas que, en algunos casos, pueden llegar a desestabilizar al sistema.
- Los coeficientes  $\gamma(j)$  son secuencias de pesos que ponderan los errores futuros ( $e = r - y$ ), usualmente se utilizan valores constantes o secuencias exponenciales. También se puede seleccionar un vector de pesos que únicamente tenga unos cuantos elementos distintos de cero:  $\bar{\gamma} = [0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]'$ . En este caso, define unos **puntos de coincidencia**. Distintos algoritmos MPC pueden utilizar diferentes puntos de coincidencia; por ejemplo, EHAC (Ydstie, 1984) utiliza un único punto  $j = N_2$ ; PFC define unos pocos puntos de coincidencia, seleccionados para maximizar la robustez.

## 2. Control predictivo basado en modelos

---

- Los coeficientes  $\lambda(j)$  son secuencias de pesos que penalizan las variaciones en la señal de control. Valores cercanos a 0 permiten variaciones bruscas, mientras que valores grandes originan señales de control más suaves. Existen guías para la elección de esta secuencia de pesos como la propuesta en (Camacho y Bordóns, 2004), donde se proponen secuencias de pesos variables de forma exponencial.
- $H$  y  $h$  son una matriz y un vector, respectivamente, que definen el conjunto de restricciones que van a afectar al sistema.

### 2.1.4. Ecuaciones de predicción

Basándonos en la linealidad de los modelos y, por tanto, en el principio de superposición, la salida predicha del proceso es la suma de dos efectos, como podemos ver en la Fig 2.5 y se describe en la expresión siguiente:

$$y(t+k|t) = y_c(t+k|t) + y_f(t+k|t) \quad (2.2)$$

- $y_c$  es la **respuesta controlada**, que depende de las futuras acciones de control,  $u(t+k|t)$ , que han de ser determinadas.
- $y_f$  es la **respuesta libre**, suponiendo que no hay futuras acciones de control, y por tanto, el control permanece en el valor que tiene en el instante de tiempo  $t$ .

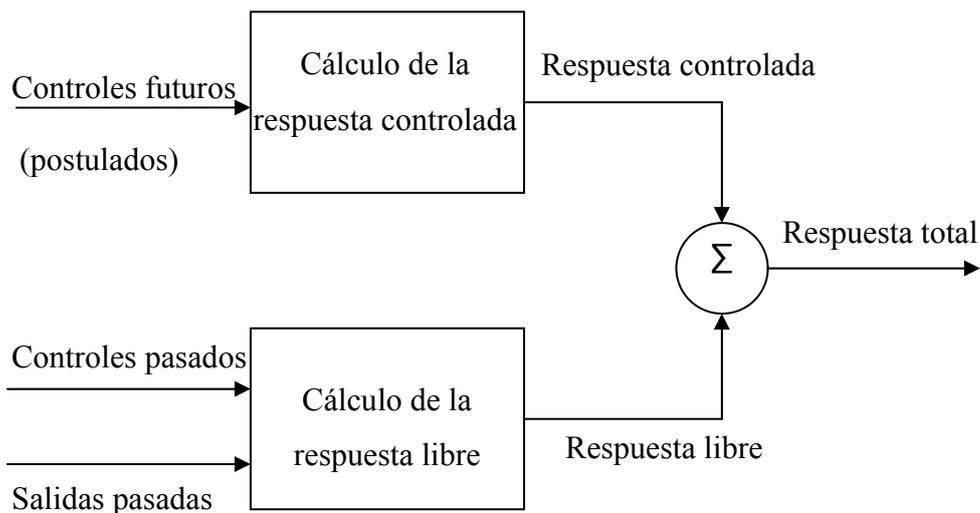


Fig 2.5 Efectos que contribuyen a la respuesta total del proceso.

Es importante destacar que las ecuaciones de predicción se formulan normalmente en términos de  $\Delta u(t+k|t)$  debido a la naturaleza de los modelos de perturbaciones utilizados.

Estas ecuaciones de predicción, para un caso general, toman la forma siguiente (de Keyser, 1992), (Camacho y Bordóns, 2004):

$$\bar{y}(t) = G\bar{\Delta u}(t) + \bar{y}_f(t), \quad (2.3)$$

donde  $G$  es una matriz que contiene los coeficientes  $g_i$  de respuesta al escalón del proceso.

$$G = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & \dots & 0 \\ g_2 & g_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_N & g_{N-1} & \dots & g_{N-N_u+1} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

### 2.1.5. Obtención de la ley de control

Definamos primero el vector de errores futuros:

$$\bar{E} = [e(t+1|t), e(t+2|t), \dots, e(t+N|t)]', \quad (2.5)$$

donde  $e(t+k|t) = r(t+k|t) - y(t+k|t)$ . Sustituyendo (2.3) en (2.5), se obtiene:

$$\bar{E} = \bar{E}_0 - G\bar{\Delta u}, \quad (2.6)$$

con  $\bar{E}_0 = [r(t+1|t) - y_f(t+1|t), \dots, r(t+N|t) - y_f(t+N|t)]'$ .

La ley de control incremental tiene la siguiente expresión:

$$\bar{\Delta u}(t) = [\Delta u(t|t), \Delta u(t+1|t), \Delta u(t+2|t), \dots, \Delta u(t+N_u-1|t)]'. \quad (2.7)$$

Si se sustituyen las ecuaciones de predicción (2.3) en la expresión de la función de coste (2.1), se obtiene la expresión general de la función de coste:

$$J(\bar{\Delta u}, t) = \bar{\Delta u}' [G' \Gamma G + \Lambda] \bar{\Delta u} - 2\bar{E}_0' \Gamma G \bar{\Delta u} + \bar{E}_0' \Gamma \bar{E}_0, \quad (2.8)$$

en donde  $\Gamma$  y  $\Lambda$  son matrices diagonales que contienen los factores de peso  $\gamma(j)$  y  $\lambda(j)$ , respectivamente, en el caso general multivariable.

## 2. Control predictivo basado en modelos

---

La secuencia de controles óptimos,  $\overline{\Delta u}^*$ , se obtiene mediante la minimización de la función de coste (2.8):

$$\overline{\Delta u}^* = \arg \min_{\Delta u} (J(\overline{\Delta u}, t)). \quad (2.9)$$

En este proceso de minimización, se asume normalmente que la señal de control,  $u(t)$ , permanece constante a partir del instante de tiempo  $t + N_u$ .

En el caso de considerar un control sin que las ligaduras estén activas, y teniendo en cuenta que la función de coste  $J$  es cuadrática para las variables independientes y las ecuaciones del modelo son lineales, es posible obtener analíticamente la secuencia de control óptima (de Keyser, 1991).

$$\overline{\Delta u}^* = (G' \Gamma G + \Lambda)^{-1} G' \Gamma \overline{E}_0 = K \overline{E}_0, \quad (2.10)$$

que es una ley de control lineal e invariante en el tiempo, formada por una matriz de ganancias del controlador,  $K$ , que multiplica al vector  $\overline{E}_0$ .

Como  $K$  es invariante en el tiempo se puede calcular fuera de línea, y será constante mientras el modelo del sistema no varíe.<sup>3</sup> Debido a que en la estrategia de horizonte móvil sólo se aplica el primer elemento de  $\overline{\Delta u}^*(t)$  al proceso, entonces es suficiente con el cálculo de la fila superior de la matriz  $K$ , que llamaremos  $k_I$ , con lo que se pueden acelerar notablemente los cálculos en caso de ser necesario.

Como podemos observar en la expresión (2.10), el cálculo de la ley de control implica la obtención de una matriz inversa. La presencia del término  $\Lambda$  en esta inversión supone una ventaja, ya que éste puede contribuir a un mejor condicionamiento numérico de la misma.

En el caso de que se incorporen restricciones al problema de minimización, la solución se obtiene, usualmente, mediante la utilización de métodos numéricos iterativos, aunque también es posible obtener una solución analítica mediante

---

<sup>3</sup> En aplicaciones de control adaptativo es necesario recalcular la matriz de ganancias del controlador cada vez que se obtiene un nuevo modelo del sistema.

técnicas matemáticas que incluyen multiplicadores de Lagrange (Mañoso, 1998). La formulación del problema en términos de variables de estado conduce a una ley de control por realimentación del estado,  $u(k) = -K(x(k)) \cdot x(k)$ , en la que la matriz de ganancias  $K(x(k))$  no es constante sino una función del estado. En este caso el cálculo de la señal de control puede hacerse de manera muy rápida; por tanto, esta técnica se propone para el control en tiempo real de sistemas con periodos de muestreo muy rápidos (Tøndel *et al.*, 2001), (Johansen, 2002), (Johansen y Grancharova, 2003).

### 2.2. Control predictivo generalizado

El control predictivo generalizado, más conocido por sus siglas en inglés *Generalized Predictive Control* (GPC), es un miembro de la familia de MPCs desarrollado a mediados de los 80, dentro del ámbito académico, por el grupo del profesor Dr. D.W. Clarke en la Universidad de Oxford (Clarke, *et al.*, 1987a,b), (Clarke y Mohtadi, 1988). Dentro del ámbito industrial fue desarrollado, algunos años antes, el controlador predictivo conocido como *Dynamic Matrix Control* (DMC) (Cutler y Ramaker, 1979), el cual comparte muchos puntos de coincidencia con GPC y las ideas que subyacen a ambos son las mismas (Prada, *et al.*, 1994). Sin embargo, DMC tiene una formulación completamente determinista y, por tanto, no incluye explícitamente ningún modelo de perturbaciones (Morari y Lee, 1997). Por el contrario, los aspectos de tipo estocástico juegan un papel importante en el controlador GPC (Sanchis, 2002).

La inmensa mayoría de los algoritmos de control predictivo han sido desarrollados siguiendo una metodología discreta, aunque existen también implementaciones continuas del control predictivo como el *Continuous-time Generalized Predictive Control* (CGPC) (Demircioğlu y Gawthrop, 1991), el cual es una interpretación continua del algoritmo discreto de GPC.

#### 2.2.1. Ecuaciones de predicción

La formulación de GPC esta basada en un modelo estocástico conocido como ARIMAX o CARIMA, el cual presenta la siguiente expresión matemática:

## 2. Control predictivo basado en modelos

---

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t) + \frac{T(z^{-1})}{\Delta} \xi(t), \quad (2.11)$$

donde:

- $y(t)$  es la salida del sistema.
- $u(t)$  es la acción de control.
- $\xi(t)$  representa la perturbación no medible (ruido blanco de media cero).
- $T(z^{-1})$  representa a un polinomio que actúa como filtro de las perturbaciones.
- $\Delta$  representa al operador incremento, cuya expresión es  $(1-z^{-1})$ .
- $B$  es la expresión discreta del numerador de la función de transferencia del proceso.
- $A$  es la expresión discreta del denominador de la función de transferencia del proceso.

La obtención del predictor se realiza mediante la resolución de la siguiente ecuación diofantina:

$$T(z^{-1}) = E_j(z^{-1})A\Delta + z^{-j}F_j(z^{-1}), \quad (2.12)$$

la cual conduce a la siguiente ecuación de predicción:

$$y(t+j|t) = \frac{F_j}{T} y(t) + \frac{E_j B}{T} \Delta u(t+j|t). \quad (2.13)$$

Esta expresión (2.13) es función de los valores de las señales conocidas en el instante  $t$  y también de los valores del control futuro que tienen que ser determinados. Para distinguir controles pasados y futuros, se plantea una segunda ecuación diofantina:

$$E_j(z^{-1})B(z^{-1}) = G_j(z^{-1})T(z^{-1}) + z^{-j}\Phi_j(z^{-1}), \quad (2.14)$$

que conduce a la ecuación de predicción:

$$y(t+j|t) = G_j \Delta u(t+j|t) + \Phi_j u^f(t) + F_j y^f(t). \quad (2.15)$$

en donde el polinomio  $G_j$  contiene los  $j$  primeros coeficientes de la respuesta a un escalón de la planta  $B/A\Delta$ , para más detalles consultar (Bitmead, *et al.*, 1990), y en donde  $u^f(t)$  e  $y^f(t)$  son las versiones filtradas de  $\Delta u(t)$  e  $y(t)$  por  $T(z^{-1})$ , cuyos valores son conocidos en el instante de tiempo  $t$  y tienen la siguiente expresión:

$$\begin{cases} u^f(t) = T^{-1}(z^{-1})\Delta u(t) \\ y^f(t) = T^{-1}(z^{-1})y(t). \end{cases} \quad (2.16)$$

A partir de la expresión (2.15) se comprueba fácilmente que la respuesta libre del sistema viene dada por:

$$y_f(t+j|t) = \Phi_j u^f(t) + F_j y^f(t), \quad (2.17)$$

es decir, la ecuación de predicción admite la expresión general (2.2).

### 2.2.2. Versatilidad de GPC

Tomando diferentes elecciones para los elementos que forman el MPC (modelo de predicción, trayectoria de referencia, función de coste, ...) se pueden obtener varios tipos de controladores: DMC, GPC, etc. Estos controladores también se distinguen por la cantidad de parámetros de diseño de que disponen, tal como se muestra, de forma comparativa en la Tabla 2.1 (Clarke y Mohtadi, 1989).

Tabla 2.1 Variables de diseño de algunos controladores predictivos ( $d$ : tiempo de retardo conocido).

Método	$N_1$	$N_2$	$N_u$	$\lambda$
GPC	$\sqrt{\quad}$	$\sqrt{\quad}$	$\sqrt{\quad}$	$\sqrt{\quad}$
DMC	1	$\sqrt{\quad}$	$\sqrt{\quad}$	$\sqrt{\quad}$
EHAC	$N > d$	$N$	1, $N$	$\times$
EPSAC	1	$N$	1	$\times$
IDCOM/MAC	1	$N$	$N$	$\times$

Como podemos observar en la tabla anterior, GPC es más flexible que otras estrategias de control predictivo debido a la gran cantidad de parámetros de diseño de que dispone. Debido a esto, GPC es capaz de generar una gran variedad de acciones

## 2. Control predictivo basado en modelos

---

de control con distintas características mediante la adecuada elección de sus parámetros de diseño, tal como se muestra en la Tabla 2.2 (Clarke, *et al.*, 1987b), (Mohtadi, 1987). Es por ello por lo que se ha tomado la decisión de elegir este tipo de formulación de control predictivo como base para su generalización al ámbito fraccionario.

Tabla 2.2 Casos especiales de GPC ( $n$ : número de estados<sup>4</sup>, E: estabilizable; D: detectable; O: observable, C: controlable).

$N_u$	$N_1$	$N_2$	$\lambda$	Planta	Control
1	1	10	0	E,D	“Por defecto”
1	1	$\rightarrow\infty$	0	E,D	<i>Mean-level</i>
$N_2$	1	$\rightarrow\infty$	$>0$	E,D	LQ
$N_2-n+1$	1	$\rightarrow\infty$	0	E,D	LQ
$n$	$n$	$\geq 2n-1$	0	O,C	<i>Dead-beat</i>

### 2.2.3. Recomendaciones de ajuste del controlador

Tanto los horizontes como los factores de peso contribuyen a las características de funcionamiento del controlador, y cubren una amplia gama de posibilidades. Estos parámetros influyen de manera decisiva en el comportamiento y estabilidad del lazo cerrado, por lo que su adecuada elección es de vital importancia. Existen unas recomendaciones estándar “por defecto”, que se han mostrado adecuadas para la mayoría de los procesos (Clarke, *et al.*, 1987b):

- $N_1$ : si el retardo  $d$  del sistema es conocido, se debe tomar  $N_1 \geq d$  para evitar cálculos superfluos. Si es desconocido o variable, el valor 1 es válido, definiendo el modelo de manera que pueda englobar el máximo retardo del proceso.
- $N_2$ : se debe tomar un valor del orden del tiempo de subida de la planta; si el periodo de muestreo es adecuado, un valor de 10 suele ser suficiente.

---

<sup>4</sup>  $n = \max[\text{grado}(A\Delta), \text{grado}(B) + d]$ .

- $N_u$ : se debe tomar igual o mayor que el número de polos inestables o mal amortiguados del proceso. Para la mayoría de los procesos industriales y, en general, para procesos estables en lazo abierto, un valor de 1 suele producir una acción de control aceptable.
- $\lambda$ : valores diferentes de 0 contribuyen a mejorar la robustez del algoritmo de optimización (Clarke y Mohtadi, 1989). En general son suficientes valores pequeños, del orden de  $10^{-6}$ , a no ser que la aplicación requiera un mayor amortiguamiento de la señal de control (por ejemplo, en la fase de identificación de los modelos y sintonía del controlador).
- $\gamma$ : se suele tomar igual a 1, aunque puede tomar valores diferentes dependiendo del tipo de aplicación.

#### 2.2.4. Lazo cerrado

En el caso de que el sistema no presente restricciones o éstas no estén activas, tendremos una ley de control que es lineal e invariante en el tiempo y, por tanto, es posible hallar su función de transferencia.

El sistema de control en lazo cerrado se puede expresar tal como se muestra en la Fig 2.6, en donde  $R$ ,  $S$  y  $T$  son unos polinomios específicos que definen al controlador.

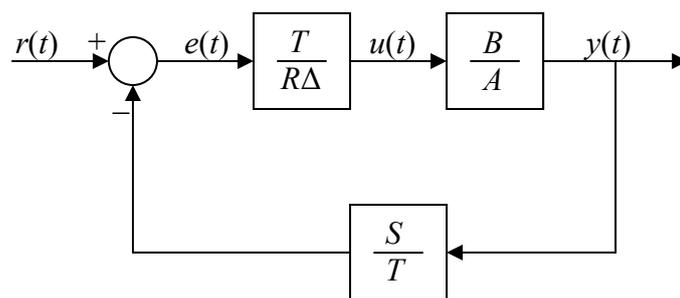


Fig 2.6 Esquema general del lazo de control.

A partir de la figura anterior es inmediato comprobar que la función de transferencia discreta en lazo cerrado es:

## 2. Control predictivo basado en modelos

---

$$\frac{y(t)}{r(t)} = \frac{TB}{R\Delta A + SB}. \quad (2.18)$$

La función de transferencia en lazo abierto es:

$$FTLA \equiv \frac{BS}{R\Delta A}, \quad (2.19)$$

La ecuación característica del sistema se deduce de (2.18):

$$R\Delta A + SB = 0. \quad (2.20)$$

También es fácil comprobar que:

$$R\Delta u(t) = Tr(t) - Sy(t). \quad (2.21)$$

Como hemos visto la ley de control viene dada por:

$$\overline{\Delta u}^* = K\overline{E}_0. \quad (2.22)$$

Para determinar las expresiones que definen a los polinomios del controlador  $R$ ,  $S$  y  $T$ , expresaremos (2.22) en la misma forma que (2.21), definiendo:

$$k_1 = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]K, \quad (2.23)$$

es decir, tomamos la fila superior de la matriz  $K$ .

La primera componente del vector de control óptimo es:

$$\Delta u^*(t | t) = k_1 \overline{E}_0(1) = k_1 (w(1) - y_f(1)). \quad (2.24)$$

La respuesta libre  $y_f$  de GPC viene dada por la expresión (2.17). Sustituyendo:

$$\Delta u = k_1 (r - \Phi u^f - F y^f), \quad (2.25)$$

$\Phi$  y  $F$  son matrices formadas por los polinomios  $\Phi_j$  y  $F_j$  respectivamente.

Aplicando la definición de  $u^f$  e  $y^f$ , según (2.16)

$$\begin{aligned} \Delta u &= k_1 (r - \Phi T^{-1} \Delta u - F T^{-1} y) \\ &= \sum_{i=N_1}^{N_2} k_{1i} r(t+i) - \sum_{i=N_1}^{N_2} k_{1i} \frac{\Phi_i}{T} \Delta u(t) - \sum_{i=N_1}^{N_2} k_{1i} \frac{F_i}{T} y(t), \end{aligned} \quad (2.26)$$

en donde  $k_{1i}$  representa cada una de las  $N_2$  componentes de  $k_l$ . Esto conduce a la siguiente ecuación para el controlador:

$$\left( T + \sum_{i=N_1}^{N_2} k_{1i} \Phi_i \right) \Delta u(t) = \left( T \sum_{i=N_1}^{N_2} k_{1i} z^{-N_2+i} \right) r(t + N_2) - \left( \sum_{i=N_1}^{N_2} k_{1i} F_i \right) y(t). \quad (2.27)$$

Los polinomios  $R$  y  $S$  se obtienen por simple comparación con (2.21):

$$R = \frac{T + \sum_{i=N_1}^{N_2} k_{1i} \Phi_i}{\sum_{i=N_1}^{N_2} k_{1i} z^{-N_2+i}}, \quad S = \frac{\sum_{i=N_1}^{N_2} k_{1i} F_i}{\sum_{i=N_1}^{N_2} k_{1i} z^{-N_2+i}}, \quad (2.28)$$

de donde se puede concluir

$$\begin{cases} \text{grado}(R) = \max(\text{grado}(B), \text{grado}(T)) \\ \text{grado}(S) = \max(\text{grado}(A), \text{grado}(T) - \max(N_1, d)), \end{cases} \quad (2.29)$$

con  $d$  como el retardo de la planta.

A partir de la función de transferencia de la planta (2.11) y de (2.21) se obtiene la siguiente expresión para el lazo cerrado:

$$(A\Delta R + BS)y(t) = BTr(t + N_2) + TR\xi(t). \quad (2.30)$$

### 2.2.5. El prefiltro polinómico $T(z^{-1})$

Desde un punto de vista práctico,  $T$  se puede considerar como un filtro debido, principalmente, a la naturaleza incremental de la ley de control. La expresión (2.16) muestra cómo las señales  $u(t)$  e  $y(t)$  entran en la ley de control filtradas por  $1/T$ , lo que encadenado con la operación  $\Delta$  origina un filtro de paso de banda. Este filtro elimina por un lado las bajas frecuencias, mediante la operación  $\Delta$ , para evitar desviaciones del control y atenúa las altas frecuencias, mediante  $1/T$ , para disminuir el efecto de las perturbaciones de alta frecuencia (Lambert, 1987a).

Las perturbaciones de alta frecuencia son causadas principalmente por la presencia de dinámicas que no han sido convenientemente modeladas y perturbaciones de alta frecuencia no medibles. En ambas situaciones es de esperar que el polinomio  $T$  mejore la robustez del controlador GPC. Si no hay dinámica no

modelizada (Robinson y Clarke, 1989), el modelo estimado se corresponde perfectamente con la planta real, el efecto de  $T$  se limita al rechazo de las perturbaciones, no influyendo en el seguimiento de la señal de referencia (Camacho y Bordóns, 2004).

Si no se cumple la premisa de que el modelo describe perfectamente al proceso, entonces el polinomio  $T$  no se cancela, y por tanto, influye en la estabilidad y en cómo la salida sigue a la referencia.

Desde otro punto de vista,  $T$  se usa como un parámetro de diseño que puede afectar a la estabilidad robusta. En este caso las predicciones no serán óptimas pero la robustez con respecto a las incertidumbres puede ser alcanzada. Muchos autores consideran que  $T$  puede considerarse como un filtro y como un observador (Camacho y Bordóns, 2004). El uso efectivo de observadores puede jugar un papel esencial en el diseño robusto de controladores predictivos.

Por consiguiente, algunos autores sostienen que existe, en efecto, un diseño en dos etapas. Una primera etapa para diseñar cómo va a seguir el sistema a la señal de referencia y, posteriormente, una segunda para mejorar la robustez del mismo a través del polinomio  $T$  (Rossiter, 2003), siempre y cuando el modelo describa perfectamente al proceso.

### **Selección de $T$**

La selección del filtro polinómico  $T$  no es una tarea trivial. En (Robinson y Clarke, 1991) podemos encontrar algunas guías para su elección para sistemas *mean-level* y *deadbeat* GPC. No existe una estrategia de diseño sistemático para el filtro  $T$ . Usualmente se asume que este filtrado aumenta la robustez frente a las incertidumbres de alta frecuencia. No obstante esto no siempre es verdad, como se muestra en (Yoon y Clarke, 1995).

Más recomendaciones para su elección las podemos encontrar en (Soeterboek, 1992), donde se destaca que la robustez mejora si se escoge  $T = A(1 - \tau z^{-1})$  cuando  $\tau$  aumenta. Sin embargo, en (Megías *et al.*, 1997) se muestra que  $\tau$  no puede aumentar ilimitadamente para mejorar la robustez porque el

comportamiento del sistema se deteriora. En (Yoon, 1994), (Yoon y Clarke, 1995) se da una recomendación más general, la cual se muestra a continuación:

$$T(z^{-1}) = A(1 - \tau z^{-1})^{N_1}, \quad (2.31)$$

donde  $A$  es el denominador del modelo escogido para la planta,  $N_1$  es el horizonte inferior de coste elegido y  $\tau$  se recomienda que tome un valor próximo al polo dominante de  $A$ .

### 2.2.6. Estudio de la robustez

La mayoría de las formulaciones de los problemas de control robusto comparten la siguiente premisa: la planta a controlar se asume que es conocida pero sólo de forma aproximada. En una situación real, ningún modelo puede reflejar fidedignamente la dinámica del proceso físico real. Por tanto, pueden aparecer problemas de rendimiento o incluso de inestabilidad debido a las diferencias entre modelo y planta real. De este modo, el modelo con el que se diseña el controlador (nominal) es una aproximación al verdadero proceso sobre el cual éste actuará.

En la práctica es muy importante que los controladores diseñados funcionen adecuadamente, incluso cuando el comportamiento dinámico del proceso real no sea exactamente el descrito por el modelo nominal. Un sistema de control es robusto si es insensible a las diferencias entre el proceso a controlar y el modelo a partir del cual ha sido diseñado (Skogestad y Postlethwaite, 1996).

La información del proceso que no queda reflejada en el modelo, denominada *incertidumbre del modelo*, puede tener su origen en diferentes fuentes, como: desconocimiento parcial del proceso, variaciones paramétricas, complejidad del proceso, uso deliberado de modelos de grado bajo, etc.

Esta última fuente, el uso de modelos de grado bajo de la planta, es la principal fuente de incertidumbre cuando trabajamos en el plano discreto con procesos de naturaleza fraccionaria, puesto que, como comentaremos posteriormente, la discretización de estos procesos conducen a funciones de transferencia con infinitos términos. Es decir, el modelo discreto finito de un proceso fraccionario es siempre, por definición, aproximado y su grado siempre será menor al real.

## 2. Control predictivo basado en modelos

---

Por otro lado, todo buen diseño de control debe rechazar satisfactoriamente las perturbaciones. Es decir, todas aquellas señales espúreas que bajo condiciones ideales deberían ser nulas, pero que están presentes, en mayor o menor medida, en todo sistema real. El diseño final de un sistema de control robusto debe tolerar tanto las incertidumbres del modelo como las perturbaciones externas.

Así pues, proponemos un análisis de robustez para el GPC utilizando las funciones de sensibilidad. De esta forma tendremos un criterio objetivo, junto con los márgenes de ganancia y fase, para la elección de un controlador robusto.

### Funciones de sensibilidad

El control predictivo GPC sin restricciones da lugar a una ley de control lineal e invariante en el tiempo. Por tanto, se puede plantear un análisis de las sensibilidades de estos sistemas de control en lazo cerrado.

Desde un punto de vista formal, podemos definir sensibilidad como la variación relativa de una función de transferencia frente a variaciones relativas de uno o más parámetros.

$$S_q^G = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta G(s)}{G(s)}}{\frac{\Delta q}{q}} = \frac{\partial G}{\partial q} \frac{q}{G} \quad (2.32)$$

En la literatura podemos encontrar diferentes autores que hacen uso de las llamadas funciones de sensibilidad para estudiar la robustez de sus sistemas de control predictivo. Por ejemplo, Sanchis (2002) hace uso de las clásicas funciones de sensibilidad,  $S$  y  $T$ , las cuales van a ser usadas también en este trabajo.

Para su deducción basta con añadir al diagrama de bloques de la Fig 2.6 una perturbación,  $d(t)$ , a su salida, quedando el diagrama de bloques como se muestra en la Fig 2.7.

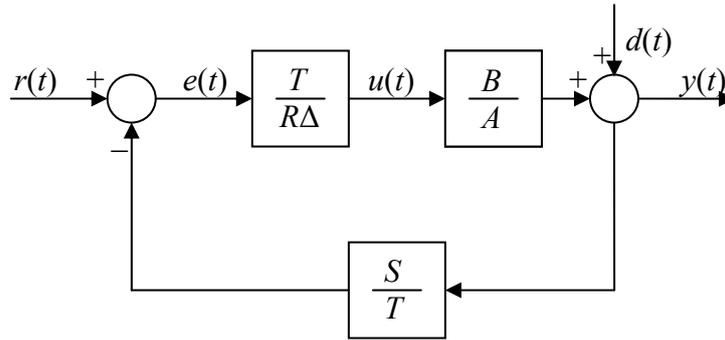


Fig 2.7 Diagrama del GPC en lazo cerrado con perturbación a su salida.

A partir del diagrama anterior, podemos obtener las clásicas funciones de sensibilidad  $\mathcal{S}$  y de sensibilidad complementaria  $\mathcal{T}$ , las cuales tienen las siguientes expresiones:

$$\mathcal{S}(z^{-1}) = \frac{R(z^{-1})\Delta A(z^{-1})}{R(z^{-1})\Delta A(z^{-1}) + B(z^{-1})S(z^{-1})}. \quad (2.33)$$

$$\mathcal{T}(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})S(z^{-1})}{R(z^{-1})\Delta A(z^{-1}) + B(z^{-1})S(z^{-1})}. \quad (2.34)$$

Recordamos que la función de sensibilidad,  $\mathcal{S}$ , cuantifica la relación existente entre la variable controlada,  $Y(z^{-1})$ , y la perturbación,  $D(z^{-1})$ . Por otro lado, la función de sensibilidad complementaria,  $\mathcal{T}$ , cuantifica la relación existente entre la variable controlada,  $Y(z^{-1})$ , y la referencia del sistema,  $r(z^{-1})$ .

Es importante recordar que  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{T}$  no son independientes, ya que  $\mathcal{S} + \mathcal{T} = 1$ . Como consecuencia de esto, es bien conocida la siguiente relación:

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}(e^{-j\omega T})| &\ll 1, \quad \forall \omega \in [0, \omega_1], \\ |\mathcal{T}(e^{-j\omega T})| &\ll 1, \quad \forall \omega \in [\omega_2, \infty), \end{aligned} \quad (2.35)$$

para unos ciertos  $\omega_1$  y  $\omega_2$  tales que  $\omega_2 > \omega_1$ .

Además de las clásicas funciones de sensibilidad  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{T}$ , otros autores han definido otras funciones de sensibilidad dependiendo del parámetro concreto a estudiar. De este modo, podemos citar a Rossiter (2003), que hace uso de diferentes funciones de sensibilidad para estudiar determinadas variaciones de interés.

También ha de tenerse en cuenta que los test basados en las funciones de sensibilidad son sólo condiciones suficientes y no necesarias para la estabilidad robusta del sistema, por tanto, ofrecen unos márgenes de robustez muy conservativos, de tal forma que los márgenes reales serían mucho mayores (Sanchis, 2002).

### **2.3. Conclusiones**

En este capítulo se ha presentado de forma general la metodología MPC haciendo un resumen de sus características más destacadas y una revisión histórica de su evolución.

De forma particular, se ha estudiado uno de los miembros más extendidos de la familia MPC, el así llamado GPC, que nos va a servir como base, en futuros capítulos de esta Tesis, para generalizar la metodología de control predictivo utilizando las herramientas que nos ofrece el cálculo fraccionario.

# Capítulo 3

## Cálculo Fraccionario: Aplicación al control de sistemas

En este capítulo se presentará un estudio introductorio al cálculo fraccionario, donde se hará un amplio repaso a conceptos y definiciones básicas, centrándonos, principalmente, en su aplicación en la teoría de control.

En esta línea se repasarán los conceptos fundamentales de estabilidad en sistemas de orden fraccionario, además de presentar un breve repaso de las diversas metodologías de control que han sido generalizadas usando éstas herramientas.

También se repasarán las aproximaciones discretas de los operadores fraccionarios, muy necesarias, como veremos posteriormente, para obtener implementaciones reales y simulaciones de este tipo de sistemas, siendo fundamentales para la obtención de modelos discretos finitos necesarios para la obtención del controlador predictivo.

Para finalizar, se propondrá un nuevo tipo de aproximación discreta de los operadores fraccionarios basada en los polinomios de Chebyshev. Esta aproximación presenta la ventaja de conseguir un alto grado de precisión con la función aproximada usando un reducido número de términos en la función que define la aproximación.

#### 3.1. Definiciones básicas

El cálculo fraccionario es una herramienta matemática que permite la derivación e integración de funciones con órdenes no necesariamente enteros. Así, esta teoría generaliza la noción de derivada,  $D^n$ , a aquellos casos en los cuales el orden de diferenciación,  $n$ , presenta un orden negativo, irracional o incluso imaginario (Oldham y Spanier, 1974), permitiendo, por ejemplo, cálculos del tipo derivada de orden  $\frac{1}{2}$  de una función.

Es importante destacar que esta generalización puede ser llevada a cabo de varias maneras, conduciendo, por tanto, a definiciones ligeramente diferentes (Valerio, 2005).

En el dominio del tiempo, los operadores derivada e integral fraccionaria vienen definidos por la operación de convolución, por lo que son especialmente útiles para describir fenómenos de memoria tales como la difusión, la viscoelasticidad, el transporte de masa, etc. En el dominio de Laplace, estas operaciones se corresponden con el operador  $s^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Por tanto, su uso está especialmente indicado cuando se pretende modelar o controlar sistemas que tienen o para los que se persiguen respuestas en frecuencia, cuyas curvas de magnitud tienen pendientes que son múltiplos no enteros de  $20 \text{ dB/dec}$  y/o curvas de fase con valores constantes que son múltiplos no enteros de  $\pi/2$ .

Cabe destacar que los operadores derivada e integral fraccionaria deben de satisfacer las mismas condiciones que en el caso entero, es decir, cuando se derive o integre con orden entero usando las definiciones de los operadores fraccionarios, debe de obtenerse el mismo resultado que cuando se realizan estas operaciones usando la metodología *clásica*. A continuación se procederá a presentar someramente las definiciones más usuales de los operadores fraccionarios:

- Integral fraccionaria de Riemann–Liouville:

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (3.1)$$
$$t > 0, \alpha \in \mathbb{R}^+,$$

donde  $\Gamma(\alpha)$  representa la función Gamma (Oldham y Spanier, 1974).

- Derivada fraccionaria de Riemann–Liouville:

$$D^\alpha f(t) = D^m \left[ I^{m-\alpha} f(t) \right] = \frac{d^m}{dt^m} \left[ \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau \right] \quad (3.2)$$

$$m-1 < \alpha < m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Es observable que el operador de Riemann–Liouville para la operación derivada es más complejo que el usado en el caso anterior para la operación integral (3.1), es decir, no se puede obtener una expresión válida para la derivada fraccionaria cambiando el orden  $\alpha$  por  $-\alpha$ . Esto es debido a que hay que tomar ciertas precauciones con el objeto de garantizar la convergencia de las integrales y preservar las propiedades de la derivación de orden entero (Vinagre, 2001).

- Derivada fraccionaria de Caputo:

$$D^\alpha f(t) = I^{m-\alpha} \left[ D^m f(t) \right] = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau \quad (3.3)$$

$$m-1 < \alpha < m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Se puede observar que esta definición es más restrictiva que la anterior de Riemann–Liouville (3.2), ya que esta definición requiere la integrabilidad absoluta de la derivada de orden  $m$  de la función  $f(t)$  (Podlubny, 1999b). La ventaja es evidente, ya que esta definición da lugar a condiciones iniciales físicamente interpretables, es decir, los valores iniciales vienen dados por derivadas de orden entero.

- *Diferintegral* de Grünwald–Letnikov:

En matemáticas, la combinación de la diferenciación y la integración en un mismo operador recibe el nombre de diferintegral. Dentro del cálculo fraccionario se usa la definición propuesta por Grünwald–Letnikov cuya expresión se muestra a continuación.

$$D^\alpha f(t)_{t=kh} = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(kh - jh). \quad (3.4)$$

Esta definición tiene un gran interés ya que permite la evaluación numérica de problemas de cálculo fraccionario (Podlubny, 1999b), puesto que

encontrar la expresión analítica no es tarea fácil en muchas ocasiones. Esta expresión está basada en la generalización de la fórmula de la diferencial de orden entero (3.5):

$$D^n f(t)_{t=kh} = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-n} \Delta^n f(t)_{t=kh}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.5)$$

La **transformada de Laplace** es una herramienta fundamental en el estudio de los sistemas dinámicos lineales e invariantes en el tiempo. Por tanto, es importante definir las expresiones de estas transformadas para los operadores vistos anteriormente:

- Integral fraccionaria de Riemann–Liouville:

$$L\{I^\alpha f(t)\} = s^{-\alpha} F(s). \quad (3.6)$$

- Derivada fraccionaria de Riemann–Liouville:

$$L\{D^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k [D^{\alpha-k-1} f(t)]_{t=0} \quad (3.7)$$

$$m-1 < \alpha < m.$$

En este caso, no se puede dar una interpretación física a los valores límite de las derivadas fraccionarias para  $t=0$ , ya que estas condiciones iniciales vienen definidas en forma de derivadas fraccionarias y no en derivadas de orden entero físicamente interpretables.

- Derivada fraccionaria de Caputo:

$$L\{D^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} [f^{(k)}(t)]_{t=0} \quad (3.8)$$

$$m-1 < \alpha < m.$$

En esta expresión vemos que las condiciones iniciales vienen definidas en forma de derivadas de orden entero, por tanto, físicamente interpretables.

- *Diferintegral* de Grünwald–Letnikov:

$$L\{D^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s). \quad (3.9)$$

En las expresiones anteriores podemos observar cómo la transformada de Laplace del operador  $D$  produce expresiones que son bastante similares a las obtenidas en el caso de órdenes enteros. No obstante, las diferentes definiciones de este operador ponen de manifiesto las ligeras diferencias existentes cuando se trabaja con condiciones iniciales no nulas.

### 3.1.1. Propiedades elementales de las derivadas fraccionarias

A continuación haremos un somero repaso a aquellas propiedades más destacadas de las derivadas fraccionarias y de las cuales se harán uso a lo largo de esta Tesis.

#### Serie de potencias

Sea una función  $f(t)$  tal que pueda ser escrita como una serie de potencias de la siguiente forma:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k t^{\beta_k}. \quad (3.10)$$

Para la función anterior podemos definir su derivada con orden real,  $D_t^\alpha$ , con  $\alpha \in \mathbb{R}$  de la siguiente forma (Debnath, 2002):

$$D_t^\alpha t^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha}, \quad (3.11)$$

donde  $\beta-\alpha+1 \neq 0, -1, -2, \dots, -n$ , ya que la función gamma toma el valor  $\infty$  para valores enteros negativos o nulos.

#### Regla de Leibniz

Esta conocida regla de la derivada del producto de funciones puede generalizarse para el caso de derivadas fraccionarias de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} D_t^\alpha [f(t)g(t)] &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} D_t^{\alpha-k} [f(t)] D_t^k [g(t)] = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} D_t^{\alpha-k} [g(t)] D_t^k [f(t)]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

La demostración se puede encontrar en (West *et al.*, 2003).

### Propiedad asociativa

Si una de las funciones de la expresión (3.12) es igual a una constante, por ejemplo  $g(t) = C$ , entonces podemos reducir la expresión (3.12) a:

$$D_t^\alpha [f(t)C] = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} D_t^{\alpha-k} [f(t)] D_t^k [C] = CD_t^\alpha [f(t)]. \quad (3.13)$$

puesto que sólo el término para  $k = 0$  sobrevive en la serie anterior, ya que las derivadas enteras de la constante desaparecen.

Si reescribimos la función  $f(t)$  de la expresión (3.13) como la suma de dos funciones,  $h(t) + g(t)$ , y hacemos la constante  $C$  igual a la unidad, tenemos pues:

$$D_t^\alpha [f(t) \cdot 1] = D_t^\alpha [f(t) \cdot t^0], \quad (3.14)$$

usando la expresión (3.12), obtenemos:

$$\begin{aligned} D_t^\alpha [h(t) + g(t)] &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} D_t^{\alpha-k} [t^0] D_t^k [h(t) + g(t)] = \\ &= D_t^\alpha [h(t)] + D_t^\alpha [g(t)]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Cabe destacar que las ecuaciones (3.13) y (3.15), tomadas juntas, establecen la **linealidad** del operador derivada fraccionaria.

### Funciones constantes

Sea la función  $f(t) = t^{-1/2}$ ; usando la definición (3.11) para calcular la derivada de orden  $1/2$ , obtenemos:

$$D_t^{1/2} [t^{-1/2}] = \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(-1/2 - 1/2 + 1)} t^{-1} = 0. \quad (3.16)$$

Puesto que  $\Gamma(0) = \infty$  podemos afirmar que una función particular es efectivamente constante con respecto a la operación derivada fraccionaria de cierto orden.

Supongamos ahora que queremos aplicar el mismo operador derivada fraccionaria pero a una función constante  $C$ :

$$D_t^{1/2}[C] = C \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1/2)} t^{-1/2} = C \frac{1}{\sqrt{\pi t}}, \quad (3.17)$$

donde, para este caso, la derivada de una función constante da como resultado una función no constante.

Los dos ejemplos anteriores demuestran que existen funciones que aplicándoles la operación derivada fraccionaria dan como resultado funciones constantes (3.16), y funciones constantes que aplicándoles la operación derivada fraccionaria dan como resultado funciones no constantes (3.17). En general, podemos decir que una función es una  $C(\alpha)$  constante si es una combinación lineal de monomios,  $t^{\beta_k}$ , con  $\beta_k + 1 - \alpha = 0, -1, -2, \dots, -n$ , puesto que la función gamma del denominador de (3.11) diverge. Por ejemplo la función siguiente:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k t^{-k-1/2}, \quad (3.18)$$

sería una función  $C(1/2)$  constante.

Para todas aquellas funciones que no son  $C$  constantes podemos enunciar el siguiente teorema (West *et al.*, 2003):

**Teorema 3.1.** Sea una función  $f(t)$  tal que pueda ser escrita en serie de potencias y asumimos que existen las derivadas  $D_t^\mu[f(t)]$ ,  $D_t^\nu[f(t)]$ , y  $D_t^\alpha[f(t)]$  con  $\alpha = \mu + \nu$ . Si  $f(t)$  no es  $C(\mu)$  constante ni  $C(\nu)$  constante, entonces podemos afirmar la siguiente propiedad:

$$D_t^\alpha[f(t)] = D_t^{\mu+\nu}[f(t)] = D_t^\mu[D_t^\nu[f(t)]] = D_t^\nu[D_t^\mu[f(t)]]. \quad (3.19)$$

### **Demostración**

Inicialmente consideraremos una función  $f(t)$  constituida por un solo monomio,  $t$ , para posteriormente ampliarlo a series con más términos. Con esta condición y usando la expresión (3.11) podemos escribir:

$$\begin{aligned} D_t^\nu [D_t^\mu [f(t)]] &= D_t^\nu \left[ \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\mu)} t^{\beta-\mu} \right] = \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\mu-\nu)} t^{\beta-\mu-\nu} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} t^{\beta-\alpha} = D_t^\alpha [t^\beta], \end{aligned} \quad (3.20)$$

puesto que, por hipótesis,  $t^\beta$ , no es una función  $C(\mu)$  constante, ni  $C(\nu)$  constante, es decir se han excluido aquellos valores que cumplen la condición:  $\beta_k + 1 - \alpha = 0, -1, -2, \dots, -n$ . De igual forma podemos repetir la argumentación anterior con los órdenes de derivación invertidos:

$$D_t^\mu [D_t^\nu [t^\beta]] = D_t^\alpha [t^\beta]. \quad (3.21)$$

Como la derivada fraccionaria es un operador lineal, podemos escribir una función como una sucesión lineal de monomios con la siguiente forma:

$$F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k t^{\beta_k}, \quad (3.22)$$

donde  $B_k$  son términos constantes, y se asume que ningunos de los monomios que definen la función  $F$  son individualmente funciones  $C(\mu)$  constantes, ni  $C(\nu)$  constantes. Así podemos reescribir (3.20) para cada término de (3.22) de la siguiente forma:

$$D_t^\alpha [F(t)] = D_t^\nu [D_t^\mu [F(t)]] = D_t^\mu [D_t^\nu [F(t)]] = D_t^{\mu+\nu} [F(t)]. \quad (3.23)$$

La expresión (3.23) concluye la demostración del Teorema 3.1.

Como consecuencia de la demostración anterior podemos afirmar que si alguno de los monomios de (3.22) es, por ejemplo,  $C(\mu)$  constante, entonces debemos cuidar el orden de la operación derivada, ya que:

$$D_t^\mu [D_t^\nu [f(t)]] \neq D_t^\nu [D_t^\mu [f(t)]] = 0. \quad (3.24)$$

La subexpresión de la derecha de (3.24) es cero porque  $f(t)$  es  $C(\mu)$  constante, mientras que la subexpresión de la izquierda de (3.24) no es igual a cero. De esta inigualdad podemos deducir que las funciones constantes anulan la propiedad conmutativa de los operadores  $D_t^\mu$  y  $D_t^\nu$ .

**Teorema 3.2.** Sea una función  $f(t)$  tal que es una función  $C(-1)$  constante. En este caso tenemos que  $f(t) = 0$  (West *et al.*, 2003).

Este teorema simplemente afirma que la única función que satisface

$$D^{-1}[f(t)] = 0 = \int_0^t f(u)du, \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ es la función } f(x) = 0.$$

### 3.2. Cálculo fraccionario en control

En los últimos tiempos se han publicado gran cantidad de trabajos donde se pueden encontrar sistemas dinámicos que describen fenómenos físicos, cuyo comportamiento ha sido modelado mediante ecuaciones diferenciales de orden fraccionario. Por ejemplo, en el trabajo de Anastasio (1994) podemos encontrar la modelización de un fenómeno biológico, para el cual se han hecho uso de ecuaciones fraccionarias, concretamente, para modelizar la dinámica que ejercen las neuronas del tallo cerebral cuando controlan los músculos del ojo.

Aplicando la transformada de Laplace a las ecuaciones fraccionarias y asumiendo condiciones iniciales nulas, se obtienen funciones de transferencia en la variable de Laplace “ $s$ ” elevada a potencias no enteras, las cuales tienen la siguiente expresión general (3.25):

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{m-1} s^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 s^{\alpha_0}} \quad (3.25)$$

$m, n \in \mathbb{N}; \quad a_n, b_m, \alpha_n, \beta_m \in \mathbb{R}.$

En caso de trabajar con sistemas discretos, aplicando la transformada  $Z$  se obtiene una función de transferencia discreta que tiene la siguiente forma (3.26):

$$G(z^{-1}) = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{b_m (\omega(z^{-1}))^{\beta_m} + b_{m-1} (\omega(z^{-1}))^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 (\omega(z^{-1}))^{\beta_0}}{a_n (\omega(z^{-1}))^{\alpha_n} + a_{n-1} (\omega(z^{-1}))^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 (\omega(z^{-1}))^{\alpha_0}} \quad (3.26)$$

$m, n \in \mathbb{N}; \quad a_n, b_m, \alpha_n, \beta_m \in \mathbb{R},$

donde  $\omega(z^{-1})^v$  es la transformada  $Z$  del operador  $\Delta_h^v$ , de orden  $v$  y paso  $h$ ; en otras palabras, el equivalente discreto del operador de Laplace “ $s$ ”.

$$\Delta_h^\nu y(ih) = h^{-\nu} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \binom{\nu}{l} y(ih - lh). \quad (3.27)$$

A partir de estas expresiones podemos afirmar que un sistema de orden fraccionario tiene una función de transferencia racional en el dominio de Laplace (3.25) o una función de transferencia discreta en el dominio de  $Z$  (3.26) con orden ilimitado respecto de la variable compleja discreta “ $z$ ”. Sólo en el caso en que  $\nu$  sea un número entero se obtendrá un número limitado de coeficientes  $(-1)^l \binom{\nu}{l}$  en la expresión (3.27). Por lo tanto, un sistema de orden fraccionario posee una **memoria ilimitada** o **infinita**, siendo los sistemas de orden entero un caso particular de los mismos (Vinagre, 2001).

Además de esta representación en forma de función de transferencia es posible una representación en variables de estado trabajando con sistemas de orden fraccionario, siempre que el sistema resultante sea de orden conmensurable.<sup>1</sup> Así pues, el sistema tendría la siguiente forma:

$$\begin{aligned} D^\alpha x &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Con el operador  $D^\alpha$  se pueden obtener representaciones de estado equivalentes a las usuales para sistemas de orden entero. Por ejemplo, para el sistema representado por la función de transferencia (3.29) obtenemos, utilizando la forma canónica controlable, la expresión matricial (3.30).

$$G(s) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k (s^\alpha)^k}{\sum_{k=0}^n a_k (s^\alpha)^k}. \quad (3.29)$$

De igual manera se pueden obtener las representaciones de estado correspondientes a otras formas canónicas habituales en teoría de control de sistemas lineales invariantes en el tiempo.

---

<sup>1</sup> Un sistema es de orden conmensurable si queda descrito por una ecuación diferencial donde todos los órdenes de derivación son múltiplos enteros de un orden base  $\alpha$ .

$$\begin{bmatrix} D^\alpha x_1 \\ D^\alpha x_2 \\ D^\alpha x_3 \\ \dots \\ D^\alpha x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} u. \quad (3.30)$$

$$y = \begin{bmatrix} b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

### 3.3. Estabilidad en sistemas de control fraccionario

El estudio de la estabilidad de los sistemas de control de orden fraccionario, al igual que en el caso de los de orden entero, puede llevarse a cabo mediante el estudio de las soluciones de la ecuación diferencial que los caracteriza.

Otra forma de estudio más usual, dentro del campo de la ingeniería de control, es el estudio de las raíces de la ecuación característica del sistema en lazo cerrado, la cual, en el caso general, tiene la forma siguiente:

$$Ec(s) = a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 s^{\alpha_0}, \quad a_i, \alpha_i \in \mathbb{R}. \quad (3.32)$$

Esta función de la variable “s” es una función multivaluada cuyo dominio se define mediante una superficie de Riemann la cual tiene un número infinito de hojas en el caso general.

Estas superficies de Riemann se definen, en geometría algebraica, como colectores complejos o variedades complejas unidimensionales y pueden verse como “versiones deformadas” del plano complejo (Farkas y Kra, 1980).

En la Fig 3.1 podemos observar la superficie de Riemann de la función  $\omega = \log(s)$ . Esta superficie presenta una forma en espiral a lo largo de un eje vertical que corresponde al origen del plano complejo. Esta superficie se extiende a lo largo de este eje hasta el infinito, aunque en la figura se haya cortado por motivos de visualización.

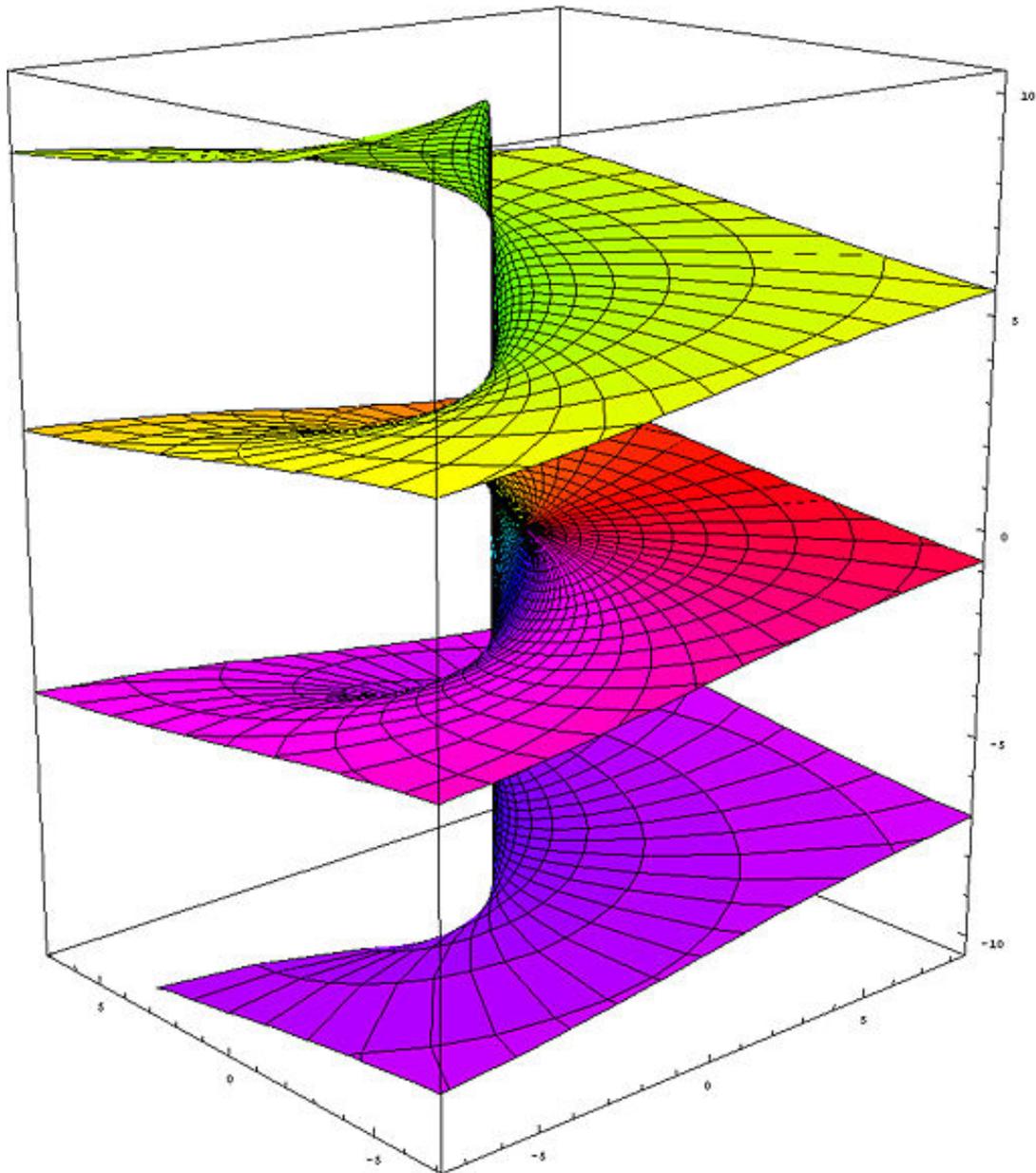


Fig 3.1 Superficie de Riemann correspondiente a  $\omega = \log(s)$ .

En el caso particular de que  $\alpha_i \in \mathbb{Q}^+$  obtendremos un número finito de hojas, siendo la hoja principal la definida por:  $-\pi < \arg(s) < \pi$ . En la Fig 3.2 tenemos representada esta superficie para la función  $\omega = s^{1/2}$ .

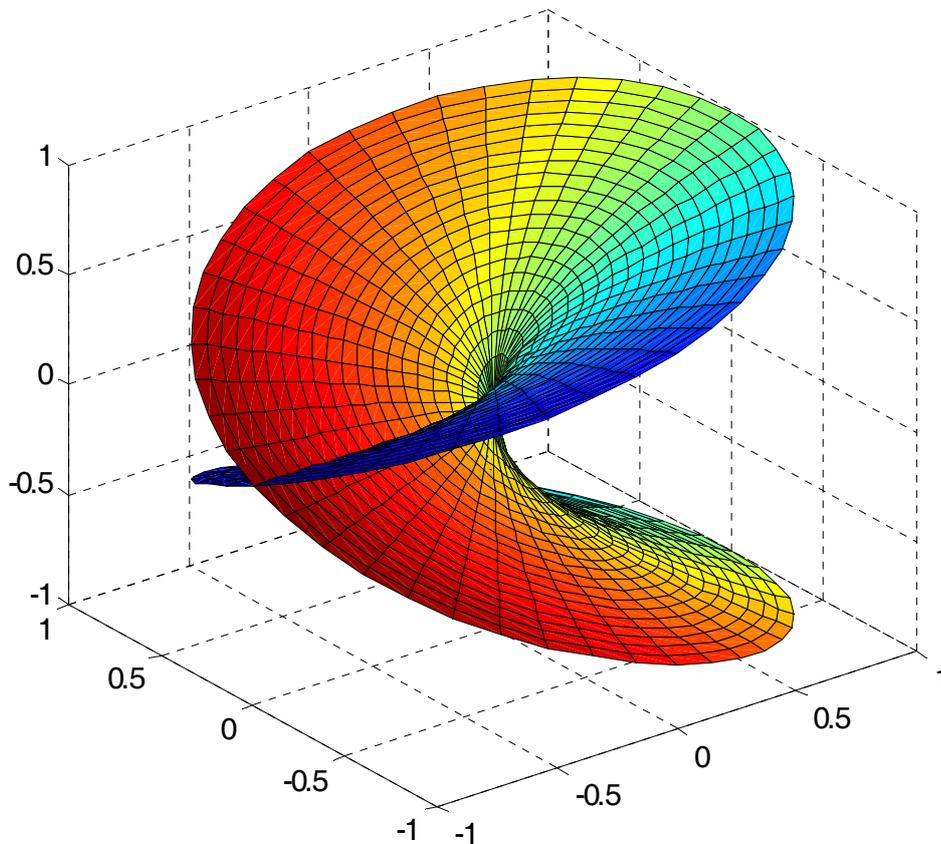


Fig 3.2 Superficie de Riemann correspondiente a  $\omega = s^{1/2}$ .

Así pues, en el caso general, cuando igualamos la ecuación (3.32) a cero para buscar las raíces del sistema, tendremos un número infinito de ellas, pero sólo aquellas que se encuentren en la hoja principal de la superficie de Riemann, raíces estructurales, pueden conferirle al sistema diferentes dinámicas: oscilaciones amortiguadas, oscilaciones crecientes, crecimiento monótono, etc. En cambio, las raíces que se encuentren en las hojas secundarias de esta superficie de Riemann siempre dan lugar a soluciones que son funciones monótonamente decrecientes; es decir, tienden a cero sin oscilaciones a medida que el tiempo tiende a infinito (Vinagre *et al*, 2002).

#### 3.3.1. Condiciones de estabilidad

De forma general, podemos afirmar que un sistema fraccionario con función de transferencia no racional  $G(s) = P(s) / Q(s)$  es estable para entrada y salida limitadas (BIBO estable) si y sólo si se cumple:

$$\exists M / |G(s)| \leq M, \quad \forall s / \operatorname{Re}(s) \geq 0. \quad (3.33)$$

Esta condición (3.33), también conocida como definición de estabilidad de Matignon (1998), se cumplirá si todas las raíces de la función  $Q(s)$  que están localizadas en la hoja principal de Riemann y no son raíces de  $P(s)$  tienen parte real negativa.

Como consecuencia de la definición de estabilidad de Matignon podemos afirmar que para los sistemas de orden conmensurable, los cuales poseen una ecuación característica que es un polinomio en la variable compleja  $\lambda = s^\alpha$ , la condición de estabilidad puede expresarse en la forma:

$$|\arg(\lambda_i)| > \alpha \frac{\pi}{2}, \quad (3.34)$$

siendo  $\lambda_i$  las raíces del polinomio característico. Para el caso particular de  $\alpha = 1$  se obtiene la condición de estabilidad conocida para los sistemas lineales de orden entero:

$$|\arg(\lambda_i)| > \frac{\pi}{2} \quad \forall \lambda_i / Q(\lambda_i) = 0. \quad (3.35)$$

#### 3.3.2. Criterio de estabilidad

Como consecuencia de lo anterior, y como aparece resumido en (Vinagre y Monje, 2006), podemos establecer que:

- El hecho de que todos los coeficientes de la ecuación característica sean del mismo signo no es condición necesaria ni suficiente para garantizar la estabilidad.

- El número de raíces de la ecuación característica en la hoja principal de Riemann no depende de la mayor potencia de la variable compleja en la ecuación característica.

Como se describe en (Vinagre, 2001) no se disponen actualmente de técnicas polinómicas, tipo Routh o Jury, para analizar la estabilidad de los sistemas fraccionarios. Así que sólo las técnicas geométricas de análisis complejo basadas en el principio del argumento son aplicables.

Por consiguiente, aplicando el principio del argumento sobre la curva generalmente conocida como camino de Nyquist,<sup>2</sup> se puede determinar la estabilidad del sistema sin más que determinar el número de revoluciones de la curva resultante de la evaluación alrededor del origen. El criterio de Nyquist establece la condición para que para un sistema discreto sea estable:

$$Z = N + P, \quad (3.36)$$

donde  $Z$  es el número de polos inestables en lazo cerrado,  $P$  es el número de polos inestables de la función de transferencia en lazo abierto y  $N$  es el número de revoluciones o vueltas al punto crítico  $(-1 + 0j)$  en la dirección de las agujas del reloj.

### 3.3.3. Respuesta en el dominio temporal y en el de la frecuencia

Ya se ha introducido que la forma que presente la respuesta en el dominio temporal depende, al igual que en el caso entero, de la localización de las raíces de la ecuación característica. Dependiendo de estas localizaciones se pueden presentar uno de los seis casos siguientes en cuanto a su respuesta temporal:

- Sin raíces en la hoja principal de Riemann. La respuesta impulsional será una función monótonamente decreciente. Por ejemplo:  $\frac{1}{s^{0.4} + j}$ .

---

<sup>2</sup> Curva que encierra todo el semiplano derecho de la hoja principal de Riemann.

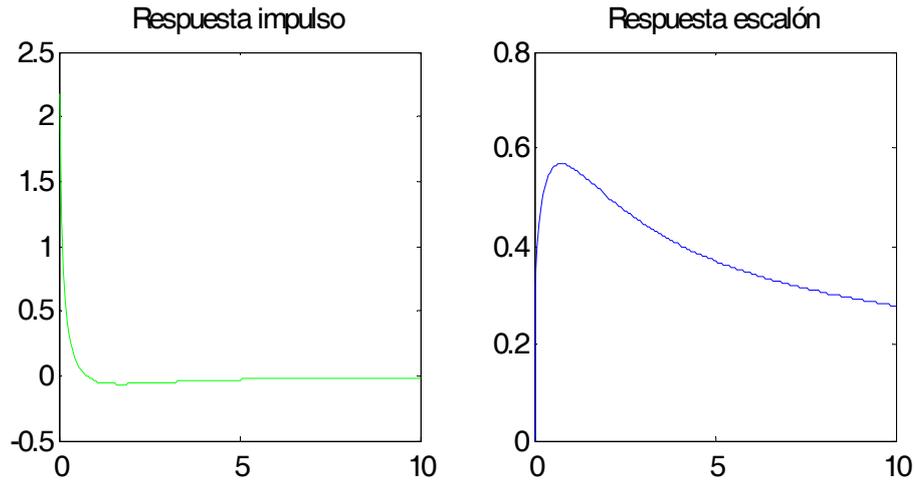


Fig 3.3 Respuesta temporal de una función de transferencia sin raíces en la hoja principal de Riemann.

- Raíces en la hoja principal de Riemann, localizadas en  $\text{Re}(s) < 0$  e  $\text{Im}(s) = 0$ . La respuesta impulsional será una función monótonamente decreciente. Por ejemplo:  $\frac{1}{s^1 + 1}$ .

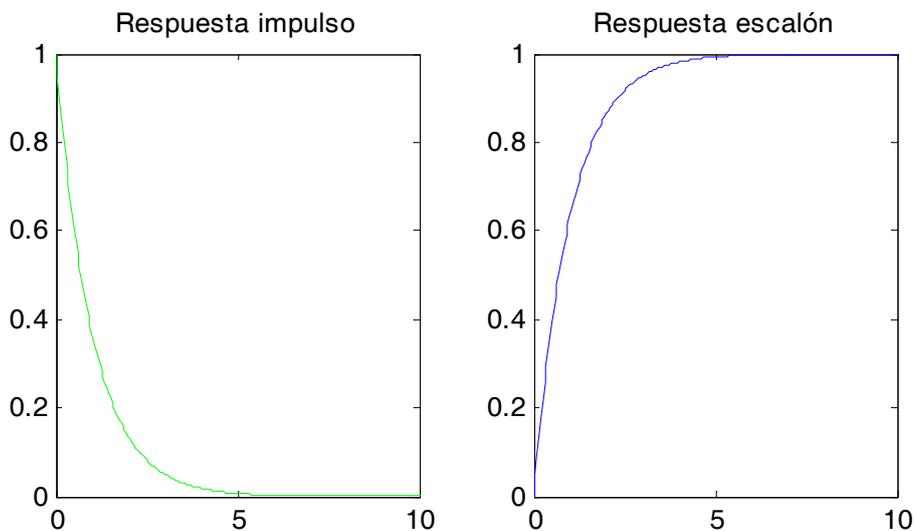


Fig 3.4 Respuesta temporal de una función de transferencia con raíz estructural  $\text{Re}(s) < 0$   $\text{Im}(s) = 0$ .

- Raíces en la hoja principal de Riemann, localizadas en  $\text{Re}(s) < 0$  e  $\text{Im}(s) \neq 0$ . La respuesta impulsional será una función con oscilaciones amortiguadas. Por ejemplo:  $\frac{1}{s^{1.8} + 1}$ .

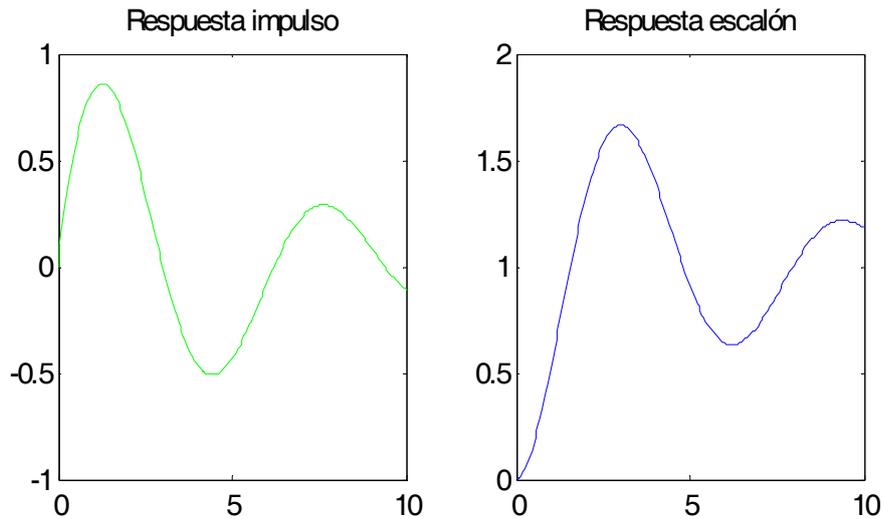


Fig 3.5 Respuesta temporal de una función de transferencia con raíz estructural  $\text{Re}(s) < 0$   $\text{Im}(s) \neq 0$ .

- Raíces en la hoja principal de Riemann, localizadas en  $\text{Re}(s) = 0$  e  $\text{Im}(s) \neq 0$ . La respuesta impulsional será una función con oscilaciones de amplitud constante. Por ejemplo:  $\frac{1}{s^2 + 1}$ .

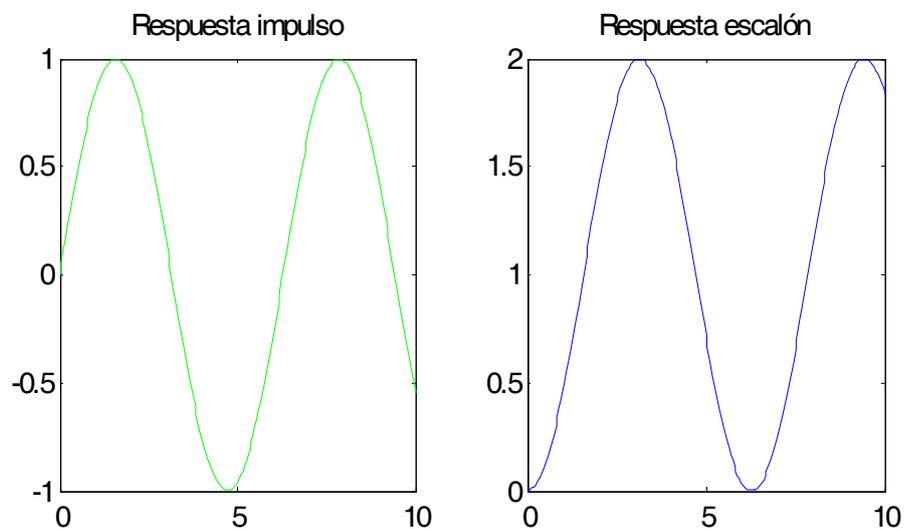


Fig 3.6 Respuesta temporal de una función de transferencia con raíz estructural  $\text{Re}(s) = 0$   $\text{Im}(s) \neq 0$ .

- Raíces en la hoja principal de Riemann, localizadas en  $\text{Re}(s) > 0$  e  $\text{Im}(s) \neq 0$ . La respuesta impulsional será una función con oscilaciones de amplitud creciente. Por ejemplo:  $\frac{1}{s^{2.5} + 1}$ .

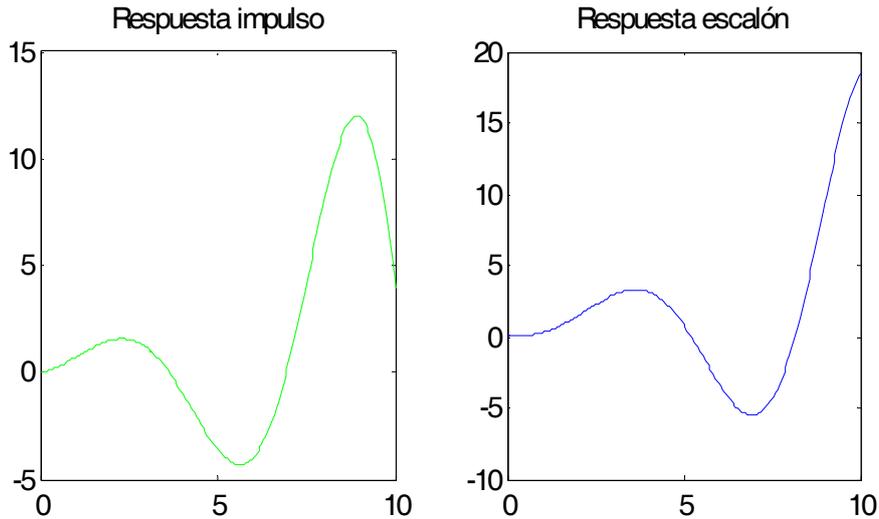


Fig 3.7 Respuesta temporal de una función de transferencia con raíz estructural  $\text{Re}(s) > 0$  e  $\text{Im}(s) \neq 0$ .

- Raíces en la hoja principal de Riemann, localizadas en  $\text{Re}(s) > 0$  e  $\text{Im}(s) = 0$ . La respuesta impulsional será una función monótonamente creciente. Por ejemplo:  $\frac{1}{s^{0.5} - 1}$ .

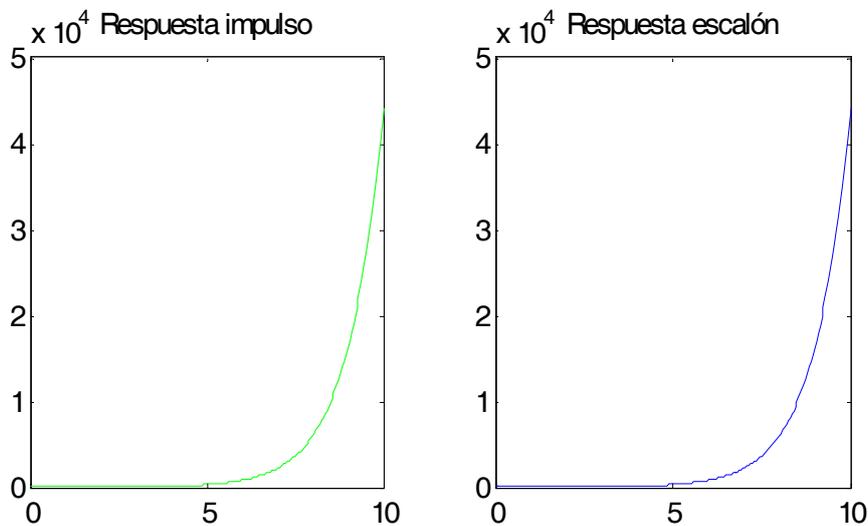


Fig 3.8 Respuesta temporal de una función de transferencia con raíz estructural  $\text{Re}(s) > 0$  e  $\text{Im}(s) = 0$ .

En el caso de la respuesta en frecuencia, podemos afirmar que ésta se construye mediante la evaluación directa de la función de transferencia no racional a lo largo del eje imaginario,  $s = j\omega$ ,  $\omega \in (0, \infty)$ .

Si se trata de un sistema de orden conmensurable, podemos seguir una metodología similar a las seguidas para los sistemas de orden entero. Así pues, se puede construir la respuesta en frecuencia mediante la adición de las contribuciones individuales de los términos de orden  $\alpha$ , resultantes de la factorización de la función de transferencia en la forma:

$$G(s) = \frac{P(s^\alpha)}{Q(s^\alpha)} = \frac{\prod_{k=0}^m (s^\alpha + z_k)}{\prod_{k=0}^n (s^\alpha + \lambda_k)}, \quad z_k, P(z_k) = 0; \lambda_k, Q(\lambda_k) = 0, z_k \neq \lambda_k. \quad (3.37)$$

Para cada uno de estos términos, que de una forma general podemos poner como  $(s^\alpha + \gamma)^{\pm 1}$ , la curva de magnitud tendrá una pendiente que, partiendo de cero para bajas frecuencias, tenderá a  $\pm 20\alpha$  dB/dec para altas frecuencias y la curva de fase evolucionará desde 0 hasta  $\alpha \pi/2$  rad. Además se producirá resonancia para los valores  $\alpha > 1$  (Vinagre *et al.*, 2002).

### 3.4. La función de transferencia fraccional de orden $\alpha$

La función de transferencia de la expresión (3.38) se puede considerar como la función de transferencia más simple que puede representar la dinámica de un sistema de orden fraccionario. A continuación se procederá a realizar un estudio de sus características, así como de su respuesta temporal y en frecuencia, ya que éstas serán útiles en lo sucesivo cuando sometamos a esta planta a estrategias de control avanzadas.

$$G(s) = s^\alpha. \quad (3.38)$$

Es importante destacar que  $\alpha$  puede tomar tanto valores positivos como negativos dentro del conjunto de los números reales, pudiendo manifestar, por lo tanto, un efecto como derivador o como integrador, respectivamente. Aunque conceptualmente el valor de  $\alpha$  podría ser también complejo, no será tenido en cuenta ya que este tipo de derivadas con órdenes complejos no se presentan en los problemas de control, salvo como un *truco* para obtener en ocasiones una notación más compacta cuando se expresa la ecuación del controlador (Valério, 2005).

### 3.4.1. Respuesta escalón

Para calcular la respuesta temporal al salto escalón de este sistema es necesario saber cuál es la transformada inversa de Laplace de la siguiente expresión

$$Y(s) = G(s)U(s) = s^\alpha \frac{1}{s} = s^{\alpha-1}, \quad (3.39)$$

sabiendo que (Debnath, 2002):

$$D^\alpha t^\beta = L^{-1} \{s^{\alpha-\beta-1}\} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha}, \beta > -1. \quad (3.40)$$

La respuesta escalón tiene la siguiente expresión analítica:

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}, \quad t > 0. \quad (3.41)$$

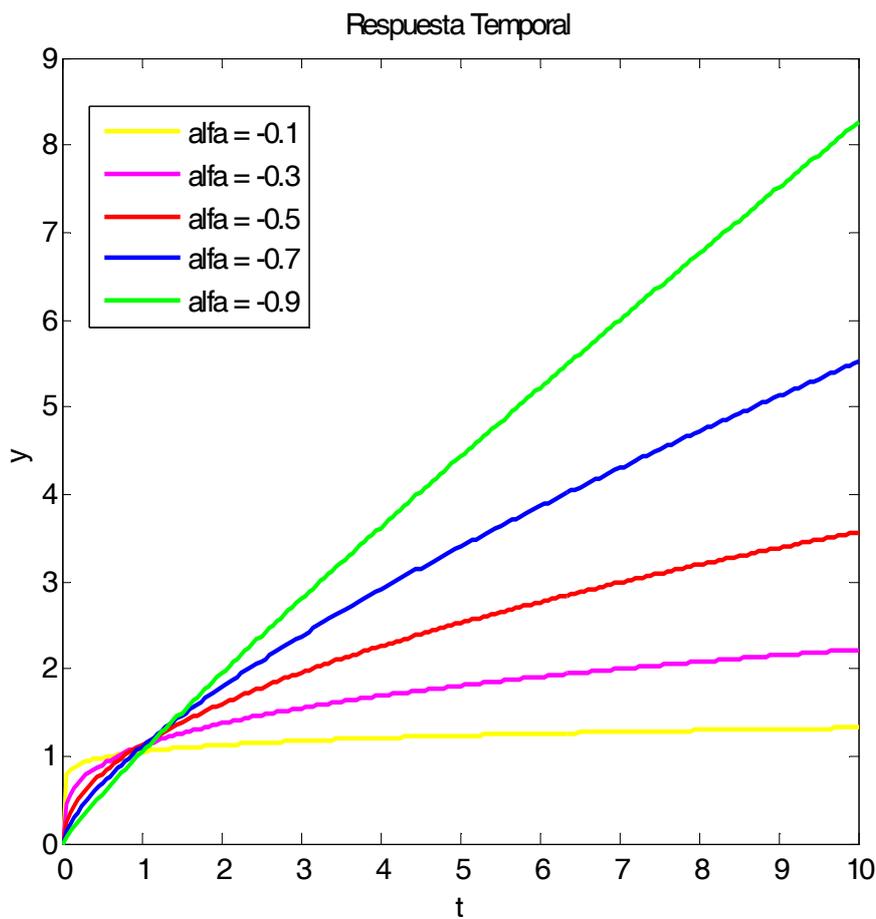


Fig 3.9 Respuesta escalón de diversos integradores fraccionarios.

En la Fig 3.9 podemos observar la respuesta escalón de diversos sistemas definidos mediante integradores fraccionarios con órdenes que van desde  $-0.1$  hasta el valor  $-0.9$ . Aquí se hace evidente el hecho de que estas respuestas son monótonamente crecientes. Además, a medida que el valor de  $\alpha$  crece y se acerca a  $-1$ , la respuesta escalón tiende a la respuesta del integrador entero que es, recordemos, la bisectriz del primer cuadrante,  $y = t$ . De forma similar, en la Fig 3.10, podemos encontrar las respuestas escalón de los derivadores usando los mismos órdenes que en el caso anterior desde  $0.1$  hasta  $0.9$ . En este caso estas respuestas son monótonamente decrecientes.

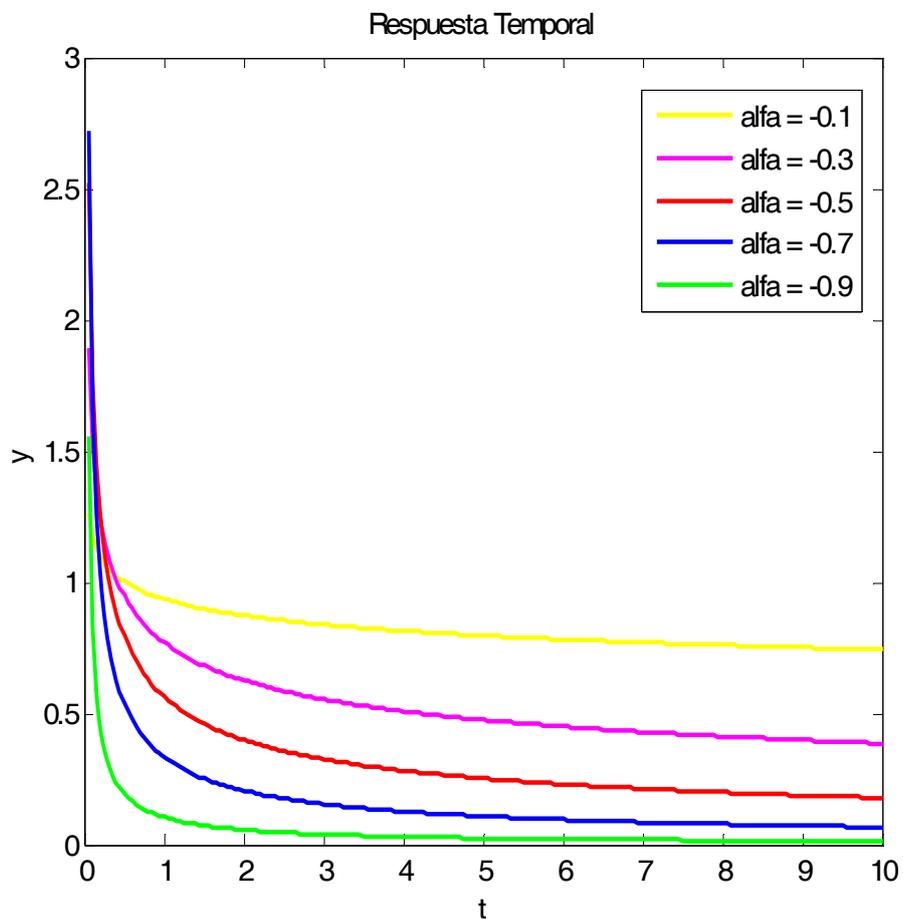


Fig 3.10 Respuesta escalón de diversos derivadores fraccionarios.

### 3.4.2. Respuesta en frecuencia

La respuesta en frecuencia de la función de transferencia (3.38) se calcula haciendo la transformación clásica de  $s = j\omega$ , obteniendo las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 G(j\omega) &= (j\omega)^\alpha \\
 |G(j\omega)| &= |j^\alpha \omega^\alpha| = |\omega^\alpha| = \omega^\alpha \\
 \arg[G(j\omega)] &= \arg(j^\alpha \omega^\alpha) = \arg(j^\alpha).
 \end{aligned}
 \tag{3.42}$$

En la expresión anterior hemos obtenido tanto el módulo como el argumento de la respuesta en frecuencia. Si queremos tener la expresión del módulo en decibelios entonces:

$$|G(j\omega)| = 20 \log_{10} \omega^\alpha = 20\alpha \log_{10} \omega \quad (dB).
 \tag{3.43}$$

Del argumento podemos decir que existen muchos números complejos  $z$  que cumplen esta condición,  $z = j^\alpha$ , pero únicamente nos quedamos con aquellos cuyo argumento esté dentro del intervalo  $[0, 2\pi)$ , (Valerio, 2005). Así pues:

$$\arg[G(j\omega)] = \alpha \frac{\pi}{2},
 \tag{3.44}$$

En la Fig 3.11 y la Fig 3.12, podemos observar los diagramas de Bode de la función de transferencia (3.38) en los casos en que el valor de  $\alpha$  es mayor y menor que cero:

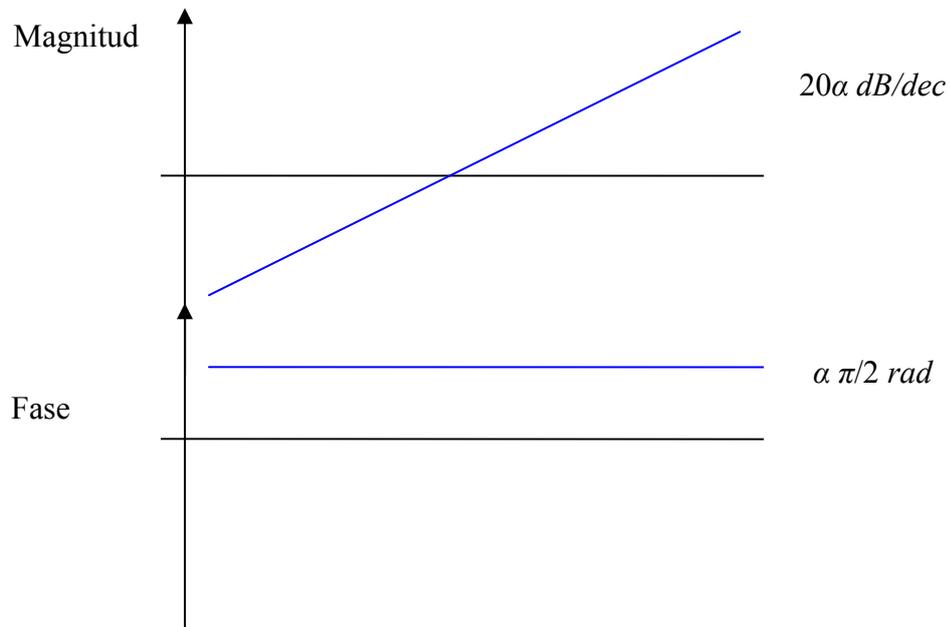


Fig 3.11 Diagrama de Bode de los operadores fraccionarios  $\alpha > 0$ .

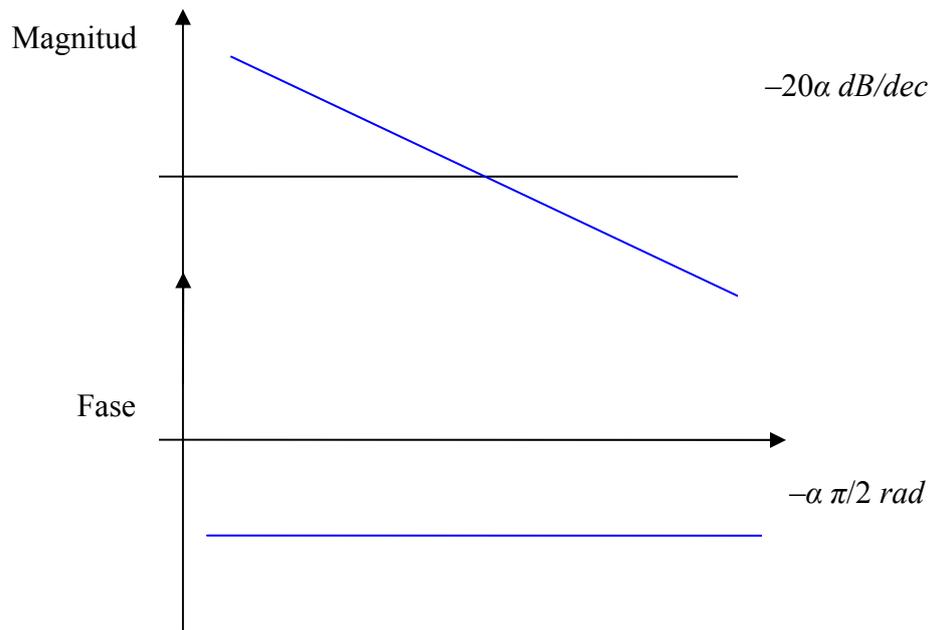


Fig 3.12 Diagrama de Bode de los operadores fraccionarios  $\alpha < 0$ .

### 3.4.3. Lazo Cerrado

En este epígrafe se propone el estudio del comportamiento del sistema fraccionario descrito por la expresión (3.38) una vez cerrado el lazo de control con realimentación unitaria y ganancia  $A$ .

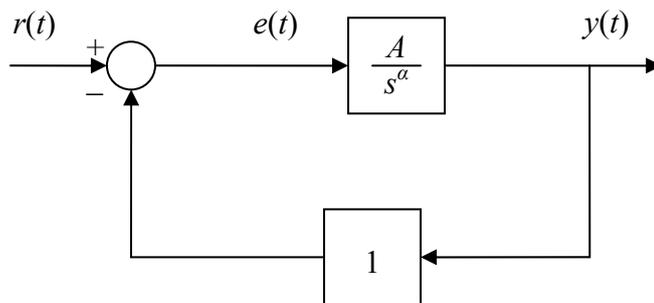


Fig 3.13 Sistema de control del operador integral fraccionaria.

Si aplicamos a la figura anterior, Fig 3.13, la aritmética de bloques, fácilmente podemos obtener la expresión de la función de transferencia de este sistema (3.45).

$$F(s) = \frac{A}{A + s^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 2. \quad (3.45)$$

Este sistema en lazo cerrado tiene la capacidad de exhibir dinámicas que van desde la relajación hasta la oscilación, incluyendo las dinámicas propias de los sistemas de primer y segundo orden; por ello muchos autores suelen tomar este sistema como referencia.

De forma resumida, se pasan a enumerar sus principales características, tanto en el dominio temporal como en el de la frecuencia.

La respuesta escalón presenta la siguiente forma:

$$y(t) = At^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-At^\alpha), \quad (3.46)$$

donde  $E$  representa a la función de Mittag–Leffler (1904) cuya expresión tiene la forma:

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (3.47)$$
$$\alpha > 0, \beta > 0.$$

En la Fig 3.14 podemos observar la respuesta escalón de la planta anterior  $F(s)$  con ganancia unitaria y para distintos valores del exponente fraccionario  $\alpha$ . Esta variación provoca un amplio abanico de dinámicas. Estas curvas corresponden a coeficientes de amortiguamiento y pulsaciones naturales que podemos obtener partiendo de las raíces estructurales del denominador de  $F(s)$ , las cuales tienen la siguiente expresión (3.48).

$$s_{1,2} = A^{1/\alpha} e^{j\pi/\alpha} = A^{1/\alpha} \left( \cos \frac{\pi}{\alpha} + j \operatorname{sen} \frac{\pi}{\alpha} \right). \quad (3.48)$$

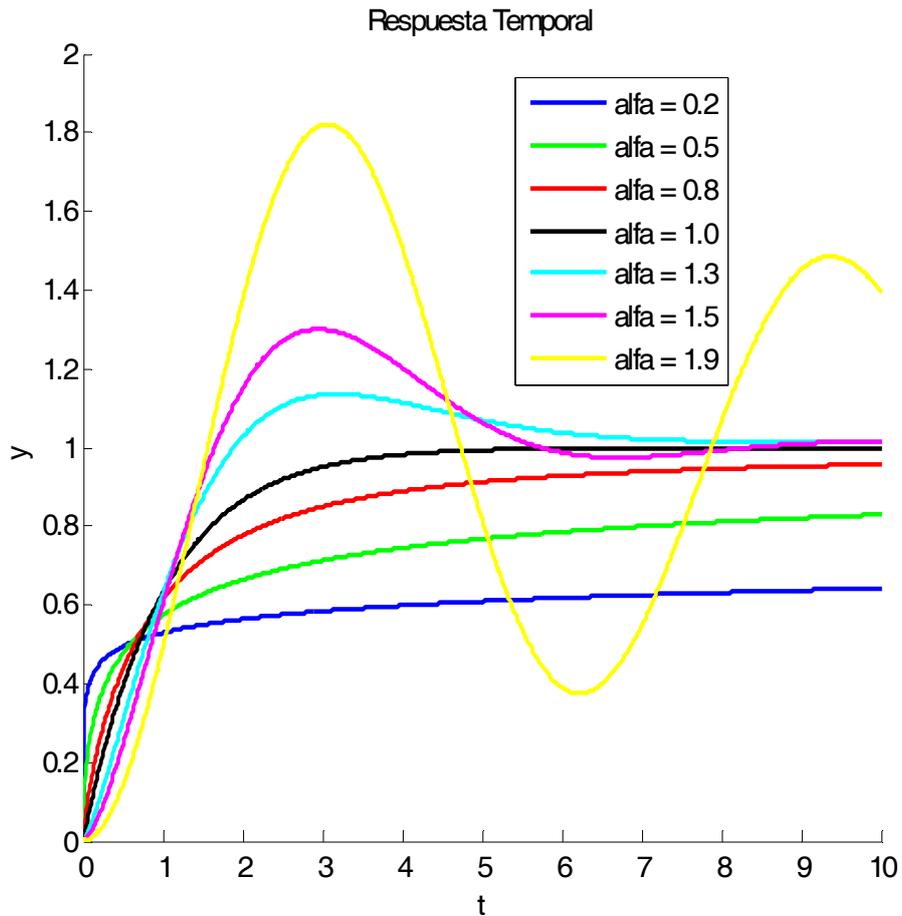


Fig 3.14 Respuesta escalón de  $F(s)$  con ganancia unitaria para varios valores de  $\alpha$ .

Los valores de la pulsación natural  $\omega_n$ , la pulsación propia del sistema  $\omega_p$ , y el coeficiente de amortiguamiento  $\delta$  en función de la ubicación de los polos, se pueden calcular a partir de las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \omega_n &= A^{1/\alpha} \\ \omega_p &= A^{1/\alpha} \operatorname{sen} \frac{\pi}{\alpha} \\ \delta &= -\cos \frac{\pi}{\alpha}. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Dentro del dominio de la frecuencia podemos destacar que el margen de ganancia es infinito y el de fase es constante. Éste último depende sólo de  $\alpha$  y es igual a:

$$\phi_m = \pi \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right). \quad (3.50)$$

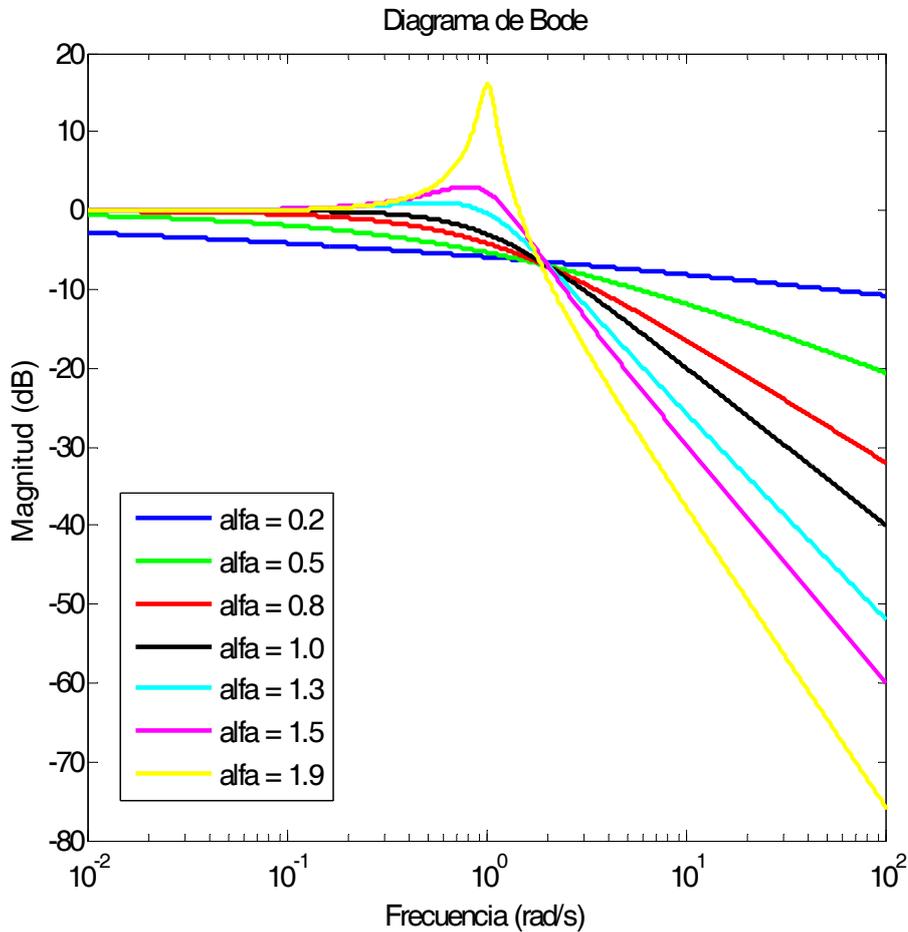


Fig 3.15 Magnitud de la respuesta en frecuencia con ganancia unitaria para varios valores de  $\alpha$ .

En la Fig 3.15 podemos observar el diagrama de Bode de este sistema para distintos valores del exponente fraccionario  $\alpha$ . En las frecuencias bajas el sistema tiene una ganancia constante próxima a cero. En las frecuencias altas el sistema presenta una caída que es proporcional a  $\alpha$ . Se puede observar que en aquellos sistemas cuyo valor de  $\alpha$  es mayor que 1, presentan un pico de resonancia a una frecuencia que se encuentra entorno a 1  $rad/s$ .

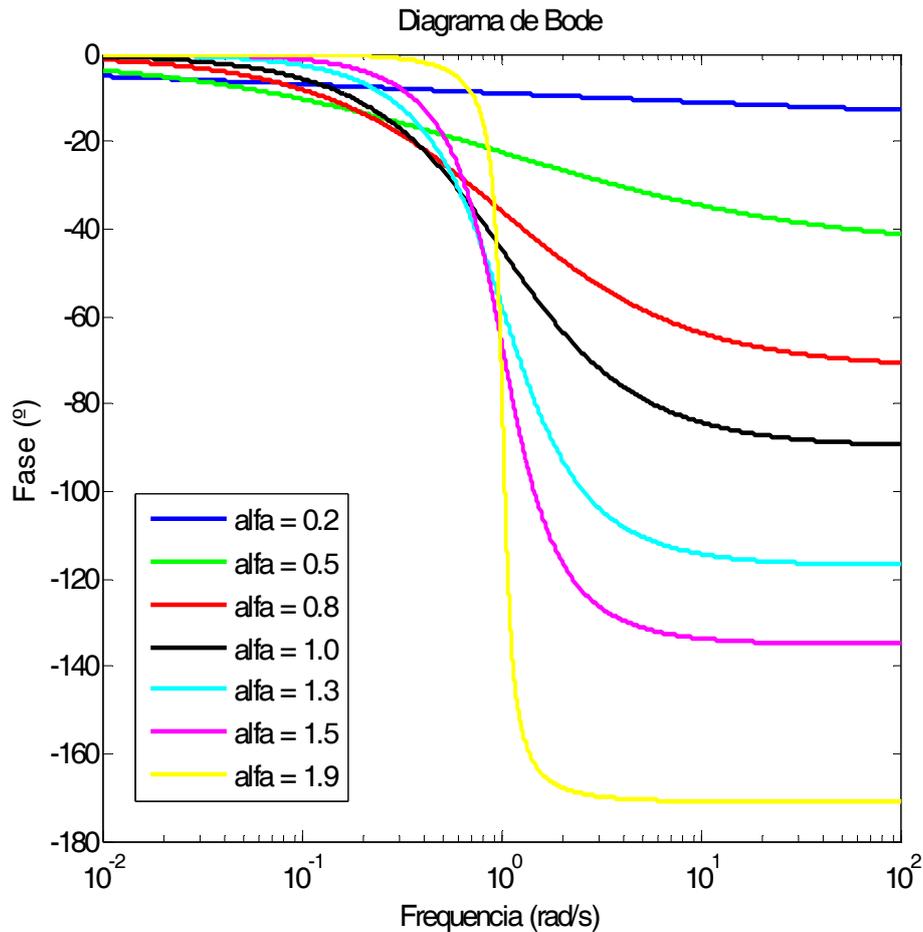


Fig 3.16 Fase de la respuesta en frecuencia con ganancia unitaria para varios valores de  $\alpha$ .

En cuanto a la fase, se observa que en las bajas frecuencias se encuentra próxima a cero y en las altas es constante y tiene un valor que es proporcional al valor de  $\alpha$ . La transición de estos valores ocurre entorno al valor de  $1 \text{ rad/s}$ , como podemos observar en la Fig 3.16.

Estos valores que se han obtenido a partir de las gráficas anteriores, también se pueden obtener de forma analítica utilizando las expresiones siguientes.

Sea la función de transferencia en lazo cerrado  $F$  donde se ha sustituido la variable  $s$  por  $j\omega$ :

$$F(j\omega) = \frac{A}{(j\omega)^\alpha + A} = \frac{A}{\left[ \omega^\alpha \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + A \right] + j\omega^\alpha \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}. \quad (3.51)$$

A esta expresión se le calcula su módulo:

$$|F(j\omega)| = \frac{A}{\sqrt{\omega^{2\alpha} + 2A\omega^\alpha \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + A^2}}. \quad (3.52)$$

Para obtener el valor de la frecuencia de resonancia  $\omega_r$ , derivamos la expresión anterior obteniendo la expresión (3.53) para éste parámetro:

$$\omega_r = \left[ -A \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (3.53)$$

$\alpha > 1.$

Si se sustituye el valor de la frecuencia de resonancia de la expresión anterior (3.53) en la expresión del módulo de  $F(s)$ , ecuación (3.52), obtenemos el valor del pico de resonancia, ecuación (3.54), el cual depende solamente del parámetro  $\alpha$ , tal como ocurría con el coeficiente de amortiguamiento  $\delta$ .

$$M_r = \frac{1}{\text{sen}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}. \quad (3.54)$$

### 3.5. Controladores fraccionarios

El objetivo de este apartado no es hacer una revisión exhaustiva de las diferentes tipologías de controladores existentes, sino la de hacer una pequeña introducción a las técnicas más destacadas, con el ánimo de que sirva de marco de referencia en el que encuadrar el controlador predictivo fraccionario propuesto más adelante en esta Tesis.

Los controladores fraccionarios son aquellos que hacen uso de operadores fraccionarios en su concepción. Este tipo de controladores pueden ser diseñados tanto para controlar plantas de orden entero como plantas de orden fraccionario.

Estos controladores pueden tener por sí mismos comportamiento fraccionario o inducir al sistema de control este tipo de comportamiento. Existen diferentes técnicas para diseñar controladores fraccionarios, que van desde la generalización del conocido PID hasta técnicas más complejas como la obtención de controladores fraccionarios óptimos, aplicando el método de Wiener-Hopf de factorización

espectral (Vinagre y Feliu, 2007). A continuación se describen someramente las técnicas de control fraccionario más destacadas:

### 3.5.1. Controladores Crone

Existen tres generaciones de controladores Crone, los cuales se describen a continuación:

#### Control Crone de 1ª generación

La función de transferencia del controlador es tan simple como:

$$C(s) = s^\alpha. \quad (3.55)$$

El propósito del control Crone de 1ª generación es incrementar el margen de fase de la planta mediante la variación del parámetro adecuado  $\alpha$ . Evidentemente, esto es más fácil en el caso de que contemplemos el uso de órdenes fraccionarios, ya que de otra forma, sólo serían posibles variaciones de fase de múltiplos de 90°.

Como podemos ver en (Oustaloup, 1991, p. 141-153), donde se describe la formulación original, la función de transferencia (3.55) se aproxima usando un controlador de orden entero mediante una aproximación Crone, la cual se describirá en epígrafes posteriores.

Este tipo de controlador es útil cuando se trata de plantas que tienen fase constante, al menos en el rango de frecuencias próxima a la frecuencia de cruce.<sup>3</sup> En este caso, el lazo de control presentará un comportamiento robusto frente a variaciones de la ganancia de la planta.

#### Control Crone de 2ª generación

En el caso de tener una planta con fase no constante, el control Crone de primera generación no será robusto frente a variaciones de ganancia en la planta, aunque es posible plantear un controlador que sí lo sea (Oustaloup, 1991, pp 180-183). Así pues, si tenemos un controlador  $C$  y una planta  $F$  podemos hacer un diseño para que se cumpla:

---

<sup>3</sup> Es la frecuencia donde la ganancia en lazo abierto es igual a la unidad.

$$\arg[F(j\omega)C(j\omega)] = \arg[F(j\omega)] + \arg[C(j\omega)] = \varphi. \quad (3.56)$$

Evidentemente, esta igualdad se mantendrá únicamente para un limitado rango de frecuencias. Esta expresión del argumento (3.56) se obtiene cuando planteamos la siguiente regla de diseño para el rango de frecuencias elegido:

$$F(s)C(s) = s^{2\varphi/\pi}. \quad (3.57)$$

#### **Control Crone de 3ª generación**

Tanto los controladores Crone de 1ª generación como los de la 2ª generación tienen como objetivo ser robustos frente a variaciones de ganancia en la planta, pero no trata con otro tipo de problemas como incertidumbres en el modelo o colocación de ceros y polos. La tercera generación de controladores intenta solventar las carencias de los anteriores haciendo uso de técnicas en el dominio de la frecuencia en el plano de Nichols.

El objetivo de esta 3ª generación de controladores Crone es doble, como podemos ver en (Oustaloup, 1991, pp 283–284 y 290–292); por un lado, asegurarse que la ganancia en lazo cerrado del sistema nunca sobrepase un determinado valor y, por el otro, asegurarse que el coeficiente de amortiguamiento nunca tomase valores por debajo de cierto rango, incluso si alguno de los parámetros de la planta varía, pero dentro de un rango conocido.

Satisfaciendo ambos objetivos se trata de impedir que el diagrama de Nichols para este sistema en lazo abierto, se aproxime a zonas donde la ganancia en lazo cerrado es elevada y el valor del coeficiente de amortiguamiento es bajo, es decir, zonas que rodean a los puntos  $(0 \text{ dB}, 2n\pi + \pi \text{ rad})$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

#### **3.5.2. Controladores PID fraccionarios**

Es bien sabido que los controladores PID son aquellos cuya salida se puede expresar como una combinación de las tres acciones: proporcional (P), integral (I) y derivativa (D).

Los controladores PID fraccionarios se pueden definir como una generalización de los PID, ya que al igual que éstos su salida depende de la

combinación de las tres acciones anteriormente comentadas, pero en este caso las acciones integral y derivada tienen naturaleza fraccionaria. La expresión analítica de la función de transferencia de este controlador viene descrita en (Podlubny, 1999a), la cual tiene la siguiente forma:

$$C(s) = P + \frac{I}{s^\lambda} + Ds^\mu, \quad (3.58)$$

donde los parámetros  $\lambda$  y  $\mu$  son los órdenes fraccionarios de la variable de Laplace.

Estos controladores PID fraccionarios son también conocidos como controladores  $PI^\lambda D^\mu$ . En el caso de que los valores de  $\lambda$  y  $\mu$  sean iguales a 1, tendremos el usual controlador PID entero.

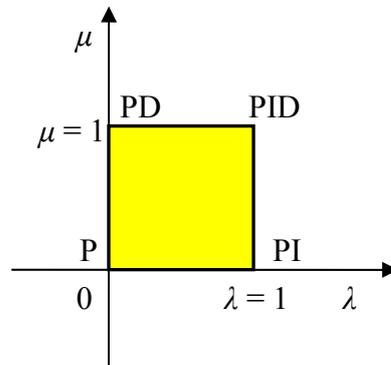


Fig 3.17 Ilustración gráfica de las aportaciones de un PID fraccionario (sombreado).

En la literatura podemos encontrar diversas formas para ajustar los parámetros proporcional ( $P$ ), integral ( $I$ ), derivativo ( $D$ ), orden integral ( $\lambda$ ) y orden derivativo ( $\mu$ ) de estos PID fraccionarios. A continuación se presenta un pequeño resumen de las más destacadas.

#### **Ajuste del $PI^\lambda D^\mu$ mediante control de modelo interno (IMC)**

Esta técnica para la sintonización de controladores PID de sistemas SISO fue propuesta por (Rivera *et al.*, 1986), y también tiene aplicación para la sintonización de controladores PID fraccionarios. Esta técnica hace uso del esquema de control presentado en (Hägglund y Aström, 1996) que podemos observar en la Fig 3.18, donde  $F$  es la planta a controlar,  $F^*$  es la inversa o una planta lo más cercana posible a la inversa de  $F$ ,  $F'$  es un modelo de  $F$  y  $B$  es algún filtro paso bajo elegido

### 3. Cálculo Fraccionario: Aplicación al control de sistemas

apropiadamente, de tal forma que reduzca la influencia de los errores de modelado a altas frecuencias. Si  $F^*$  fuera exactamente la inversa de  $F$  entonces el error  $e$  sería igual a la perturbación  $d$ .

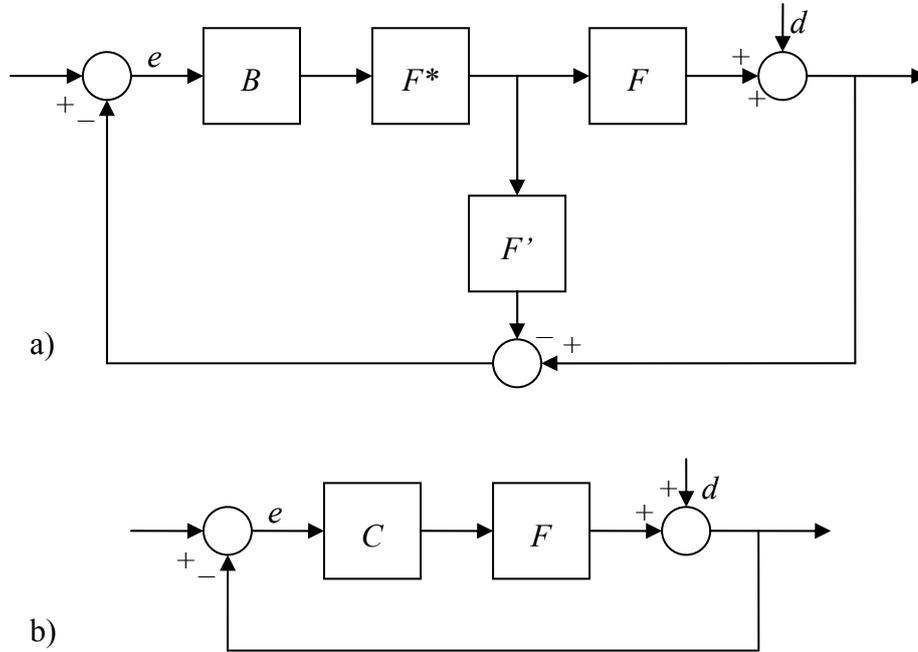


Fig 3.18 Diagrama de bloques para control de modelo interno (a) y su equivalente (b).

En el diagrama de bloques equivalente de la Fig 3.18 (b), se ha simplificado el conexionado del diagrama completo que se muestra en la parte de arriba de dicha figura (a). El bloque simplificado  $C$  tiene la función de transferencia siguiente:

$$C(s) = \frac{B(s)F^*(s)}{1 - B(s)F^*(s)F'(s)}. \quad (3.59)$$

Este controlador  $C$ , en el caso general, no tiene por que ser un PID o un PID fraccionario. Para conseguirlo basta con tomar las siguientes expresiones para las funciones de transferencia:

$$F(s) = \frac{K}{1 + Ts^\mu} e^{-Ls}. \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned}
 B(s) &= \frac{1}{1 + T_B s} \\
 F^*(s) &= \frac{1 + T s^\mu}{K} \\
 F'(s) &= \frac{K}{1 + T s^\mu} (1 - L s).
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

Tomando estas expresiones, obtenemos un controlador con la siguiente función de transferencia:

$$C_1(s) = \frac{K}{s} + \frac{K(T_B + L)}{s^{1-\mu}}. \tag{3.62}$$

Éste puede ser visto como un controlador PID fraccionario con la parte proporcional igual a cero.

Si tomamos ahora las siguientes funciones de transferencia, donde  $B$  ha dejado de ser un filtro pasa baja:

$$\begin{aligned}
 B(s) &= 1 \\
 F^*(s) &= \frac{1 + T s^\mu}{K} \\
 F'(s) &= \frac{K}{1 + T s^\mu} \frac{1}{(1 - L s)},
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

obtenemos un nuevo controlador, que presenta la forma descrita en (3.64).

$$C_2(s) = \frac{1}{K} + \frac{KL}{s} + \frac{KL}{s^{1-\mu}} + \frac{T}{K} s^\mu. \tag{3.64}$$

Si una de las dos partes integrales es despreciable, tendremos un controlador PID fraccionario.

Por último, si tomamos la siguiente aproximación (3.65) para mejorar el modelo de  $F'$ , con las mismas expresiones para  $B$  y  $F^*$  que se muestran en (3.63) obtenemos el controlador (3.66).

$$F'(s) = \frac{K}{1+Ts^\mu} \frac{1-\frac{Ls}{2}}{1+\frac{Ls}{2}}. \quad (3.65)$$

$$C_3(s) = \frac{1}{2K} + \frac{KL}{s} + \frac{KL}{s^{1-\mu}} + \frac{T}{2K} s^\mu. \quad (3.66)$$

Si una de las dos partes integrales es despreciable, el controlador se convertirá en un PID fraccionario; obviamente, si tomamos  $\mu \in \mathbb{Z}$  los tres controladores anteriores  $C_1$ ,  $C_2$ , y  $C_3$  se convertirán en unos controladores convencionales PID.

### Ajuste del $PI^1D^\mu$ mediante minimización

El objetivo es ajustar los parámetros del PID fraccionario usando un algoritmo de optimización, de tal forma que el sistema controlado cumpla con unos objetivos de margen de ganancia y fase, sensibilidad y robustez; descritos mediante las siguientes condiciones (Monje *et al.*, 2004), (Monje, 2006):

- La ganancia en la frecuencia de cruce  $\omega_{cj}$  debe tomar el valor:

$$\left| C(j\omega_{cj})G(j\omega_{cj}) \right| = 0 \text{ dB}. \quad (3.67)$$

- El margen de fase  $\varphi_m$  ha de permanecer constante con valor:

$$\arg \left[ C(j\omega_{cj})G(j\omega_{cj}) \right] = -\pi + \varphi_m. \quad (3.68)$$

- Rechazo de ruido a alta frecuencias:

$$\left| T(j\omega) = \frac{C(j\omega)G(j\omega)}{1+C(j\omega)G(j\omega)} \right|_{dB} \leq a \text{ dB}, \quad \forall \omega > \omega_t \text{ rad/s}, \quad (3.69)$$

donde  $T$  es la función de sensibilidad complementaria y  $a$  es la atenuación del ruido deseada para frecuencias de  $\omega$  mayores de  $\omega_t$ .

- Rechazo de las perturbaciones en la salida:

$$\left| \mathcal{S}(j\omega) = \frac{1}{1+C(j\omega)G(j\omega)} \right|_{dB} \leq b \text{ dB}, \quad \forall \omega \leq \omega_s \text{ rad/s}, \quad (3.70)$$

donde  $b$  es el valor deseado para la función de sensibilidad para frecuencias  $\omega \leq \omega_s$ .

- Robustez frente a la variación de ganancia de la planta:

$$\left[ \frac{d[\arg[C(s)G(s)]]}{d\omega} \right]_{\omega=\omega_{cj}} = 0. \quad (3.71)$$

Con esta condición se fuerza al sistema en lazo abierto a tener una fase plana entorno a la frecuencia de cruce  $\omega_{cj}$ , la cual le concede la propiedad de robustez frente a las variaciones de ganancia (Chen *et. al*, 2006).

En todas las expresiones anteriores  $C(s)$  representa la función de transferencia del controlador y  $G(s)$  representa la de la planta.

### Ajuste del PID<sup>o</sup> mediante reglas de ajuste

Existen tablas con reglas de ajuste como las que existen para los PID enteros. Éstas han sido obtenidas previamente mediante optimización fijando los valores de los parámetros para plantas del tipo (3.60) y obteniendo los cinco parámetros que definen al PID fraccionario.

En (Valério, 2005) podemos encontrar varias tablas resumen de estos valores de ajuste para el PID en función de sus parámetros. La gran utilidad de estas tablas es que pueden ser aplicadas incluso sin disponer del modelo de la planta a controlar.

### 3.5.3. Controladores $H_2$ y $H_\infty$

Un problema fundamental en la teoría y en la práctica del control es el diseño de controladores que tengan buen rendimiento, no sólo para una planta única y con entradas conocidas, sino más bien para una familia de plantas con diversos tipos de entradas y perturbaciones. Los controladores descritos en este apartado son un ejemplo de una formulación a tal problema.

Los controladores obtenidos como resultado de minimizar las normas  $H_2$  y  $H_\infty$  han sido ampliamente utilizados y estudiados durante las últimas décadas, en lo que a plantas de orden entero se refiere. Las expresiones de ambas normas tienen la siguiente forma:

- Para la norma  $H_2$

$$\|G(s)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr} \left[ G(j\omega) \overline{G(j\omega)} \right] d\omega}. \quad (3.72)$$

Esta norma de una función de transferencia nos dice cuánto se amplifica o atenúa con respecto a su entrada en todas las frecuencias.

- Para la norma  $H_\infty$

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega} \max |G(j\omega)|. \quad (3.73)$$

Esta norma de una función de transferencia da como resultado la máxima sobre todas las entradas (perturbaciones), con  $\omega$  (no iguales a cero), del cociente de la cantidad de energía que sale del sistema y la cantidad de energía que entra en el sistema.

Para plantas de orden entero es posible encontrar expresiones para estos controladores minimizando estas normas  $H_2$  y  $H_\infty$  de forma analítica (Lublin *et al.*, 1996). Desafortunadamente, en la actualidad, no se han encontrado las mismas para el caso de plantas de orden fraccionario, debido a la complejidad de la formulación matemática cuando se utilizan expresiones fraccionarias. Sin embargo, es posible usar métodos numéricos para minimizar estas normas (Petráš y Hyslopová, 2002) o incluso algoritmos genéticos (Valério y Sá da Costa, 2006).

### 3.6. Aproximaciones de los operadores fraccionarios

Las funciones de transferencia que contienen operadores fraccionarios,  $s^\alpha$ , en su definición, como las de los controladores vistos anteriormente, no tienen una implementación computacional sencilla. Por un lado, el *software* de simulación disponible sólo trabaja con potencias enteras de “ $s$ ” y, por el otro lado, tenemos el comportamiento de memoria infinita de estos operadores. Por tanto, la labor de encontrar aproximaciones de orden entero del integrador/diferenciador,  $s^\alpha$ , se hace indispensable para llevar a cabo implementaciones reales y simulaciones de este tipo de sistemas. Cuando las simulaciones van a llevarse a cabo, las funciones de transferencia fraccionarias son sustituidas por sus aproximaciones correspondientes

con la condición de que éstas tengan un comportamiento lo suficientemente bueno para sustituirlas.

Existen muchas formas de encontrar estas aproximaciones pero desafortunadamente no es posible decidir cuál de ellas es la mejor, ya que dependiendo de la aproximación que se calcule tendremos ciertas características mejores y otras peores, por tanto, no existe un criterio único para su elección. Se pueden calcular aproximaciones de estos sistemas tanto en el ámbito continuo, *plano s*, como en el ámbito discreto, *plano z*, dependiendo de las necesidades o del tipo de implementación final.

Por otro lado, está la problemática de la implementación física de controladores con términos fraccionarios, ya que sólo en el caso de orden entero es posible realizar exactamente una función de transferencia continua utilizando elementos circuitales convencionales: resistencias, condensadores o inductancias; además, como ya se indicó anteriormente, la expresión discreta de estos sistemas tiene infinitos términos, memoria ilimitada. Por tanto, no podrán ser implementados con exactitud utilizando los procedimientos habituales para la realización de controladores discretos, mediante ecuaciones en diferencias de orden finito o filtros digitales de orden finito.

En la actualidad empiezan a aparecer elementos circuitales novedosos como son los supercondensadores (Quintana *et al.*, 2006) y el Fractor<sup>4</sup> que exhiben dinámicas que son descritas por una función de transferencia con comportamiento fraccionario, aunque su aplicación directa en un circuito convencional todavía no está muy clara. Por ello, y teniendo en cuenta que el paso final para la aplicación de los controladores fraccionarios exige la obtención de una forma realizable de los mismos, será necesario obtener aproximaciones realizables de las funciones de transferencia que los caracterizan.

---

<sup>4</sup> Dispositivo electrónico con comportamiento fraccionario, propiedad de Fractortech, Inc.

#### 3.6.1. Simulación numérica de sistemas fraccionarios

La mayor dificultad para la simulación de sistemas fraccionarios la encontramos cuando queremos obtener una respuesta precisa en el dominio del tiempo, ya que en la mayoría de los casos la obtención de la expresión analítica de la salida del sistema no es simple de obtener y computar.

Durante los últimos 25 años, se han venido desarrollando una serie de algoritmos que pretenden, mediante métodos numéricos, la obtención de aproximaciones tanto discretas como continuas de sistemas con órdenes fraccionarios, de los cuales podemos destacar: (Oustaloup, 1983), (Al-Alaoui, 1994), (Vinagre *et al.*, 2000), (Petráš *et al.*, 2001), (Chen y Moore, 2002), (Maione, 2006).

A continuación vamos a revisar las principales formas de simulación numérica de los sistemas fraccionarios.

- Mediante su expresión analítica:

Es bien sabido que a partir de la función de transferencia de un sistema podemos obtener su comportamiento en el dominio del tiempo cuando se presenta a su entrada una señal cualesquiera. Para ello basta con calcular la transformada inversa de Laplace.

En el caso de los sistemas fraccionarios no siempre es fácil obtener esta expresión analítica, salvo que el sistema sea de orden conmensurable ya que en ese caso su función de transferencia tendrá la forma:

$$G(s) = \sum_{l=0}^n \frac{A_l}{s^\alpha - \lambda_l}. \quad (3.74)$$

Teniendo en cuenta que:

$$L^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - \lambda_l} \right\} = t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda_l t^\alpha), \quad (3.75)$$

la respuesta impulso de estos sistemas tendrá la forma:

$$i(t) = \sum_{l=0}^n A_l t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_l t^\alpha), \quad (3.76)$$

y la respuesta escalón tendrá la forma:

$$y(t) = \sum_{l=0}^n A_l t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(\lambda_l t^\alpha). \quad (3.77)$$

- Mediante aproximaciones continuas:

La obtención de un modelo en potencias enteras de “s” que aproxime el comportamiento del operador fraccionario,  $s^\alpha$ , para valores de  $\alpha$  dentro del intervalo (0, 1), se le conoce como aproximación continua. Una buena aproximación continua a los operadores fraccionarios debe dar como resultado una función racional con polos y ceros entrelazados a lo largo del eje real negativo, asegurando que las aproximaciones resultantes correspondan a sistemas estables y de fase mínima (Vinagre, 2001).

A continuación se presentarán los métodos más utilizados para la obtención de aproximaciones continuas de una forma general y somera:

- Aproximación Crone:

La metodología Crone permite aproximar de forma continua el operador fraccionario  $s^\alpha$  mediante una distribución recursiva de ceros y polos (Oustaloup, 1991). Esta distribución alterna los ceros y los polos en intervalos elegidos previamente, de tal forma que se pueden construir funciones de transferencia cuya ganancia varía linealmente con el logaritmo de la frecuencia y con fase prácticamente constante dentro de un intervalo definido  $[\omega_l, \omega_h]$ . Por tanto, el objetivo es obtener un comportamiento en frecuencia lo más parecido posible al comportamiento que tiene el operador fraccionario  $s^\alpha$ . Así pues, la expresión de la función de transferencia aproximada queda de la siguiente forma:

$$G(s) = s^\alpha \approx C_0 \prod_{n=1}^N \frac{1 + \frac{s}{\omega_{sn}}}{1 + \frac{s}{\omega_{pn}}}. \quad (3.78)$$

- Aproximación de Carlson:

Esta metodología propuesta por Carlson y Halijak (1964) también proporciona aproximaciones continuas del operador fraccionario, pero rescribiendo la función de transferencia en la forma (3.79), y después resolviendo esta ecuación utilizando el método de Newton para aproximar la raíz  $\alpha$  de un número de forma iterativa (3.81), tomando como punto de partida (3.80). Desafortunadamente, este método sólo funciona para valores de  $\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{Z}$ , así que  $\alpha$  sólo podrá tomar valores tales como:  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$

$$G^{\frac{1}{\alpha}}(s) = s \quad (3.79)$$

$$G_0(s) = 1 \quad (3.80)$$

$$G_i(s) = G_{i-1}(s) \frac{\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) G_{i-1}^{\frac{1}{\alpha}}(s) + \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) s}{\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) G_{i-1}^{\frac{1}{\alpha}}(s) + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) s}. \quad (3.81)$$

- Aproximación de Matsuda:

Matsuda y Fujii (1993) propusieron una metodología basada en la aproximación de una función no racional, por medio de una función racional obtenida mediante expansión en fracciones continuadas, de tal forma que sus valores coinciden con los de la función original en un conjunto de puntos logarítmicamente espaciados. La expresión de la misma es la siguiente:

$$G(s) = a_0 + \frac{s - \omega_0}{a_1 + \frac{s - \omega_1}{a_2 + \frac{s - \omega_2}{a_3 + \dots}}} = a_0 + \frac{s - \omega_0}{a_1} + \frac{s - \omega_1}{a_2} + \frac{s - \omega_2}{a_3} + \dots \quad (3.82)$$

- Método de expansión en fracciones continuadas:

Como se puede observar en (Roy, 1967), es posible obtener aproximaciones racionales del operador fraccionario  $s^{\pm\alpha}$  dentro del

intervalo  $\alpha \in (0,1)$  mediante la expansión en fracciones continuadas de las siguientes funciones:

$$G_h(s) = \frac{1}{(1+s)^{\mp\alpha}}. \quad (3.83)$$

$$G_l(s) = \left(1 + \frac{1}{s}\right)^{\mp\alpha}. \quad (3.84)$$

La primera de ellas (3.83) es válida para frecuencias altas mayores de  $1 \text{ rad/s}$ , mientras que la segunda expresión (3.84) es usada para frecuencias bajas menores a  $1 \text{ rad/s}$ .

- Mediante aproximaciones discretas:

Para su síntesis se pueden utilizar tanto **métodos directos** como **métodos indirectos**. Los métodos indirectos consisten en hacer primero una aproximación continua que encaje con la función de transferencia fraccionaria en el dominio de la frecuencia y después realizar una discretización de la misma. Por otra parte, los métodos directos emplean una función generadora  $\omega(z^{-1})$  para discretizar directamente los términos fraccionarios de la función de transferencia. A continuación se presentan las funciones generadoras más usuales:

- Euler (Backward rule):

$$\omega(z^{-1}) = \frac{1-z^{-1}}{T_s}. \quad (3.85)$$

- Tustin:

$$\omega(z^{-1}) = \frac{2}{T_s} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}. \quad (3.86)$$

- Al-Alaoui:

$$\omega(z^{-1}) = \frac{8}{T_s} \frac{1-z^{-1}}{7+z^{-1}}. \quad (3.87)$$

- Simpson:

$$\omega(z^{-1}) = \frac{3}{T_s} \frac{1 - z^{-1}}{1 + 4z^{-1} + z^{-2}}. \quad (3.88)$$

donde  $T_s$  representa el periodo de muestreo elegido para el sistema.

Al igual que en el caso anterior, estas aproximaciones discretas deben dar como resultado una función racional con polos y ceros entrelazados a lo largo del eje real negativo, asegurando que las aproximaciones resultantes correspondan a sistemas estables y de fase mínima. Además, es conveniente, desde el punto de vista del control, que la metodología utilizada conduzca a obtener funciones de transferencia racionales o filtros IIR, ya que es bien sabido que los filtros FIR y los IIR pueden cumplir las mismas exigencias, pero los filtros IIR lo hacen con menor orden de filtro. Esto es importante a la hora de implementar el filtro pues presenta una menor carga computacional al poseer éste un menor número de términos en  $z$ .

A continuación se presentarán los métodos más utilizados para la obtención de aproximaciones discretas de una forma general y somera:

- Aproximación de Grünwald–Letnikov:

La manera más simple y directa de obtener una aproximación discreta de  $s^\alpha$  es usando **el principio de memoria corta** (Podlubny, 1999b), junto a la definición de Grünwald–Letnikov (3.4). Reemplazando en esta última el intervalo de tiempo  $h$  por el periodo de muestreo  $T_s$ .

$$s^{\pm\alpha} \approx \omega(z^{-1})^{\pm\alpha} = T_s^{\mp\alpha} z^{-k} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\pm\alpha}{j} z^{k-j}. \quad (3.89)$$

Esta aproximación se basa en el hecho de que al aplicar la transformada de Laplace a la ecuación diferencial fraccionaria (3.90) con condiciones iniciales nulas, obtenemos la función de transferencia que queremos discretizar. Por tanto, esta aproximación para un amplio rango de funciones de transferencia que aparecen en problemas de ingeniería o física es equivalente a la definición de Riemann–Liouville (3.2) (Podlubny, 1999b).

$$y(t) = D^\alpha u(t). \quad (3.90)$$

- Aproximación utilizando la integración numérica y expansión en fracciones continuadas:

Como ya se vio en el caso continuo, la expansión en fracciones continuadas también es un método perfectamente válido para la obtención de aproximaciones racionales dentro del ámbito discreto usando:

$$s^{\pm\alpha} \approx T_s^{\mp\alpha} CFE \{ \omega(z^{-1})^{\pm\alpha} \} = T_s^{\mp\alpha} \frac{P_p(z^{-1})}{Q_q(z^{-1})}, \quad (3.91)$$

donde  $T_s$  es el periodo de muestreo,  $P_p$  y  $Q_q$  son polinomios de órdenes  $p$ , y  $q$ , respectivamente y  $\omega(z^{-1})$  es la función generadora elegida para discretizar: Euler, Tustin, etc.

- Aproximación de Maione:

Esta metodología se basa en obtener aproximaciones del operador fraccionario  $s^{0.5}$ , ya que como se describe en (Tenreiro, 2001) este orden de derivación puede crear problemas de convergencia cuando se usan las funciones de generación de Tustin o Simpson. El autor obtiene la aproximación en dos pasos, primero aproxima el operador fraccionario  $s^{\pm 0.5}$  mediante fracciones continuadas convergentes y después discretiza usando la fórmula de Tustin (Maione, 2006).

$$\begin{aligned} s^\alpha &\approx k \frac{\gamma_i}{\beta_i} \\ \gamma_i(z) &= k\rho(z)\beta_{i-1}(z) \\ \beta_i(z) &= \beta_{i-1}(z) + h\rho(z)\beta_{i-2}(z). \end{aligned} \quad (3.92)$$

- Aproximaciones basadas en identificación en el dominio de la frecuencia:

Existen muchos métodos de identificación de sistemas en el dominio de la frecuencia, los cuales se emplean con objeto de obtener un modelo racional cuya respuesta en frecuencia se ajuste a la del sistema original de tal manera que se haga mínima una determinada función de coste  $J$ .

$$J = \int W(\omega) |G(\omega) - \hat{G}(\omega)|^2 d\omega, \quad (3.93)$$

donde  $W$  es una función de ponderación,  $G$  la respuesta en frecuencia original y  $\hat{G}$  la respuesta en frecuencia del modelo aproximado.

Existe una función de MATLAB<sup>TM</sup>, *invfreqz*, que implementa este criterio. Ésta tiene la siguiente sintaxis:

$$[B, A] = \text{invfreqz}(H, w, nb, na) .$$

Esta función devuelve los coeficientes del numerador  $B$  y del denominador  $A$  con órdenes  $nb$  y  $na$ , respectivamente.  $H$  es la frecuencia compleja deseada del sistema en los puntos  $w$ , y  $w$  contiene el valor de la frecuencia en esos puntos, expresada en radianes por segundo.

Nota: también existe el equivalente continuo de esta función de MATLAB<sup>TM</sup>, cuyo nombre es *invfreqs* con una sintaxis muy parecida a la anterior.

### 3.7. Aproximaciones racionales basadas en los polinomios de Chebyshev

En esta sección, se estudiarán varias técnicas basadas en los polinomios de Chebyshev para la obtención de aproximaciones racionales discretas del operador fraccionario  $s^\alpha$ .

En primer lugar, se hará una breve introducción a los polinomios de Chebyshev, repasando los conceptos fundamentales. A continuación se mostrará cómo utilizar la aproximación de Chebyshev–Padé para aproximar operadores fraccionarios. Además, se propondrá el uso, como aportación novedosa en esta Tesis, de la aproximación racional de Chebyshev para este fin.

Por último, se realizará una comparación de ambas aproximaciones basadas en los polinomios de Chebyshev, tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia.

### 3.7.1. Introducción a los polinomios de Chebyshev

Matemáticamente, se conocen los polinomios de Chebyshev como una secuencia de polinomios ortogonales o serie polinómica que son definidos recursivamente. Estos polinomios se utilizan ampliamente en la literatura para obtener buenas aproximaciones polinómicas de funciones continuas (Mason y Handscomb, 2003).

La teoría de las aproximaciones polinómicas de Chebyshev es demasiado extensa como para describirla aquí con todo detalle. Por tanto, en esta sección nos limitaremos a destacar aquellos conceptos que necesitamos para desarrollar nuestras aproximaciones. Existe una extensa bibliografía matemática sobre el tema, como, por ejemplo (Spanier y Oldham, 1987), (Rivlin, 1990).

El polinomio de Chebyshev de grado  $n$ , notado como  $T_n(x)$ , se define mediante la expresión  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ , el cual, como es bien sabido, satisface las siguientes relaciones:  $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ , con  $T_0(x) = 1$  y con  $T_1(x) = x$  para todo  $n \geq 1$ .

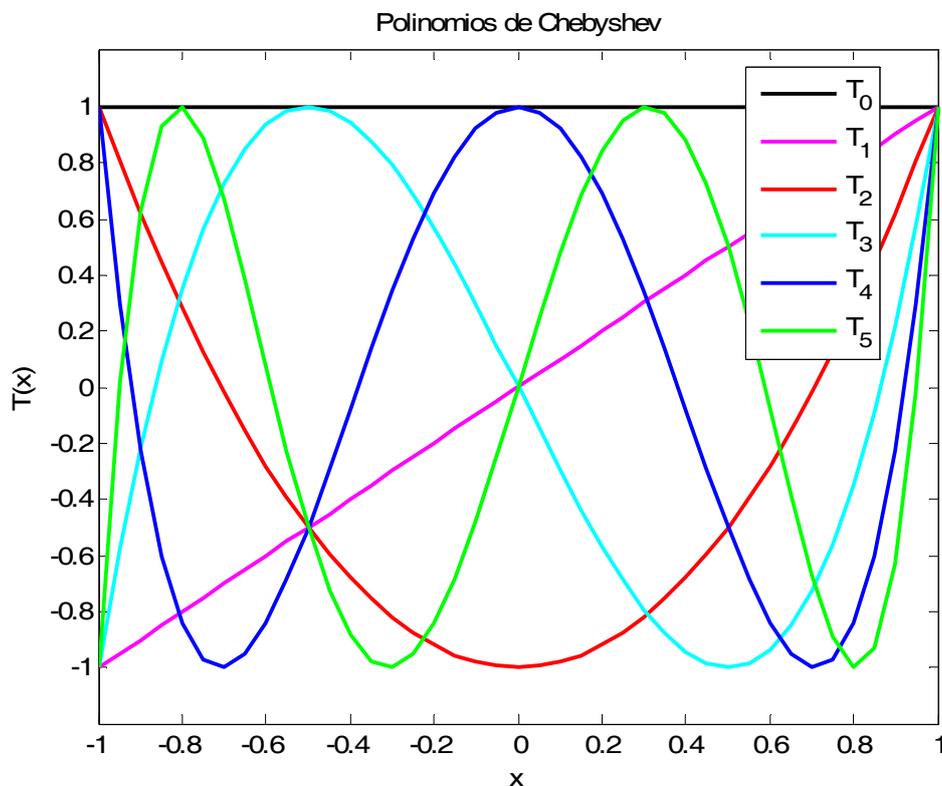


Fig 3.19 Representación gráfica de los seis primeros polinomios de Chebyshev.

### 3. Cálculo Fraccionario: Aplicación al control de sistemas

---

A continuación se muestran los primeros polinomios de la serie. En la Fig 3.19 se encuentran representados dentro del intervalo  $-1 \leq x \leq 1$ .

$$\begin{aligned}T_0(x) &= 1 \\T_1(x) &= x \\T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \\&\dots\end{aligned}\tag{3.94}$$

Este polinomio  $T_n(x)$  tiene  $n$  ceros dentro del intervalo  $[-1, 1]$  localizados en:

$$x = \cos\left(\frac{\pi\left(k - \frac{1}{2}\right)}{n}\right), \quad k = 1, 2, 3, \dots, n.\tag{3.95}$$

Estos polinomios son ortogonales dentro del intervalo  $[-1, 1]$ , satisfaciendo la siguiente relación de ortogonalidad:

$$\sum_{k=1}^m T_i(x_k)T_j(x_k) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ m/2 & i = j \neq 0 \\ m & i = j = 0 \end{cases}\tag{3.96}$$

Si  $f(x)$  es una función arbitraria cualquiera definida en el intervalo  $[-1, 1]$  y si los coeficientes  $c_j$  para todo  $j = 0, \dots, n-1$  son definidos por la siguiente expresión

$$c_j = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^n f(x_k)T_j(x_k)\tag{3.97}$$

entonces la aproximación:

$$f(x) \approx \left[ \sum_{k=0}^{n-1} c_k T_k(x) \right] - \frac{1}{2} c_0\tag{3.98}$$

es exacta para  $x$  igual a cada uno de los  $n$  ceros de  $T_n(x)$ . Normalmente esta aproximación polinómica se trunca a un polinomio de menor grado  $m \ll n$  con los mismos coeficientes  $c_j$ .

$$f(x) \approx \left[ \sum_{k=0}^{m-1} c_k T_k(x) \right] - \frac{1}{2} c_0. \quad (3.99)$$

Esta aproximación de Chebyshev presenta la desviación más pequeña del verdadero valor de la función  $f(x)$  para un determinado grado  $m$ . Para hacer posible que el intervalo de la aproximación sea  $[a, b]$  únicamente habrá que realizar un cambio de variable.

Dado que la aproximación de Chebyshev es una serie polinómica, y ya que para la obtención de una función de transferencia necesitamos una función racional, necesitaremos de una metodología que basándose en ésta de Chebyshev nos permita obtener tales funciones racionales. Dos de ellas son Chebyshev–Padé y racional de Chebyshev, las cuales se exponen a continuación.

### 3.7.2. Aproximación de Chebyshev–Padé

La aproximación racional de Chebyshev-Padé –CP– de una función  $f$  cualesquiera se obtiene en dos pasos: en primer lugar,  $f$  tiene que expandirse en una serie de Chebyshev dentro de un intervalo dado  $[a, b]$ ; y en segundo lugar, se calcula la aproximación racional mediante Padé (Press *et al.*, 1992), (Graves-Morris, 1979).

La aproximación de Padé es una función racional de un orden específico, cuya expansión en serie concuerda con una expansión en serie dada en su mayor orden posible. Por lo tanto, la función racional siguiente

$$R(x) \equiv \frac{\sum_{k=0}^M a_k x^k}{1 + \sum_{k=1}^N b_k x^k} \quad (3.100)$$

se dice que es una aproximación de Páde de la serie

$$f(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad (3.101)$$

si  $R(0) = f(0)$ ; entonces

$$\left. \frac{d^k}{dx^k} R(x) \right|_{x=0} = \left. \frac{d^k}{dx^k} f(x) \right|_{x=0}, \quad k = 1, 2, \dots, M + N. \quad (3.102)$$

### 3. Cálculo Fraccionario: Aplicación al control de sistemas

---

Aunque podemos seguir el desarrollo teórico anterior para obtener la aproximación de CP, es mejor optar por utilizar las librerías de cálculo simbólico de los programas comerciales MATLAB™ o MAPLE™, ya que éstas tienen implementado el cálculo de esta aproximación. A continuación se presenta la sintaxis de la función en MAPLE™:

$$\text{chebpade}(f, x=a..b, [m, n])$$

donde  $a$  y  $b$  son dos valores numéricos que especifican el intervalo de la aproximación,  $f$  es la función definida en simbólico que queremos aproximar,  $m$  y  $n$  representan los grados deseados del numerador y del denominador de la aproximación, respectivamente.

La aproximación de CP fue propuesta en (de Madrid *et al.*, 2006) para aproximar funciones de transferencia fraccionarias. El ejemplo que se propone a continuación ilustra este hecho.

#### **Ejemplo**

Para ilustrar la metodología, supongamos que queremos obtener una aproximación racional discreta de la función de transferencia  $G(s) = 1/s^\alpha$  utilizando la aproximación de CP con  $\alpha = 0.5$ .

En primer lugar debemos discretizar la función de transferencia  $G$  utilizando, por ejemplo, la función generadora de Euler (Backward rule) (3.85).

$$G_{CP}(z^{-1}) = \frac{1}{\omega(z^{-1})^{0.5}} = \frac{T_s^{0.5}}{(1-z^{-1})^{0.5}}, \quad (3.103)$$

donde  $T_s$  es el periodo de muestreo que, en este caso concreto, lo vamos a tomar igual a 0.1 segundos.

A continuación hacemos el siguiente cambio de variable:

$$z^{-1} = x. \quad (3.104)$$

Con este cambio de variable podemos definir la función  $f$  a aproximar de la siguiente forma:

$$f(x) = (1-x)^{-0.5}. \quad (3.105)$$

Eligiendo como intervalo de la aproximación el siguiente  $[-0.999, 0.999]^5$  y como grado del numerador y del denominador 3, obtenemos la aproximación de CP con el siguiente comando de MATLAB<sup>TM</sup>:

```
chebpadde(f, x=-0.999..0.999, [3, 3])
```

Se obtiene la siguiente aproximación, después de deshacer el cambio de variable  $x$  por  $z^{-1}$ :

$$G_{CP}(z^{-1}) = \frac{0.175028 - 0.310905z^{-1} + 0.149353z^{-2} - 0.012421z^{-3}}{0.553472 - 1.259564z^{-1} + 0.894846z^{-2} - 0.188667z^{-3}}. \quad (3.106)$$

En la Fig 3.20 podemos observar la comparación entre la respuesta escalón de la función  $G$  y la respuesta escalón de su aproximación racional  $G_{CP}$  usando CP. Si observamos esta figura podemos afirmar que la dinámica de la aproximación es similar a la dinámica de la función  $G$  durante unos 150 segundos.

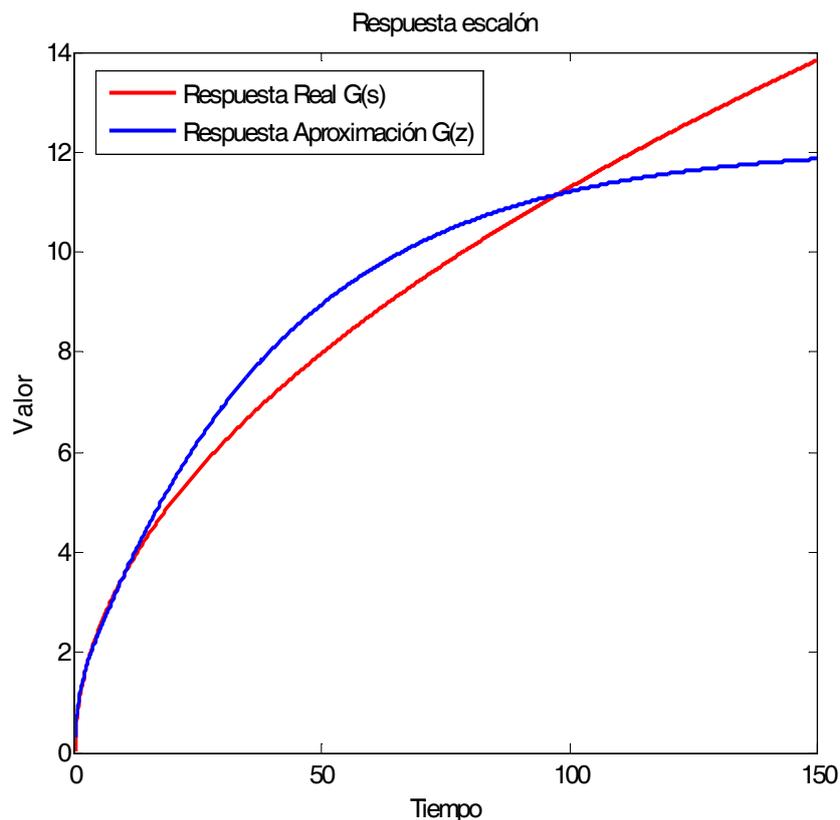


Fig 3.20 Comparación respuesta escalón entre  $G(s)$  y su aproximación  $G_{CP}(z^{-1})$ .

<sup>5</sup> Se escoge éste en vez de  $[-1, 1]$ , porque la función  $f$  tiene un polo en  $x = 1$ .

### 3. Cálculo Fraccionario: Aplicación al control de sistemas

---

Por otro lado, en la Fig 3.21 se ilustra la comparación entre las respuestas en frecuencia de la función real  $G$  y su aproximación de CP. Es fácilmente observable que la aproximación tiene un mejor comportamiento, la forma de la gráfica es más cercana a la real, en las frecuencias altas que en las bajas.

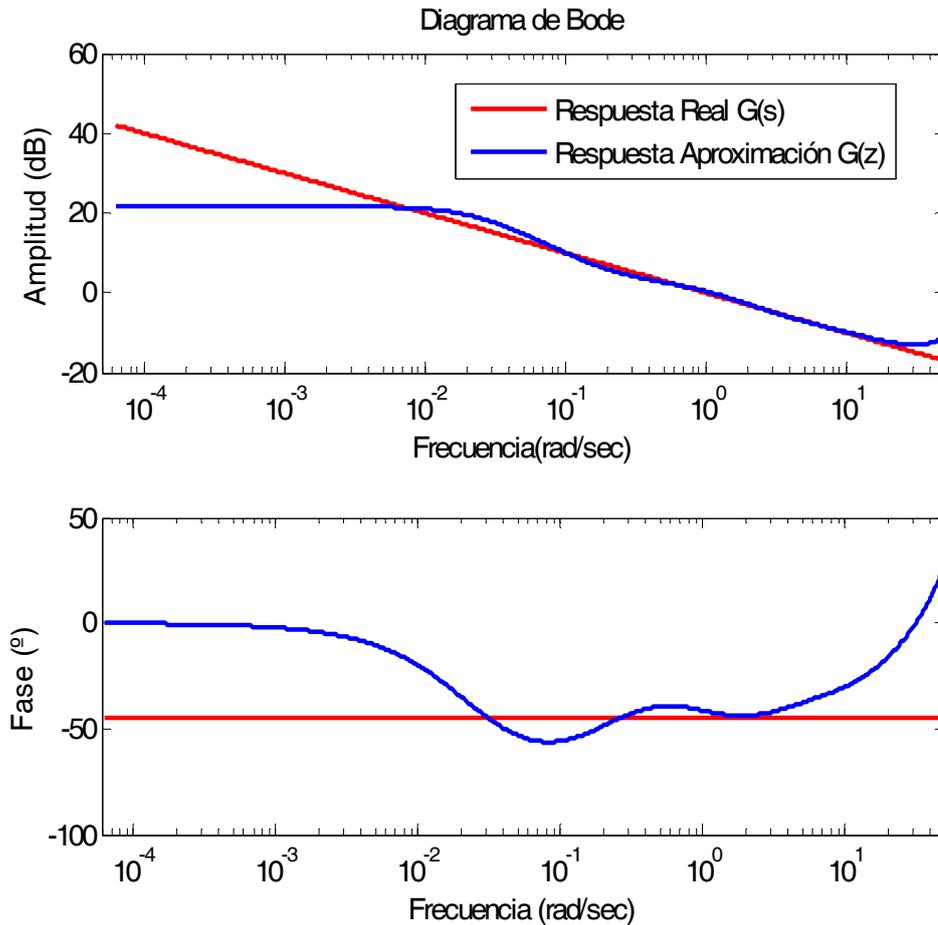


Fig 3.21 Comparación respuesta en frecuencia entre  $G(s)$  y su aproximación  $G_{CP}(z^{-1})$ .

La Fig 3.22 nos ilustra cómo esta aproximación discreta es una función racional con polos y ceros entrelazados a lo largo del eje real negativo, es estable y de fase mínima, tal y como se recomienda.

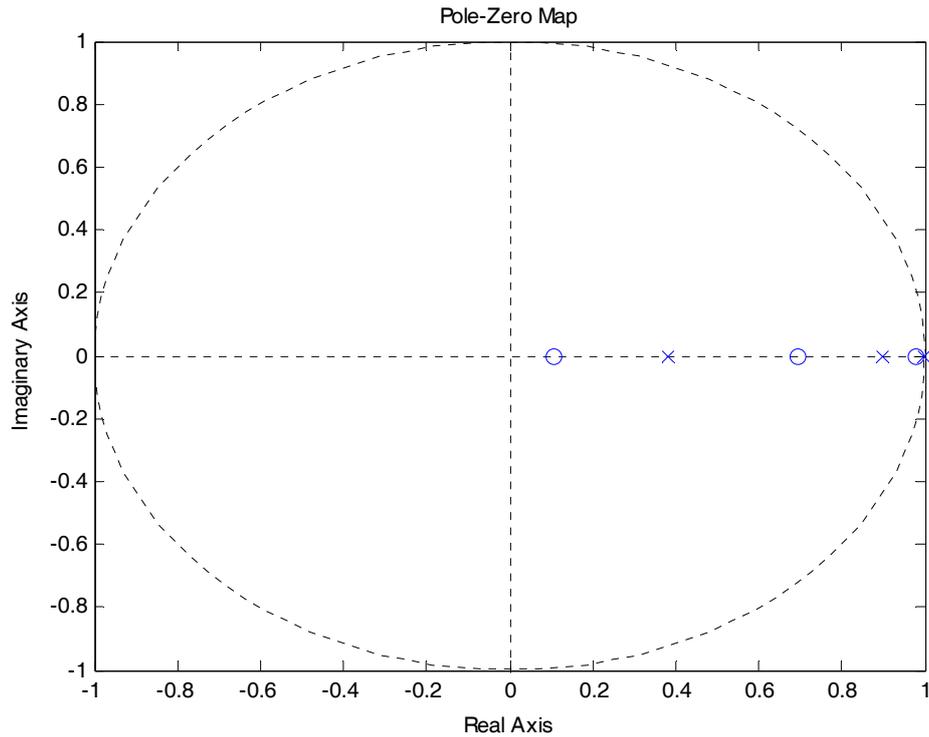


Fig 3.22 Diagrama de polos y ceros de la aproximación  $G_{CP}(z^{-1})$ .

### 3.7.3. Aproximación racional de Chebyshev

En esta sección se propone un nuevo tipo de aproximación. La así llamada aproximación racional de Chebyshev –RC– es una técnica muy útil para encontrar buenas aproximaciones racionales de una función  $f(x)$  en un intervalo  $[a, b]$  dado (Press *et al.*, 1992).

Sea  $R(x)$  una función racional, la cual tiene un numerador de grado  $m$  y un denominador de grado  $n$ :

$$R(x) \equiv \frac{p_0 + p_1x + \dots + p_mx^m}{1 + q_1x + \dots + q_nx^n} \approx f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (3.107)$$

donde  $p_0, \dots, p_m$  y  $q_1, \dots, q_n$  son  $m + n + 1$  variables desconocidas.

Es bien sabido que en el caso de una aproximación polinómica de Chebyshev con  $k + 1$  coeficientes, el término de error viene definido por el primer término rechazo de la secuencia, es decir, el término  $T_{n+1}$ . En este caso, el número de

coeficientes racionales,  $m + n + 1$ , juega el mismo papel que el número de coeficientes polinómicos,  $k + 1$ .

Definamos también la desviación de la función racional aproximada  $R(x)$  del valor real de la función  $f(x)$  con la función  $\rho(x)$ , siendo  $\rho$  su máximo valor en valor absoluto:

$$\rho(x) \equiv R(x) - f(x) \quad \rho \equiv \max_{a \leq x \leq b} |\rho(x)|. \quad (3.108)$$

La solución ideal *minimax* sería aquella donde se eligieran los valores de  $p$  y  $q$ , de tal forma que minimicen  $\rho$ . Obviamente existe alguna solución puesto que  $\rho$  está acotado por abajo por el valor 0. Sin embargo, encontrar esta solución óptima no es una tarea sencilla y directa (Press *et al.*, 1992).

**Teorema 3.3:** Si  $R(x)$  es no degenerada (no tiene factores comunes en el denominador y el denominador), entonces existe una única elección de los valores de  $p$  y  $q$  que minimizan  $\rho(x)$  (Ralston y Wilf, 1960), (Ralston y Rabinowitz, 1978). Haciendo esto tenemos que  $\rho(x)$  posee  $m + n + 2$  extremos (máximos o mínimos) dentro del intervalo  $[a, b]$ , de magnitud  $\rho$  y con alternancia de signo.

Calculando los  $x_i$  de tal forma que sean igual a los extremos de la función y no igual a aquellos valores que la hacen cero, y además no tratar de hacer que las funciones  $R(x_i)$  y  $f(x_i)$  tengan el mismo valor en los puntos  $x_i$  sino que vengan condicionados por  $\rho(x)$  entonces, la ecuación a satisfacer para resolver el problema será:

$$p_0 + p_1 x_i + \dots + p_m x_i^m = [f(x_i) \pm \rho](1 + q_1 x_i + \dots + q_n x_i^n) \quad (3.109)$$

$$i = 1, 2, \dots, m + n + 2.$$

Como podemos observar en la expresión (3.109), el número de parámetros desconocidos es  $m + n + 2$ , siendo el parámetro  $\rho$  un parámetro desconocido más.

Una vez planteado el problema de esta manera, puede ser resuelto utilizando un método iterativo basado en el *algoritmo de Remes* (Remes, 1957), el cual se puede encontrar enunciado en diferentes versiones, algunas de ellas pensadas para convertirlas rápidamente en programas de ordenador (Cody, 1970), y el cual podemos resumirlo en los siguientes pasos:

- 1.- Encontrar una solución inicial para los  $x_i$ .
- 2.- Resolver la ecuación (3.109) para estos nuevos coeficientes, y para  $\rho$ .
- 3.- Evaluar  $R(x)$  para encontrar los nuevos puntos extremos.
- 4.- Reemplazar el valor anterior por el extremo actual calculado con el mismo signo.
- 5.- Ir al paso 2 e iterar hasta converger.

Una de las variaciones de este algoritmo para encontrar los valores óptimos de  $p$  y  $q$  está descrito en (Press, *et al.*, 1992). Además los autores proporcionan el código fuente en lenguaje C para que pueda ser compilado y adaptado a cada necesidad.

En (Romero *et al.*, 2006) se propone de forma novedosa el uso de esta aproximación racional de Chebyshev para aproximar operadores fraccionarios con funciones de transferencia discretas. En el siguiente ejemplo se ilustrará esta metodología haciendo uso del código de (Press, *et al.*, 1992).

### **Ejemplo**

Para ilustrar la metodología, supongamos que queremos obtener una aproximación racional discreta de la función de transferencia  $G(s) = 1/s^\alpha$  utilizando la aproximación de RC con  $\alpha = 0.5$ .

En primer lugar, debemos discretizar la función de transferencia,  $G(s)$ , utilizando, por ejemplo, la función generadora de Al-Alaoui (3.87):

$$G_{RC}(z^{-1}) = \frac{1}{\omega(z^{-1})^{0.5}} = \frac{\left(\frac{T_s}{8}\right)^{0.5} (7 + z^{-1})^{0.5}}{(1 - z^{-1})^{0.5}}, \quad (3.110)$$

donde  $T_s$  es el periodo de muestreo que en este caso lo vamos a tomar de nuevo igual a 0.1 segundos.

Haciendo el cambio de variable  $z^{-1} = x$ , tenemos una función  $f$  a aproximar mediante RC, de la siguiente forma:

$$f(x) = \left( \frac{7+x}{1-x} \right)^{0.5}. \quad (3.111)$$

Se ha elegido como intervalo de la aproximación:  $[-0.999, 0.999]^6$  y como grado del numerador y del denominador 3, obteniendo la siguiente aproximación:

$$R(x) = \frac{0.293688 - 0.606779x + 0.353762x^2 - 0.040582x^3}{1 - 2.657220x + 2.320843x^2 - 0.663619x^3}. \quad (3.112)$$

Una vez deshecho el cambio de variable,  $x = z^{-1}$ , obtenemos la aproximación siguiente:

$$G_{RC}(z^{-1}) = \frac{0.293688 - 0.606779z^{-1} + 0.353762z^{-2} - 0.040582z^{-3}}{1 - 2.657220z^{-1} + 2.320843z^{-2} - 0.663619z^{-3}}. \quad (3.113)$$

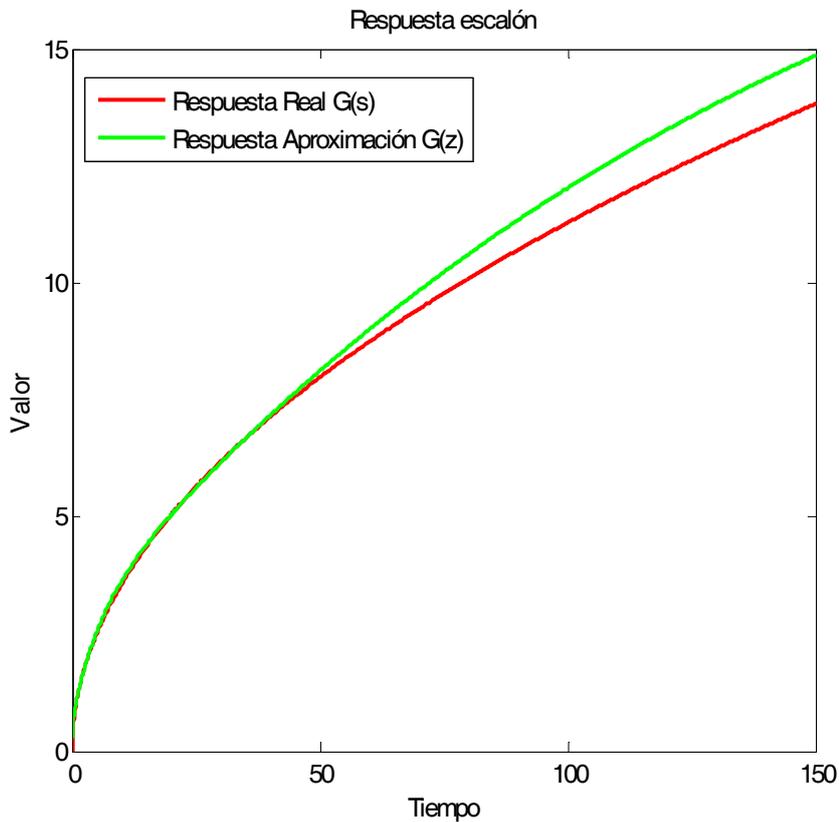


Fig 3.23 Comparación respuesta escalón entre  $G(s)$  y su aproximación  $G_{RC}(z^{-1})$ .

---

<sup>6</sup> Se escoge éste, en vez de  $[-1, 1]$ , porque la función  $f$  tiene un polo en  $x = 1$ .

En la Fig 3.23 tenemos la comparación entre la respuesta escalón de la función  $G(s)$  y la respuesta escalón de su aproximación racional  $G_{RC}(z^{-1})$ .

Podemos observar en la Fig 3.24, donde se ilustra la comparación entre las respuestas en frecuencia de la función real  $G(s)$  y su aproximación  $G_{RC}(z^{-1})$ , que esta aproximación tiene un mejor comportamiento en las frecuencias altas que en las bajas.

Por último, podemos destacar, observando el diagrama de polos y ceros de la Fig 3.25, que esta aproximación discreta es también una función racional con polos y ceros entrelazados a lo largo del eje real negativo, es estable y de fase mínima, tal y como se recomienda.

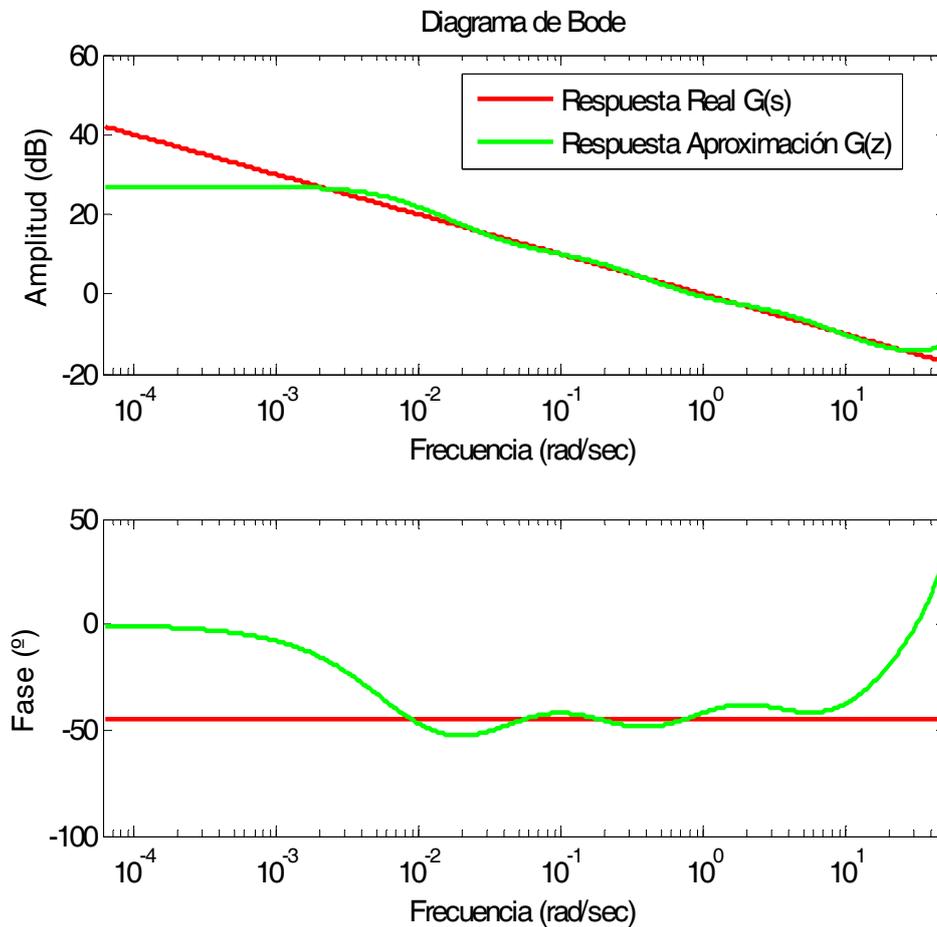


Fig 3.24 Comparación respuesta en frecuencia entre  $G(s)$  y su aproximación  $G_{RC}(z^{-1})$ .

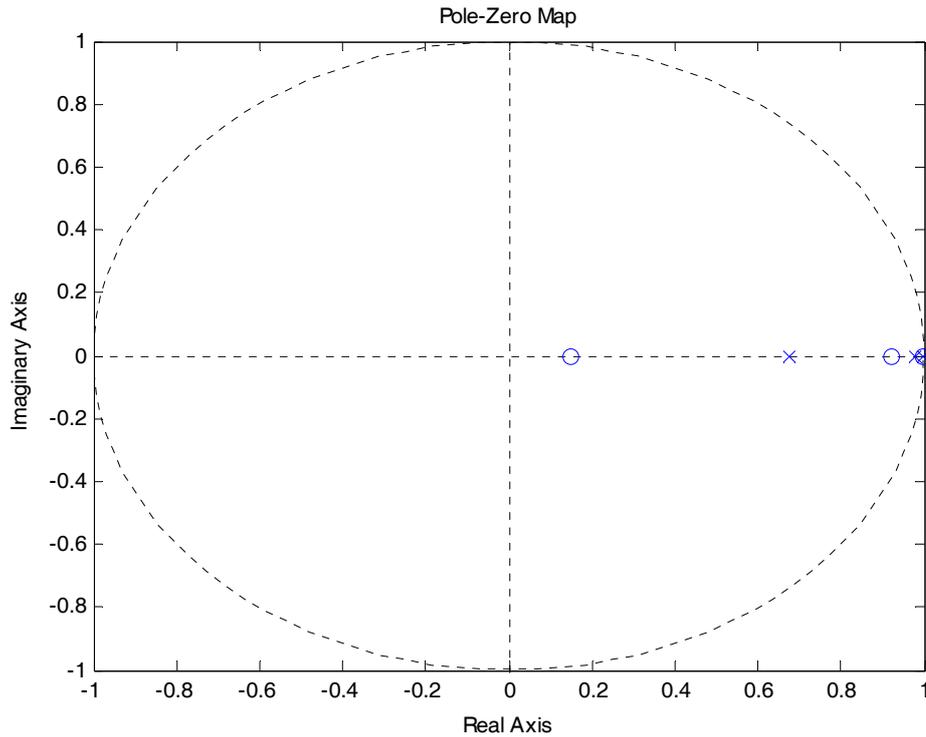


Fig 3.25 Diagrama de polos y ceros de la aproximación  $G_{RC}(z^{-1})$ .

### 3.7.4. Comparación en el dominio temporal

En esta sección se realizará una comparación entre las respuestas escalón de las funciones de transferencia aproximadas del operador fraccionario  $s^{-0.5}$  mediante las técnicas de aproximación de Chebyshev descritas anteriormente. Como resultado de esta comparación se intentará afirmar cual de ellas es mejor en términos de error usando los estadísticos: media (3.114), desviación típica (3.115) y error cuadrático medio (3.116).

- Media:  $\bar{e} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i$ ; (3.114)

- Desviación típica:  $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (e_i - \bar{e})^2}$ ; (3.115)

- Error cuadrático medio:  $MQ = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^2}$ ; (3.116)

donde  $e$  expresa el valor del error, es decir, la desviación del valor aproximado de la función del valor real de la respuesta del sistema fraccionario.

Además, en esta comparación también se incluirán otras aproximaciones obtenidas mediante otros métodos: expansión en fracciones continuadas (CFE), *invfreqs* (INV) y Crone (CRN), para así poder comparar las ventajas de estas aproximaciones.

Todas las aproximaciones serán generadas con los mismos parámetros: periodo de muestreo,  $T_s = 0.1$  s, orden de la aproximación = 3 y la función generadora de Euler (3.85) para discretizar. Estas aproximaciones se simularán durante un periodo de 400 segundos o 4000 muestras.

A continuación se presentan las aproximaciones a estudiar:

$$G_{CP}(z^{-1}) = \frac{0.175028 - 0.310905z^{-1} + 0.149353z^{-2} - 0.012421z^{-3}}{0.553472 - 1.259564z^{-1} + 0.894846z^{-2} - 0.188667z^{-3}}. \quad (3.117)$$

$$G_{RC}(z^{-1}) = \frac{0.312780 - 0.700457z^{-1} + 0.476047z^{-2} - 0.088325z^{-3}}{1 - 2.745797z^{-1} + 2.495164z^{-2} - 0.749365z^{-3}}. \quad (3.118)$$

$$G_{CFE}(z^{-1}) = \frac{0.316227 - 0.395284z^{-1} + 0.118585z^{-2} - 0.004941z^{-3}}{1 - 1.750000z^{-1} + 0.875000z^{-2} - 0.109375z^{-3}}. \quad (3.119)$$

$$G_{INV}(z^{-1}) = \frac{0.316217 - 0.502309z^{-1} + 0.208534z^{-2} - 0.014227z^{-3}}{1 - 2.088408z^{-1} + 1.328681z^{-2} - 0.238644z^{-3}}. \quad (3.120)$$

$$G_{CRN}(z^{-1}) = \frac{0.1 + 0.038904z^{-1} - 0.312440z^{-2} + 0.174152z^{-3}}{1 - 2.320372z^{-1} + 1.670872z^{-2} - 0.350438z^{-3}}. \quad (3.121)$$

En la Fig 3.26 se muestra la comparación gráfica entre la respuesta al escalón real del operador fraccionario y sus aproximaciones, donde podemos observar que la aproximación de CP permanece próxima a la respuesta real únicamente durante un tiempo de unos 100 segundos; en cambio, la respuesta de la aproximación de RC permanece el triple de tiempo próxima a la respuesta real.

También podemos observar que cualquiera de las otras tres aproximaciones tiene un comportamiento temporal peor que las dos de Chebyshev, destacando la obtenida mediante aproximaciones en fracciones continuadas CFE, la cual permanece cercana a la respuesta real únicamente durante unos cuantos segundos.

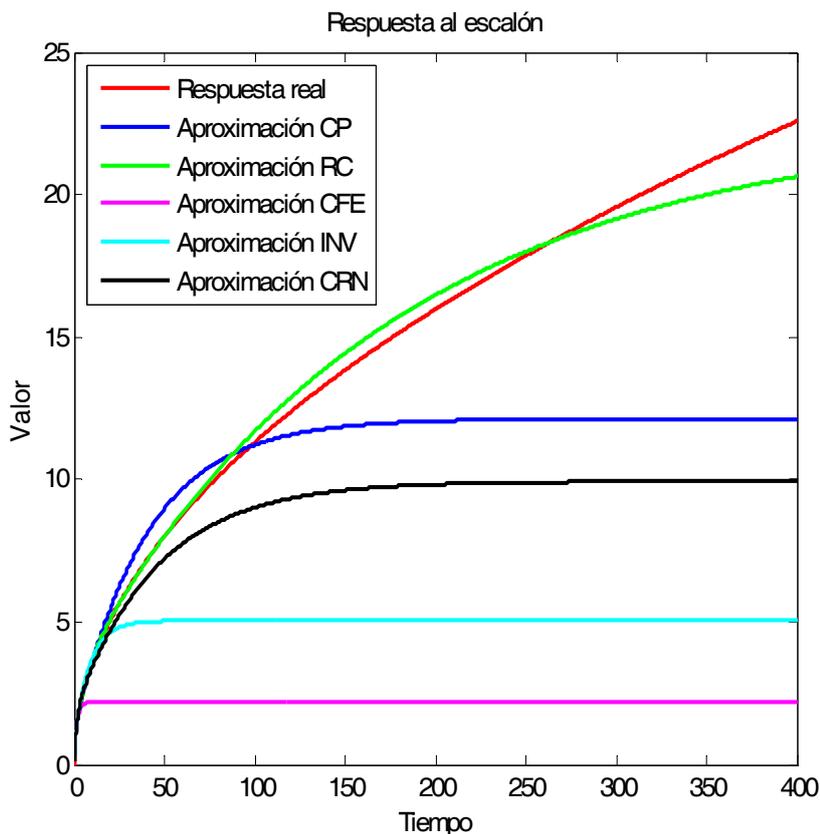


Fig 3.26 Comparación entre la respuesta real al escalón y la de las aproximaciones.

Esta comparación se justifica a través de la comparación cuantitativa mediante los estadísticos: media ( $\bar{e}$ ), desviación típica ( $\sigma$ ) y error cuadrático medio ( $MQ$ ); que podemos observar en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1 Comparación entre aproximaciones del integrador fraccionario de orden  $-0.5$  usando Euler.

	CP	RC	CFE	INV	CRN
<b>Media</b>	4.025	0.097	12.839	10.095	6.051
<b>Desviación típica</b>	3.729	0.683	5.300	5.122	3.961
<b>Error Cuadrático Medio</b>	5.487	0.690	13.890	11.320	7.232

Como podemos observar en los datos de la tabla anterior, las aproximaciones de Chebyshev son las que mejores resultados obtienen en términos de error, lo cual se justifica ya que este tipo de aproximaciones tratan de obtener el mejor ajuste posible en el dominio temporal. Destaca por encima de todas la de RC con valores

del error cuadrático medio muy bajo. El resto de aproximaciones obtienen peores resultados, aunque la que mejor se comporta es la obtenida mediante la metodología Crone.

En el anexo I se presenta mediante tablas, un estudio mucho más extenso de las aproximaciones de Chebyshev en el dominio temporal. En estas tablas se recogen los resultados en términos del error del comportamiento de las diferentes aproximaciones comparadas con la respuesta real. Estas aproximaciones se han tomado eligiendo varios órdenes fraccionarios para aproximar,  $\alpha$ , y varios grados para el numerador/denominador, usando las fórmulas de Euler, Tustin y Al-Alaoui como funciones generadoras para discretizar. Las conclusiones de este estudio se resumen a continuación:

- Todas las aproximaciones que hemos obtenido usando la técnica de CP han dado lugar a sistemas estables. Sin embargo, algunas aproximaciones obtenidas usando la técnica de RC han dado lugar a sistemas inestables. Esto ha ocurrido conforme se ha ido incrementando el orden del operador fraccionario y/o el grado del numerador/denominador de la aproximación.
- La aproximación de RC ha obtenido sus peores resultados, desde el punto de vista de la estabilidad, cuando se ha usado la fórmula de Tustin para discretizar. Aunque cuando se han obtenido sistemas estables, éstos han presentado mejor comportamiento en términos estadísticos que los obtenidos con CP.
- En general las aproximaciones obtenidas usando RC tienen mejor comportamiento en términos de los coeficientes estadísticos  $\bar{e}$ ,  $\sigma$ , y  $MQ$ . Aunque cuando se incrementa el orden del operador fraccionario  $\alpha$  es mejor utilizar la aproximación de CP.

#### 3.7.5. Comparación en el dominio de la frecuencia

En esta sección se realizará una comparación en el dominio de la frecuencia de las funciones de transferencia aproximadas vistas en la sección anterior. Para los propósitos de esta comparación vamos a definir el siguiente rango de frecuencias  $[\omega_b, \omega_h] = [5 \cdot 10^{-3}, 10]$ .

### 3. Cálculo Fraccionario: Aplicación al control de sistemas

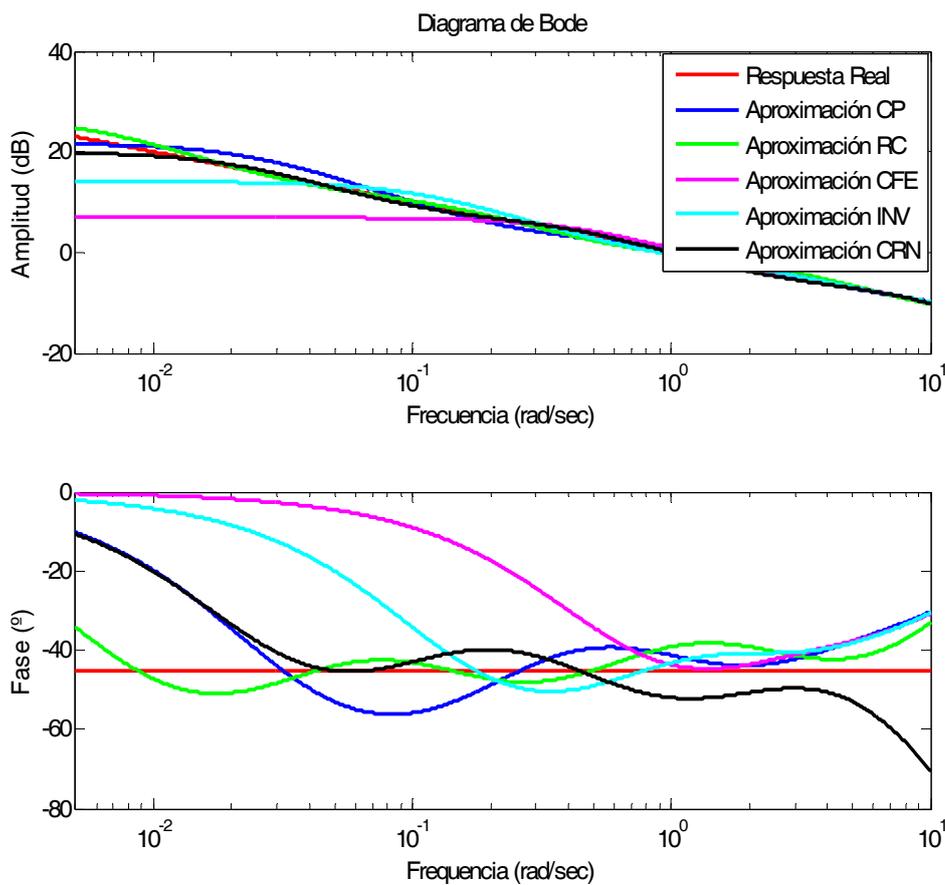


Fig 3.27 Comparación entre la respuesta real en frecuencia y las de las aproximaciones.

La respuesta en frecuencia de estas aproximaciones la podemos observar en la Fig 3.27. En cuanto a la magnitud podemos afirmar que todas tienen una buena respuesta, exceptuando la obtenida mediante CFE, que no empieza a caer con la pendiente de  $10$  dB/dec hasta la frecuencia  $0.2$  rad/s.

Tabla 3.2 Comparación en magnitud entre aproximaciones del integrador fraccionario de orden  $-0.5$  usando Euler.

	CP	RC	CFE	INV	CRN
<b>Media</b>	-0.416	-0.232	3.780	0.957	0.265
<b>Desviación típica</b>	1.109	0.656	5.330	2.645	0.737
<b>Error Cuadrático Medio</b>	1.184	0.696	6.532	2.812	0.782

### 3.7. Aproximaciones racionales basadas en los polinomios de Chebyshev

---

En cuanto a la fase, podemos decir sin lugar a dudas que la aproximación de RC presenta el mejor comportamiento de todos, seguidas por las obtenidas con CP y CRN. En la Tabla 3.2 y en la Tabla 3.3 se muestra esta comparación de forma cuantitativa.

Tabla 3.3 Comparación de fase entre aproximaciones del integrador fraccionario de orden  $-0.5$  usando Euler.

	CP	RC	CFE	INV	CRN
<b>Media</b>	-5.095	-1.421	-23.909	-14.388	-2.568
<b>Desviación típica</b>	11.319	4.131	17.036	16.255	12.249
<b>Error Cuadrático Medio</b>	12.4408	4.367	29.353	21.702	12.509

Al igual que en el apartado anterior, se pueden encontrar también en el anexo I las tablas que muestran un estudio mucho más extenso de las aproximaciones de Chebyshev en el dominio de la frecuencia. En estas tablas se recogen los resultados en términos de error del comportamiento de las diferentes aproximaciones comparadas con la respuesta real. Estas aproximaciones se han tomado eligiendo varios órdenes fraccionarios para aproximar  $\alpha$  y varios grados para el numerador/denominador, usando las fórmulas de Euler, Tustin y Al-Alaoui como funciones generadoras para discretizar. Las conclusiones de este estudio se resumen a continuación:

- Las aproximaciones que usan la técnica de RC tienen un mejor comportamiento en términos estadísticos  $\bar{e}$ ,  $\sigma$ , y  $MQ$  cuando el grado del numerador/denominador es bajo. Sin embargo, cuando se usan grados más grandes es mejor tomar las aproximaciones de CP, ya que como se puede observar en las tablas tienen un mejor comportamiento.
- Las diferencias que presentan las aproximaciones obtenidas utilizando ambas técnicas de Chebyshev se encuentran localizadas en las bajas frecuencias ya que, normalmente, podemos observar que en altas frecuencias ambas poseen un comportamiento similar.

### 3.7.6. Distribución de ceros y polos: estabilidad

En este apartado se presenta un estudio sobre la estabilidad de las aproximaciones de Chebyshev mediante la distribución de polos que presenta su función de transferencia.

Como ya se comentó anteriormente, toda buena aproximación debe de cumplir: tener un entrelazado de ceros y polos a lo largo de  $z \in (-1, 1)$ , y tener fase mínima. Por ello, también, se incluye en el estudio la distribución de los ceros de estas aproximaciones.

Las condiciones anteriores son siempre las deseables. No obstante, se ha detectado que no siempre podemos obtenerlas; si, por ejemplo, intentamos obtener la aproximación del operador fraccionario de orden 0.5, usando RC con grado 5 para el numerador y el denominador y Euler como función generadora, obtenemos una aproximación con la expresión (3.122). Esta aproximación tiene polos y ceros fuera del círculo unidad, ver Fig 3.28. Por tanto, el sistema no es estable ni de fase mínima.

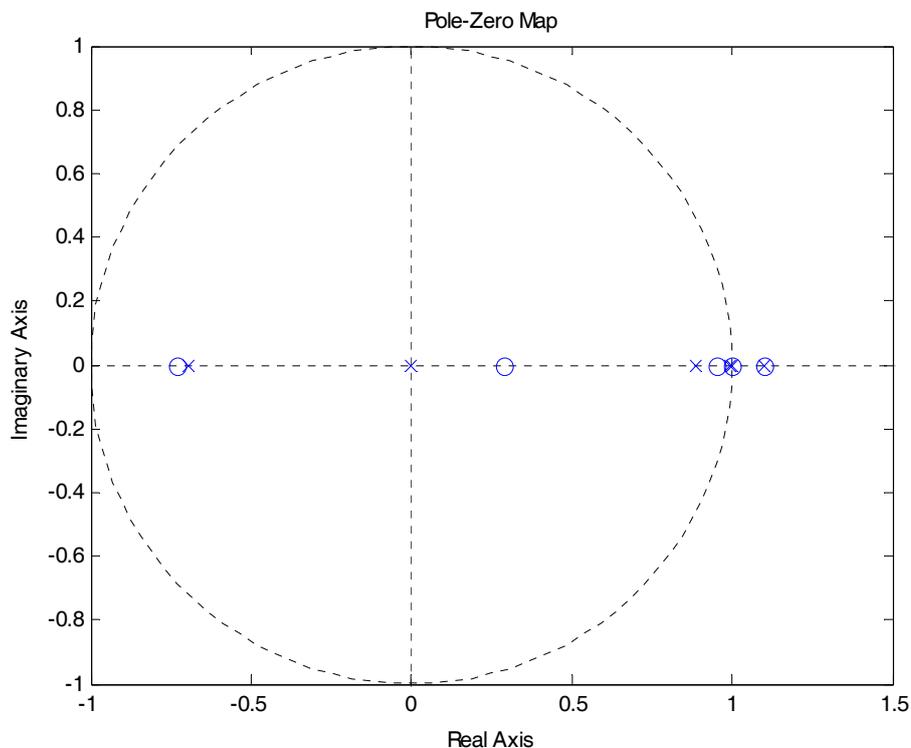


Fig 3.28 Diagrama de polos y ceros de  $G_{RC}$ .

$$G_{RC}(z^{-1}) = \frac{0.199618 - 0.520900z^{-1} + 0.307062z^{-2} + 0.193486z^{-3} - 0.223787z^{-4} + 0.044518z^{-5}}{1 - 3.279585z^{-1} + 3.146038z^{-2} + 0.220476z^{-3} - 1.760849z^{-4} + 0.673920z^{-5}}.$$

(3.122)

Esto es debido a que la aproximación RC siempre coloca uno de sus polos o ceros prácticamente en la frontera con el círculo unidad. Por tanto, hay que tomar un número elevado de cifras decimales para los coeficientes de la función de transferencia, ya que si no se hace así, al truncar el valor de los decimales de estos coeficientes nos aparece un problema de precisión numérica.

Para este estudio, que se resumen en forma de tablas en el anexo I, se ha optado por tomar seis cifras decimales para cada aproximación mediante truncamiento. Por tanto, esto ha de tomarse en cuenta para todas las conclusiones que se presentan a continuación:

- Todas las aproximaciones obtenidas usando CP son estables al menos con los órdenes fraccionarios y los grados de numerador/denominador que aquí se han utilizado. Por otro lado, se han obtenido aproximaciones inestables usando la técnica RC cuando el grado del numerador/denominador crece. Por este motivo es mejor usar las aproximaciones de CP cuando se necesita un orden fraccionario alto o un alto grado numerador/denominador.
- Todas las aproximaciones de CP tiene un entrelazado de ceros y polos a lo largo del eje real. También las aproximaciones RC siempre y cuando el sistema resultante sea estable.
- Todas las aproximaciones de CP tienen fase mínima; en cambio, no todas las aproximaciones de RC la tienen.
- Generalmente, cuanto más se incrementa el grado numerador/denominador de la aproximación, más se acercan el valor de los ceros y los polos de la aproximación a 1.

#### 3.7.7. Comparación con distinto grado

Para finalizar, en este apartado se presenta una pequeña comparación entre las dos aproximaciones de Chebyshev, CP y RC, con grado 2 con otra aproximación

### 3. Cálculo Fraccionario: Aplicación al control de sistemas

---

obtenida con la metodología de CFE pero con grado 4. A continuación se muestran la funciones de transferencia de estas aproximaciones:

$$G_{CP}(z^{-1}) = \frac{0.307300 - 0.363773z^{-1} + 0.071000z^{-2}}{0.770776 - 1.227426z^{-1} + 0.459367z^{-2}}. \quad (3.123)$$

$$G_{RC}(z^{-1}) = \frac{0.385984 - 0.605888z^{-1} + 0.221659z^{-2}}{1.000000 - 1.891537z^{-1} + 0.891736z^{-2}}. \quad (3.124)$$

$$G_{CFE}(z^{-1}) = \frac{1.741718 - 3.135093z^{-1} + 1.746695z^{-2} - 0.310523z^{-3} + 0.009315z^{-4}}{4.3750 - 9.6250z^{-1} + 7.0125z^{-2} - 1.8700z^{-3} + 0.1309z^{-4}}. \quad (3.125)$$

Desde el punto de vista de la respuesta temporal, podemos observar en la Fig 3.29 cómo las aproximaciones de Chebyshev se mantienen más próximas a la respuesta real durante más tiempo a pesar de tener una función de transferencia con 2 grados menos que la aproximación de CFE.

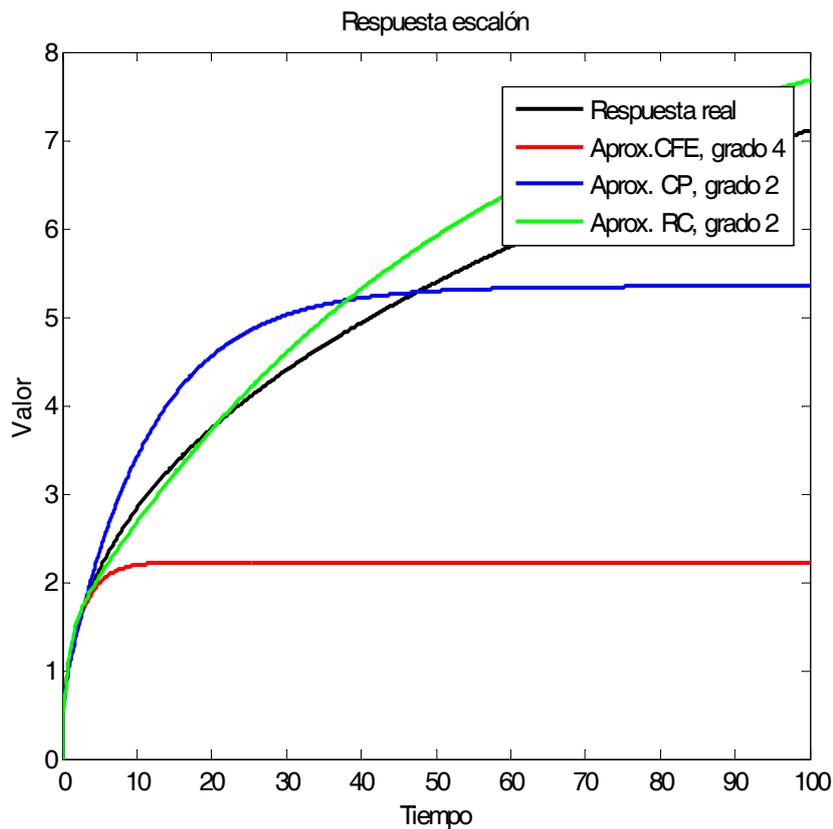


Fig 3.29 Comparación entre la respuesta real al escalón y la de las aproximaciones con distinto grado.

En la Fig 3.30 podemos observar que la respuesta en frecuencia sigue la misma pauta, las aproximaciones de Chebyshev son capaces de alcanzar mucha más precisión con una función de transferencia de grado menor, tanto para ganancia como para fase.

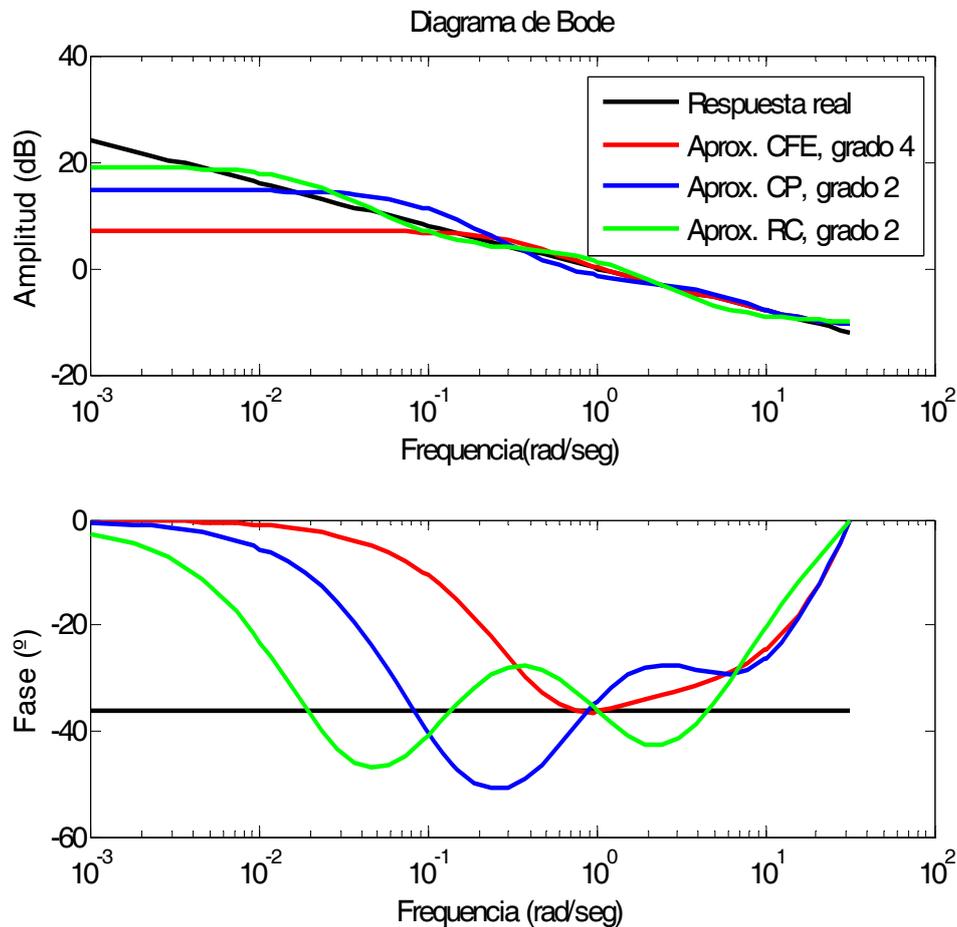


Fig 3.30 Comparación entre la respuesta real en frecuencia y las de las aproximaciones con distinto grado.

### 3.8. Conclusiones

En este capítulo se ha presentado un estudio introductorio al cálculo fraccionario, repasando sus definiciones y centrándonos en su aplicación dentro del campo de la teoría de control.

Se han repasado las principales metodologías existentes para la obtención de las aproximaciones racionales de los operadores fraccionarios, haciendo un estudio comparativo de éstas.

### 3. Cálculo Fraccionario: Aplicación al control de sistemas

---

Se ha propuesto una nueva aproximación basada en los polinomios de Chebyshev. Esta técnica, llamada aproximación racional de Chebyshev (RC), consigue unos niveles de precisión bastante elevados tanto en el dominio temporal como en el de la frecuencia. Sin embargo, a medida que vamos aumentando el grado del numerador/denominador o el orden del operador fraccionario esta característica se va degenerando.

Por tanto, se recomienda el uso de la aproximación RC para bajos órdenes de integración fraccionarios y para bajos grados de numerador/denominador. En el caso de requerir altos valores para estos parámetros se recomienda el uso de la otra técnica basada en los polinomios de Chebyshev, la aproximación de CP.

En el siguiente capítulo se hará uso de estas aproximaciones como modelos para el diseño de controladores predictivos para plantas de orden fraccionario.

# Capítulo 4

## Control GPC de una planta fraccionaria

En capítulos anteriores se ha presentado, por un lado, la metodología de control predictivo GPC, y por el otro, una introducción al cálculo fraccionario y su aplicación al control de sistemas. En el presente capítulo y siguientes, se hará uso de ambos conceptos con el ánimo de obtener sistemas de control que contengan en su implementación ambas disciplinas.

El objetivo de este capítulo es el control predictivo de una planta de naturaleza fraccionaria cuya dinámica viene descrita por una función de transferencia con operadores fraccionarios. Como podemos observar en la Fig 4.1, este estudio afectará al bloque de la **planta** y al del **modelo** dentro del esquema general del control predictivo.

Para esta planta se diseñará un controlador de orden entero mediante la metodología convencional GPC. En la Fig 4.2 se destaca, en el diagrama de bloques que representa el esquema de la metodología GPC, la función de transferencia de la planta que tiene esta naturaleza fraccionaria.

#### 4. Control GPC de una planta fraccionaria

---

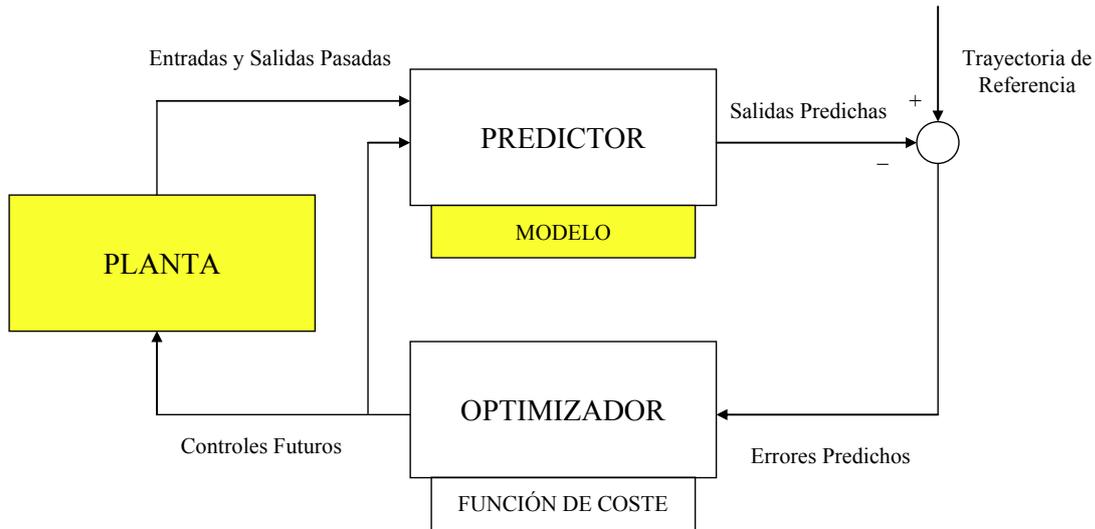


Fig 4.1 Diagrama de bloques simplificado de un sistema de control predictivo.

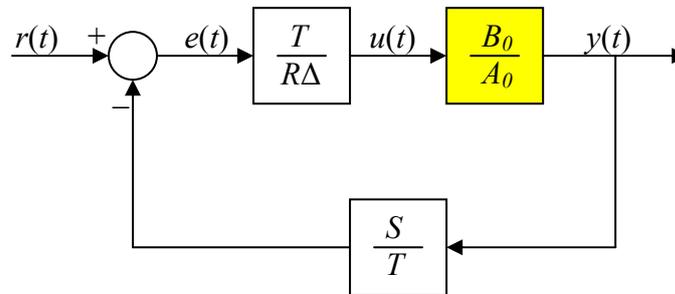


Fig 4.2 Esquema de control GPC en lazo cerrado.

Ya que la metodología de control predictivo GPC exige el uso de un modelo de orden entero y finito, tendremos que obtener éste mediante una aproximación discreta, de tal forma que describa de la manera más precisa posible la naturaleza fraccionaria de la planta. Así pues, utilizaremos alguno de los métodos de aproximación y discretización vistos en el capítulo 3.

También se hará un estudio de la respuesta temporal y de la estabilidad de estos sistemas de control, utilizando diversos modelos que aproximan la planta para el diseño del controlador. También discutiremos sobre la fragilidad de los controladores obtenidos, finalizando con unas recomendaciones para el diseño de los controladores GPC para plantas fraccionarias.

Las simulaciones realizadas son llevadas a cabo utilizando como modelo de la planta la aproximación que se indique en cada momento y como planta real la

obtenida mediante la aproximación de Grünwald-Letnikov (3.4). Es bien sabido que esta aproximación nos da un número de valores exactos para la respuesta temporal igual al número de términos en  $z$  que tomemos para la aproximación (Vinagre, 2001).

#### **4.1. Obtención del modelo**

Es importante mencionar que no es materia de este capítulo la identificación de la planta o proceso. No obstante, si se está interesado en identificar plantas con comportamiento fraccionario, existen métodos adaptados para esta disciplina, como los que podemos encontrar en los siguientes trabajos: para el caso de modelos de orden conmensurable podemos utilizar el método de Vinagre (2001, pp. 140-141) y el método de Hartley y Lorenzo (2003). Ambos están basados en la mejora del método de identificación de Levy (1959). Para el caso de modelos de orden no conmensurable tenemos el método de Dorčák *et al.* (1996), que trabaja en el dominio del tiempo, y el método de Lay *et al.* (1998), que lo hace en el dominio de la frecuencia. Otro método, el de Hartley y Lorenzo (2003), hace su identificación basándose en distribuciones de orden continuo.

En el caso que nos atañe, podemos afirmar que la principal dificultad a la hora de obtener el modelo discreto de una planta con naturaleza fraccionaria es el hecho de que éste tiene infinitos términos en su función de transferencia discreta, es decir, memoria infinita, como ya se vio previamente.

Al requerir la formulación de GPC el trabajar con modelos enteros discretos finitos, se propone en esta Tesis la obtención de estos modelos usando las aproximaciones discretas de grado finito vistas en el capítulo anterior, y elegir aquella que dé lugar a un controlador GPC con un buen funcionamiento en términos de robustez y respuesta dinámica.

Cada uno de estos modelos aproximados tiene sus características propias: algunos aproximan mejor en el dominio del tiempo, otros en el dominio de la frecuencia, etc. Por tanto, la elección del modelo idóneo para la obtención del controlador predictivo no es una tarea trivial. Además, tenemos el hecho de que no siempre el modelo más preciso da lugar al controlador más robusto. Podemos encontrar autores que ya han tratado el tema, como Kouvaritakis, *et al.* (1996), que

describe cómo tomar un modelo de la planta diferente al nominal puede conducir a la obtención de un controlador que mejore las prestaciones del sistema de control en lazo cerrado, con mayores márgenes de estabilidad.

Por tanto, en este capítulo se propone una batería de test donde se probarán diferentes controladores obtenidos con cada uno de los diferentes modelos aproximados de la planta fraccionaria (4.1), con el ánimo de ilustrar con cuál de ellos el sistema de control en lazo cerrado presenta mejores propiedades desde el punto de vista del comportamiento dinámico, de la estabilidad, de la robustez y de la sensibilidad.

$$H(s) = ks^{\pm\alpha}; \quad k, \alpha \in \mathbb{R}. \quad (4.1)$$

Con esta planta tan sencilla trataremos de ilustrar técnicas que se puedan utilizar en casos más complejos.

### 4.2. Control GPC con modelos aproximados

En este epígrafe proponemos un estudio del control GPC de una planta fraccionaria, concretamente de un integrador fraccionario de orden,  $\alpha = -0.4$ , ver expresión (4.1). Debido a que este estudio pretende ser lo más completo posible, de tal forma que el diseñador conozca la casuística y la dependencia de la respuesta del sistema con el modelo tomado, trataremos el tema desde varios puntos de vista:

- Comportamiento dinámico y estabilidad.
- Robustez.
- Sensibilidad.

El ajuste de los controladores se llevará a cabo usando los parámetros por defecto vistos en el epígrafe 2.2.3 de esta Tesis. Así pues:  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 10$ ,  $\gamma = 1$ , y  $\lambda = 10^{-6}$ . El valor de  $N_u$  lo tomaremos igual a 3, ya que se recomienda que sea igual al número de polos inestables o mal amortiguados del sistema. Como de forma general, a priori, no conocemos los polos de la aproximación que vamos a utilizar, hacemos este valor igual al orden de ésta, así cumplimos la recomendación para el peor de los casos. Para un ajuste más fino del controlador se puede seguir la guía

descrita en el epígrafe 2.1.3 de esta Tesis, donde se explica el significado de cada uno de estos parámetros y el efecto que provocan sobre la salida del sistema. Para el prefiltro, inicialmente tomaremos el más simple,  $T(z^{-1}) = 1$ .

Para la simulación de todos los sistemas de control se utilizará para la planta la aproximación de Grünwald–Letnikov (3.4) con 100 términos. Por tanto, obtendremos una simulación exacta del comportamiento del sistema durante 10 segundos para el periodo de muestreo usado de 0.1 segundos, ya que esta aproximación da un número de valores exactos igual a número de términos que utilicemos para la misma (Vinagre, 2001).

En nuestro estudio utilizaremos para obtener el modelo las cuatro aproximaciones más utilizadas en la literatura: expansión en fracciones continuadas (CFE), aproximación Crone (CRN), aproximación basada en la identificación en el dominio de la frecuencia usando la función de MATLAB<sup>TM</sup> *invfreqz* (INV) y la aproximación de Grünwald–Letnikov (GL). Además, utilizaremos las dos aproximaciones propuestas basadas en los polinomios de Chebyshev: Chebyshev–Padé (CP) y racional de Chebyshev (RC).

Todas las aproximaciones se obtendrán bajo las mismas condiciones de discretización, las cuales se enuncian a continuación:

- Periodo de muestreo  $T_s = 0.1$  segundos.
- Función generadora de Euler<sup>1</sup> (3.85) para discretizar.
- Grado de la aproximación igual a 3, salvo en el caso GL, donde tomaremos igual número de términos que  $N_2$ , de tal forma que obtengamos el mejor modelo posible dentro de la ventana de predicción.

A continuación se presentan las funciones de transferencia para los modelos propuestos:

---

<sup>1</sup> Por motivos de espacio en este apartado nos ceñiremos a estudiar las aproximaciones utilizando una única función generadora, Euler, en el anexo II de esta Tesis podemos encontrar un estudio del comportamiento temporal más completo cuando se utilizan diferentes funciones de generación para discretizar y diferentes grados de las aproximaciones, manteniendo fijos los parámetros de configuración del controlador GPC.

$$G_{CP}(z^{-1}) = \frac{0.398111 - 0.724359z^{-1} + 0.363359z^{-2} - 0.035137z^{-3}}{1.000000 - 2.218979z^{-1} + 1.520674z^{-2} - 0.301410z^{-3}} z^{-1}. \quad (4.2)$$

$$G_{RC}(z^{-1}) = \frac{0.395274 - 0.897793z^{-1} + 0.626306z^{-2} - 0.123733z^{-3}}{1.000000 - 2.679155z^{-1} + 2.364368z^{-2} - 0.685208z^{-3}} z^{-1}. \quad (4.3)$$

$$G_{CFE}(z^{-1}) = \frac{0.398107 - 0.517539z^{-1} + 0.165612z^{-2} - 0.008280z^{-3}}{1.000000 - 1.700000z^{-1} + 0.816000z^{-2} - 0.095200z^{-3}} z^{-1}. \quad (4.4)$$

$$G_{INV}(z^{-1}) = \frac{0.398097 - 0.647703z^{-1} + 0.281034z^{-2} - 0.022287z^{-3}}{1.000000 - 2.026932z^{-1} + 1.236722z^{-2} - 0.207105z^{-3}} z^{-1}. \quad (4.5)$$

$$G_{CRN}(z^{-1}) = \frac{0.158489 - 0.051940z^{-1} - 0.300778z^{-2} + 0.194803z^{-3}}{1.000000 - 2.256450z^{-1} + 1.551021z^{-2} - 0.294480z^{-3}} z^{-1}. \quad (4.6)$$

$$G_{GL}(z^{-1}) = \frac{1}{T_s^{-0.4} z^{-10} \sum_{j=0}^{10} (-1)^j \binom{0.4}{j} z^{10-j}}. \quad (4.7)$$

En la Fig 4.3 podemos observar la respuesta real del integrador al escalón comparada con la respuesta de todas las aproximaciones anteriores, durante un tiempo de simulación de unos 100 segundos. Destaca por precisión la aproximación RC seguida de CP y CRN, siendo las menos precisas INV, CFE y GL.

En este ejemplo se pone de manifiesto el hecho de que la aproximación GL pierde mucha precisión, cuando se utiliza para representar el comportamiento del sistema durante un número de muestras superior al número de términos utilizados para su implementación. No obstante, como veremos posteriormente, es muy precisa cuando el número de muestras representadas es igual al número de términos que presenta.

La respuesta real analítica de este sistema, como vimos en el capítulo 3, tiene por expresión:

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(1+0.4)} t^{0.4}. \quad (4.8)$$

Es observable que esta expresión es una función potencial monótonamente creciente, así pues, ninguna aproximación en función de transferencia estable podrá

captar indefinidamente su comportamiento, ya que éstas tienen por definición su respuesta al escalón acotada.

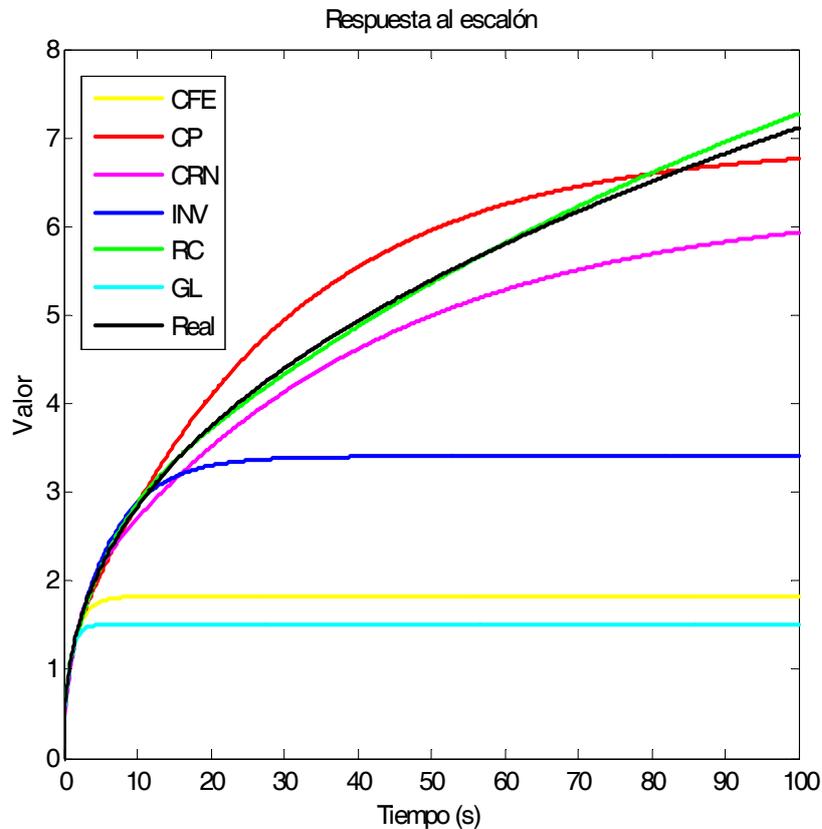


Fig 4.3 Respuesta al escalón de las aproximaciones de  $s^{-0.4}$ .

Realizando una ampliación en la figura anterior, de tal forma que se haga visible la zona correspondiente al espacio de la ventana de predicción definida por  $[N_1, N_2]$ , podemos observar, como se nos muestra en la Fig 4.4, que todas las respuestas se encuentran bastante próximas a la respuesta real exceptuando la obtenida con la aproximación CRN. La Tabla 4.1 refleja cuantitativamente este hecho destacando la precisión alcanzada con las dos aproximaciones basadas en los polinomios de Chebyshev: CP y RC, las cuales obtienen menor valor del error que el obtenido con la aproximación GL.

Este hecho aunque destacable no es significativo, ya que se trata, como posemos observar en la tabla, de un error de dos centésimas, el cual es provocado, posiblemente, por efecto del truncamiento del número de términos de los coeficientes

de la función de transferencia. En cambio, si es significativo el error de la aproximación CRN que en diez muestras ya es mayor de una décima.

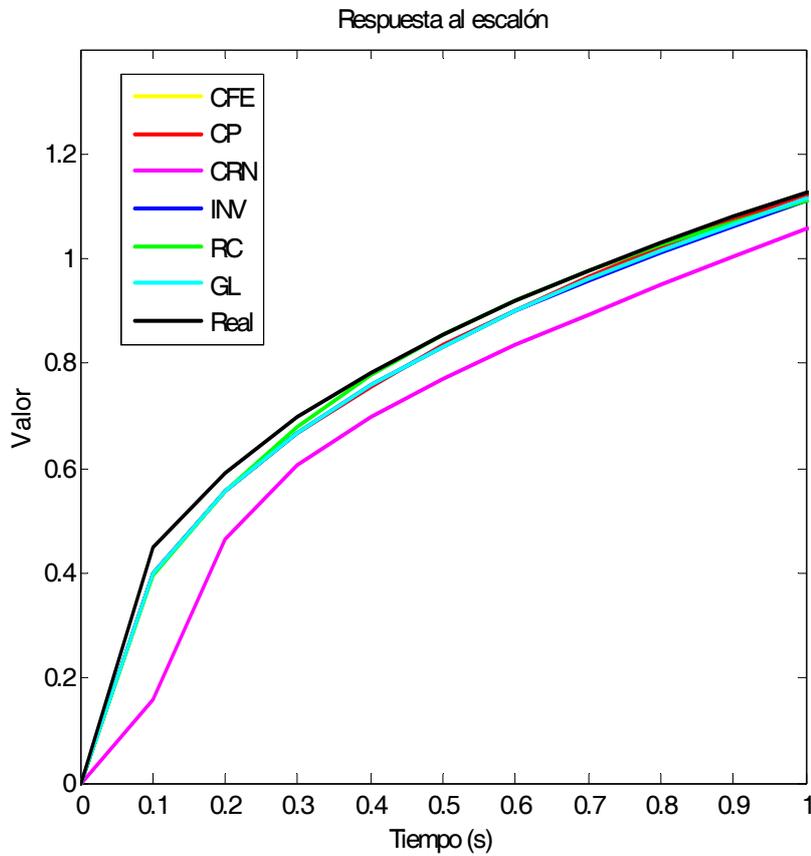
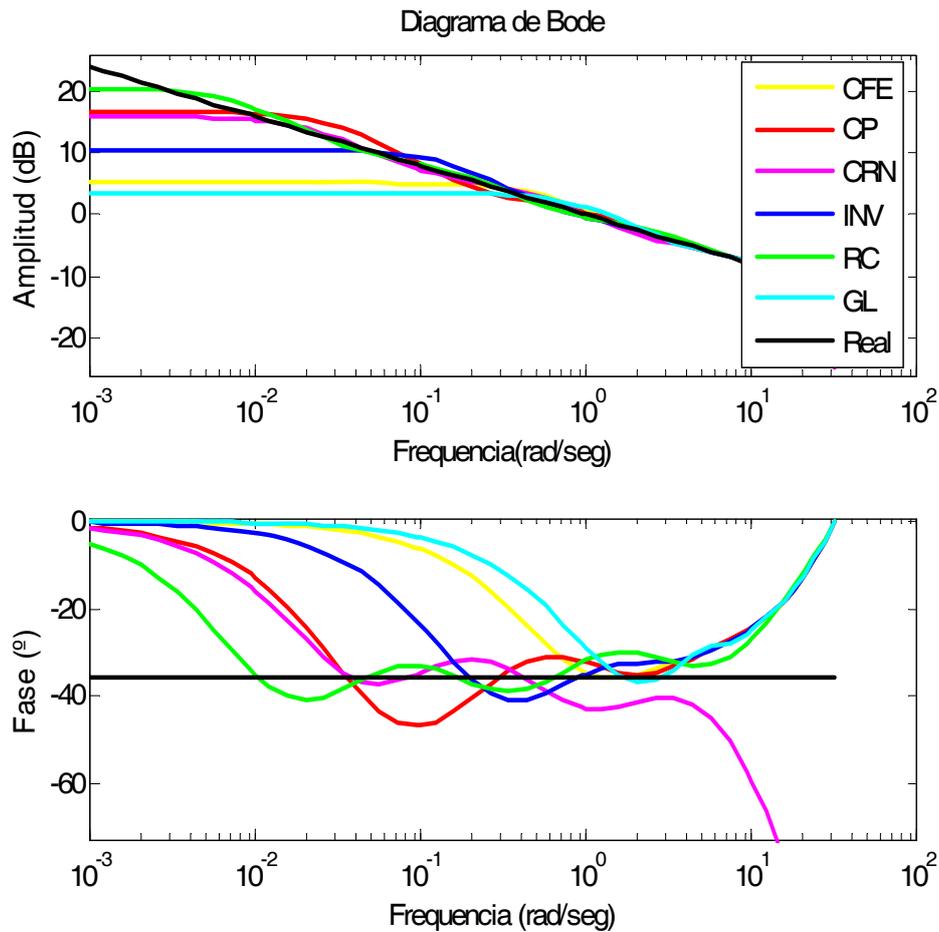


Fig 4.4 Respuesta al escalón de las aproximaciones de  $s^{-0.4}$  dentro del intervalo correspondiente a la ventana de predicción.

Desde el punto de vista de la respuesta en frecuencia, la Fig 4.5 muestra el diagrama de Bode de estas aproximaciones, tanto en magnitud como en frecuencia, dentro del intervalo  $[10^{-3}, \pi/T_s]$ . Destaca de nuevo la aproximación de RC por su proximidad a la respuesta real. La Tabla 4.1 muestra cuantitativamente el error cuadrático medio (ECM) de cada una de estas aproximaciones con respecto a la respuesta real.

Fig 4.5 Diagrama de Bode de las aproximaciones de  $s^{-0.4}$ .Tabla 4.1 Error cuadrático medio (ECM) de las aproximaciones de  $s^{-0.4}$ .

	CFE	CP	CRN	INV	RC	GL
Escalón	3.5906	0.3821	0.5841	2.2093	0.0736	3.8795
Escalón (0 – 1)s	0.0256	0.0247	0.1220	0.0260	0.0213	0.0255
Magnitud	7.7810	2.1444	3.6144	4.7567	0.9478	8.8074
Fase	26.1386	18.6685	33.6142	22.6736	14.2972	27.2679

#### 4.2.1. Estudio del comportamiento dinámico y de la estabilidad

En este epígrafe veremos el comportamiento dinámico de la señal de salida y de los esfuerzos de control para los modelos anteriormente descritos. El controlador GPC se ajustará en la manera ya indicada.

#### 4. Control GPC de una planta fraccionaria

---

De forma cuantitativa se estudian los siguientes parámetros:

- Tiempo de subida ( $t_{sub}$ ). Tiempo necesario para que la salida del sistema alcance el valor final de la referencia.
- Tiempo de establecimiento ( $t_{es}$ ). Tiempo que tarda la salida del sistema en establecerse en una franja inferior al 5% del valor final de la referencia.

En la Fig 4.6 tenemos representada la gráfica de la simulación de los sistemas de control GPC para cada uno de los modelos de la planta fraccionaria. Todos presentan una respuesta similar salvo el obtenido usando Crone que es inestable y el obtenido usando la aproximación racional de Chebyshev que presenta oscilaciones a su salida. En la Tabla 4.2 se recoge este hecho de forma cuantitativa.

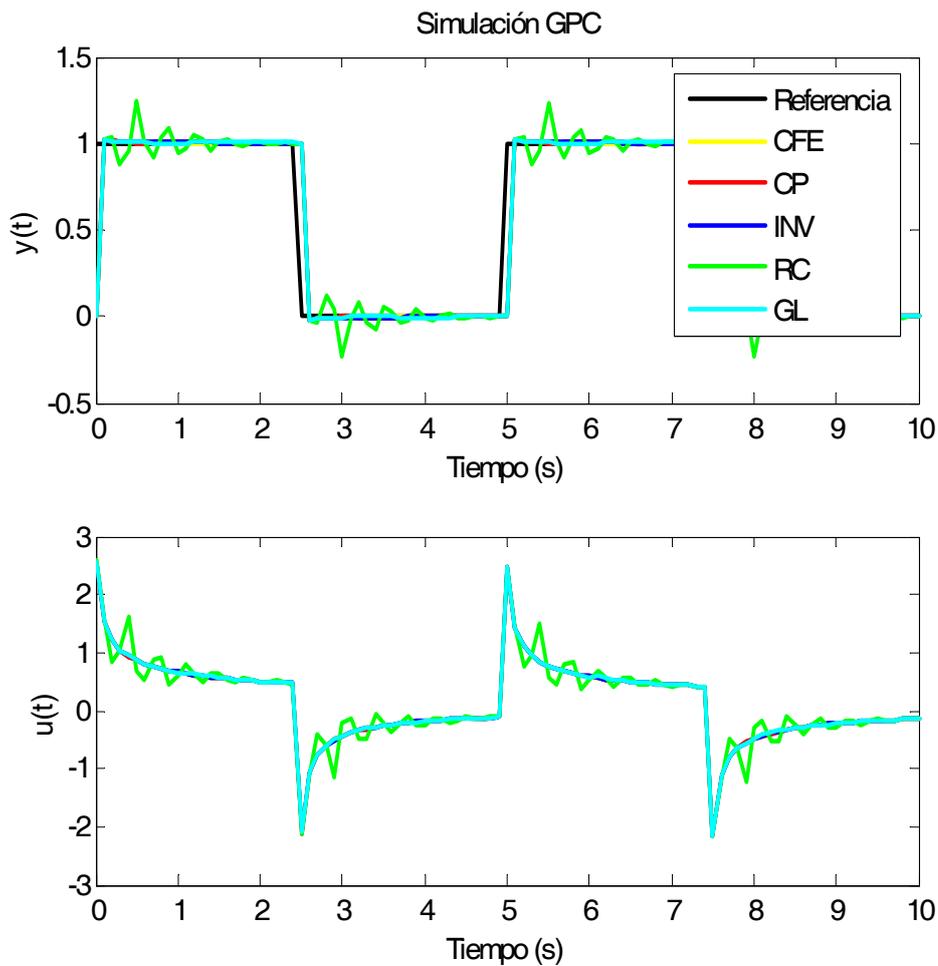


Fig 4.6 Simulación del sistema de control GPC usando varias aproximaciones de  $s^{-0.4}$ .

Este comportamiento puede ser debido a que la aproximación de Crone es de fase no mínima, por tanto, presenta un cero fuera del círculo unidad. Es decir, no presenta las características que debe de tener una buena aproximación. Además, tanto ésta como la aproximación RC presentan dos de sus polos muy pegados a la frontera con el círculo unidad, siendo esta circunstancia crítica para la estabilidad, ya que con un pequeño error de redondeo estos quedarían fuera de este círculo.

Con el resto de las aproximaciones obtenemos unas respuestas similares al escalón, ya que apenas existen diferencias entre las mismas.

Tabla 4.2 Características cuantitativas de los sistemas de control GPC.

	CFE	CP	CRN	INV	RC	GL
Estable	Sí	Sí	No	Sí	Sí	Sí
$t_{sub}$	0.1	0.1	–	0.1	0.1	0.1
Sobreoscilación	No	No	–	No	Sí	No
$t_{es}$	0.1	0.1	–	0.1	0.9	0.1
ECM	0.0996	0.0996	–	0.0996	0.1044	0.0996

#### 4.2.2. Estudio de la robustez

Como es bien sabido, cualquier modelo de una planta real que tomemos es aproximado, ya que ningún método de identificación existente nos permite captar completamente la dinámica de una planta. En el caso de los sistemas de orden fraccionario, además hay que tener en cuenta que cualquier implementación discreta es por definición aproximada, ya que, como hemos visto anteriormente, son sistemas que poseen memoria infinita y, por tanto, infinitos términos en su función de transferencia discreta.

Por consiguiente, se hace necesario un estudio de la robustez de estos sistemas de control con plantas fraccionarias. Nosotros proponemos uno basado en el criterio de Nyquist (Romero *et al.*, 2008c). Ya se ha comentado que en la actualidad no se disponen de técnicas numéricas tipo Routh o Jury para estudiar la estabilidad de estos sistemas con naturaleza fraccionaria, sólo las técnicas geométricas de análisis complejo basadas en el principio del argumento son aplicables en el caso de

#### 4. Control GPC de una planta fraccionaria

---

usar funciones de transferencia con operadores fraccionarios. Con el criterio de Nyquist se averigua cuantos polos inestables tiene el sistema en lazo cerrado, además del margen en el que puede oscilar la ganancia del mismo para que éste siga siendo estable. Para su aplicación es necesario conocer las funciones de transferencia de GPC sin ligaduras en lazo abierto (2.19).

A continuación dibujamos la evaluación del contorno para cada uno de los controladores GPC obtenidos a partir de los modelos anteriores. Estos son dibujados agrupándolos por respuestas similares.

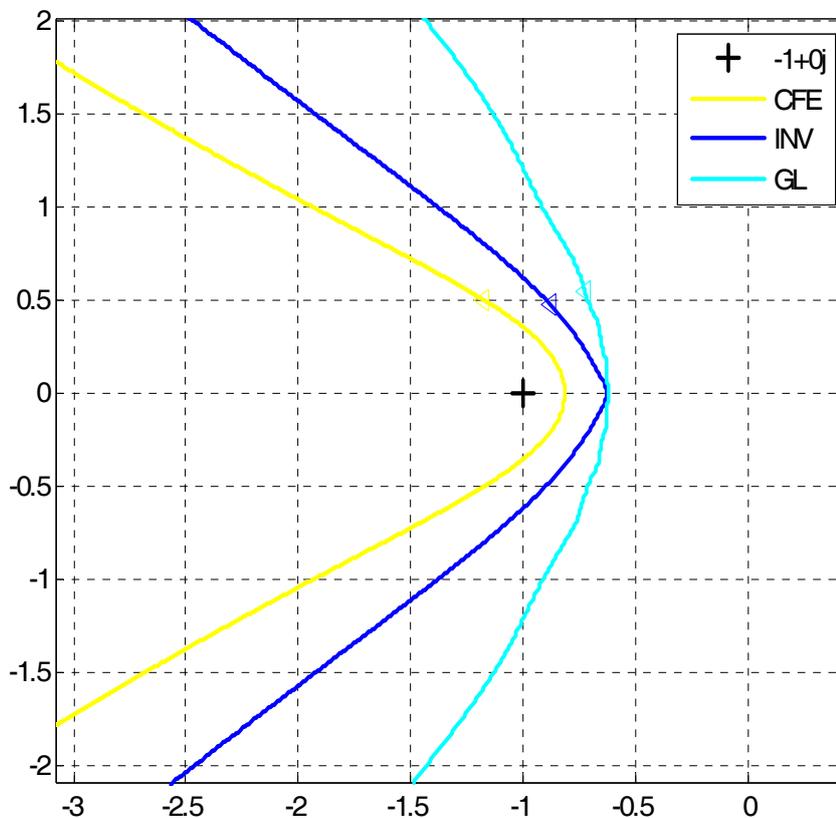


Fig 4.7 Diagrama de Nyquist del sistema de control GPC para las aproximaciones CFE, INV y GL.

En la Fig 4.7 tenemos la representación del diagrama de Nyquist para los sistemas GPC obtenidos a partir de las aproximaciones de CFE, INV y GL. Como podemos observar en la figura, todas las curvas dan un giro en el sentido antihorario al punto  $(-1 + 0j)$ , giro que compensa el polo doble en  $z = 1$  que tiene el sistema en

lazo abierto. A partir de la figura podemos calcular los márgenes de estabilidad del sistema para la ganancia  $k$  del integrador (4.1):

- CFE:  $k \in (0, 1.2256)$ .
- INV:  $k \in (0, 1.5870)$ .
- GL:  $k \in (0, 1.6171)$ .

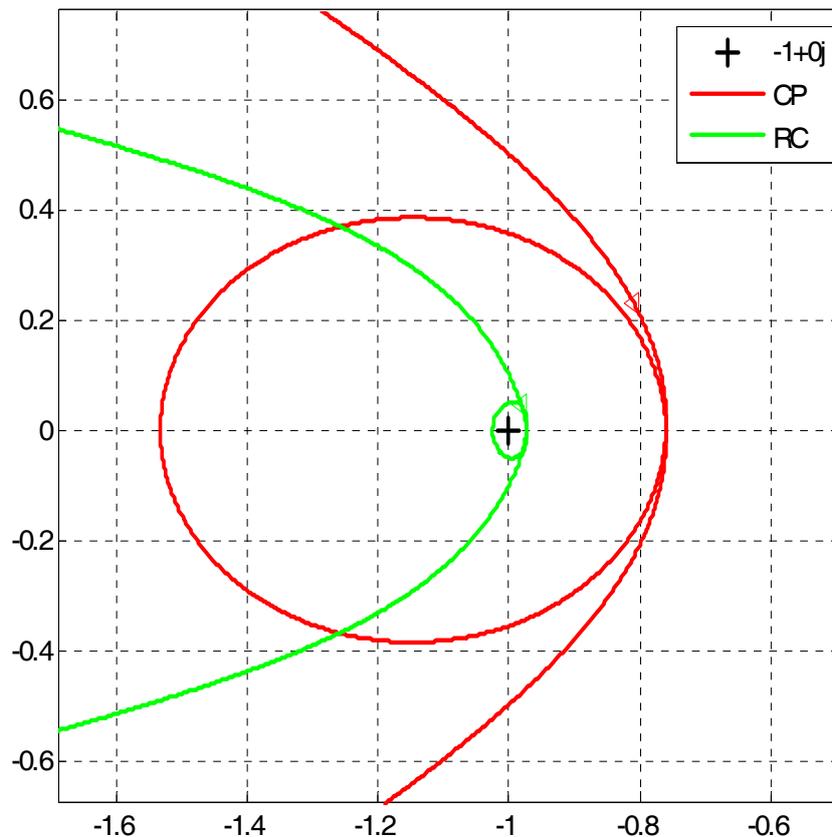


Fig 4.8 Diagrama de Nyquist del sistema de control GPC para las aproximaciones CP y RC.

Los sistemas obtenidos con las aproximaciones de CP y RC presentan una respuesta similar en el diagrama de Nyquist. Como podemos observar en la Fig 4.8 ambas rodean dos veces al punto  $(-1 + 0j)$  en sentido antihorario, para compensar el polo doble en  $z = 1$  que ambos sistemas tienen y al polo inestable que presenta en  $z = -1.376$  el sistema obtenido con CP, y al polo inestable en  $z = -6.024$  del sistema obtenido con RC.

#### 4. Control GPC de una planta fraccionaria

---

A partir de la figura podemos obtener los valores de  $k$ :

- CP:  $k \in (0.6528, 1.3161)$ .
- RC:  $k \in (0.9759, 1.0280)$ .

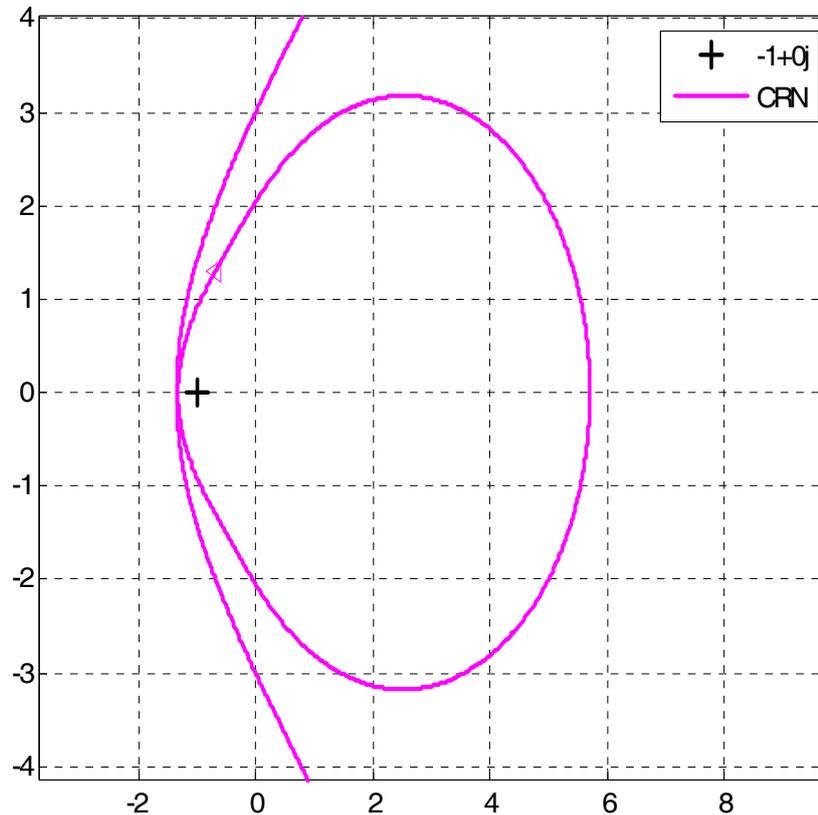


Fig 4.9 Diagrama de Nyquist del sistema de control GPC para la aproximación CRN.

La Fig 4.9 nos muestra el diagrama de Nyquist del sistema obtenido para la aproximación de CRN. Se puede observar como la curva rodea dos veces en sentido antihorario al punto  $(-1 + 0j)$ , pero esto es insuficiente para compensar el doble polo en  $z = 1$  y los dos polos inestables en  $z = 3.049$  y en  $z = -1.397$  que tiene el sistema en lazo abierto. Por tanto, este sistema es inestable para cualquier valor de  $k$ .

La Tabla 4.3 nos muestra los márgenes de ganancia y fase de los sistemas de control GPC obtenidos usando las aproximaciones anteriores. Destacamos el hecho de que el sistema obtenido con la aproximación GL nos da los mejores márgenes de estabilidad, por tanto, es el sistema más robusto. Recordamos que la respuesta

temporal de la aproximación obtenida usando GL con sólo 10 términos significativos (4.7) era la que menos se aproximaba a la respuesta real del integrador que se pretende controlar a lo largo de todo el tiempo de simulación, 100 segundos. Aunque también es cierto que su comportamiento dentro de la ventana de predicción  $[N_1, N_2]$  es de los mejores en términos de error, como se recoge en la Tabla 4.1. En cambio la aproximación que tenía mejor comportamiento en términos de error a lo largo de todo el tiempo de simulación, la aproximación RC, ha dado lugar al sistema con menores márgenes de estabilidad. Es decir, el sistema menos robusto.

Así pues, tenemos aquí un caso donde no siempre el modelo más preciso a lo largo de toda la ventana temporal da lugar al controlador más robusto, como ya se comentó al principio del presente capítulo. Puesto que para alcanzar este nivel de precisión tiene que colocar al menos uno de sus polos muy cerca de la frontera de la estabilidad, y parece que este hecho condiciona enormemente la robustez en lazo cerrado del sistema.

Tabla 4.3 Márgenes de ganancia y fase para los sistemas de control GPC.

<b>Aproximación</b>	<b>M. G.</b>	$\omega_{MG}$	<b>M. F.</b>	$\omega_{MF}$
CFE	1.7648	31.4159	28.6511	17.4944
CP	2.3831	20.6361	23.7002	12.6670
CRN	–	–	–	–
INV	4.0109	31.4159	28.3280	15.7860
RC	0.2407	18.8524	5.1982	13.9690
GL	4.1408	31.4159	40.5048	14.1706

### 4.2.3. Estudio de la sensibilidad

En este epígrafe se propone un estudio de la sensibilidad de los sistemas anteriores usando para ello las funciones de sensibilidad vistas en el capítulo 2 de esta Tesis, las cuales tienen las conocidas expresiones (4.9) y (4.10). De esta forma, tendremos una medida objetiva para cuantificar el grado en el que el sistema se ve afectado por las perturbaciones y los ruidos en su señal de entrada.

#### 4. Control GPC de una planta fraccionaria

---

$$\mathcal{S}(z^{-1}) = \frac{R(z^{-1})\Delta A(z^{-1})}{R(z^{-1})\Delta A(z^{-1}) + B(z^{-1})S(z^{-1})}. \quad (4.9)$$

$$\mathcal{T}(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})S(z^{-1})}{R(z^{-1})\Delta A(z^{-1}) + B(z^{-1})S(z^{-1})}. \quad (4.10)$$

En la Fig 4.10 podemos observar las funciones de sensibilidad  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{T}$  para los sistemas que estamos estudiando, salvo para el obtenido con el modelo CRN, ya que éste es inestable.

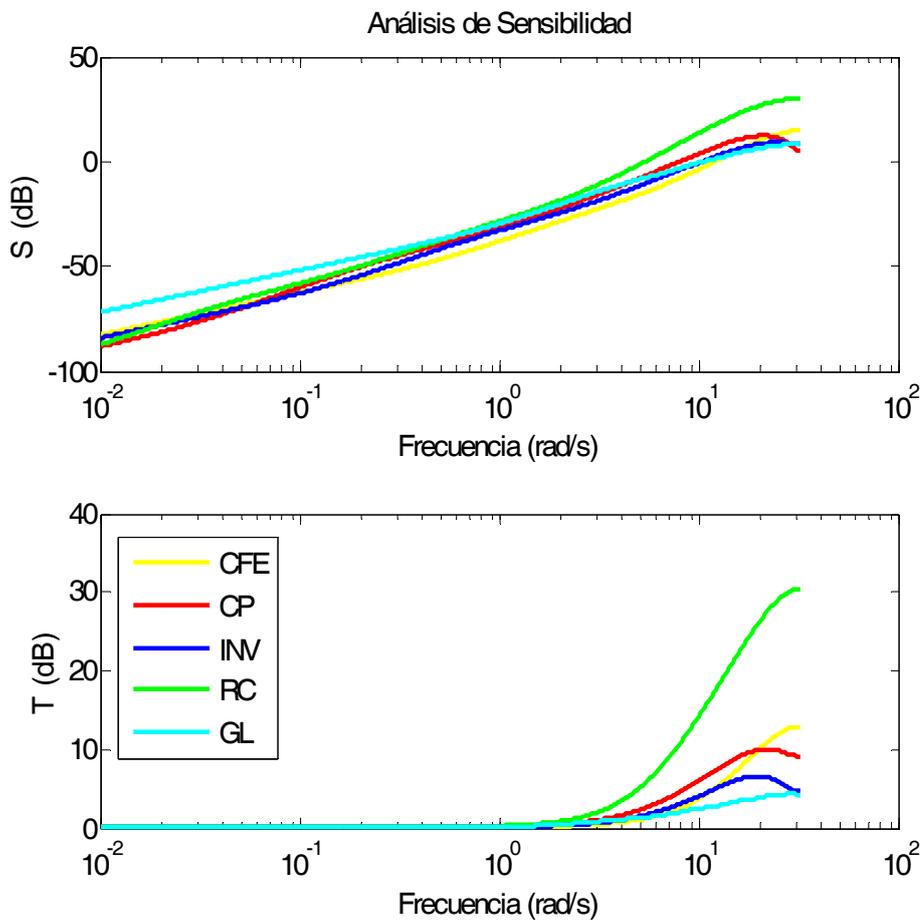


Fig 4.10 Función de sensibilidad  $\mathcal{S}$  y sensibilidad complementaria  $\mathcal{T}$  para el sistema de control GPC.

La función de sensibilidad  $\mathcal{S}$  nos muestra que todos los sistemas tienen un comportamiento similar rechazando perturbaciones de baja frecuencia, salvo el sistema obtenido con el modelo GL que es el que peor se comporta. Sin embargo, a medida que vamos aumentando la frecuencia, el sistema obtenido con el modelo de

RC es el que presenta peor rechazo a las perturbaciones. El resto de los sistemas presentan un comportamiento similar.

Si estudiamos la función de sensibilidad  $\mathcal{T}$  podemos observar que a bajas frecuencias todos los sistemas tienen un comportamiento similar y son en las altas frecuencias donde se produce diferencias entre ellos. En este caso observamos que el mayor pico es para el sistema obtenido con el modelo de RC. Así pues, este sistema es más vulnerable a los ruidos de alta frecuencia que pudieran provenir del sensor. El resto de sistemas se comportan mejor a altas frecuencias, destacando el obtenido con la aproximación GL, que es el que obtiene un menor valor de pico.

De nuevo podemos observar como dependiendo de la aproximación que tomemos como modelo de la planta, se influye significativamente en las propiedades del sistema de control en lazo cerrado. Así pues, se hace necesario estudiar las diferentes aproximaciones para quedarse con aquella que presente, a juicio del diseñador, el mejor comportamiento en aquellos aspectos que considere de interés.

#### 4.2.4. Resumen utilizando diferentes funciones de generación

A continuación se extraen del anexo II de esta Tesis las principales conclusiones de la comparación entre los diferentes modelos de la planta fraccionaria  $s^{-0.4}$  obtenidos utilizando diversas metodologías y funciones de generación: Euler, Tustin y Al-Alaoui:

- Se recomienda el método de Euler (*backward rule*) como función generadora, ya que todas las aproximaciones discretizadas con esta función han conducido a sistemas estables.
- Los mejores resultados, en cuanto a margen de ganancia y de fase, se han obtenido usando las aproximaciones de Chebyshev–Padé, usando Al–Alaoui como función generadora, y mediante la función *invfreqz* usando Euler como función generadora.
- Todas las aproximaciones estables tienen en general una rápida respuesta, aunque algunas de ellas conducen a sistemas que presentan sobreoscilaciones importantes. Podemos destacar el caso de aquella

obtenida con el método de expansión en fracciones continuas y Tustin, que presenta un sistema con una sobreoscilación superior al 75%.

- Se desaconseja el uso de la metodología Crone para obtener modelos de la planta, ya que no se ha conseguido ningún sistema estable a partir de estas aproximaciones.
- También se desaconseja utilizar Tustin como función generadora para discretizar, principalmente por el bajo número de sistemas estables que se han obtenido.

### 4.3. La fragilidad del controlador

Durante los últimos años la comunidad científica de la teoría de control ha desarrollado una gran cantidad de técnicas para diseñar sistemas de control lineales e invariantes en el tiempo que sean óptimos y robustos.

En todos estos desarrollos se entiende que el controlador diseñado debe implementarse **exactamente**, ya que se asume el hecho de que las incertidumbres que se presentan en el proceso de identificación de la planta son claramente las más importantes dentro del diseño del sistema de control, mientras que los controladores pueden ser implementados con un alto grado de precisión en todos sus coeficientes.

En la actualidad muchos autores ponen en duda tal premisa, y afirman que es necesario que cualquier controlador diseñado para formar parte de un sistema de control en lazo cerrado tiene que ser tolerante a algunas incertidumbres en los coeficientes que definen su función de transferencia. En (Keel y Bhattacharyya, 1997) se analizan varios ejemplos de diseños de controladores óptimos tomados de la literatura, donde se puede apreciar la *fragilidad* de éstos ante cualquier pequeña variación en estos coeficientes.

Una visión general del diseño de controladores no frágiles la podemos encontrar en (Dorato, 1998), donde se hace mención y se resumen varias técnicas enfocadas a este diseño, como el diseño basado en el margen de ganancia y fase.

A continuación, a modo de ejemplo, se va a realizar un estudio de la fragilidad de los distintos controladores GPC obtenidos usando una serie de aproximaciones racionales, variando el número de cifras significativas de los coeficientes de sus funciones de transferencia mediante truncamiento, con la intención de concluir que aproximación nos lleva a obtener un controlador más frágil.

Para este ejemplo se propone el control de un radiador eléctrico, el cual podemos encontrar en (Vinagre, 2001, pp. 199-204), cuya función de transferencia se ha obtenido mediante un método de identificación que ha dado lugar a la siguiente expresión fraccionaria de la planta:

$$G(s) = \frac{1}{39.69s^{1.26} + 0.598}. \quad (4.11)$$

Para obtener un modelo aproximado de esta planta, se ha optado por obtener una aproximación racional del derivador de orden 0.26 y después multiplicarla por la función de transferencia racional del derivador entero de orden 1. La razón de esta operación es conservar el efecto derivador a bajas frecuencias como se explicará más adelante, en la Sección 4.4.1.

A continuación, podemos observar las expresiones de las aproximaciones discretas que usaremos como modelos de la planta (4.11), las cuales han sido obtenidas con un periodo de muestreo,  $T_s = 1$  s, usando la fórmula de Euler como función generadora y las siguientes técnicas: expansión en fracciones continuas (CFE), Chebyshev–Padé (CP), Crone (CRN), usando la función *invfreqz* de MATLAB<sup>TM</sup> (INV) y racional de Chebyshev (RC):

$$G_{CFE}(z^{-1}) = \frac{-5 + 6.85z^{-1} - 2.3838z^{-2} + 0.147001z^{-3}}{-201.44 + 526.019800z^{-1} - 471.109034z^{-2} + 161.649980z^{-3} - 15.352052z^{-4}} z^{-1}. \quad (4.12)$$

$$G_{CP}(z^{-1}) = \frac{-0.685622 + 1.245116z^{-1} - 0.630015z^{-2} + 0.0662460z^{-3}}{-27.622815 + 84.446105z^{-1} - 92.095695z^{-2} + 41.192985z^{-3} - 5.923137z^{-4}} z^{-1}. \quad (4.13)$$

$$G_{CRN}(z^{-1}) = \frac{1 - 1.158414z^{-1} + 0.210201z^{-2}}{132.023942 - 383.910591z^{-1} + 388.520242z^{-2} - 152.218545z^{-3} + 15.61592z^{-4}} z^{-1}. \quad (4.14)$$

$$G_{INV}(z^{-1}) = \frac{1 - 1.212560z^{-1} + 0.357857z^{-2} - 0.017746z^{-3}}{40.288809 - 98.859280z^{-1} + 81.561071z^{-2} - 24.886406z^{-3} + 1.972080z^{-4}} z^{-1}. \quad (4.15)$$

#### 4. Control GPC de una planta fraccionaria

$$G_{RC}(z^{-1}) = \frac{1 - 2.098434z^{-1} + 1.311824z^{-2} - 0.212521z^{-3}}{40.282443 - 134.634140z^{-1} + 164.597007z^{-2} - 86.347381z^{-3} + 16.102590z^{-4}} z^{-1}. \quad (4.16)$$

Una vez diseñados los controladores predictivos para cada uno de los modelos anteriores usando los parámetros por defecto:  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 10$ ,  $N_u = 1$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\lambda = 10^{-6}$ , simularemos la respuesta escalón de todas ellas usando como equivalente discreto de la planta real (4.11) la aproximación de Grünwald-Letnikov con 300 términos, lo cual nos dará una simulación con resultados exactos para valores de  $t \leq LT_s = 300$  s.

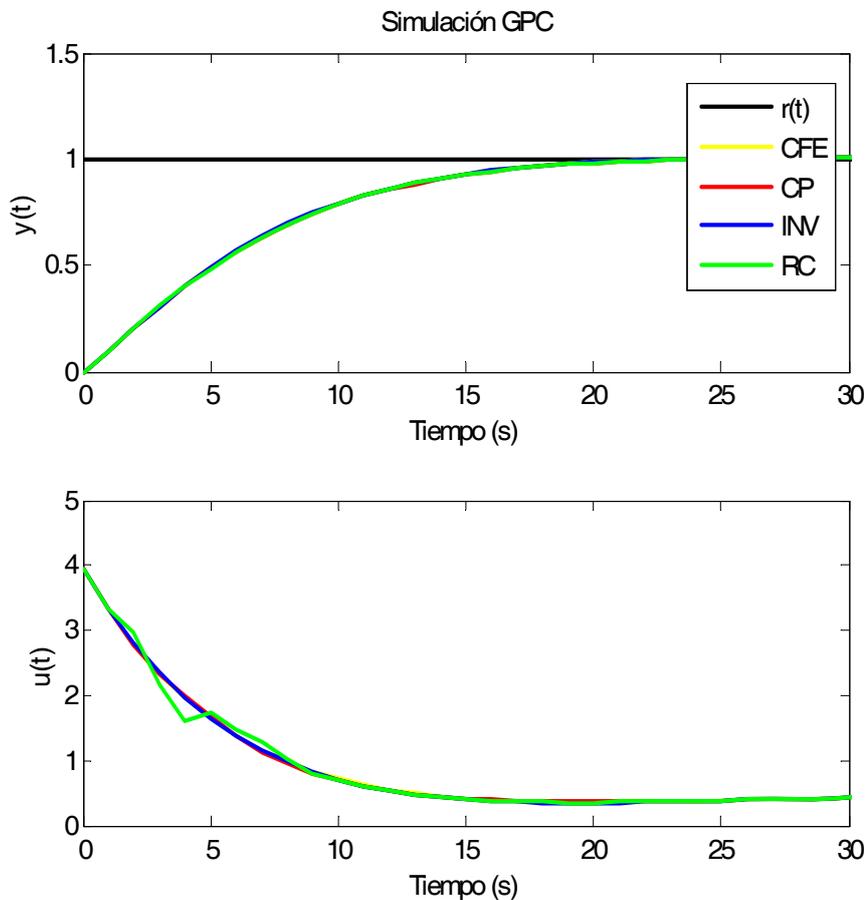


Fig 4.11 Simulación del sistema de control GPC con controladores con la máxima resolución en sus coeficientes.

La Fig 4.11 ilustra la simulación de estos sistemas de control, donde se ha utilizado toda la resolución que nos permite MATLAB<sup>TM</sup> para los coeficientes de los polinomios del controlador,  $R$  y  $S$ . Es observable que todos los controladores obtenidos tienen una respuesta casi idéntica, exceptuando el controlador obtenido

con la aproximación de Crone, el cual nos ha conducido a un sistema de control inestable.

En una primera prueba, vamos a reducir a seis el número de cifras significativas para los polinomios del controlador  $R$  y  $S$ . Como podemos observar en la Fig 4.12, esta reducción no le ha afectado mucho al controlador, ya que como podemos ver la respuesta obtenida es idéntica a la que se obtuvo en la simulación anterior.

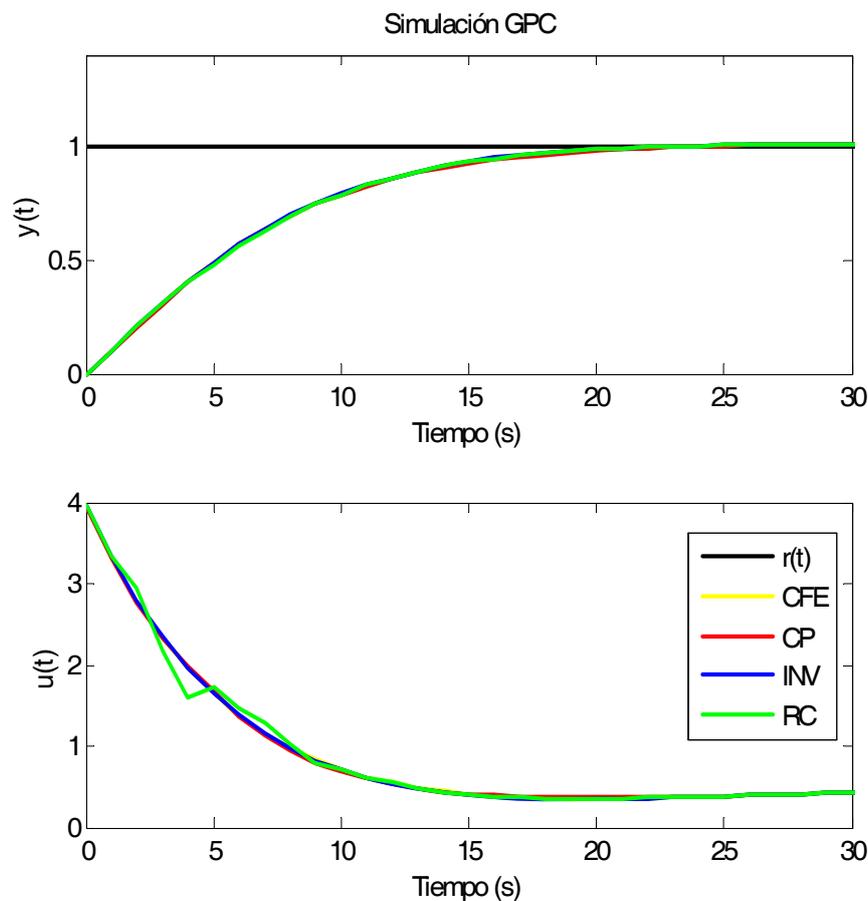


Fig 4.12 Simulación del sistema de control GPC con controladores con una resolución de 6 cifras en sus coeficientes.

En una segunda prueba, el número de cifras significativas va a quedar reducido a cuatro. En la Fig 4.13 podemos observar que todos los sistemas de control permanecen con una respuesta similar a la simulación anterior, excepto aquella perteneciente al controlador obtenido con la aproximación de Chebyshev–Padé (CP), cuya respuesta se ha degradado con respecto a la original.

#### 4. Control GPC de una planta fraccionaria

---

Por último, nos quedamos únicamente con tres cifras significativas, acción que provoca el efecto en la simulación de estos sistemas de control que muestra la Fig 4.14. La respuesta se ha degradado bastante, hasta el punto de volverse inestable. Solamente el controlador obtenido con la aproximación de RC conduce a una dinámica estable.

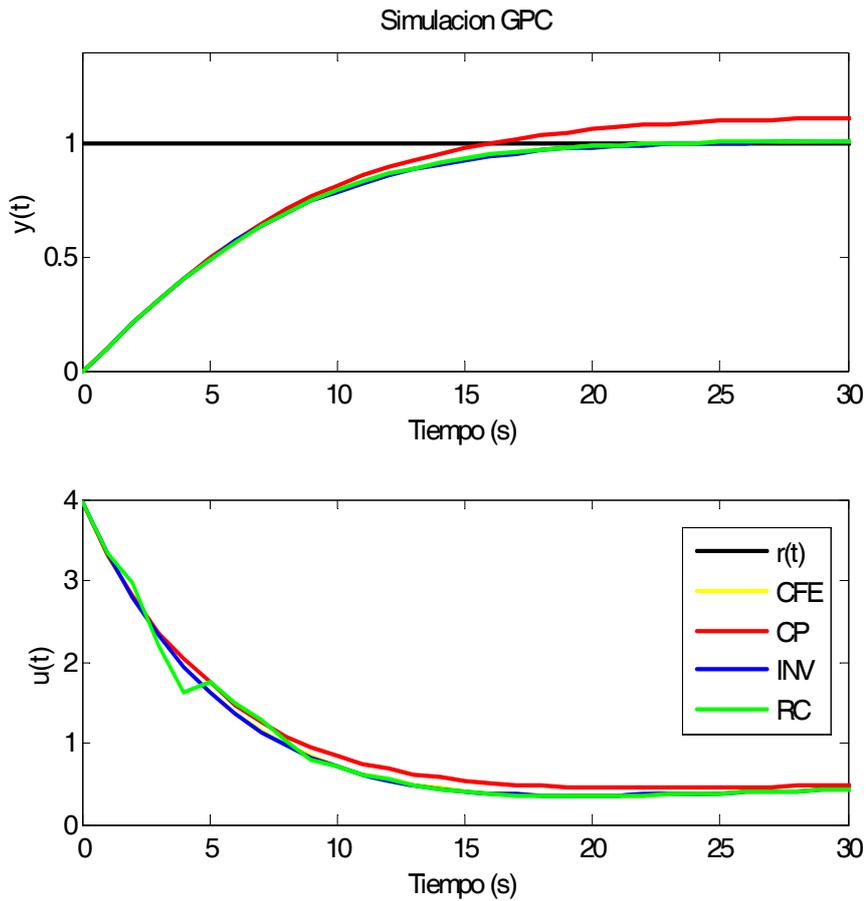


Fig 4.13 Simulación del sistema de control GPC con controladores con una resolución de 4 cifras en sus coeficientes.

La Tabla 4.4 muestra el valor del error cuadrático medio de la señal de salida de estas simulaciones con respecto a la señal de referencia  $r(t)$ . Vemos como, efectivamente, el error se dispara en el caso de usar sólo tres cifras significativas, salvo en el caso del controlador obtenido con la aproximación RC, cuyo error cuadrático medio se mantiene casi sin variación.

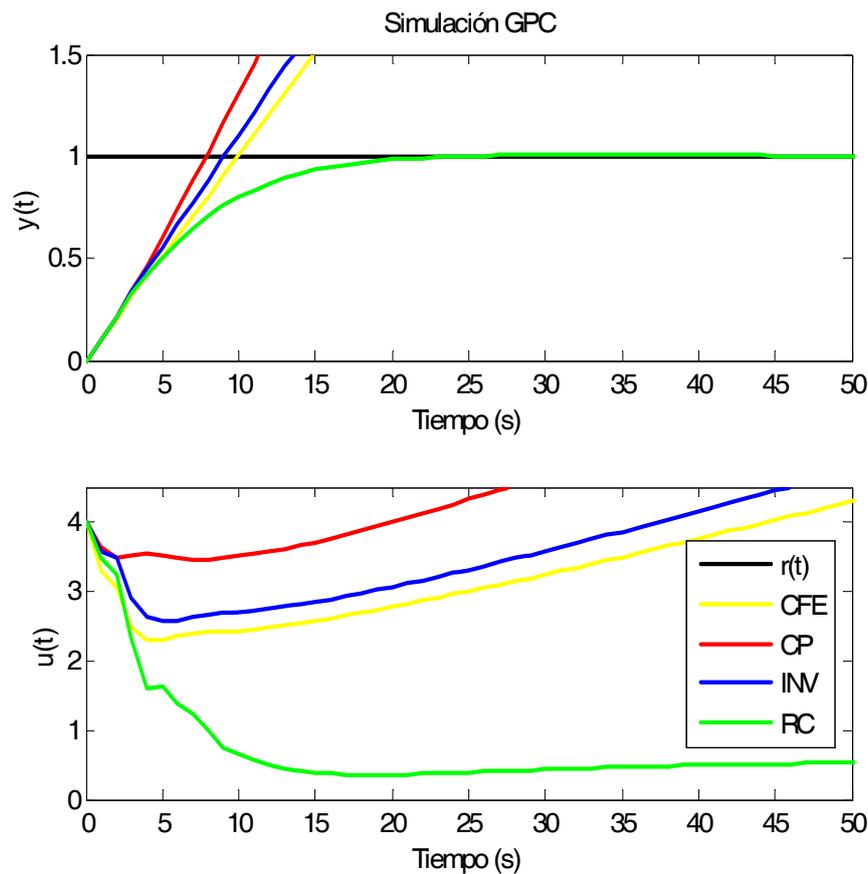


Fig 4.14 Simulación del sistema de control GPC con controladores con una resolución de 3 cifras en sus coeficientes.

Tabla 4.4 Error cuadrático medio de las respuestas con diferente número de cifras significativas.

	<i>6 Cifras</i>	<i>4 Cifras</i>	<i>3 Cifras</i>
CFE	0.288593	0.288593	2.090343
CP	0.288746	0.297254	3.276408
INV	0.287720	0.288291	2.384350
RC	0.288801	0.288037	0.284215

Como resumen, podemos afirmar que no basta con el diseño de un controlador robusto para controlar una determinada planta, ya que en la práctica estos controladores han de ser implementados en un dispositivo digital. Estos dispositivos pueden no ser capaces de alcanzar la misma resolución o número de cifras significativas que las utilizadas cuando se determinaron los coeficientes de la función

de transferencia del controlador. Por tanto, se debe comprobar que el sistema sigue conservando las propiedades de diseño con este número de cifras significativas que nos va a permitir el sistema digital, ya que, como hemos visto, al truncar, unos sistemas son más frágiles que otros. De forma particular, y ciñéndonos al ejemplo que nos atañe, podemos afirmar que el controlador menos frágil es aquel obtenido con la aproximación de RC, ya que éste no ha presentado apenas variación en el error a medida que se han ido quitando cifras decimales de su función de transferencia. También hemos podido comprobar que el controlador obtenido a partir de la aproximación de CP se ha presentado como el más frágil.

#### **4.4. Recomendaciones para el diseño. Mejora de la robustez**

Ya se ha estudiado que la respuesta del lazo de control puede variar dependiendo de la aproximación que utilicemos para obtener la expresión del modelo de los operadores fraccionarios en el ámbito discreto. Debido a la gran cantidad de aproximaciones racionales que podemos utilizar para aproximar discretamente la planta fraccionaria, es muy difícil generalizar de forma teórica cuál aproximación nos lleva a un control más robusto y estable. Aunque de forma práctica hemos concluido en los epígrafes anteriores que determinadas metodologías de aproximación nos ofrecen modelos con los que se obtienen controladores GPC con mejores prestaciones.

Como hemos visto, la metodología de diseño propuesta lleva a que, una vez elegida una aproximación, se compruebe la respuesta del sistema de control usando unos parámetros para el controlador determinados.

Desde el punto de vista del diseño, hemos propuesto (Romero *et al.*, 2008c) tres técnicas que nos ayudan a obtener sistemas más estables, independientemente de la aproximación que tomemos para obtener el modelo de la planta fraccionaria. Estas técnicas son:

- Mejora de la respuesta del modelo a bajas frecuencias.
- Uso del prefiltro del controlador  $T(z^{-1})$ .
- Ajuste de los parámetros  $N_u$  y  $\lambda$ .

De forma general, podemos decir que estas técnicas mejoran la estabilidad y la robustez de estos sistemas contra los problemas de desajuste entre la planta real fraccionaria y el modelo aproximado tomado.

Para ilustrar esta metodología, se van a tomar dos aproximaciones del integrador fraccionario de orden 0.4 (4.17), usando sólo las dos técnicas de Chebyshev vistas anteriormente, con un periodo de muestreo  $T_s = 0.1$  s. Las aproximaciones resultantes tienen las siguientes expresiones:

$$G(s) = \frac{k}{s^{0.4}}. \quad (4.17)$$

$$G_{CP}(z^{-1}) = \frac{0.226352 - 0.411845z^{-1} + 0.206593z^{-2} - 0.019978z^{-3}}{0.568564 - 1.261632z^{-1} + 0.864601z^{-2} - 0.171371z^{-3}} z^{-1}. \quad (4.18)$$

$$G_{RC}(z^{-1}) = \frac{0.395274 - 0.897793z^{-1} + 0.626306z^{-2} - 0.123733z^{-3}}{1 - 2.679155z^{-1} + 2.364368z^{-2} - 0.685208z^{-3}} z^{-1}. \quad (4.19)$$

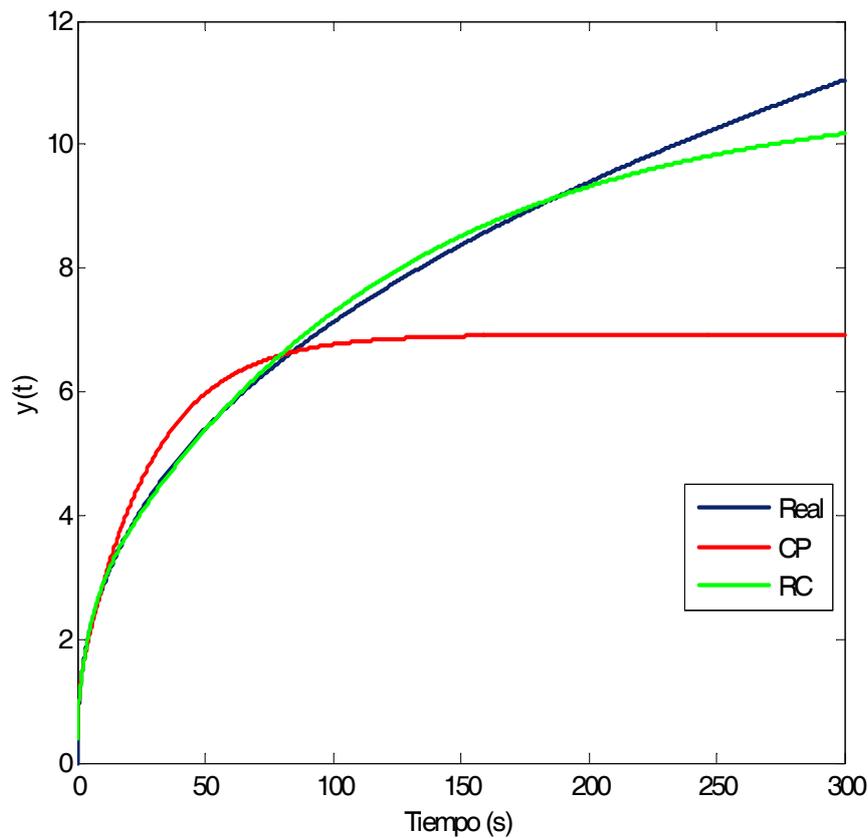


Fig 4.15 Respuesta escalón de las aproximaciones CP y RC del integrador de orden 0.4.

#### 4. Control GPC de una planta fraccionaria

---

La Fig 4.15 ilustra la respuesta escalón de ambas aproximaciones. Podemos observar que la aproximación RC es la que más tiempo permanece cerca de la respuesta real de la planta en esta simulación.

Partiendo de estas aproximaciones, calculamos los controladores GPC usando los parámetros por defecto  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 10$ ,  $N_u = 1$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\lambda = 10^{-6}$ , obteniendo las respuestas escalón que se ilustran en la Fig 4.16. La simulación de esta respuesta escalón se lleva a cabo usando como planta real, la aproximación de Grünwald-Letnikov con 100 términos. Recordamos que esta aproximación nos dará una simulación con resultados exactos para valores de  $t \leq LT_s = 10$  s.

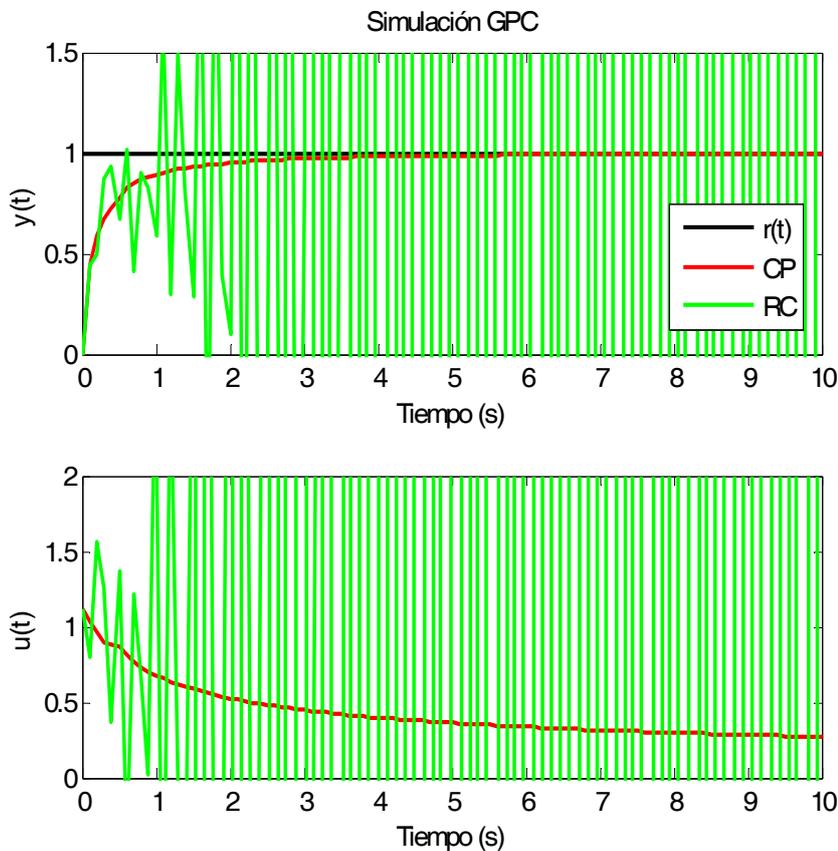


Fig 4.16 Simulación del sistema de control GPC del integrador fraccionario de orden 0.4 para las aproximaciones de CP y RC.

Los resultados de la simulación nos muestran que la aproximación más precisa, RC, da lugar a un sistema de control inestable. En cambio, con la aproximación de CP se obtiene un sistema de control estable. La Fig 4.17 y la Fig 4.18 muestran el diagrama de Nyquist de ambas aproximaciones. El sistema de

control obtenido con la aproximación de CP presenta un polo inestable en  $z = 13.4148$ , y un polo doble en  $z = 1$ . Por tanto,  $P = 2$ . El contorno de Nyquist rodea al punto crítico  $(-1 + 0j)$  dos veces en sentido antihorario. Por tanto,  $N = -2$ . Así pues, sumando tenemos  $Z = 0$ , es decir, sistema estable en lazo cerrado con un margen de ganancia comprendido en el intervalo  $(0.9579, 1.0183)$ .

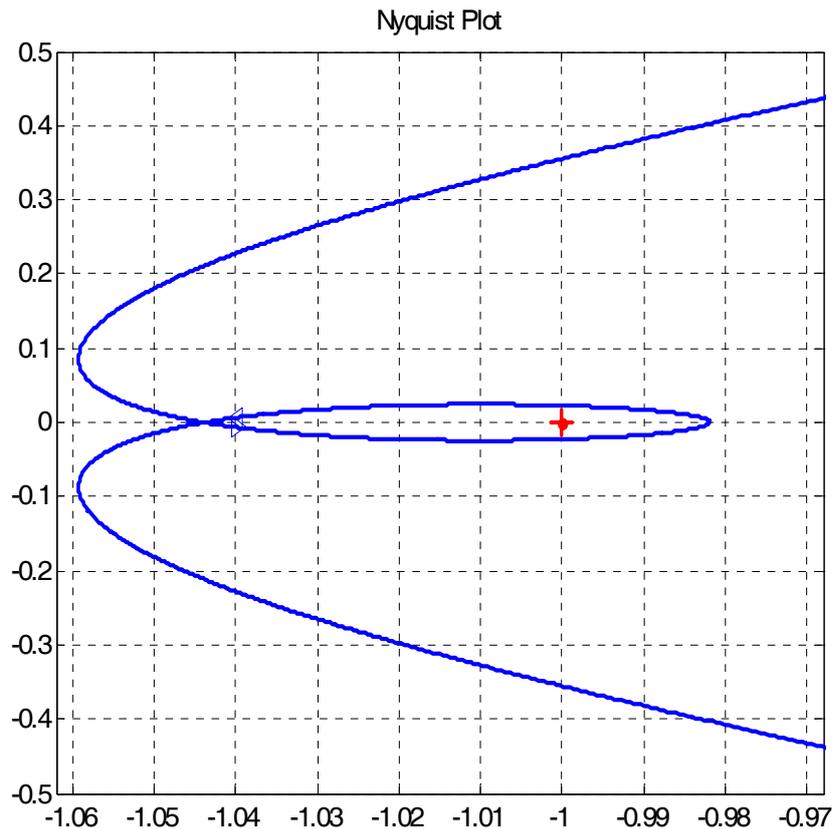


Fig 4.17 Diagrama de Nyquist del sistema de control GPC con modelo de orden 0.4 obtenido con la aproximación de CP.

El sistema de control obtenido usando la aproximación de RC presenta un polo inestable en  $z = 28.1224$ , y un polo doble en  $z = 1$ . Esto hace que  $P = 2$ , pero no rodea al punto crítico, por lo tanto, tenemos un sistema inestable con  $Z = 2$ .

Será esta última aproximación que da lugar a un sistema de control inestable, la que utilizaremos, seguidamente, para ilustrar las técnicas para mejorar la estabilidad.

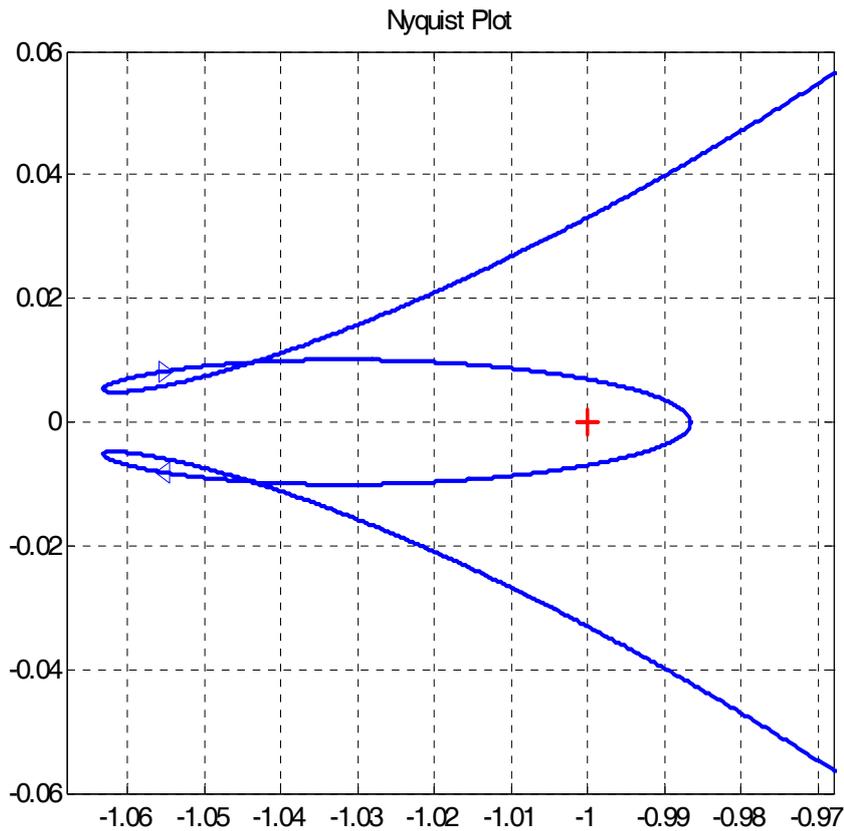


Fig 4.18 Diagrama de Nyquist del sistema de control GPC con modelo de orden 0.4 obtenido con la aproximación de RC.

#### 4.4.1. Mejora de la respuesta del modelo a bajas frecuencias

Tanto las aproximaciones de Chebyshev como las demás aproximaciones descritas en capítulos anteriores tienen el problema de la pérdida del efecto integrador a bajas frecuencias, es decir, presentan un margen de ganancia con pendiente horizontal desde  $0 \text{ rad/s}$  hasta la frecuencia que le confiere el primer polo de la aproximación.

Esta falta de precisión a bajas frecuencias puede resultar crítica a la hora de diseñar el controlador GPC. Por tanto, en caso de obtener un sistema inestable con la aproximación del integrador fraccionario, se recomienda descomponer éste en un producto de un derivador de orden fraccionario multiplicado por un integrador convencional de orden entero.

$$G(s) = \frac{1}{s^{0.4}} = \frac{1}{s} s^{0.6}. \quad (4.20)$$

Retomando el ejemplo anterior, podemos ahora calcular la aproximación RC del derivador fraccionario  $s^{0.6}$ :

$$s^{0.6} \approx \frac{3.980108 - 9.532780z^{-1} + 7.283315z^{-2} - 1.730421z^{-3}}{1 - 1.794500z^{-1} + 0.869685z^{-2} - 0.069682z^{-3}} z^{-1}, \quad (4.21)$$

después de hacer la operación descrita en la expresión (4.20) obtenemos la siguiente expresión para el integrador:

$$G_{RC\_2}(z^{-1}) = \frac{0.398010 - 0.953278z^{-1} + 0.728331z^{-2} - 0.173042z^{-3}}{1 - 2.794500z^{-1} + 2.664185z^{-2} - 0.939367z^{-3} + 0.069682z^{-4}} z^{-1} \quad (4.22)$$

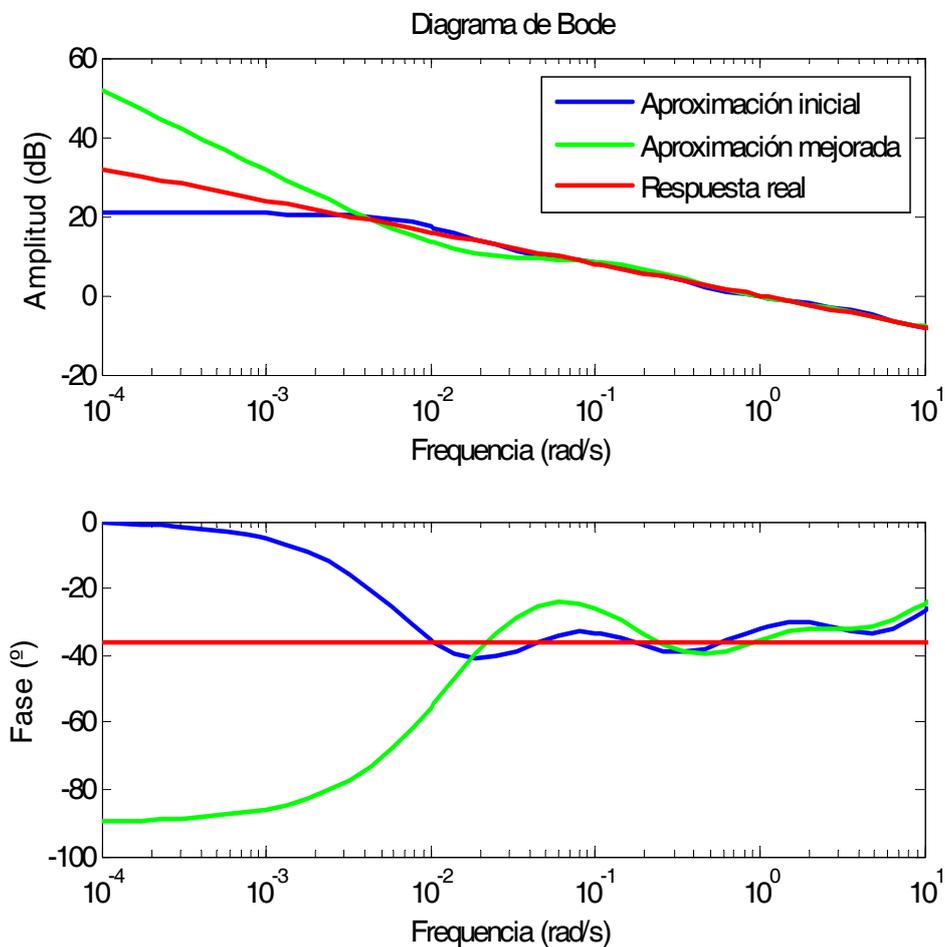


Fig 4.19 Comparación de la respuesta en frecuencia de la inicial y la nueva aproximación de RC con mejora a bajas frecuencias.

La Fig 4.19 muestra la comparación de la respuesta en frecuencia entre las funciones de transferencia del sistema usando la aproximación inicial (4.19) y la nueva aproximación de RC (4.22). Podemos observar que ambas presentan un

#### 4. Control GPC de una planta fraccionaria

---

comportamiento similar a altas frecuencias, pero sólo la última conserva el efecto integrador a bajas frecuencias.

La función de transferencia en lazo abierto del sistema presenta un polo en  $z = 31.599830$ , y un doble polo en  $z = 1$ , por lo tanto, tenemos que  $P = 2$ . El diagrama de Nyquist correspondiente a este sistema se muestra en la Fig 4.20, donde podemos observar que  $N = 2$  y por tanto,  $Z = 0$ , es decir, el sistema es estable en lazo cerrado para todo  $k$  dentro del intervalo  $(0.991, 1.005)$ . La Fig 4.21 muestra la nueva simulación del sistema de control GPC, ahora con una dinámica estable.

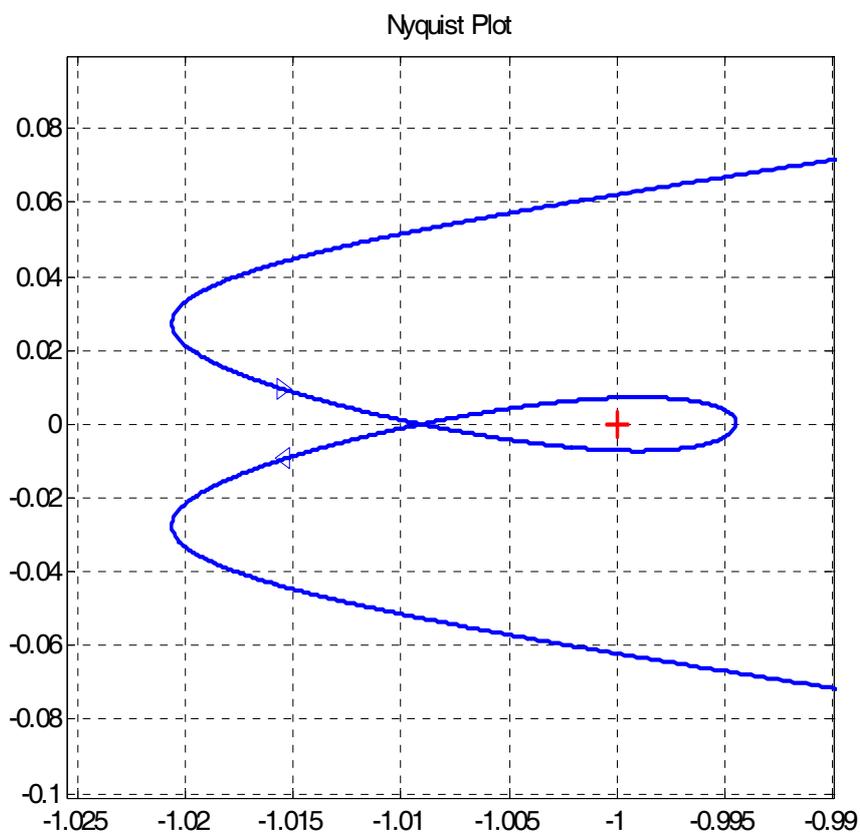


Fig 4.20 Diagrama de Nyquist del sistema de control GPC usando la nueva aproximación RC con respuesta mejorada a bajas frecuencias.

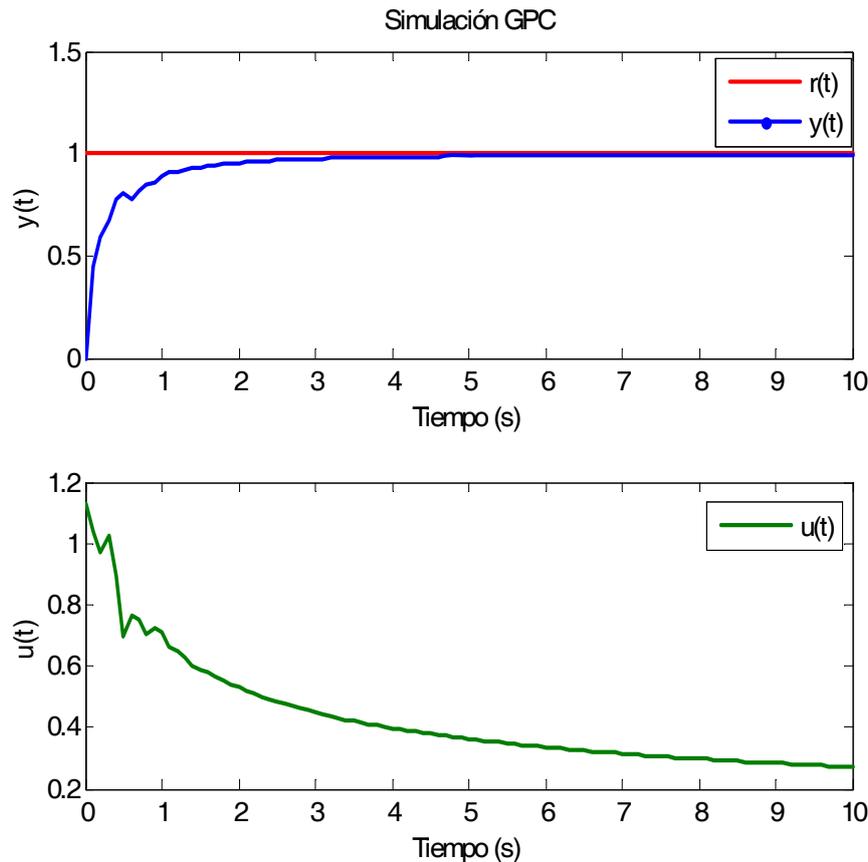


Fig 4.21 Respuesta del sistema GPC usando la nueva aproximación RC con respuesta mejorada a bajas frecuencias.

#### 4.4.2. Uso del prefiltro del controlador $T(z^{-1})$

Ya se ha comentado que el uso del prefiltro  $T$  puede mejorar la robustez del sistema contra los problemas de desajuste entre la planta real y el modelo tomado. Por este motivo una correcta elección del mismo puede conducir a estabilizar un sistema que, a priori, no lo era.

Para la elección del prefiltro  $T$  se van a seguir las recomendaciones que podemos encontrar en (Yoon, 1994), (Yoon y Clarke, 1995). Este prefiltro tiene la conocida expresión (2.31).

La primera experiencia se va a realizar tomando el valor de  $\tau = 0$ . Haciendo esto tenemos que  $T = A$ . Con estas condiciones obtenemos un sistema de control GPC cuya respuesta escalón se muestra en la Fig 4.22 y cuyo diagrama de Nyquist se observa en la Fig 4.23.

#### 4. Control GPC de una planta fraccionaria

---

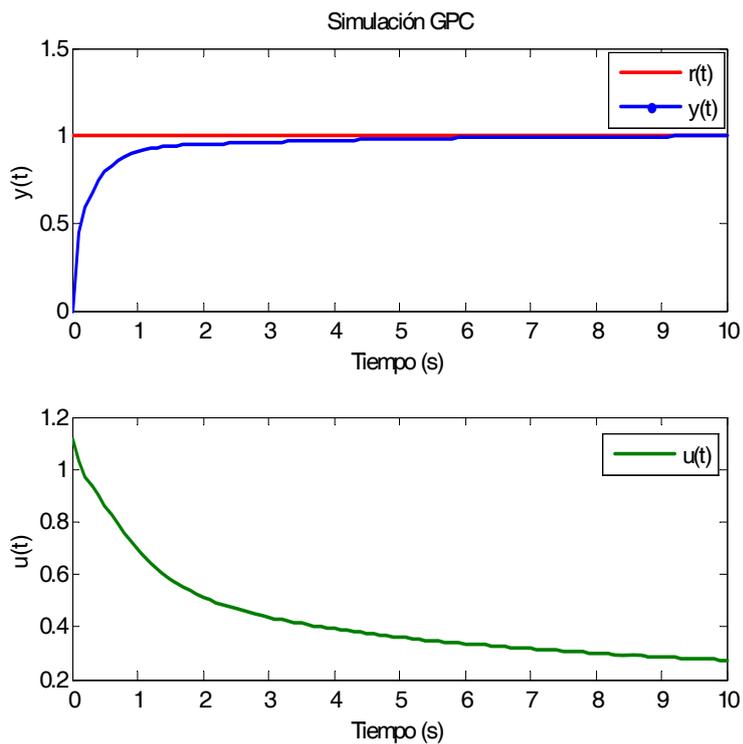


Fig 4.22 Respuesta del sistema GPC usando la aproximación RC con el polinomio  $T = A$ .

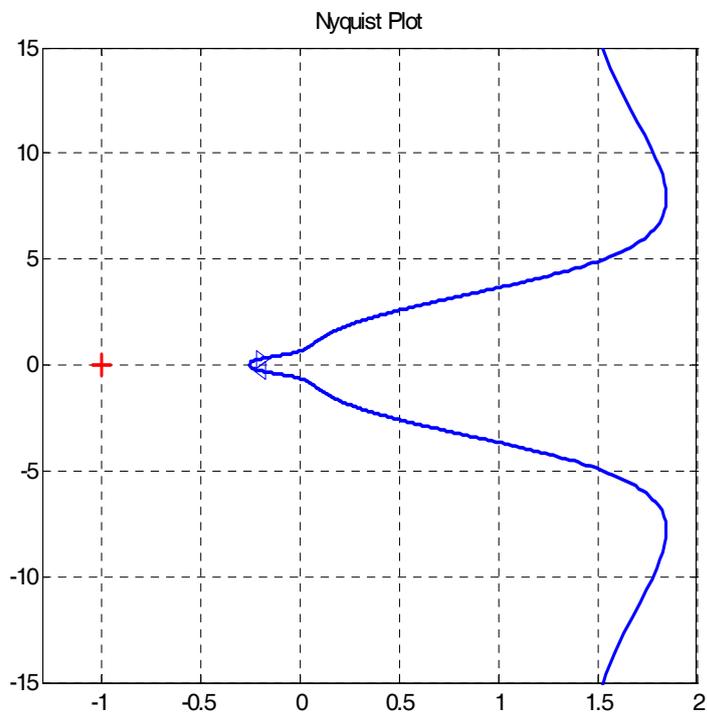


Fig 4.23 Diagrama de Nyquist del sistema de control GPC usando la aproximación RC con el polinomio  $T = A$ .

Siguiendo la misma recomendación, se realiza una segunda experiencia tomando el valor de  $\tau = 0.8$ , obteniendo un prefiltro con la siguiente expresión  $T = A(1 - 0.8z^{-1})$ . Con estas condiciones obtenemos un sistema de control GPC cuya respuesta escalón se muestra en la Fig 4.24 y su diagrama de Nyquist en la Fig 4.25.

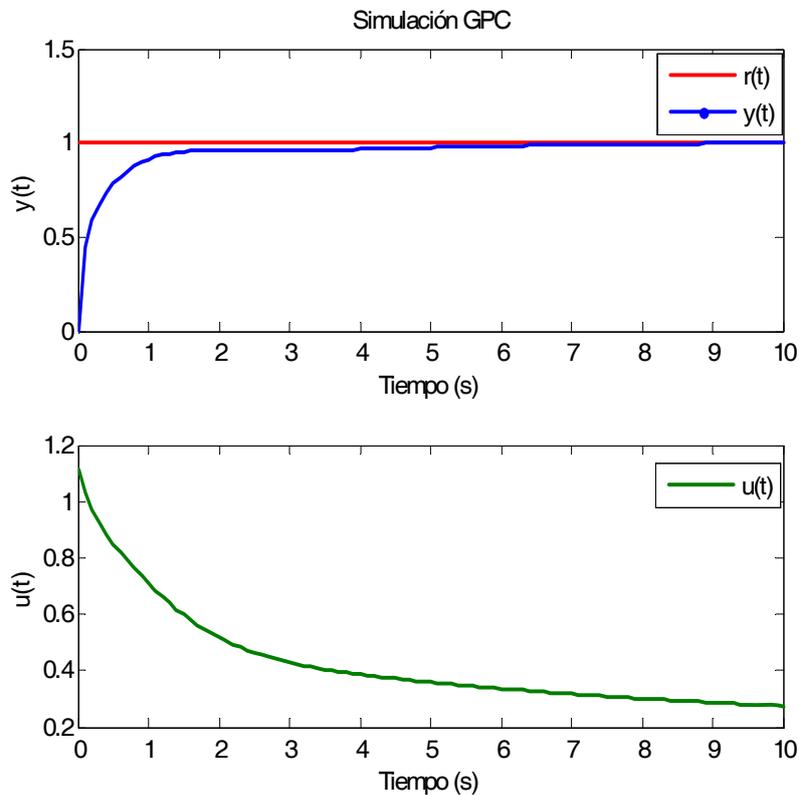


Fig 4.24 Respuesta del sistema GPC usando la aproximación RC con el polinomio  $T = A(1 - 0.8z^{-1})$ .

En ambos casos se ha estabilizado la respuesta del sistema en lazo cerrado, teniendo ahora un sistema estable. Los dos sistemas poseen un doble polo en  $z = 1$ ,  $P = 1$ , el cual se compensa con una vuelta en sentido antihorario en el diagrama de Nyquist  $N = -1$ . Por tanto,  $Z = 0$ .

El primer sistema será estable siempre que el valor de  $k$  pertenezca al intervalo  $(0, 3.8595)$ , y el segundo para valores de  $k$  que pertenezcan al intervalo  $(0, 8.9686)$ . Así pues, queda comprobado que con la inclusión de este segundo prefiltro hemos aumentado el grado de robustez del sistema.

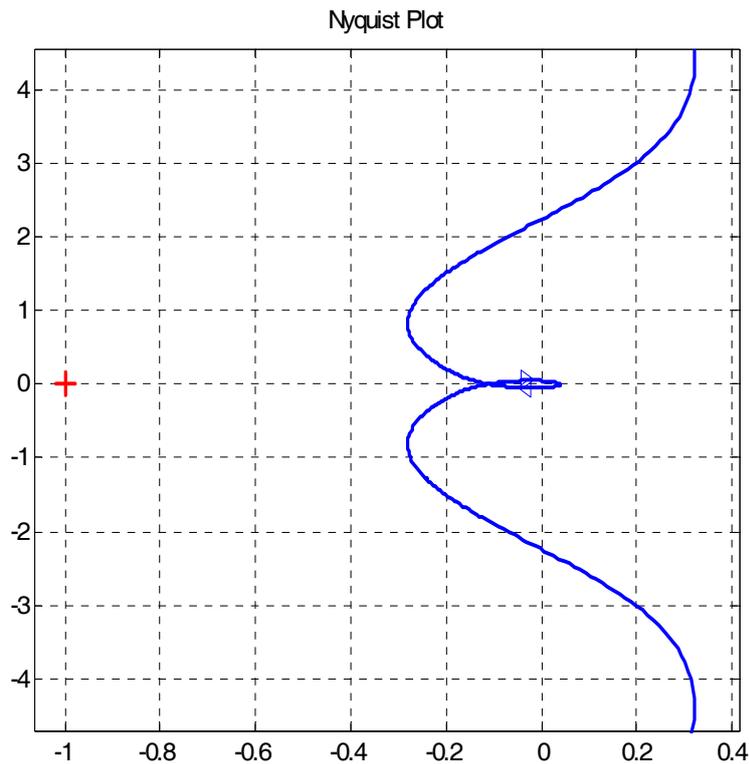


Fig 4.25 Diagrama de Nyquist del sistema de control GPC usando la aproximación RC con el polinomio  $T = A(1 - 0.8z^{-1})$ .

#### 4.4.3. Ajuste de los parámetros $N_u$ y $\lambda$

Inicialmente en el ajuste del controlador GPC, para el modelo de la planta obtenido mediante la aproximación RC (4.19), se usaron los parámetros por defecto recomendados por (Clarke, *et al.*, 1987a), pero, como pudimos observar en la Fig 4.16, estos parámetros nos llevaron a la inestabilidad. Debido a esto parece lógico proponer una recomendación diferente para elegir los valores del ajuste del controlador. Entre todos ellos, y a tenor del efecto que tienen sobre la estabilidad del lazo de control, se propone variar el valor del horizonte de control,  $N_u$ , y la secuencia de pesos del error de la señal de control,  $\lambda$ , de la siguiente forma:

- $N_u$  igual al grado de la función de transferencia usada como modelo, incluso aunque ésta sea estable.
- $\lambda$  igual a los coeficientes binomiales que aparecen, de forma natural, en la aproximación de Grünwald-Letnikov:

$$\lambda(j) = \left( \begin{array}{c} \alpha \\ N_u - j \end{array} \right), \quad j = 1, 2, \dots, N_u. \quad (4.23)$$

El incremento del valor de  $N_u$  ocasiona una acción de control más agresiva, ya que aumenta el número de grados de libertad para minimizar en la función de coste de GPC. Esta acción se compensa mediante la elección de la secuencia de pesos,  $\lambda$ , ver expresión (4.23),  $\forall \alpha \in (-1, 1)$ , que nos suaviza la acción de control.

De esta forma obtenemos una secuencia de pesos tal que  $\lambda(k) < \lambda(k+1)$ , la cual confiere al sistema una acción de control suave (Camacho y Bordóns, 2004). Siguiendo esta recomendación vamos a elegir, para el modelo RC que hemos tomado como ejemplo, un horizonte de control  $N_u = 3$ , el cual nos genera la siguiente secuencia de pesos:  $\lambda(1) = 0.12$ ,  $\lambda(2) = 0.4$ , y  $\lambda(3) = 1$ .

Usando esta nueva recomendación obtenemos un sistema de control cuyo diagrama de Nyquist en lazo abierto está representado en la Fig 4.26. Este sistema presenta un polo en  $z = 6.6508$ , y un doble polo en  $z = 1$ , por lo tanto tenemos que  $P = 2$ . Esto se compensa con dos vueltas en sentido antihorario en el diagrama de Nyquist  $N = -2$ . Por tanto,  $Z = 0$  (sistema estable en lazo cerrado).

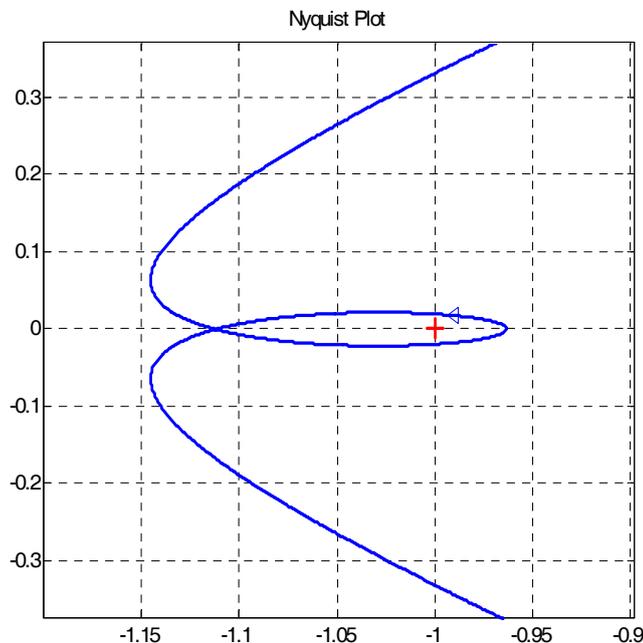


Fig 4.26 Diagrama de Nyquist del sistema de control GPC usando la aproximación RC con los nuevos parámetros  $N_u$  y  $\lambda$ .

#### 4. Control GPC de una planta fraccionaria

---

Por último, la Fig 4.27 muestra la respuesta escalón del sistema de control GPC, que como podemos observar es estable y sigue a la referencia, siempre que los valores de  $k$  que pertenezcan al intervalo  $(0.899, 1.037)$ .

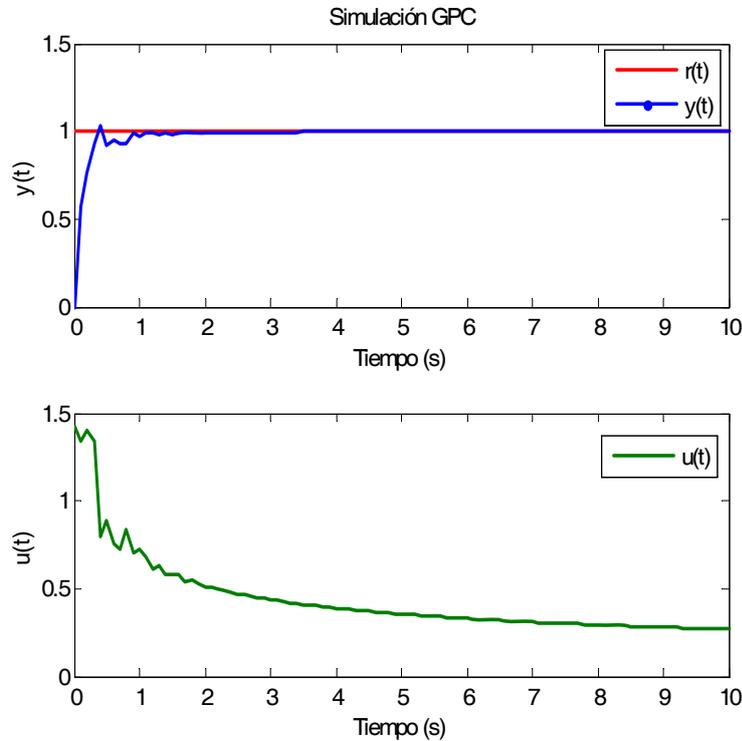


Fig 4.27 Respuesta del sistema GPC usando la aproximación RC con los nuevos parámetros  $N_u$  y  $\lambda$ .

#### 4.5. Conclusiones

A lo largo del presente capítulo se ha visto cómo es posible el control de una planta que presenta naturaleza fraccionaria mediante la metodología general de control predictivo GPC.

Para ello, se ha estudiado el tema de la elección del modelo de la planta fraccionaria, ya que, como hemos visto, la discretización de la función continua de una planta fraccional conduce a un modelo que posee un número infinito de términos y la metodología de GPC requiere de un modelo de orden finito. Hemos podido comprobar como no siempre el modelo más preciso da lugar al controlador más robusto. Fruto de este estudio se proponen una serie de recomendaciones prácticas para el diseño de los controladores GPC, las cuales podemos resumir en tomar el método de Euler (*backward rule*) como función generadora junto a la metodología de

Chebyshev–Padé y racional de Chebyshev para obtener las aproximaciones. Se desaconseja el uso la metodología Crone para obtener modelos de la planta y utilizar Tustin como función generadora para discretizar, como se desprende del estudio realizado en el anexo II.

Para el estudio de la estabilidad de estos sistemas de control GPC de plantas fraccionarias se ha propuesto el uso de la técnica conocida como criterio de Nyquist, ya que en la actualidad no se disponen de técnicas numéricas tipo Routh o Jury para estudiar la estabilidad de sistemas con operadores fraccionarios.

También proponemos tres técnicas útiles desde el punto de vista del diseño que ayudan a mejorar la estabilidad, independientemente de la aproximación que tomemos para obtener el modelo de la planta fraccionaria. Éstas las podemos resumir en: mejora de la respuesta del modelo a bajas frecuencias, uso del prefiltro del controlador GPC, y ajuste de los parámetros  $N_u$  y  $\lambda$ .

Hemos podido observar que determinadas metodologías para obtener un modelo aproximado del operador fraccionario dan lugar a controladores GPC más frágiles, es decir, éstos son más sensibles a cualquier variación en los parámetros que definen su función de transferencia. Por tanto, es recomendable la comprobación mediante simulación del controlador con el número de cifras significativas que va a permitir su realización práctica.

Como resumen podemos afirmar, desde el punto de vista de la elección del modelo y debido al amplio abanico de resultados obtenidos usando los diferentes modelos de la planta, que es mejor que el diseñador simule el sistema (planta + controlador) con diferentes modelos y tome aquél cuyas características desde el punto de vista de la dinámica, robustez, fragilidad, etc., le resulten más adecuadas.

En los próximos capítulos se abordará el diseño de controladores predictivos pero con naturaleza fraccionaria. Es decir, será la función de coste de los mismos la que venga definida por estos operadores. Para ello, en el capítulo 5 introduciremos el operador integral definida fraccionaria.



# Capítulo 5

## Integral definida fraccionaria

En este capítulo se propone una generalización del concepto de integral definida extendiendo el significado de la misma para el caso de un orden de integración real.

Es bien conocida, dentro del cálculo integral entero, la regla de Barrow, también llamada segundo teorema fundamental del cálculo integral. Esta regla permite calcular fácilmente el valor de la integral definida a partir de cualquiera de las primitivas<sup>1</sup> de la función:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (5.1)$$

En el presente capítulo se generalizará la regla de Barrow de forma que abarque también el caso de órdenes de integración fraccionaria (Romero *et al.*, 2010a).

Además, se presentarán dos métodos de evaluación numérica de la integral definida fraccionaria, apoyándose en la definición de GL, vista en el capítulo 3.

Por último, como consecuencia de la generalización anterior, se enunciarán las propiedades más importantes de esta nueva integral definida de orden fraccionario.

---

<sup>1</sup>  $F$  es una primitiva de  $f$  si y sólo si  $f$  es la derivada de  $F$  :  $DF = f$ .

La integral definida fraccionaria será la base para la definición de un nuevo tipo de controlador predictivo que se verá en el capítulo siguiente.

### 5.1. Resultado principal: integral definida fraccionaria

Como resultado principal vamos a demostrar el siguiente teorema:

**Teorema 5.1.** Sea  $f(x)$  una función descrita como una serie de potencias (3.10), la cual es derivable fraccionariamente, y además  $f(x)$  no es una función  $C(1-\alpha)$  constante, para  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Entonces se cumple que:

$$\int_a^b [D^{1-\alpha} f(x)] dx = F^\alpha(b) - F^\alpha(a), \quad (5.2)$$

donde  $F^\alpha(x)$  es una función primitiva de orden  $\alpha$  de  $f(x)$ .

#### Demostración

Para demostrar el teorema anterior, partimos de la transformación del operador  $D$  en el operador  $I$ :

$$\int_a^b [D^{1-\alpha} f(x)] dx = \int_a^b [I^{\alpha-1} f(x)] dx. \quad (5.3)$$

Con  $\alpha \in \mathbb{R}$  (teniendo en cuenta la definición de GL (3.4)). Esta expresión puede ser expandida usando la regla de Barrow para la integral definida de orden entero.

$$\begin{aligned} \int_a^b [I^{\alpha-1} f(x)] dx &= \int [I^{\alpha-1} f(x)] dx \Big|_{x=b} - \int [I^{\alpha-1} f(x)] dx \Big|_{x=a} \\ &= I^1 I^{\alpha-1} f(x) \Big|_{x=b} - I^1 I^{\alpha-1} f(x) \Big|_{x=a}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Si  $f$  no es  $C(1-\alpha)$  constante (como consecuencia del Teorema 3.2 no hace falta asegurar que  $f$  no sea una  $C(-1)$  constante, porque suponemos que  $f(x) \neq 0$ ) entonces, como consecuencia del Teorema 3.1 y de la relación entre los operadores  $D$  e  $I$ , podemos afirmar:

$$\int_a^b [I^{\alpha-1} f(x)] dx = I^\alpha f(x) \Big|_{x=b} - I^\alpha f(x) \Big|_{x=a}. \quad (5.5)$$

Introduciendo la siguiente notación:

$$F^\alpha(x) \equiv I^\alpha f(x), \quad (5.6)$$

la expresión (5.5) puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$\int_a^b [I^{\alpha-1} f(x)] dx = F^\alpha(b) - F^\alpha(a). \quad (5.7)$$

Como queríamos demostrar.

La parte derecha de la expresión (5.7) tiene la apariencia de la generalización de la regla de Barrow para el caso de la integral definida fraccionaria. Por esta razón proponemos la parte izquierda de la expresión (5.7), escrita en términos del operador  $I$ , como la definición de la integral definida fraccionaria de orden  $\alpha$ .

**Definición 5.1.** La integral definida fraccionaria de una función  $f$  con derivadas fraccionarias que no son  $C(1-\alpha)$  constantes y que admita una representación en serie de potencias, viene dada por la siguiente expresión:

$${}^\alpha I_a^b f(x) \equiv \int_a^b [D^{1-\alpha} f(x)] dx, \quad (5.8)$$

siendo:  $a, b \in \mathbb{R}$  los límites de integración y  $\alpha \in \mathbb{R}$  el orden de integración.

**Corolario 5.1. Regla de Barrow fraccionaria.** Sea  $f(x)$  una función que admita derivadas fraccionarias, representación en serie de potencias y que, además, no sea  $C(1-\alpha)$  constante, con  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Entonces:

$${}^\alpha I_a^b f(x) = F^\alpha(b) - F^\alpha(a). \quad (5.9)$$

Demostración trivial a partir del Teorema 5.1 y la Definición 5.1.

## 5.2. Evaluación numérica

La evaluación numérica de la integral definida fraccionaria cuya expresión es (5.8) puede realizarse de dos formas diferentes: por un lado, en una primera vía, como consecuencia del Corolario 5.1, podemos aplicar a la expresión (5.9) la definición de Grünwald – Letnikov (3.4) para obtener una expresión discreta y evaluable de las dos funciones primitivas  $F$ . Así pues:

## 5. Integral definida fraccionaria

---

$${}^{\alpha}I_a^b f(x) = F^{\alpha}(b) - F^{\alpha}(a) = D^{-\alpha} f(b) - D^{-\alpha} f(a) = \left[ \left[ \Delta x^{\alpha} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{-\alpha}{r} f(b-r\Delta x) \right] - \left[ \Delta x^{\alpha} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{-\alpha}{r} f(a-r\Delta x) \right] \right]. \quad (5.10)$$

Operando y expandiendo:

$${}^{\alpha}I_a^b f(x) = \Delta x^{\alpha} \left\{ (-1)^0 \binom{-\alpha}{0} f(b) + (-1)^1 \binom{-\alpha}{1} f(b-\Delta x) + \dots \right\} - \Delta x^{\alpha} \left\{ (-1)^0 \binom{-\alpha}{0} f(a) + (-1)^1 \binom{-\alpha}{1} f(a-\Delta x) + \dots \right\}. \quad (5.11)$$

Definimos la expresión de  $\omega'_k$  como:

$$\omega'_k \equiv (-1)^k \binom{-\alpha}{k}. \quad (5.12)$$

Sustituyendo y agrupando términos:

$${}^{\alpha}I_a^b f(x) = \Delta x^{\alpha} \left[ \begin{aligned} &\omega'_0 f(b) + \omega'_1 f(b-\Delta x) + \dots \\ &+ \omega'_n f(a) - \omega'_0 f(a) + \omega'_{n+1} f(a-\Delta x) - \omega'_1 f(a-\Delta x) + \\ &+ \omega'_{n+2} f(a-2\Delta x) - \omega'_2 f(a-2\Delta x) + \omega'_{n+3} f(a-3\Delta x) - \omega'_3 f(a-3\Delta x) + \dots \end{aligned} \right]. \quad (5.13)$$

La expresión anterior la podemos escribir de manera más compacta de tal forma que queda resumida de la siguiente forma:

$${}^{\alpha}I_a^b f(x) = F^{\alpha}(b) - F^{\alpha}(a) = \Delta x^{\alpha} \cdot \overline{W}' \cdot \overline{f}. \quad (5.14)$$

donde:

$$\overline{W}' = (\dots \ w_b \ w_{b-1} \ \dots \ w_{n+1} \ w_n \ \dots \ w_1 \ w_0)', \quad (5.15)$$

$$\overline{f} = (\dots \ f(0) \ f(\Delta x) \ \dots \ f(a-\Delta x) \ f(a) \ \dots \ f(b-\Delta x) \ f(b))' \quad (5.16)$$

con  $w_j = \omega'_j - \omega'_{j-n}$ ;  $n = b - a$ ; y  $\omega'_k = (-1)^k \binom{-\alpha}{k}$ ,  $\omega'_k = 0, \forall k < 0$ .

Por tanto, utilizando la expresión (5.14), junto con las expresiones (5.15) y (5.16) tenemos el primer método de evaluación numérica de la integral definida fraccionaria.

Por motivos de simplicidad en la notación y sin pérdida de generalidad,  $a$  y  $b$  han sido elegidos de tal forma que sean múltiplos del periodo de muestreo del sistema o paso de integración  $\Delta x$ .

Por otro lado, siguiendo una segunda vía, podemos encontrar otra forma de evaluación numérica de la expresión (5.8) mediante una evaluación directa del operador fraccionario  $D^{1-\alpha}$  de dicha expresión, usando para ello la definición de Grünwald – Letnikov (3.4):

$$\int_a^b D^{1-\alpha} f(x) dx = \int_a^b \left[ \Delta x^{\alpha-1} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{1-\alpha}{i} f(x-i\Delta x) \right] dx. \quad (5.17)$$

Esta expresión puede ser expandida de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \int_a^b D^{1-\alpha} f(x) dx = \Delta x^{\alpha-1} & \left[ \int_a^b (-1)^0 \binom{1-\alpha}{0} f(x) dx + \int_a^b (-1)^1 \binom{1-\alpha}{1} f(x-\Delta x) dx + \right. \\ & \left. + \int_a^b (-1)^2 \binom{1-\alpha}{2} f(x-2\Delta x) dx + \dots \right]. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Usando la siguiente definición para  $\omega_k$

$$\omega_k \equiv (-1)^k \binom{1-\alpha}{k}, \quad (5.19)$$

podemos escribir,

$$\begin{aligned} \int_a^b D^{1-\alpha} f(x) dx = \Delta x^{\alpha-1} & \left[ \int_a^b \omega_0 f(x) dx + \int_a^b \omega_1 f(x-\Delta x) dx + \right. \\ & \left. + \int_a^b \omega_2 f(x-2\Delta x) dx + \int_a^b \omega_3 f(x-3\Delta x) dx + \dots \right]. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Esta última expresión es una suma de infinitos términos, que son integrales enteras definidas con la expresión  $\omega_p \int_a^b f(x-p\Delta x) dx$ . Estas integrales pueden ser evaluadas de la siguiente forma:

$$\omega_p \int_a^b f(x-p\Delta x) dx = \omega_p [F_p(b) - F_p(a)], \quad (5.21)$$

## 5. Integral definida fraccionaria

---

donde  $F_p$  es una función primitiva de  $f(x - p\Delta x)$ .

La expresión (5.21) puede ser expandida, de nuevo, usando la definición de Grünwald – Letnikov:

$$\omega_p \int_a^b f(x - p\Delta x) dx = \omega_p \left[ \left( \Delta x \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{-1}{i} f(b - (i + p)\Delta x) \right) - \left( \Delta x \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{-1}{i} f(a - (i + p)\Delta x) \right) \right]. \quad (5.22)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\binom{-1}{i} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \text{par} \\ -1 & \text{si } i = \text{impar} \end{cases} \quad (5.23)$$

$$(-1)^i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \text{par} \\ -1 & \text{si } i = \text{impar} \end{cases}$$

y

$$\omega_k = 0, \quad \forall k < 0, \quad (5.24)$$

podemos evaluar la expresión (5.22) para cada valor diferente de  $p$ :

- $p = 0$ :

$$\omega_0 \int_a^b f(x) dx = \omega_0 \Delta x [f(b) - f(a) + f(b - \Delta x) - f(a - \Delta x) + f(b - 2\Delta x) - f(a - 2\Delta x) + \dots]. \quad (5.25)$$

- $p = 1$ :

$$\omega_1 \int_a^b f(x - \Delta x) dx = \omega_1 \Delta x [f(b - \Delta x) - f(a - \Delta x) + f(b - 2\Delta x) - f(a - 2\Delta x) + f(b - 3\Delta x) - f(a - 3\Delta x) + \dots]. \quad (5.26)$$

- $p = 2$ :

$$\omega_2 \int_a^b f(x - 2\Delta x) dx = \omega_2 \Delta x [f(b - 2\Delta x) - f(a - 2\Delta x) + f(b - 3\Delta x) - f(a - 3\Delta x) + f(b - 4\Delta x) - f(a - 4\Delta x) + \dots]. \quad (5.27)$$

...

- $p = p$ :

$$\omega_p \int_a^b f(x - p\Delta x) dx = \omega_p \Delta x [f(b - p\Delta x) - f(a - p\Delta x) + f(b - (1+p)\Delta x) - f(a - (1+p)\Delta x) + f(b - (2+p)\Delta x) - f(a - (2+p)\Delta x) + \dots] \quad (5.28)$$

Es importante destacar que todos los términos de las expresiones previas están desplazados un periodo de muestreo con respecto a la anterior. Por ejemplo, cuando  $p = 0$  el primer término de la sucesión es  $f(b)$ , cuando  $p = 1$  el primer término de la sucesión es  $f(b - \Delta x)$ , etc.

Sustituyendo en (5.20) y sumando término a término:

$$\int_a^b D^{1-\alpha} f(x) dx = \Delta x^{\alpha-1} \Delta x \left[ \begin{array}{l} \omega_0 f(b) + \omega_0 f(b - \Delta x) + \dots + (\omega_0 - \omega_0) f(a) + \dots + (\omega_0 - \omega_0) f(0) + \dots \\ \quad + \omega_1 f(b - \Delta x) + \dots + (\omega_1 - \omega_1) f(a) + \dots + (\omega_1 - \omega_1) f(0) + \dots \\ \quad \quad \quad \dots \\ \quad \quad \quad \quad + \omega_n f(a) + \dots + (\omega_n - \omega_n) f(0) + \dots \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \dots \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + \omega_b f(0) + \dots \end{array} \right] \quad (5.29)$$

Operando y ordenando, la expresión (5.29) puede ser resumida de la siguiente forma:

$$\int_a^b D^{1-\alpha} f(x) dx = \Delta x^\alpha \cdot \bar{k}' \cdot \bar{f}, \quad (5.30)$$

donde

$$\bar{f} = (\dots, f(-\Delta x), f(0), f(\Delta x), \dots, f(a - \Delta x), f(a), \dots, f(b - \Delta x), f(b))' \quad (5.31)$$

$$\bar{k} = (\dots, \omega_{B+1} + \omega_B + \dots + \omega_{B-n+2}, \omega_B + \omega_{B-1} + \dots + \omega_{B-n+1}, \omega_{B-1} + \omega_{B-2} + \dots + \omega_{B-n}, \dots, \omega_{n+1} + \omega_n + \dots + \omega_2, \omega_n + \omega_{n-1} + \dots + \omega_1, \dots, \omega_1 + \omega_0, \omega_0)' , \quad (5.32)$$

$$A = a/\Delta x, \quad B = b/\Delta x, \quad n = B - A . \quad (5.33)$$

Es importante destacar que las expresiones (5.14) y (5.30) tienen un número infinito de términos, memoria infinita, ya que tanto  $\bar{f}$  como  $\bar{k}$  y  $\bar{W}$  tienen un número de términos infinitos. Teóricamente,  $f(-\infty)$  debería ser evaluada. Sin embargo, en la práctica, y debido al principio de memoria corta (Podlubny, 1999c), sólo un número finito de términos es necesario.

Aunque las expresiones vectoriales (5.15) y (5.32) son diferentes, conducen al mismo resultado numérico debido a las propiedades de la función gamma, lo cual es lógico ya que el resultado de ambas expresiones debe ser el mismo, como veremos en un ejemplo posterior.

### 5.2.1. Ejemplos de aplicación

A continuación se presentan una serie de ejemplos cuyo objetivo es ilustrar los métodos de evaluación numérica propuestos anteriormente. En un primer ejemplo, evaluaremos numéricamente el valor de la integral definida fraccionaria de una función siguiendo las dos vías comentadas anteriormente. Seguidamente se presentará otro ejemplo donde evaluaremos numéricamente una función genérica  $f(x)$  utilizando la segunda vía de evaluación de la integral definida fraccionaria, comprobando que para el caso entero de  $\alpha = 1$  obtenemos el conocido resultado de la fórmula de Euler para integración entera.

**Ejemplo 1.** Supongamos que queremos calcular el valor de la integral definida de la expresión (5.34) para un periodo de muestreo  $\Delta t = 1$ .

$${}^{0.8}I_1^4 f(x) = \int_1^4 D^{1-0.8} f(x) dx = F^{0.8}(4) - F^{0.8}(1). \quad (5.34)$$

Podemos calcular el vector de la expresión a la izquierda del igual con ayuda de la fórmula (5.14) obteniendo:  $\bar{W}\Delta x^\alpha = (\dots -0.3280 \ 0.72 \ 0.8 \ 1)'$ , o bien podemos calcular el vector de la expresión a la derecha del igual con ayuda de la fórmula (5.30) obteniendo:  $\bar{k}\Delta x^\alpha = (\dots -0.3280 \ 0.72 \ 0.8 \ 1)'$  Como podemos comprobar por ambos lados obtenemos el mismo resultado, así pues, se puede utilizar cualquiera de las expresiones anteriores para evaluar numéricamente la

expresión (5.34). Aunque se recomienda utilizar la expresión (5.14) por tener una formulación más compacta.

**Ejemplo 2.** Supongamos que queremos hacer la evaluación discreta de

$\int_{2\Delta x}^{5\Delta x} D^{1-\alpha} f(x) dx$ . Mediante la definición de Grünwald – Letnikov obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_{2\Delta x}^{5\Delta x} D^{1-\alpha} f(x) dx &= \Delta x^{-\alpha} \left[ \int_{2\Delta x}^{5\Delta x} \omega_0 f(x) dx + \int_{2\Delta x}^{5\Delta x} \omega_1 f(x - \Delta x) dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{2\Delta x}^{5\Delta x} \omega_2 f(x - 2\Delta x) dx + \int_{2\Delta x}^{5\Delta x} \omega_3 f(x - 3\Delta x) dx + \dots \right] \quad (5.35) \\ &= \Delta x^{-\alpha} [I_0 + I_1 + I_2 + I_3 + \dots] . \end{aligned}$$

Cada integral definida  $I_j$  puede ser evaluada de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} I_0 &= \omega_0 \int_{2\Delta x}^{5\Delta x} f(x) dx = \omega_0 [F(5\Delta x) - F(2\Delta x)] \\ &= \omega_0 \Delta x [f(5\Delta x) + f(4\Delta x) + f(3\Delta x) + f(2\Delta x) + f(\Delta x) + f(0) + f(-\Delta x) + \dots - \\ &\quad - f(2\Delta x) - f(\Delta x) - f(0) - f(-\Delta x) - f(-2\Delta x) - f(-3\Delta x) - f(-4\Delta x) - \dots] \quad (5.36) \\ &= \omega_0 \Delta x [f(5\Delta x) + f(4\Delta x) + f(3\Delta x)] . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \omega_1 \int_{2\Delta x}^{5\Delta x} f(x - \Delta x) dx = \omega_1 [F(4\Delta x) - F(\Delta x)] \\ &= \omega_1 \Delta x [f(4\Delta x) + f(3\Delta x) + f(2\Delta x) + f(\Delta x) + f(0) + f(-\Delta x) + f(-2\Delta x) + \dots - \\ &\quad - f(\Delta x) - f(0) - f(-\Delta x) - f(-2\Delta x) - f(-3\Delta x) - f(-4\Delta x) - f(-5\Delta x) - \dots] \quad (5.37) \\ &= \omega_1 \Delta x [f(4\Delta x) + f(3\Delta x) + f(2\Delta x)] . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \omega_2 \int_{2\Delta x}^{5\Delta x} f(x - 2\Delta x) dx = \omega_2 [F(3\Delta x) - F(0)] \\ &= \omega_2 \Delta x [f(3\Delta x) + f(2\Delta x) + f(\Delta x) + f(0) + f(-\Delta x) + f(-2\Delta x) + f(-3\Delta x) + \dots - \\ &\quad - f(0) - f(-\Delta x) - f(-2\Delta x) - f(-3\Delta x) - f(-4\Delta x) - f(-5\Delta x) - f(-6\Delta x) - \dots] \\ &= \omega_2 \Delta x [f(3\Delta x) + f(2\Delta x) + f(\Delta x)] . \quad (5.38) \end{aligned}$$

...

## 5. Integral definida fraccionaria

---

$$\begin{aligned}
 I_n &= \omega_n \int_{2\Delta x}^{5\Delta x} f(x-n\Delta x)dx = \omega_2 [F((5-n)\Delta x) - F((2-n)\Delta x)] \\
 &= \omega_n \Delta x [f((5-n)\Delta x) + f((5-n-1)\Delta x) + f((5-n-2)\Delta x) + f((5-n-3)\Delta x) + \dots - \\
 &\quad - f((2-n)\Delta x) + f((2-n-1)\Delta x) + f((2-n-2)\Delta x) + f((2-n-3)\Delta x) - \dots] \\
 &= \omega_n \Delta x [f((5-n)\Delta x) + f((4-n)\Delta x) + f((3-n)\Delta x)] .
 \end{aligned} \tag{5.39}$$

La serie anterior de integrales definidas puede simplificarse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \int_{2\Delta x}^{5\Delta x} D^{1-\alpha} f(x)dx &= \Delta x^\alpha \sum_0^\infty I_n = \Delta x^\alpha (\dots \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \quad \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 \quad \omega_0 + \omega_1 \quad \omega_0) \cdot \\
 &\quad \cdot (\dots f(2\Delta x) \quad f(3\Delta x) \quad f(4\Delta x) \quad f(5\Delta x))' .
 \end{aligned} \tag{5.40}$$

De esta forma obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \int_{2\Delta x}^{5\Delta x} D^{1-\alpha} f(x)dx &= \Delta x^\alpha \sum_0^\infty I_n = \Delta x^\alpha (\dots \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \quad \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 \quad \omega_0 + \omega_1 \quad \omega_0) \cdot \\
 &\quad \cdot (\dots f(2\Delta x) \quad f(3\Delta x) \quad f(4\Delta x) \quad f(5\Delta x))' .
 \end{aligned} \tag{5.41}$$

Esta expresión (5.41) se ha obtenido desarrollando completamente la expresión de la integral definida para este caso, aunque se podría haber obtenido el mismo resultado aplicando las expresiones (5.14) y (5.30), indistintamente.

Vamos a considerar dos casos extremos:

- $\alpha = 0$ :

$$\begin{aligned}
 \int_{2\Delta x}^{5\Delta x} D^1 f(x)dx &= \Delta x^0 (\dots 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 1) \cdot \\
 &\quad \cdot (\dots f(0) \quad f(\Delta x) \quad f(2\Delta x) \quad f(3\Delta x) \quad f(4\Delta x) \quad f(5\Delta x))' .
 \end{aligned} \tag{5.42}$$

$$\int_{2\Delta x}^{5\Delta x} D^1 f(x)dx = f(5\Delta x) - f(2\Delta x) . \tag{5.43}$$

- $\alpha = 1$ :

$$\begin{aligned}
 \int_{2\Delta x}^{5\Delta x} D^0 f(x)dx &= \Delta x^1 (\dots 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1) \cdot \\
 &\quad \cdot (\dots f(0) \quad f(\Delta x) \quad f(2\Delta x) \quad f(3\Delta x) \quad f(4\Delta x) \quad f(5\Delta x))' .
 \end{aligned} \tag{5.44}$$

$$\int_{2\Delta x}^{5\Delta x} D^0 f(x) dx = \Delta x [f(3\Delta x) + f(4\Delta x) + f(5\Delta x)] , \quad (5.45)$$

esta última expresión es la conocida fórmula de la aproximación de Euler para calcular la integral definida mediante la suma de las áreas de los rectángulos, como se muestra en la Fig 5.1.

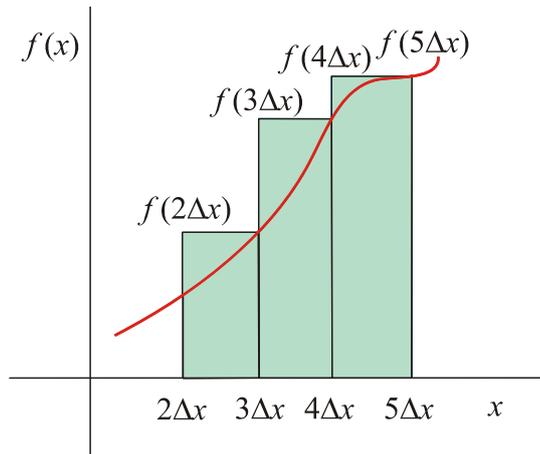


Fig 5.1 Integral definida usando la formula de Euler.

### 5.3. Principales propiedades

La integral definida fraccionaria comparte muchas propiedades con la integral definida de orden entero. En general, las propiedades relacionadas con la linealidad de la integral definida se mantienen en el caso fraccionario. En la Tabla 5.1 se resumen algunas de ellas, teniendo en cuenta  $\forall k, l \in \mathbb{R}$  y  $a \leq b \in \mathbb{R}$ :

Tabla 5.1 Propiedades de la integral definida fraccionaria.

${}^{\alpha}I_a^b [kf(x)] = k \cdot {}^{\alpha}I_a^b f(x)$
${}^{\alpha}I_a^b [f(x) + g(x)] = {}^{\alpha}I_a^b f(x) + {}^{\alpha}I_a^b g(x)$
${}^{\alpha}I_a^b [kf(x) + lg(x)] = k \cdot {}^{\alpha}I_a^b f(x) + l \cdot {}^{\alpha}I_a^b g(x)$
${}^{\alpha}I_a^b f(x) = -{}^{\alpha}I_b^a f(x)$

## 5. Integral definida fraccionaria

---

Estas propiedades son consecuencia directa de la definición (5.8) y de las propiedades de las derivadas de orden fraccionario (West, *et al.*, 2003, pp 79-81). A continuación podemos ver su demostración.

$${}^{\alpha}I_a^b [kf(x)] = \int_a^b [D^{1-\alpha} kf(x)] dx = k \cdot {}^{\alpha}I_a^b f(x) \quad (5.46)$$

$$\begin{aligned} {}^{\alpha}I_a^b [f(x) + g(x)] &= \int_a^b D^{1-\alpha} [f(x) + g(x)] dx \\ &= \int_a^b D^{1-\alpha} f(x) dx + \int_a^b D^{1-\alpha} g(x) dx \\ &= {}^{\alpha}I_a^b f(x) + {}^{\alpha}I_a^b g(x). \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$\begin{aligned} {}^{\alpha}I_a^b [kf(x) + lg(x)] &= \int_a^b [D^{1-\alpha} (kf(x) + lg(x))] dx \\ &= k \cdot {}^{\alpha}I_a^b f(x) + l \cdot {}^{\alpha}I_a^b g(x). \end{aligned} \quad (5.48)$$

$$\begin{aligned} {}^{\alpha}I_a^b f(x) &= \int_a^b [D^{1-\alpha} f(x)] dx = - \int_b^a [D^{1-\alpha} f(x)] dx \\ &= - {}^{\alpha}I_b^a f(x). \end{aligned} \quad (5.49)$$

Sin embargo, no todas las propiedades de las integrales definidas de orden entero se pueden generalizar de forma tan fácil. Por ejemplo, consideremos el siguiente resultado de sobra conocido para el caso entero:

Sea  $f(x)$  una función continua en el intervalo  $[a, b]$ , tal que  $a < b$ . Si  $f(x) \geq 0$  |  $x \in [a, b]$ , entonces  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .

Esto que se cumple para el caso entero, no se cumple para el caso de un orden fraccionario por dos razones. La primera es que los operadores fraccionarios tienen una memoria infinita y, por consiguiente, las propiedades de  $f(x)$  deben ser tenidas en cuenta en todo el intervalo  $(-\infty, b]$ . La segunda razón, como veremos posteriormente, es que los coeficientes del vector de pesos que nos permite calcular la integral pueden ser negativos cuando  $\alpha < 1$ .

También destacamos que no se puede demostrar el cumplimiento del teorema del valor medio para el caso integral:  $f(c) = \frac{1}{b-a} {}^{\alpha}I_a^b f(x)$  puesto que no se puede

asegurar la existencia de  $c \in [a, b]$ , ya que para demostrar esto debe de cumplirse que:

$$mL \leq {}^{\alpha}I_a^b f(x)g(x) \leq ML \quad (5.50)$$

siendo  $m$  y  $M$  el ínfimo y el supremo finito, respectivamente, de la función  $f(x)$  dentro del intervalo  $[a, b]$ , y  $L = {}^{\alpha}I_a^b g(x)$ .

Como no podemos demostrar que  $L > 0, \forall x \in [a, b]$ , ya que los coeficientes del vector de pesos que nos permite calcular la integral pueden ser negativos cuando  $\alpha < 1$ . Entonces no podemos demostrar el cumplimiento del teorema del valor medio, ya que este requiere de la validez de esta demostración previa para su demostración.

## 5.4. Conclusiones

En este capítulo se ha generalizado el concepto de integral definida de tal forma que abarque el caso de un orden de integración real. Además, también se ha generalizado la conocida regla de Barrow para el caso fraccionario.

Las propiedades más importantes de esta nueva integral definida de orden fraccionario han sido estudiadas. También se ha mostrado cómo debido a la posibilidad de un orden de integración menor que uno (aparecen términos negativos en la secuencia de pesos para calcular el valor discreto de la integral), y debido a la memoria infinita que presentan los operadores fraccionarios, algunas propiedades que se cumplían en el caso de órdenes enteros, dejan de hacerlo cuando generalizamos a orden real. Aunque en todo momento, y para cualquier orden de integración, se ha demostrado que las propiedades de linealidad del operador se siguen cumpliendo.

Por otro lado, se han propuesto dos métodos de evaluación numérica de esta integral de orden fraccionario, presentado dos ejemplos cuyo objetivo ha sido ilustrarlos.

En el próximo capítulo se utilizarán estos resultados para generalizar el controlador predictivo GPC a un nuevo tipo de controlador predictivo fraccionario, mediante la redefinición de su función de coste. Por otro lado, no se escapa a nuestra

## 5. Integral definida fraccionaria

---

atención que estas integrales definidas de orden fraccionario pueden ser usadas para definir funciones de coste en diversos campos de ingeniería. En el anexo III de esta Tesis podemos encontrar un ejemplo de ello, donde se propone una función de coste usando este tipo de operadores para el diseño de un filtro IIR.

# Capítulo 6

## Control Predictivo Generalizado Fraccionario (FGPC)

Continuando con la dinámica de aunar en un mismo sistema el control predictivo y el cálculo fraccionario, en este capítulo se propone un nuevo controlador que incluya explícitamente en su definición los operadores fraccionarios. Concretamente, se utilizará el operador integral definida fraccionaria,  ${}^{\nu}I_a^b$ , el cual ha sido introducido y estudiado en el capítulo anterior.

Este nuevo controlador tiene su base en el controlador predictivo GPC, el cual es generalizado usando el operador integral definida fraccionaria para redefinir su **función de coste**. Es decir, se actuará sobre el bloque optimizador, como podemos observar en la Fig 6.1.

El controlador recibe el nombre en inglés de *Fractional–Order Generalized Predictive Control*, cuya sigla es FGPC, el cual amplía la definición del control predictivo en general y la del GPC en particular dentro del ámbito del control fraccionario (Romero *et al.*, 2008a, 2009b).

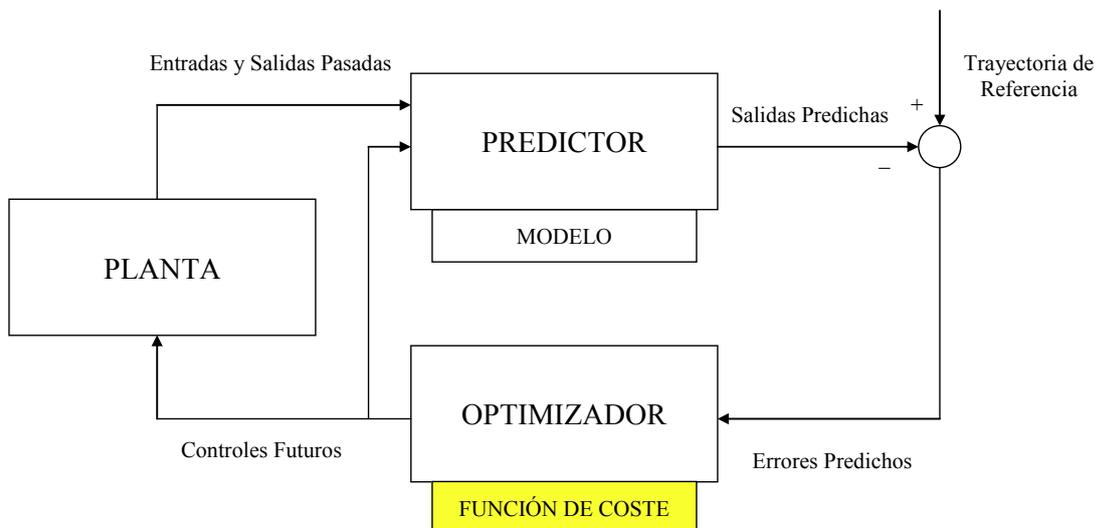


Fig 6.1 Diagrama de bloques simplificado de un sistema de control predictivo.

En cuanto a la planta a controlar, ésta puede ser descrita tanto por ecuaciones dinámicas enteras, como por fraccionarias. En este último caso, para obtener el modelo de la misma, bastará tomar una aproximación discreta de la planta fraccionaria usando uno de los métodos discretos para aproximar que vimos en el capítulo 3.

Desde el punto de vista de la estabilidad y para estudiar la robustez de este nuevo controlador, se proponen dos técnicas de análisis. Por un lado, atendiendo a criterios de margen de ganancia y de fase y, por otro lado, mediante el uso de las funciones de sensibilidad. En capítulos anteriores pudimos estudiar la validez del criterio de Nyquist para el estudio de estabilidad y robustez en sistemas fraccionarios.

Para finalizar, se propone un método de sintonía de este controlador basado en unos criterios de optimización, de forma que se obtenga un rendimiento lo más cercano posible a unas especificaciones de diseño.

### 6.1. Definición de FGPC: Generalización de la metodología GPC

Se define FGPC como la generalización de la metodología de control GPC, donde la función de coste a minimizar  $J$  viene dada mediante operadores fraccionarios, concretamente, se hace uso del operador integral definida fraccionaria (Romero, *et al.*, 2010b).

$$J = f\left({}^{\alpha}I_{N_1}^{N_2} [e(t)]^2, {}^{\beta}I_1^{N_u} [\Delta u(t-1)]^2\right). \quad (6.1)$$

Como podemos observar esta función de coste, al igual que la de GPC, penaliza el error  $e$ , definido como la diferencia entre las desviaciones futuras predichas y la trayectoria de referencia, y los esfuerzos de control futuros  $\Delta u$ .

Aunque podemos encontrar formulaciones de control predictivo generalizado en el tiempo continuo, cómo es el caso de el *Continuous-Time Generalized Predictive Controller* –CGPC– (Demircioğlu y Gawthrop, 1991), (Demircioğlu y Karasu, 2000), la definición de FGPC se va a realizar en el dominio discreto, en la línea de la definición del GPC original (Clarke, *et al.*, 1987a).

Para una mejor comprensión de este controlador FGPC, dividiremos su estudio en una serie de apartados: Primeramente, estudiaremos la expresión de la función de coste del controlador, así como la expresión que permite su evaluación numérica. A continuación, se procederá a la obtención de la ley de control mediante la minimización de la función de coste  $J$ . Después, presentaremos un apartado que recogerá las analogías y diferencias de ambas metodologías, GPC y FGPC. Por último, mostraremos un ejemplo de aplicación que ilustrará un método de sintonía del controlador propuesto.

### 6.1.1. Función de coste fraccionaria

Es bien sabido que la ley de control óptima para un controlador predictivo se obtiene mediante la minimización de una determinada función de coste,  $J$ , que penaliza tanto la desviación futura de los errores predichos,  $e$ , con respecto a la trayectoria de referencia,  $r$ , mediante la secuencia de pesos,  $\Gamma$ , como los esfuerzos futuros de la señal de control,  $\Delta u$ , mediante la secuencia de pesos,  $\Lambda$ .

La función de coste de FGPC sigue, como no podría ser de otra manera, los mismos principios pero añadiendo un efecto fraccionario a través del operador integral definida fraccionaria.

$$J_{FGPC}(\Delta u, t) = {}^{\alpha}I_{N_1}^{N_2} [e(t)]^2 + {}^{\beta}I_1^{N_u} [\Delta u(t-1)]^2 \quad (6.2)$$

donde, al igual que en GPC,  $N_1$  y  $N_2$  son los valores mínimo y máximo de los horizontes de predicción, respectivamente, y  $N_u$  es el horizonte de control.

Si sustituimos la expresión de la integral definida (5.8) en la expresión (6.2) obtenemos:

$$J_{FGPC}(\Delta u, t) = \int_{N_1}^{N_2} D^{1-\alpha} [r(t) - y(t)]^2 dt + \int_1^{N_u} D^{1-\beta} [\Delta u(t-1)]^2 dt; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.^1 \quad (6.3)$$

Al ser FGPC una metodología discreta, éste se describe mediante ecuaciones dinámicas discretas. Por ello, seguidamente, se describe el desarrollo matemático que nos va a permitir pasar al ámbito discreto la expresión de la función de coste de FGPC (6.3).

Observando la ecuación de la función de coste para FGPC (6.3), podemos encontrar dos operadores integral definida fraccionaria en su definición. Estos operadores pueden ser evaluados numéricamente con la expresión obtenida en el capítulo anterior fruto de la generalización de la regla de Barrow. Esta expresión se reproduce aquí, de nuevo, por motivos de comodidad para un orden de integración genérico  $\gamma$ :

$${}^{\gamma}I_a^b f(t) = \int_a^b [D^{1-\gamma} f(t)] dt = {}^{\gamma}I_a^b f(t) = F^{\gamma}(b) - F^{\gamma}(a) = \Delta t^{\gamma} \cdot \overline{W}' \cdot \overline{f}. \quad (6.4)$$

donde:

$$\overline{W} = (\dots \quad w_b \quad w_{b-1} \quad \dots \quad w_{n+1} \quad w_n \quad \dots \quad w_1 \quad w_0)', \quad (6.5)$$

$$\overline{f} = (\dots \quad f(0) \quad f(\Delta t) \quad \dots \quad f(a - \Delta t) \quad f(a) \quad \dots \quad f(b - \Delta t) \quad f(b))' \quad (6.6)$$

con  $w_j = \omega_j - \omega_{j-n}$ ;  $n = b - a$ ; y  $\omega_k = (-1)^k \binom{-\gamma}{k}$ ;  $\omega_k = 0, \forall k < 0$ .

Atendiendo al resultado obtenido en (6.4), podemos expresar la discretización de la función de coste de FGPC (6.2) de la siguiente forma:

---

<sup>1</sup> Por motivos de simplicidad en la expresión (6.3) no se ha escrito el operador expectación E, ni la notación  $|t$ .

$$J_{FGPC}(\Delta u, t) = (\Delta t^\alpha \cdot e' \cdot \Gamma \cdot e) + (\Delta t^\beta \cdot \Delta u' \cdot \Lambda \cdot \Delta u) \quad (6.7)$$

donde los parámetros  $\Gamma$  y  $\Lambda$  son los factores de peso, expresados mediante matrices cuadradas de dimensión infinita.

### 6.1.2. Obtención de la ley de control

Los valores de la ley de control  $u(t+j|t)$  deben obtenerse mediante la minimización de la función de coste anterior  $J$  (6.7). Para hacer esto, la ecuación de predicción  $y(t+k|t) = y_c(t+k|t) + y_f(t+k|t)$ , haciendo uso del modelo elegido, se sustituye en la función de coste  $J$ .

Debido a la naturaleza de los términos que forman parte de la función de coste, en lo sucesivo se va a utilizar la siguiente notación: el símbolo ( $\rightarrow$ ) representa valores futuros predichos de las variables y el símbolo ( $\leftarrow$ ) representa valores pasados de estas variables.

Así pues, para FGPC vamos a plantear todas sus variables vectoriales en términos de valores pasados y valores futuros de la siguiente manera:

- Para los vectores de esfuerzo de control y error,

$$\Delta u = \begin{bmatrix} \overleftarrow{\Delta u} \\ \overrightarrow{\Delta u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \Delta u(k-3) \\ \Delta u(k-2) \\ \Delta u(k-1) \\ \hline \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N_u-1) \end{bmatrix}; \quad e = \begin{bmatrix} \overleftarrow{e} \\ \overrightarrow{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ e(k-2) \\ e(k-1) \\ e(k) \\ \hline e(k+1) \\ e(k+2) \\ \vdots \\ e(k+N_2) \end{bmatrix}. \quad (6.8)$$



En la expresión anterior se pone de manifiesto la presencia de la memoria infinita, ya que ésta depende de un número infinito de términos pasados del error  $\underline{e}$  y del esfuerzo de control  $\underline{\Delta u}$ .

Sustituyendo las predicciones en los vectores de datos futuros, obtenemos la siguiente función de coste:

$$J_{FGPC} = \left[ \underline{\Delta u}' (G' \underline{\Gamma} G + \underline{\Lambda}) \underline{\Delta u} - 2 \underline{E}'_0 \underline{\Gamma} G \underline{\Delta u} + \underline{E}'_0 \underline{\Gamma} \underline{E}_0 \right] + \left[ \underline{e}' \underline{\Gamma} \underline{e} + \underline{\Delta u}' \underline{\Lambda} \underline{\Delta u} \right]. \quad (6.12)$$

Para el caso del controlador GPC podemos reescribir su función de coste mediante la notación anterior, quedando ésta expresada de la siguiente forma:

$$J_{GPC} = \left[ \underline{\Delta u}' (G' \underline{\Gamma} G + \underline{\Lambda}) \underline{\Delta u} - 2 \underline{E}'_0 \underline{\Gamma} G \underline{\Delta u} + \underline{E}'_0 \underline{\Gamma} \underline{E}_0 \right] \quad (6.13)$$

Si comparamos las funciones de coste de FGPC (6.12) y de GPC (6.13), observamos que ambas funciones tienen una serie de términos que dependen de los valores futuros de  $\underline{\Delta u}$  y de los pesos futuros  $\underline{\Gamma}$  y  $\underline{\Lambda}$ . No obstante, la función de coste para el controlador FGPC depende, además, de una serie de términos pasados,  $\underline{e}$  y  $\underline{\Delta u}$ .

La secuencia de controles óptimos,  $\overline{\underline{\Delta u}}^*$ , se obtiene mediante la minimización de la función de coste anterior con respecto a la variable independiente  $\underline{\Delta u}$ , así pues, la ley de control óptima vendrá dada por  $\underline{\Delta u}^*_{FGPC}(t) = \arg \min_{\underline{\Delta u}} J_{FGPC}$ .

La expresión (6.12) tiene dos tipos de términos: aquellos que dependen de los valores futuros de las variables y los que dependen de los valores pasados, como la minimización sólo depende de los valores futuros, entonces tenemos:

$$\underline{\Delta u}^*_{FGPC} \equiv \arg \min_{\underline{\Delta u}} J_{FGPC} = \arg \min_{\underline{\Delta u}} \left\{ \underline{\Delta u}' (G' \underline{\Gamma} G + \underline{\Lambda}) \underline{\Delta u} - 2 \underline{E}'_0 \underline{\Gamma} G \underline{\Delta u} + \underline{E}'_0 \underline{\Gamma} \underline{E}_0 \right\} \quad (6.14)$$

Como podemos observar en la expresión (6.14) no aparecen los términos pasados ( $\leftarrow$ ) de los vectores, ya que estos términos son independientes con respecto a la variable que hemos tomado para la optimización,  $\underline{\Delta u}$ , y por tanto, sólo afectan al valor del mínimo de  $J$  pero no a la posición del mismo. Por consiguiente, en el caso de un sistema de control con las ligaduras desactivadas, la minimización de la

función de coste anterior nos lleva a una ley de control similar a la de GPC (Clarke *et al.*, 1987a), (Camacho y Bordóns, 1995), (De Keyser, 1991).

$$\Delta u_{FGPC}^*(t) = (G' \underline{\Gamma} G + \underline{\Lambda})^{-1} G' \underline{\Gamma} \underline{E}_0 \equiv K \underline{E}_0. \quad (6.15)$$

### 6.1.3. Analogías y diferencias entre GPC y FGPC

Anteriormente hemos concluido que la formulación de FGPC comparte con la de GPC la misma ley de control óptima (6.15), aunque parten de la minimización de dos funciones de coste diferentes (6.12) y (6.13). Sin embargo, existen importantes diferencias entre ambos, las cuales comentaremos a continuación:

La primera diferencia es el número de errores predichos que son tenidos en cuenta. Si consideramos un caso genérico donde  $N_1 \neq 1$ , GPC considera los errores siguientes  $e(t+N_1), \dots, e(t+N_2)$ . Por otro lado, debido a la memoria infinita que posee la discretización de los operadores fraccionarios, FGPC siempre toma en cuenta los errores  $e(t+1), \dots, e(t+N_2)$ . Así pues, FGPC tiene en cuenta igual o más elementos que GPC.

La segunda diferencia consiste en la forma en que GPC y FGPC definen las secuencias de pesos  $\Gamma$  y  $\Lambda$ . GPC lo hace de forma explícita en su función de coste  $J_{GPC}$  (6.13). Sin embargo, FGPC define estas secuencias a través de los órdenes de integración definida fraccionaria  $\alpha$  y  $\beta$  mediante la expresión (6.5).

En GPC, por definición, las secuencias de pesos son siempre no negativas y en algunas ocasiones también son constantes. En FGPC,  $\alpha$  y  $\beta$  pueden ser vistos como unos parámetros de alto nivel que generan junto con el periodo de muestreo del sistema las secuencias de pesos no constantes  $\Gamma$  y  $\Lambda$ . Además, si  $\alpha < 1$  aparecen elementos negativos, por construcción, en  $\underline{\Gamma}$ . Lo mismo podemos afirmar para  $\underline{\Lambda}$ , donde los elementos negativos aparecen cuando  $\beta < 1$ .

La presencia de elementos negativos en las secuencias de pesos en control predictivo y, en general, en control óptimo, no es una situación usual. Sin embargo, esta situación no debe de descartarse a priori, ya que estos controladores pueden tener un buen rendimiento y, en algunos casos, maximizar criterios de robustez. (Romero *et al.*, 2008a, 2008b, 2009b, 2009c, 2010a).

Esto nos conduce a la tercera, y quizás la más importante, diferencia: GPC y FGPC no definen el mismo conjunto de controladores. La Fig 6.2 muestra la relación que existe entre ellos. Así pues, podemos afirmar la existencia de tres tipos de controladores (Romero *et al.*, 2010b):

- Tipo 1. Controladores con secuencias de pesos,  $\Gamma$  y  $\Lambda$ , imposibles de obtener usando la expresión (6.5). Estos controladores se encuadrarían dentro de los controladores GPC *puros*.
- Tipo 2. Controladores con secuencias de pesos,  $\Gamma$  y  $\Lambda$ , que se pueden obtener usando la expresión (6.5) con todos los valores de la secuencia no negativos. Estos controladores se encuadran dentro del conjunto intersección entre GPC y FGPC, ver Fig 6.2. Corresponden a órdenes de integración fraccionaria,  $\alpha$  y  $\beta$  igual o por encima de 1 ( $\geq 1$ ).
- Tipo 3. Controladores con secuencias de pesos,  $\Gamma$  y  $\Lambda$ , que se pueden obtener usando la expresión (6.5) con algunos de los valores de la secuencia negativos. Estos controladores son FGPC *puros*, es decir, sólo se pueden obtener siguiendo la generalización de la metodología propuesta anteriormente. Son controladores en los que se ha tomado uno o ambos órdenes de integración fraccionario,  $\alpha$  y/o  $\beta$ , por debajo de 1 ( $\leq 1$ ).

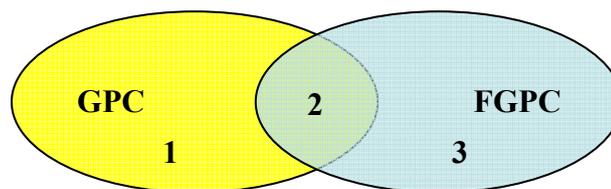


Fig 6.2 Relación GPC – FGPC.

### 6.1.4. Ejemplo de control FGPC

Para ilustrar el desarrollo teórico anterior, se propone un ejemplo práctico que consiste en controlar una planta cuya función de transferencia es la discretización de la ecuación que rige el desplazamiento lateral de un vehículo montado sobre un sistema de rail, cuyo esquema se muestra a continuación:

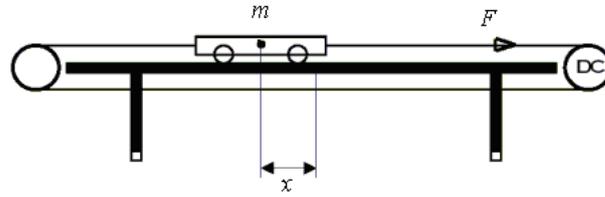


Fig 6.3 Esquema del vehículo montado sobre rail.

El modelo simplificado de la dinámica del movimiento del sistema anterior puede ser obtenido fácilmente a partir de la Fig 6.3:

$$G(s) = \frac{x(s)}{F(s)} = \frac{1/m}{s^2 + \frac{f_c}{m}s + \frac{1}{m}} \quad (6.16)$$

donde:

- $m$ : es la masa del vehículo.
- $f_c$ : es la fuerza de fricción.
- $F$ : es la fuerza de empuje.
- $x$ : es el desplazamiento lateral.

Sustituyendo valores en la expresión anterior (6.16) y discretizando con un periodo de muestreo,  $T_s = 0.01$ , obtenemos la siguiente ecuación:

$$G(z^{-1}) = \frac{x(z^{-1})}{F(z^{-1})} = \frac{0.0002376}{1 - 1.986z^{-1} + 0.9857z^{-2}} z^{-1} \quad (6.17)$$

Para la sintonía de los diferentes controladores que van a ilustrar el presente ejemplo, se han tomado los siguientes valores para los horizontes de predicción y control y para el prefiltro polinómico:

- $N_1 = 1$  (sólo un retardo, debido a la discretización).
- $N_2 = 100$  (tiempo de subida de la planta).
- $N_u = 2$  (dos polos muy cerca de la frontera del círculo unidad).
- $T(z^{-1}) = 1 - 0.9z^{-1}$ .

Suponemos que en todo momento se entiende que la expresión (6.17) describe tanto al modelo como a la planta, sin haber diferencias entre ambos.

El controlador tipo 1 ha sido ajustado con los siguientes parámetros:  $\gamma_i = 1$ ,  $\lambda_i = 10^{-6}$ .

$$\begin{cases} \Gamma_1(GPC) = \text{diag}(1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ & 1.0 & 1.0 & 1.0 & \dots) \\ \Lambda_1(GPC) = \text{diag}(10^{-6} & 10^{-6}) \end{cases} \quad (6.18)$$

(Para  $\alpha = \beta = 1$  el primer elemento de cualquier secuencia de pesos es por construcción igual a 0. Así pues, este controlador no puede entenderse como tipo 2).

El controlador tipo 2 ha sido ajustado con los siguientes parámetros:  $\alpha = 5.7$ ,  $\beta = 1.7$ .

$$\begin{cases} \Gamma_2(FGPC) = 10^{-3} \cdot \text{diag}(0.1502 & 0.1434 & 0.1369 & 0.1305 & 0.1244 \\ & 0.1186 & 0.1129 & 0.1075 & 0.1023 & \dots) \\ \Lambda_2(FGPC) = 10^{-3} \cdot \text{diag}(0.2787 & 0.3981) \end{cases} \quad (6.19)$$

Finalmente, el controlador tipo 3 ha sido ajustado con los siguientes parámetros:  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 5.0$ .

$$\begin{cases} \Gamma_3(FGPC) = \text{diag}(-0.7938 & 0.0005 & 0.0005 & 0.0005 & 0.0005 \\ & 0.0005 & 0.0006 & 0.0006 & 0.0006 & \dots) \\ \Lambda_3(FGPC) = 10^{-10} \cdot \text{diag}(4 & 1) \end{cases} \quad (6.20)$$

En la Fig 6.4 podemos observar la simulación de la evolución temporal del desplazamiento del vehículo sobre el rail con cada uno de los controladores propuestos. No sólo del tipo de controlador dependen las diferentes dinámicas sino también la robustez. El controlador tipo 1 presenta una dinámica con una buena velocidad de respuesta aunque un empuje inicial excesivamente elevado. Presenta un margen de ganancia  $MG = 5.48 \text{ dB}$  y un margen de fase  $MF = 51.83^\circ$ . El controlador tipo 2 presenta la respuesta más rápida, alcanza antes que ninguno la referencia, pero presenta sobreoscilación. Su margen de ganancia se sitúa en  $MG = 52.35 \text{ dB}$  y el de fase en  $MF = 28.59^\circ$ . Por último el controlador tipo 3, exhibe una respuesta bastante más lenta que los controladores anteriores, aunque el empuje es bastante contenido y

no presenta sobreoscilación. Su margen de ganancia es  $MG = 5.63 \text{ dB}$  y el de fase es  $MF = 54.30^\circ$

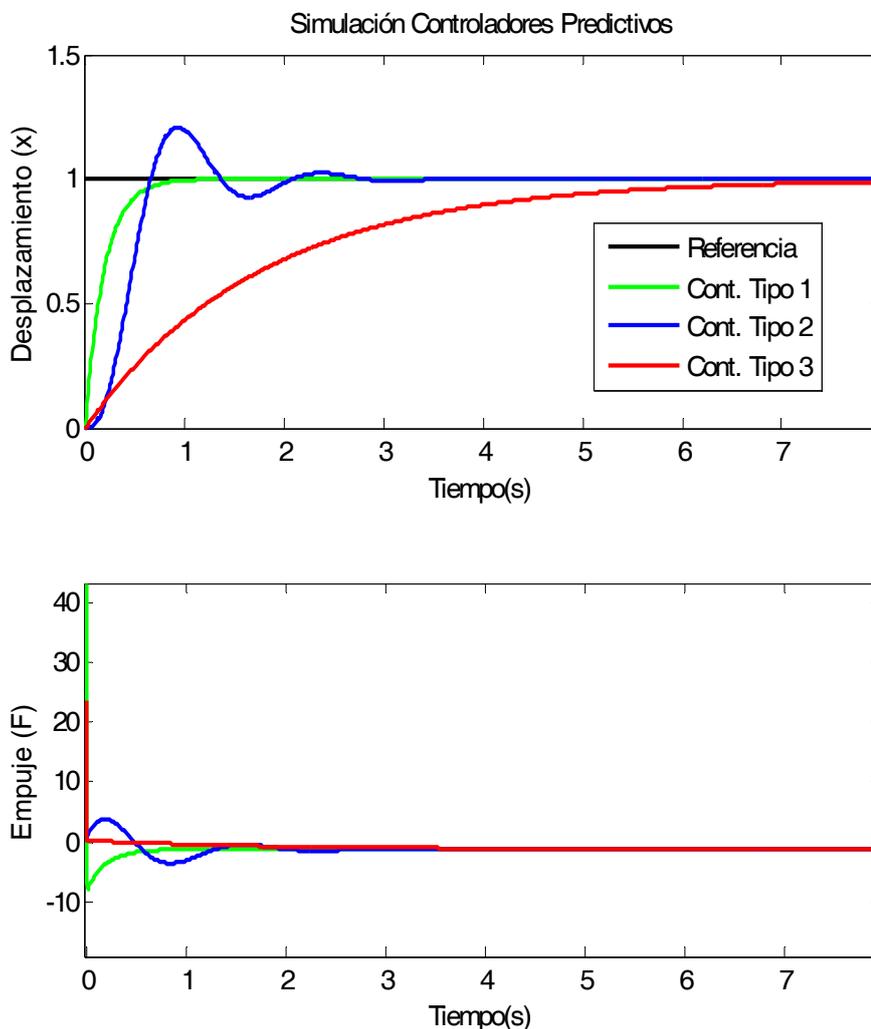


Fig 6.4 Respuesta de los 3 tipos de controladores predictivos propuestos.

Como conclusión podemos afirmar que los órdenes de diferenciación fraccionarios,  $\alpha$  y  $\beta$ , pueden ser considerados como unos parámetros de alto nivel que definen las secuencias de pesos  $\Gamma(\alpha, \Delta t)$  y  $\Lambda(\beta, \Delta t)$ . De este modo,  $\alpha$  y  $\beta$  pueden ser usados para alcanzar las especificaciones deseadas en lazo cerrado (rendimiento, robustez, etc.) de forma mucho más sencilla que intentando encontrar secuencias no constantes de  $\Gamma$  y  $\Lambda$  mediante algún método de optimización o por ensayo y error.

Nótese que para este caso particular, donde  $N_u = 2$  y  $N_2 = 10$ , tendríamos 12 coeficientes diferentes a encontrar.

## 6.2. Análisis de la robustez de un sistema controlado por FGPC

En el apartado 6.1.4 se estudiaron las respuestas temporales del proceso descrito por la función de transferencia (6.17), cuando se controla mediante controladores GPC y FGPC. Además, también se comentó la estabilidad de estos sistemas estudiando los márgenes de ganancia y fase.

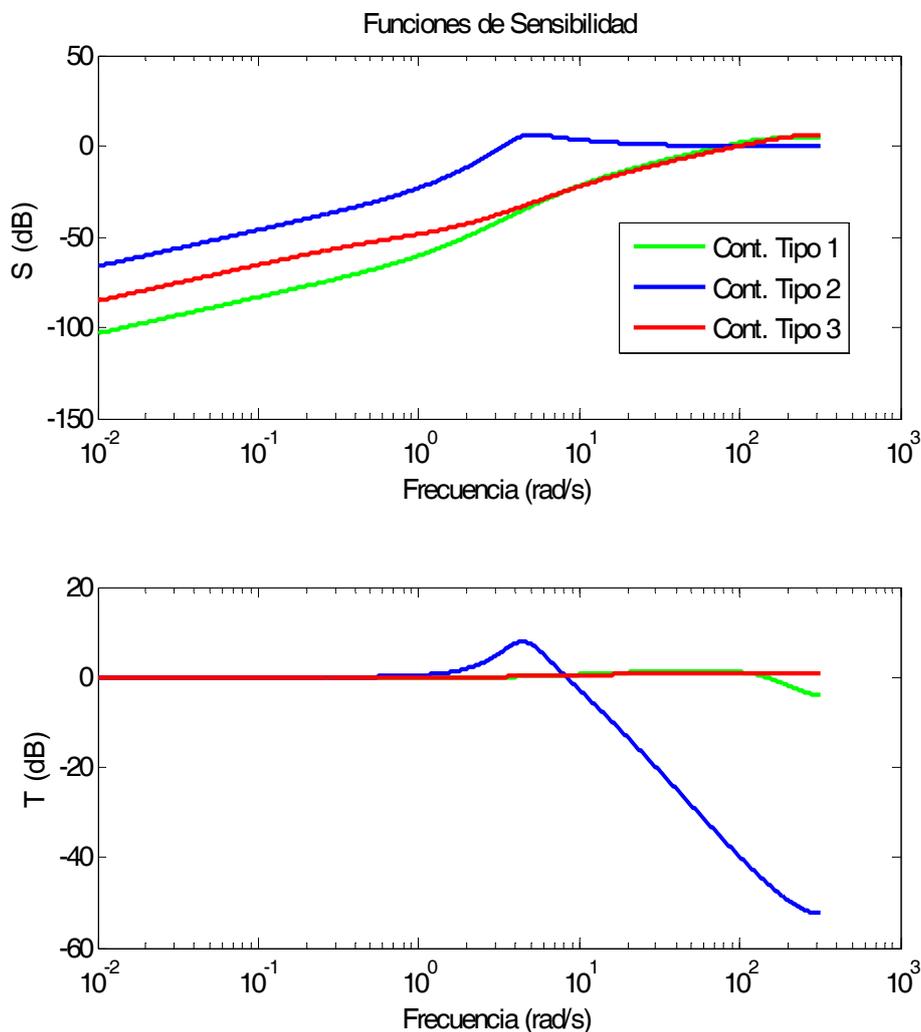


Fig 6.5 Funciones de sensibilidad  $S$  y sensibilidad complementaria  $T$ .

En este apartado se propone un análisis de la robustez de estos sistemas de control desde el punto de vista de las funciones de sensibilidad, las cuales han sido descritas en el capítulo 2 de esta Tesis (2.33) y (2.34). La Fig 6.5 recoge la morfología de estas funciones de sensibilidad,  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{T}$ , para los tres sistemas estudiados anteriormente: tipo 1, tipo 2 y tipo 3.

La función de sensibilidad,  $\mathcal{S}$ , nos muestra que el diseño usando un controlador tipo 2 nos ofrece un buen rechazo a las perturbaciones, sobre todo las de baja frecuencia. Sin embargo, podemos observar en la función de sensibilidad complementaria,  $\mathcal{T}$ , que en este sistema tenemos un margen de robustez menor, ya que obtenemos el mayor valor del pico de resonancia. Es decir, este sistema presenta una tendencia mayor a oscilar y se hace más vulnerable a los ruidos que pudieran provenir del sensor.

Para el sistema de control usando los controladores tipo 1 y tipo 3 obtenemos un mayor rechazo a las perturbaciones de baja frecuencia comparándolo con el controlador tipo 2, según nos muestra sus funciones de sensibilidad  $\mathcal{S}$ . No obstante, presenta un mayor margen de robustez al tener un menor pico de resonancia en su función de sensibilidad complementaria, aunque tampoco se atenúa apenas a altas frecuencias.

La función de sensibilidad complementaria nos muestra, además, que todos estos sistemas presentan ganancia unidad en régimen permanente. Por consiguiente, un error de posición nulo.

### 6.2.1. Influencia en la sensibilidad del polinomio $T(z^{-1})$

El uso de este prefiltro polinómico  $T(z^{-1})$  y como éste altera la ley de control nominal fue introducido en capítulos anteriores. En este epígrafe nos centraremos en dar una visión detallada del efecto que tiene este prefiltro sobre las funciones de sensibilidad.

Es importante destacar que el punto fuerte del uso de este polinomio  $T(z^{-1})$  es que puede modificar la sensibilidad del sistema o la señal de entrada sin impacto alguno en el seguimiento de la señal de referencia, siempre y cuando la planta sea igual al modelo. Por consiguiente, podemos afirmar que existe, en efecto, un diseño

en dos etapas. Una primera etapa para diseñar como va a seguir el sistema a la señal de referencia, y, posteriormente, una segunda para mejorar la sensibilidad del mismo a través del polinomio  $T(z^{-1})$  (Rossiter, 2003).

El uso de este polinomio está muy extendido entre los diferentes autores para realizar un diseño robusto de GPC (Clarke y Mohtadi, 1989). La razón principal es que éste puede ser seleccionado a partir de la intuición y la experiencia del ingeniero; ya que este filtro, junto con la ley de control incremental, actúa como un paso de banda que atenúa las altas frecuencias para disminuir el efecto de las perturbaciones de alta frecuencia y elimina las bajas frecuencias para evitar desviaciones del control (Lambert, 1987a).

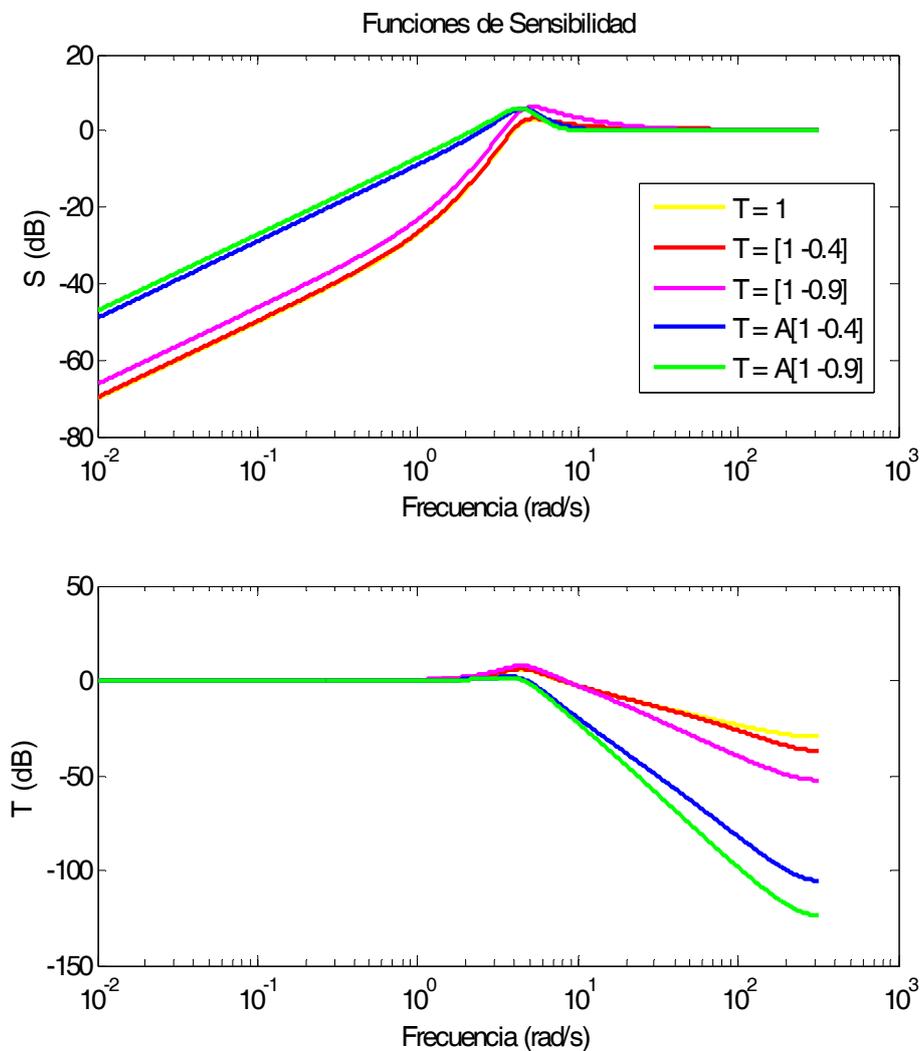


Fig 6.6 Análisis de sensibilidad del sistema variando el prefiltro  $T(z^{-1})$ .

Tomando como ejemplo el sistema definido por la planta anterior representada por el modelo cuya expresión es (6.17) y por el controlador predictivo tipo 2 (6.19), podemos observar que la influencia del polinomio  $T(z^{-1})$  sobre las funciones de sensibilidad del sistema es bastante apreciable, como se pone de manifiesto en la Fig 6.6. La función de sensibilidad,  $\mathcal{S}$ , nos muestra cómo a medida que vamos usando los distintos filtros la capacidad del sistema de bloquear las perturbaciones a baja frecuencia va disminuyendo. Los más vulnerables son aquellos que presentan mayor pico de sobreoscilación, siendo el sistema especialmente vulnerable entorno a la frecuencia de  $4 \text{ rad/s}$ .

En cambio, la función de sensibilidad complementaria,  $\mathcal{T}$ , nos informa que el sistema se hace más estable y más insensible a los efectos del ruido a alta frecuencia cuando usamos filtro, sobre todo con el último de ellos:  $T(z^{-1}) = A [1 - 0.9]$ .

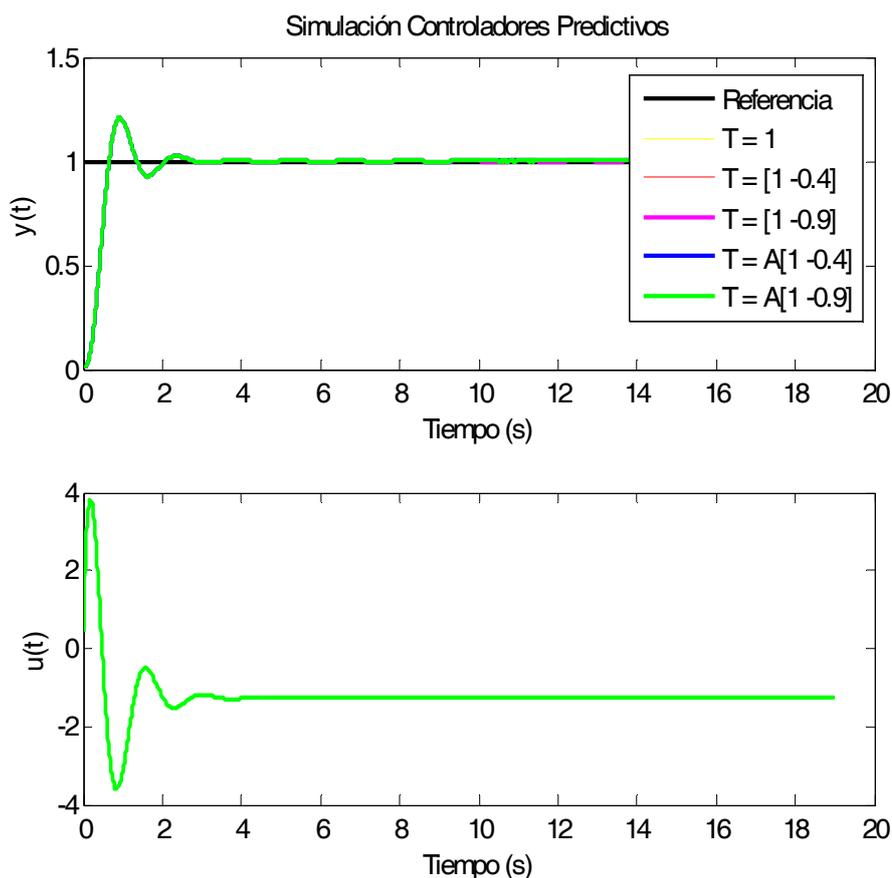


Fig 6.7 Simulación del sistema de control FGPC para varios valores de  $T(z^{-1})$ .

En la Fig 6.7 podemos observar que, efectivamente, aunque se cambie la expresión del polinomio  $T(z^{-1})$ , ni la salida del sistema, ni la señal de control se ven alteradas, ya que el filtro no afecta al comportamiento nominal del sistema como ya se comentó en el capítulo 2.

### 6.3. Método de sintonía para controladores FGPC

En este epígrafe se propone un método para sintonizar los controladores FGPC basándonos en varios criterios. Estos criterios se plantearán a través de la función de sensibilidad y la función de sensibilidad complementaria ya estudiadas. Además, también añadiremos criterios basados en los márgenes de ganancia y fase del sistema controlado.

El método de sintonía se basa en la optimización de uno o varios de estos criterios manteniendo los otros como restricciones a satisfacer. Así pues, en este caso definimos un problema de programación matemática no lineal. Como fruto de esta optimización obtendremos los parámetros de sintonía o ajuste del controlador FGPC.

Aunque en la literatura podemos encontrar al menos un ejemplo de diseño robusto para control predictivo mediante optimización de sólo uno de sus parámetros (concretamente para  $GPC^\infty$ , donde el objetivo es obtener un polinomio  $T(z^{-1})$ , el cual le confiere al sistema en lazo cerrado un comportamiento robusto frente a determinado tipo de incertidumbres (Megías, 2000)) este enfoque es novedoso ya que los controladores predictivos no se suelen sintonizar por optimización.

Existen una gran cantidad de *software* en el mercado cuyo objetivo es dar solución a estos problemas de búsqueda de óptimo global. En (Neumaier, 2004) podemos encontrar una buena relación de ellos. En nuestro caso particular, por adecuación y disponibilidad, para la obtención de la solución numérica se confiará en el paquete software *Optimization Toolbox* de MATLAB<sup>TM</sup> (2005), el cual posee una extensa colección de funciones y rutinas para la resolución de este tipo de problemas, donde se pretende alcanzar la mejor solución con el menor error posible.

### 6.3.1. Especificaciones para el diseño y formulación del problema

En todo problema de programación matemática hay que definir en primer lugar los posibles criterios a ser satisfechos. Es decir, la función matemática sujeta a optimización (minimización o maximización) y el conjunto de restricciones a satisfacer.

En nuestra propuesta para la sintonía FGPC definimos, entre otros, los siguientes (algunos de ellos ya han sido propuestos, anteriormente, para la optimización de otros controladores fraccionarios como el  $PI^\lambda D^\mu$  (Monje, 2006)):

- Margen de ganancia ( $MG$ ). Es uno de los principales indicadores de la robustez del sistema y se define como el factor por el cual la ganancia difiere de 0  $dB$  a la frecuencia para la cual la fase es de  $-180^\circ$  (Eronini, 2001).

$$MG = -20 \log \left| \frac{BS}{R\Delta A} \right|$$
$$\text{donde } \angle \left\| \frac{BS}{R\Delta A} \right\| = -180^\circ. \quad (6.21)$$

- Margen de fase ( $MF$ ). Éste es otro parámetro que sirve de criterio para medir la robustez del sistema y se define como la cantidad por la cual la fase difiere de  $-180^\circ$  a la frecuencia para la cual la ganancia es 0  $dB$ .

$$\angle \left\| \frac{BS}{R\Delta A} \right\| = -(-180^\circ)$$
$$\text{donde } -20 \log \left| \frac{BS}{R\Delta A} \right| = 0. \quad (6.22)$$

- Función de coste ( $J$ ). Como la minimización de la misma lleva a una menor desviación futura de los errores predichos, podemos utilizarla para aumentar la velocidad de respuesta del sistema y reducir la sobreoscilación.

- Rechazo a los ruidos de alta frecuencia. Para asegurarse un buen rechazo a este tipo de ruidos, normalmente provenientes del sensor, se tiene que cumplir:

$$\begin{aligned} |T(j\omega)| &\leq a \text{ dB} \\ \text{para } \omega &\geq \omega_l \text{ rad/s.} \end{aligned} \quad (6.23)$$

- Rechazo a las perturbaciones en la salida. Para asegurarse un buen rechazo la función de sensibilidad tiene que cumplir:

$$\begin{aligned} |S(j\omega)| &\leq b \text{ dB} \\ \text{para } \omega &\leq \omega_s \text{ rad/s.} \end{aligned} \quad (6.24)$$

- Robustez frente a las variaciones en la ganancia de la planta. Para asegurar este criterio, hay que tener en cuenta la siguiente restricción, como se comenta en (Chen *et al.*, 2003) y en (Monje, 2006):

$$\left[ \frac{d \left( \arg \left( \frac{BS}{R\Delta A} \right) \right)}{d\omega} \right]_{\omega=\omega_c} = 0. \quad (6.25)$$

Con esta condición se fuerza a que la fase del sistema en lazo abierto tiene que ser plana en la frecuencia de cruce,  $\omega_c$ , y ser casi constante dentro de un intervalo alrededor de ésta. Siguiendo este criterio hacemos al sistema más robusto frente a cambios en la ganancia.

Para llevar a cabo el ajuste de estos criterios disponemos de las siguientes variables independientes:  $N_1, N_2, N_u, T(z^{-1}), \alpha$  y  $\beta$ .

De forma particular en esta Tesis se va a hacer uso únicamente de los órdenes de integración fraccionaria,  $\alpha$  y  $\beta$ , ya que de esta forma podemos observar gráficamente la dependencia de los criterios anteriores con respecto a estos dos parámetros, como se mostrará en algunas de las figuras siguientes.

Las variables correspondientes a los horizontes de predicción y control sólo pueden tomar valores dentro del conjunto de los números enteros. Así pues, estamos planteando un problema de programación matemática mixta. Sin embargo, si fijamos

un valor máximo para el horizonte  $N_2$ , el problema se simplifica y es resoluble mediante la llamada iterativa a una serie de bucles anidados, dentro de cada uno de los cuales se resuelve un problema de programación matemática que depende únicamente del resto de variables independientes,  $T(z^{-1})$ ,  $\alpha$  y  $\beta$ . De manera alternativa, el polinomio  $T(z^{-1})$  se podría dejar fuera del problema de optimización, para ser ajustado a posteriori por el diseñador para eliminar el efecto de las perturbaciones de alta frecuencia.

Desde el punto de vista computacional, resolver este problema de optimización utilizando como parámetros de alto nivel los órdenes de integración  $\alpha$  y  $\beta$  para generar las secuencias de pesos  $\Gamma$  y  $\Lambda$  es computacionalmente más liviano que plantear una optimización de cada uno de los términos de estas secuencias de pesos individualmente. Por ejemplo, para el caso de un controlador con  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 10$  y  $N_u = 1$  tendríamos once variables independientes en el problema de optimización en lugar de únicamente dos.

El método aquí descrito es general y podría servir también para la sintonía mediante optimización de un GPC; de hecho, en un ejemplo posterior se planteará a modo ilustrativo.

### Uso de la función FMINCON

De entre todas las funciones disponibles en la *toolbox* de optimización de MATLAB<sup>TM</sup>, la función *fmincon* es la que mejor se ajusta a la resolución numérica del problema que aquí se plantea. A continuación se describe su sintaxis y los parámetros de ajuste que se han tomado para la optimización.

```
[parameters,error,convergente]=FMINCON('main',init_cond,[],[],  
[],[],[],[],[],'constraints',options),
```

donde :

- *main*: función a minimizar.
- *init\_cond*: valores iniciales para  $\alpha$  y  $\beta$ .
- *constraints*: función de MATLAB<sup>TM</sup> que contiene el conjunto de restricciones a satisfacer.

- *options*: estructura que contiene los parámetros de optimización, en nuestro caso he decidido dejar los que vienen por defecto.
- *parameters*: valores de  $\alpha$  y  $\beta$  óptimos.
- *error*: valor de la función objetivo para la solución óptima del problema.
- *convergence*: muestra la condición de salida del algoritmo.

Los parámetros de optimización utilizados, a través de la variable *options* son los siguientes:

- *MaxFunEvals* = 5000. Número máximo de evaluaciones de la función objetivo.
- *Tolfun* =  $10^{-10}$ . El valor máximo para la tolerancia de la función objetivo.
- *TolCon* =  $10^{-4}$ . Tolerancia máxima permitida para la violación de las restricciones.

### 6.3.2. Ejemplo de sintonía utilizando optimización

En este apartado, a modo de ejemplo, se va a realizar la sintonía de un controlador FGPC (tipo 2 o tipo 3) usando el método propuesto, para la planta presentada anteriormente cuya expresión es (6.17). También a efectos ilustrativos se va a aplicar el mismo método de sintonía a un controlador GPC puro (tipo 1) pero actuando directamente sobre la secuencia de pesos  $\Gamma$  y  $\Lambda$ , que van a ser constantes para mantener la dimensión del problema para ambos controladores en dos.

#### Mejora de la robustez del sistema

Una forma de mejorar este criterio es maximizando el margen de fase, manteniendo como restricciones unos buenos valores máximos para las funciones de sensibilidad. Además se añade un valor mínimo para el margen de ganancia para redundar en la mejora de la robustez.

Las especificaciones de diseño son las siguientes:

- Maximizar el valor del margen de fase.
- $|S(j\omega)| \leq -40dB$  para  $\omega \leq 0.1 rad/s$ .
- $|T(j\omega)| \leq 2.0dB$  para  $\omega > 1.7 rad/s$ .

Se mantendrán el valor de los horizontes:  $N_1 = 1$ ,  $N_u = 2$  y  $N_2 = 10$ .

Inicialmente optimizamos un controlador GPC (tipo 1) introduciendo como variables independientes el valor de las secuencias de pesos  $\gamma_i$  y  $\lambda_i$  (recordamos que van a ser constantes para toda la secuencia). La semilla necesaria para iniciar el algoritmo la tomaremos igual a  $(\gamma, \lambda) = (1, 10^{-6})$ , coincidiendo con las recomendaciones de Clarke *et al.* (1987a).

Terminado el proceso de optimización en MATLAB<sup>TM</sup>, después de unas cuantas iteraciones hemos obtenido como solución optima la siguiente:  $(\gamma^*, \lambda^*) = (0.1414, 0.2)$ . Esta solución nos conduce a un sistema con un margen de ganancia que tiene un valor de  $33.29 dB$  y un margen de fase que es igual a  $69.63^\circ$ .

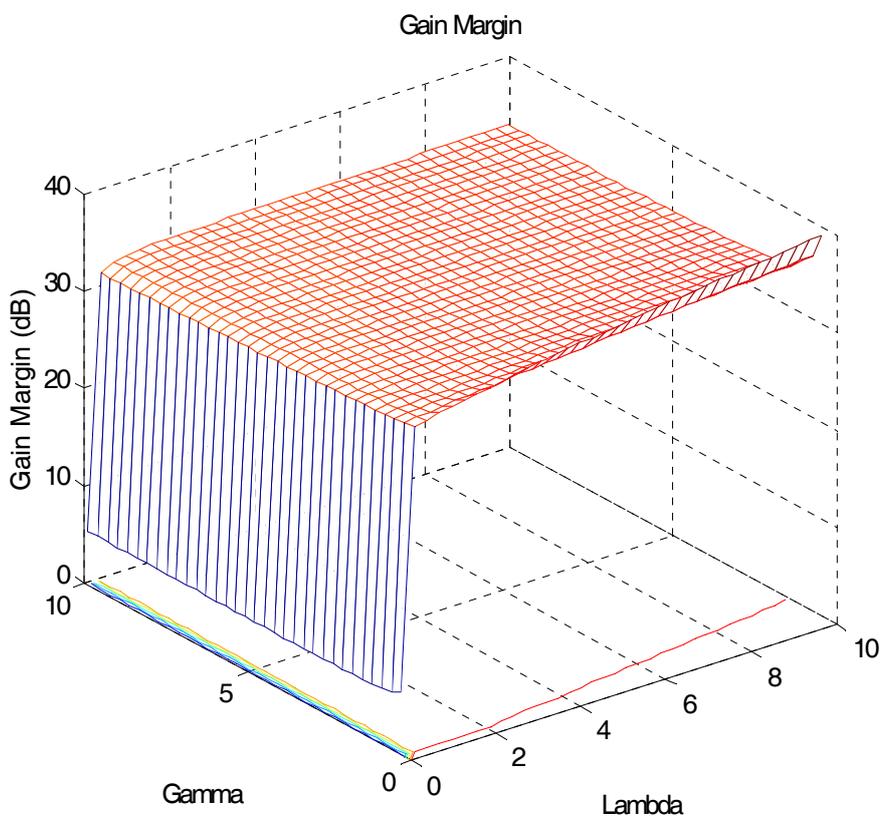


Fig 6.8 Margen de ganancia para el controlador GPC.

En la Fig 6.8 y en la Fig 6.9 podemos observar el valor de los márgenes de ganancia y fase para este sistema GPC. Es destacable la poca variación en cuanto al valor de ambas magnitudes para la mayoría de los valores de  $\gamma_i$  y  $\lambda_i$ .

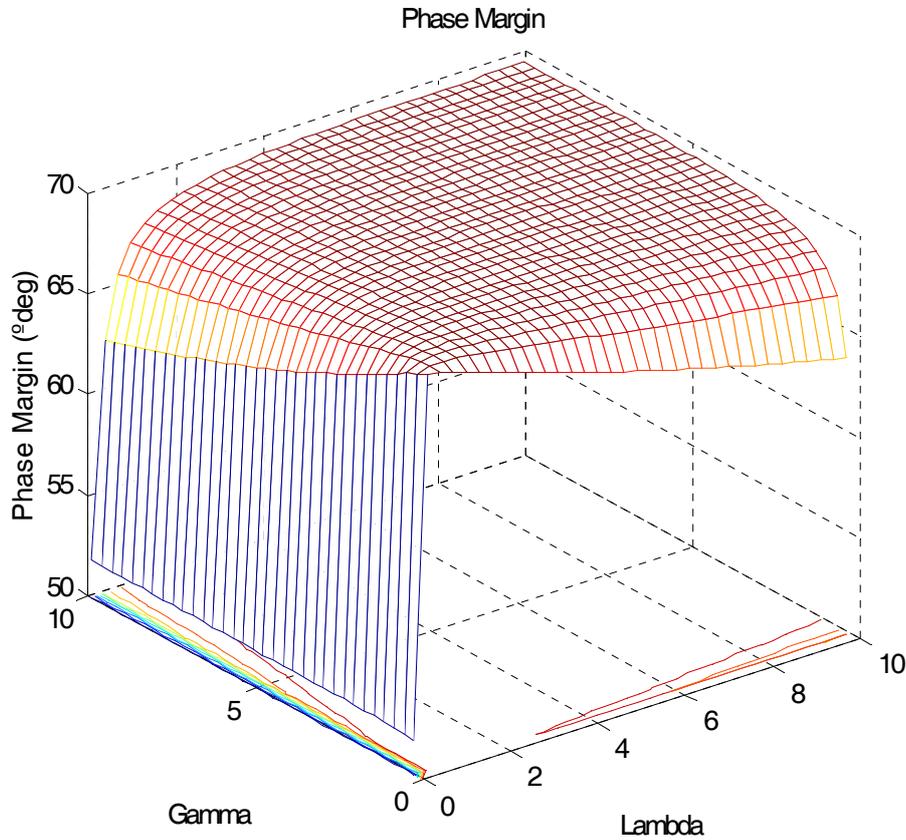


Fig 6.9 Margen de fase para el controlador GPC.

A continuación repetiremos el proceso de optimización con el objetivo de obtener un controlador FGPC (tipo 2 o tipo 3) usando como variables independientes el valor de los órdenes de integración definida fraccional  $\alpha$  y  $\beta$ . Como semilla inicial tomaremos los valores  $(\alpha, \beta) = (2.0, 2.0)$

Terminado el proceso de optimización en MATLAB<sup>TM</sup>, después de unas cuantas iteraciones hemos obtenido como solución óptima la siguiente:  $(\alpha^*, \beta^*) = (0.4351, 1.0)$ , los vectores de pesos generados tienen la expresión (6.26). Con esta solución obtenemos un sistema con un margen de ganancia igual a 24.3215 dB y un margen de fase igual a 76.5454°.

## 6. Control Predictivo Generalizado Fraccionario (FGPC)

---

$$\begin{cases} \gamma^* = \text{diag}(-0.1299 & 0.0050 & 0.0050 & 0.0050 & 0.0050 \\ & 0.0051 & 0.0051 & 0.0051 & 0.0052 \dots) \\ \lambda^* = \text{diag}(0.0000 & 0.0100) \end{cases} \quad (6.26)$$

En la Fig 6.10 y en la Fig 6.11 encontramos representados los márgenes de ganancia y fase, respectivamente, para este controlador FGPC (tipo 3).

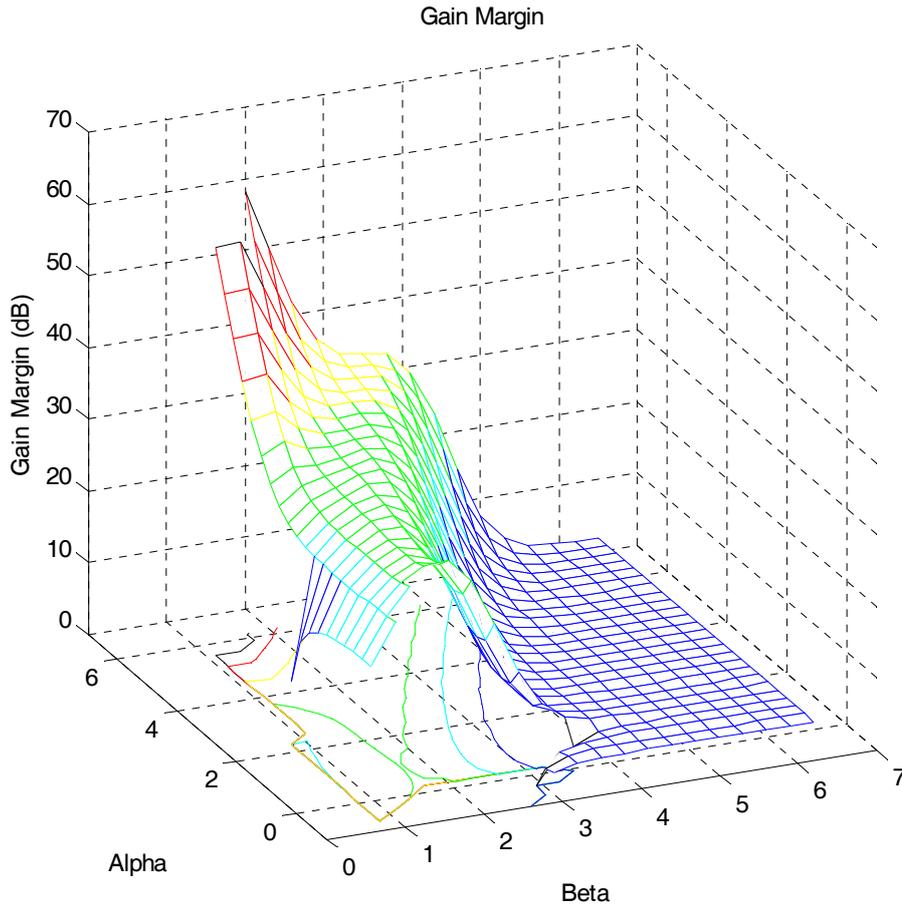


Fig 6.10 Margen de ganancia para el controlador FGPC.

Es observable que tanto el margen de ganancia como el de fase presentan una mayor variación en sus valores con respecto a la variación de las variables independientes.

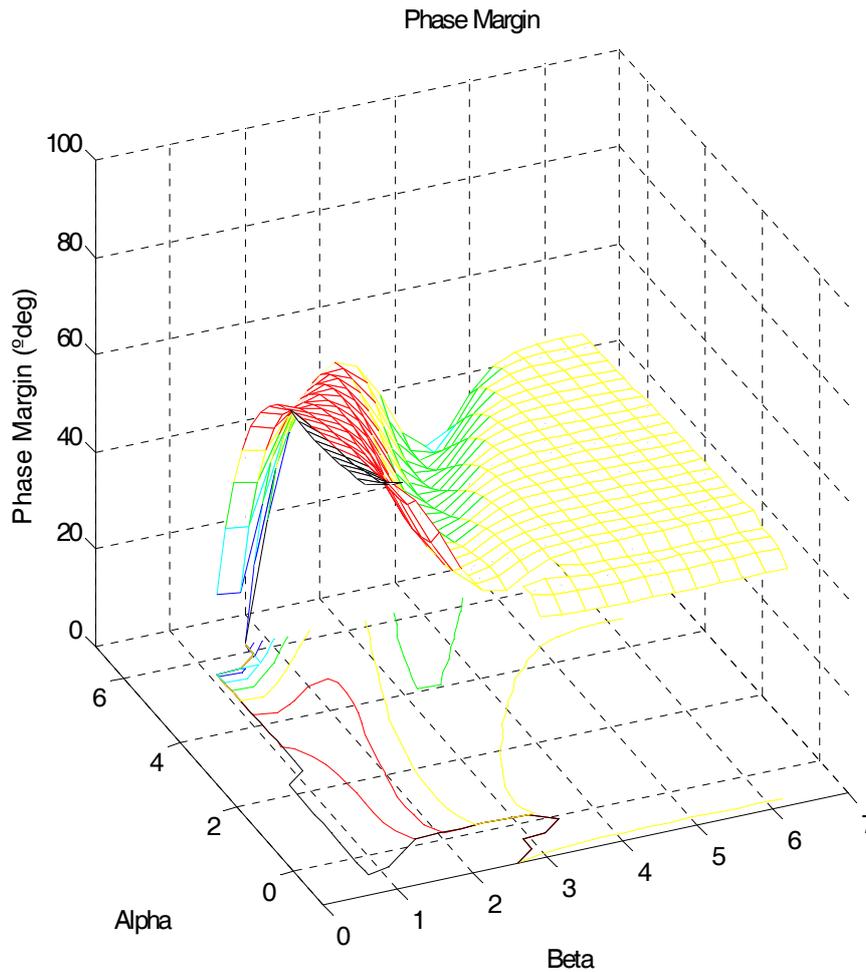


Fig 6.11 Margen de fase para el controlador FGPC.

En la Fig 6.12 se muestra la evolución temporal de estos sistemas optimizados comparándolos entre sí. A tenor de lo que nos muestra la señal de salida,  $y(t)$ , podemos afirmar que la dinámica del sistema FGPC es algo más lenta que en el caso del GPC. Esto es lógico ya que el controlador FGPC le da al sistema un mayor margen de fase, a costa de la velocidad de respuesta.

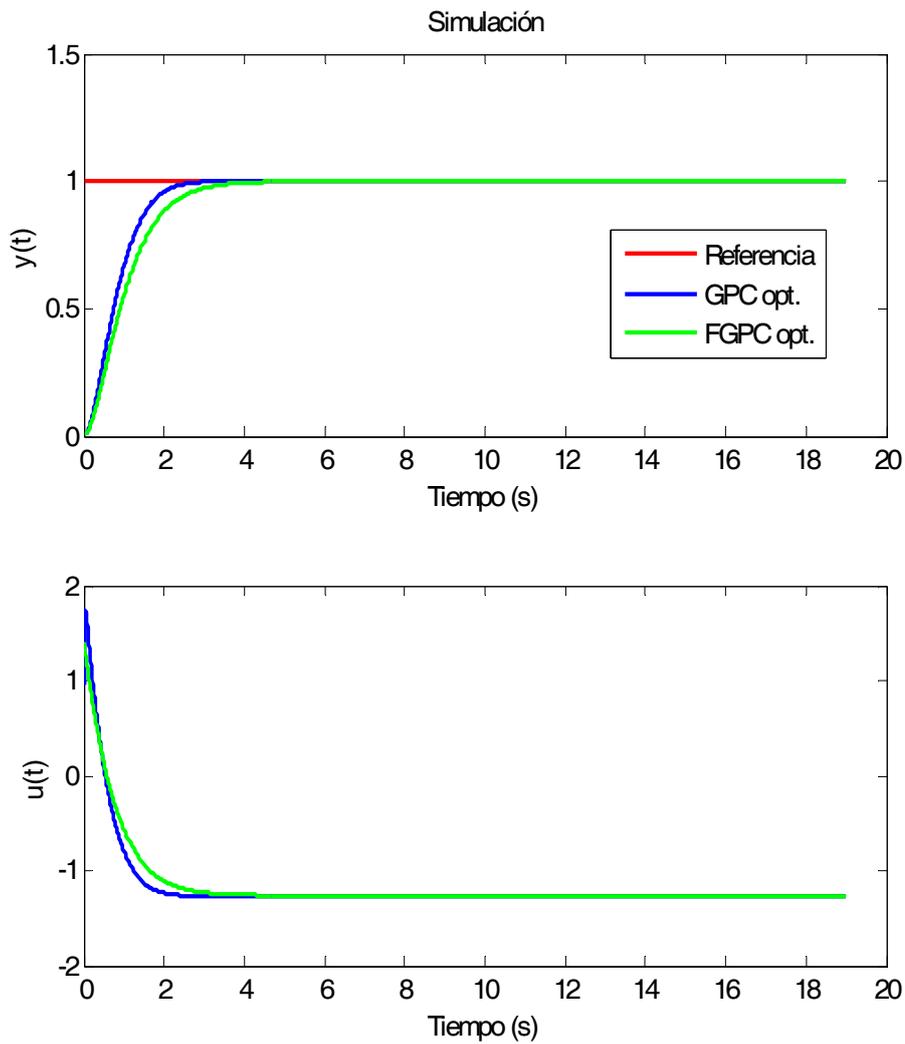


Fig 6.12 Simulación de la respuesta escalón de los sistemas optimizados GPC y FGPC.

En la Fig 6.13, la función de sensibilidad,  $\mathcal{S}$ , nos muestra que el diseño usando tanto el controlador FGPC optimizado como el GPC optimizado nos ofrece un buen rechazo a las perturbaciones de baja frecuencia. Ambos sistemas presentan una función de sensibilidad complementaria,  $\mathcal{T}$ , bastante similar. Por tanto, ambos sistemas presentan poca vulnerabilidad a los ruidos que pudieran provenir del sensor.

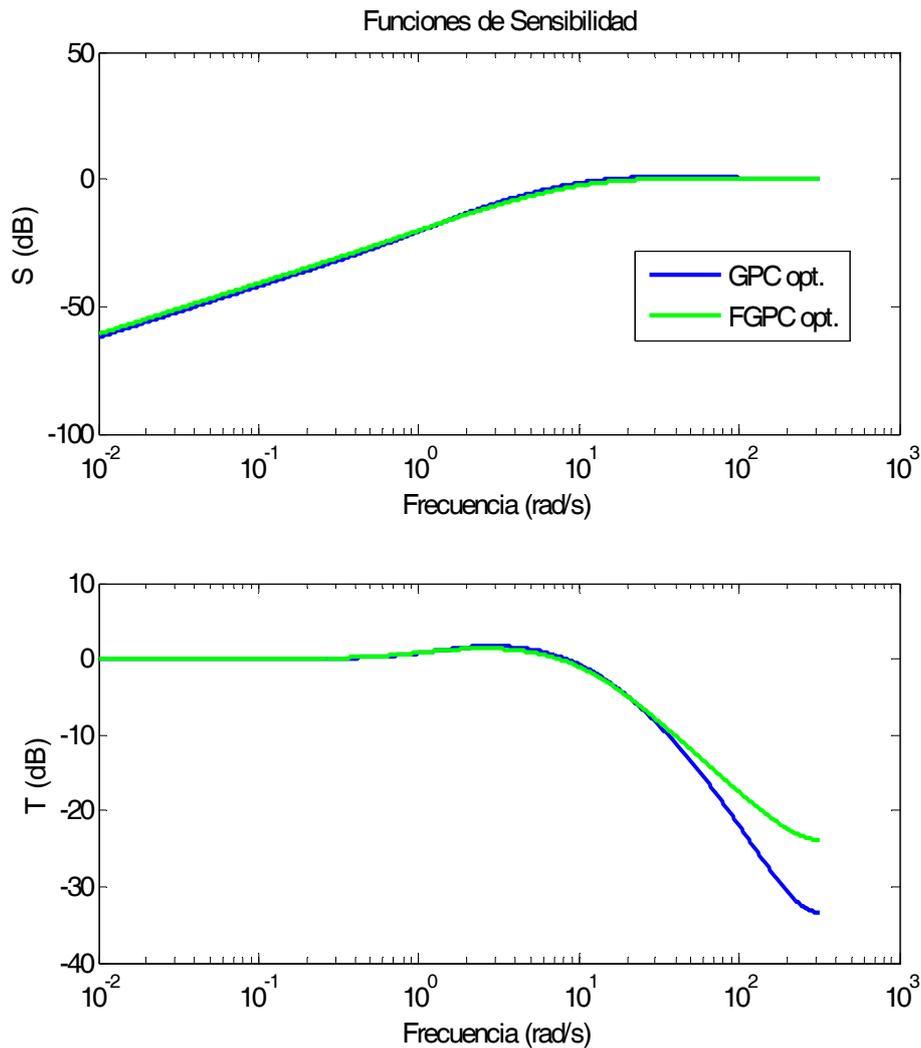


Fig 6.13 Funciones de sensibilidad  $S$  y de sensibilidad complementaria  $T$ .

## 6.4. Conclusiones

En este capítulo hemos introducido un nuevo controlador que hemos llamado Fractional-Order Generalized Predictive Control, FGPC, el cual se puede presentar como una generalización del conocido controlador predictivo GPC pero haciendo uso de una función de coste definida con operadores fraccionarios, concretamente el operador integral definida,  ${}^{\gamma}I_a^b$ . Este nuevo controlador presenta dos nuevos parámetros de ajuste,  $\alpha$  y  $\beta$ , que representan los órdenes de integración definida de los errores predichos y de los esfuerzos de control, respectivamente. Estos son usados en lugar de las clásicas secuencias de pesos de GPC,  $\Gamma$  y  $\Lambda$ .

También hemos mostrado cómo  $\alpha$  y  $\beta$  definen, junto con el periodo de muestreo del sistema  $\Delta t$ , dos secuencias de pesos que vienen dadas por dos funciones:  $\Gamma(\alpha, \Delta t)$  y  $\Lambda(\beta, \Delta t)$ . De esta forma, podemos afirmar que FGPC es una generalización del controlador GPC usando una secuencia de pesos no constantes y con posibilidad de presentar valores negativos para alguno de los mismos. De este modo, se ha mostrado que GPC y FGPC no definen el mismo conjunto de controladores.

Se ha propuesto un método de sintonía para FGPC, basado en la resolución de un problema de optimización que tiene como variables de entrada los parámetros de ajuste del controlador y como objeto satisfacer unos criterios planteados de robustez.

Estos órdenes de integración definida fraccionaria,  $\alpha$  y  $\beta$ , han sido usados como variables dentro de un proceso de optimización numérica usando el software MATLAB<sup>TM</sup>, concretamente su *toolbox* de optimización, para obtener aquel controlador que cumpla con las especificaciones de diseño.

También se han propuesto varias técnicas de análisis de la robustez de este controlador, basadas en los *clásicos* márgenes de ganancia y de fase, y mediante funciones de sensibilidad.

En el próximo capítulo utilizaremos este nuevo controlador con una serie de plantas físicas reales para ilustrar la metodología aquí presentada.

# Capítulo 7

## Resultados experimentales

En el capítulo anterior se ha presentado un extenso estudio teórico del controlador predictivo fraccionario (FGPC). También se ha descrito su formulación, estructura y un método de sintonía que permite el diseño de su comportamiento dinámico basándonos en una serie de criterios sujetos a optimización.

Este capítulo está dedicado a la aplicación de este nuevo controlador en entornos donde están involucradas plantas reales y podemos encontrar diferentes formas de conexión entre la planta y el controlador. Así pues, aquí se comprobará la validez de la formulación del controlador FGPC sometiéndolo a casos prácticos, en los cuales también se comparará con otros métodos de control como GPC o PID.

A continuación se enuncian estos casos prácticos:

- Control de un servomotor usando FGPC.
- Control de un sistema AGV (Autonomous Guided Vehicle) en red mediante FGPC.
- Control de un sistema *Smart wheel* en red mediante FGPC.

### 7.1. Control de un servomotor usando FGPC

En este apartado se presenta un primer ejemplo donde pretendemos ilustrar el método FGPC. Para ello se presenta el control de una planta servomotor utilizando

## 7. Resultados experimentales

---

un GPC convencional junto a un FGPC sintonizado para que la respuesta del sistema, en cuanto a margen de ganancia y de fase, se parezca a la obtenida con el GPC (Romero *et al.*, 2008b, 2009c).

Para ilustrar el procedimiento de diseño de los controladores se van a realizar una serie de simulaciones y test prácticos que pondrán de manifiesto el desempeño de ambos controladores tanto en el control de velocidad como en el control de posición.

A partir de los resultados podremos observar que el uso del FGPC para controlar este sistema nos permite obtener un buen rendimiento, ya que disponemos de un conjunto de controladores los cuales confieren diferentes dinámicas y robustez al sistema controlado. Así pues, podremos afirmar que con esta estrategia fraccionaria el sistema adquiere mayor flexibilidad mediante la posibilidad de ajustar los órdenes fraccionarios,  $\alpha$  y  $\beta$ , del controlador.

### 7.1.1. Descripción del sistema

Para aplicación de las estrategias de control predictivo GPC y FGPC a un sistema práctico se ha elegido la siguiente plataforma, cuyo esquema de conexión se muestra en la Fig 7.1.

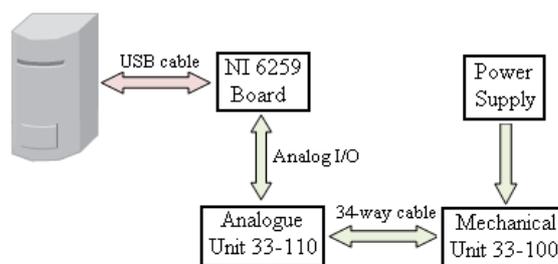


Fig 7.1 Esquema de conexión de la plataforma experimental.

Esta plataforma experimental está integrada por:

- Tarjeta de adquisición de datos: *NI DAQPad-6259* con conexión por USB de *National Instruments* (ver Fig 7.2), la cual implementa un *hardware* de adquisición de datos de altas prestaciones y rendimiento (consultar documentación del fabricante para una descripción más exhaustiva).

- Ordenador Intel®Core™2 Quad, 2.40 GHz, 2 GB RAM, donde se ejecuta la versión 7.5 (R2007b) de MATLAB™. Concretamente se hace uso de la *Data Acquisition Toolbox* para la implementación y validación de los controladores propuestos.
- Un servomotor 33-002 de *Feedback* con a) una unidad mecánica 33-100, constituida por el servo estrictamente dicho; b) una unidad analógica 33-110 para conectarla a la unidad mecánica a través de un cable de 34 vías el cual suministra las señales de mando y de alimentación; c) una fuente de alimentación 01-100, (ver Fig 7.2). Cabe destacar que la unidad mecánica tiene un freno cuya posición varía la ganancia y la constante de tiempo del sistema, ya que éste actúa como una carga para el motor. La unidad analógica permite el control de velocidad y posición del servomotor (consultar documentación del fabricante para una descripción más exhaustiva).



Fig 7.2 Tarjeta de adquisición de datos y planta servomotor.

### 7.1.2. Diseño de los controladores

En esta sección se propondrán dos estrategias de control predictivo para controlar la velocidad y la posición de la planta servomotor: una usando el control convencional GPC y la otra utilizando el FGPC, para los modelos en función de transferencia identificados a partir de la planta real. Como veremos, los resultados experimentales y teóricos son comparados para ambas estrategias de control con la intención de validar la efectividad de éstas. Cabe destacar que estos controladores han sido ajustados (no optimizados) con la idea de obtener plantas estables y suficientemente rápidas en su respuesta, con el ánimo de comprobar la validez de FGPC como estrategia de control.

## 7. Resultados experimentales

---

Para la elección del prefiltro  $T$  se ha tenido en cuenta las recomendaciones de Yoon y Clarke (1995), validando de forma práctica que se obtenía un buen rechazo a las perturbaciones y, por tanto, un buen funcionamiento del sistema. El prefiltro tiene la siguiente expresión:  $T(z^{-1}) = 1 - 0.8z^{-1}$ .

### Control de velocidad

La función de transferencia discreta obtenida a partir de la identificación de la variable velocidad del servomotor con un tiempo de muestreo  $T_s = 0.2$  s tiene la siguiente expresión:

$$G_V(z^{-1}) = \frac{0.3393z^{-1}}{1 - 0.6255z^{-1}}. \quad (7.1)$$

Ateniéndonos al modelo anterior, diseñamos un controlador GPC usando los parámetros por defecto, es decir,  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 10$ ,  $N_u = 1$ ,  $\gamma_i = 1$ ,  $\lambda_i = 10^{-6}$ . Con estos parámetros obtenemos un controlador que confiere al sistema un margen de ganancia igual a 12.14 dB y un margen de fase de 72.67°. Para el diseño del controlador fraccionario FGPC tomaremos los mismos valores para los horizontes  $N_1$ ,  $N_2$  y  $N_u$ . Sin embargo, los valores de las secuencias de pesos vendrán dados por las expresiones vistas en el capítulo 6, las cuales se reproducen aquí, de nuevo, por motivos de comodidad para  $\alpha$  y  $\beta$ :

$$\gamma = \Delta t^\alpha \text{diag}(w_m \quad w_{m-1} \quad \dots \quad w_1 \quad w_0), \quad (7.2)$$

con  $w_j = \omega_j - \omega_{j-m}$ ;  $m = N_2 - N_1$ ;  $\omega_k = (-1)^k \binom{-\alpha}{k}$ ; y  $\omega_k = 0, \forall k < 0$ .

$$\lambda = \Delta t^\beta \text{diag}(w_{N_u-1} \quad w_{N_u-2} \quad \dots \quad w_1 \quad w_0), \quad (7.3)$$

con  $w_j = \omega_j - \omega_{j-m'}$ ;  $m' = N_u - 1$ ;  $\omega_k = (-1)^k \binom{-\beta}{k}$ ; y  $\omega_k = 0, \forall k < 0$ .

Estos valores de las integrales definidas fraccionarias se elegirán de tal forma que obtengamos un margen de ganancia y fase similar al que obtengamos con el controlador GPC (en este ejemplo no se pretende optimizar el rendimiento del sistema, sino ilustrar la metodología FGPC).

En la Fig 7.3 y en la Fig 7.4 podemos observar la evolución de los márgenes de ganancia y fase de los sistemas de control para los valores fraccionarios  $\alpha, \beta \in (-1, 6.3)$ . Seleccionando el controlador correspondiente a los valores de los parámetros  $\alpha = \beta = 0.2$ , obtenemos un sistema cuyos márgenes de ganancia y fase son, respectivamente,  $15.96 \text{ dB}$  y  $72.28^\circ$ .

La Fig 7.5 muestra la evolución de las señales de control y las salidas del sistema para este control de velocidad usando las estrategias de control predictivo propuestas. Como podemos observar, las salidas de estos sistemas presentan un comportamiento estable aunque un poco ruidoso. Destacamos también que la respuesta real se encuentra en ambos casos muy próxima a la respuesta obtenida de forma práctica.

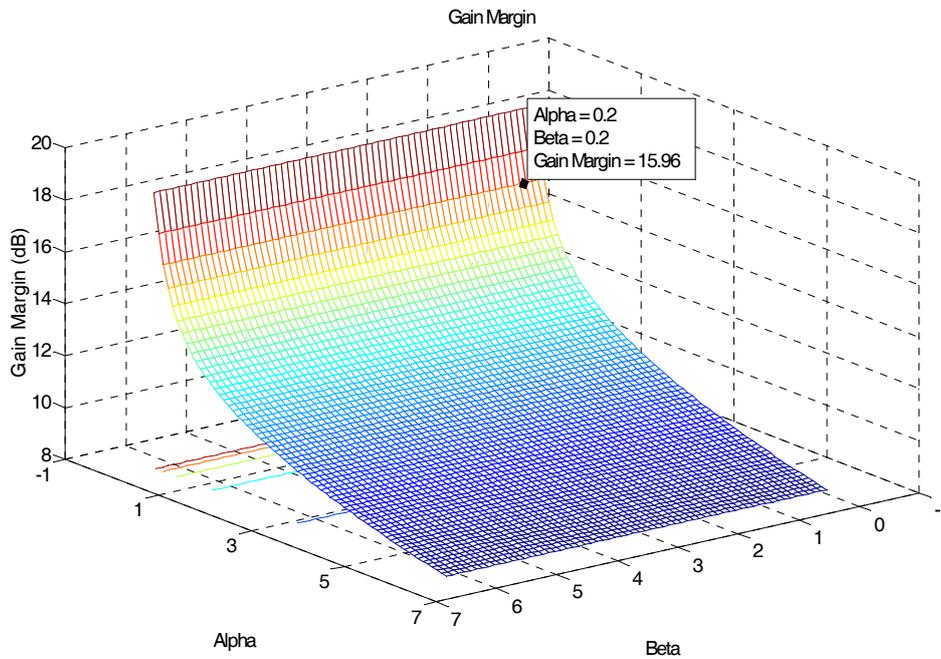


Fig 7.3 Margen de ganancia para el control de velocidad.

## 7. Resultados experimentales

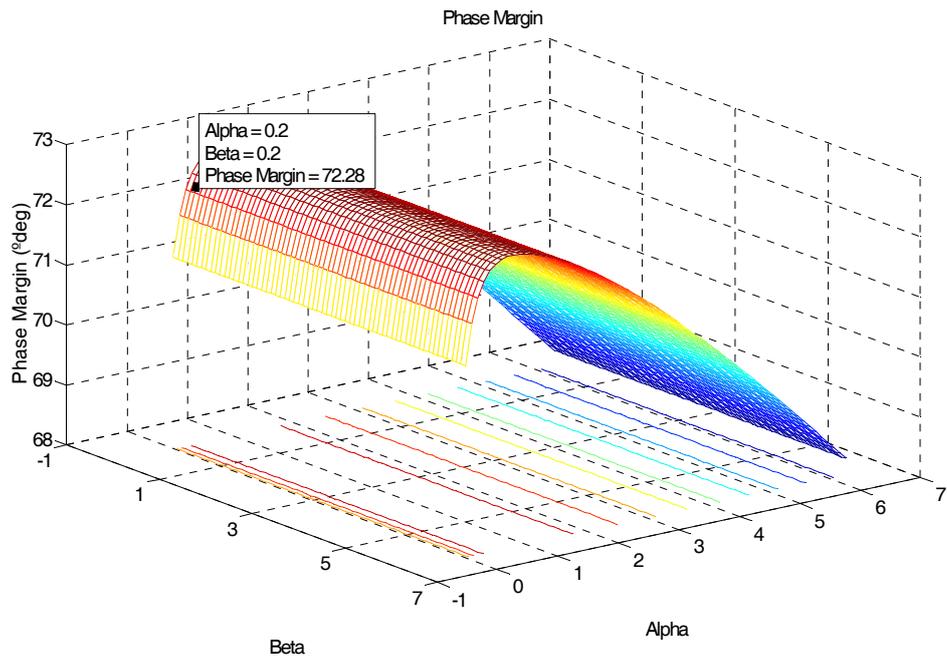


Fig 7.4 Margen de fase para el control de velocidad.

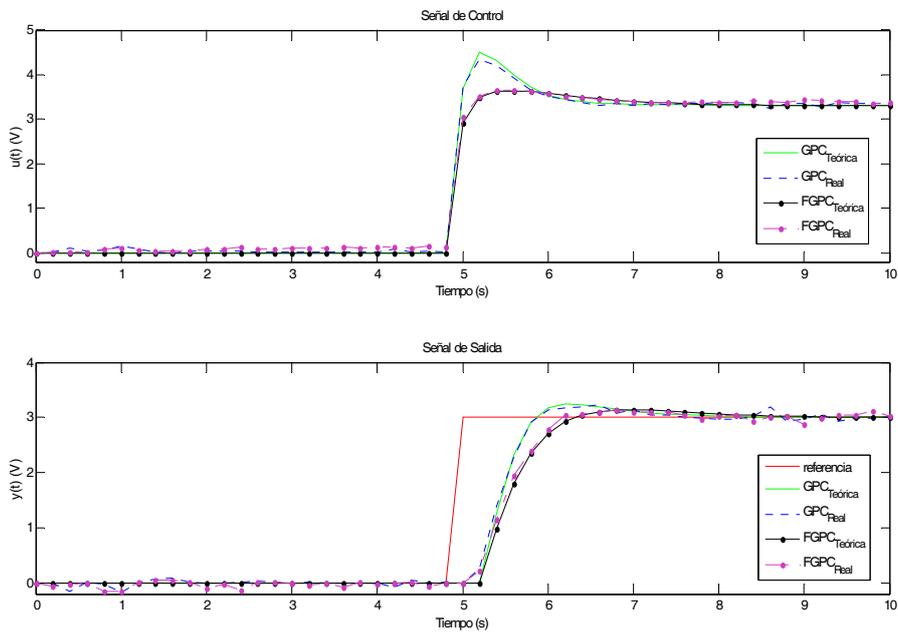


Fig 7.5 Control de velocidad usando los controladores predictivos propuestos.

**Control de Posición**

La función de transferencia discreta que describe la dinámica de la posición del servo para nuestros propósitos de diseño, obtenida en las mismas condiciones que la de velocidad, presenta la siguiente expresión:

$$G_p(z^{-1}) = \frac{0.364z^{-1}}{1 - 1.64z^{-1} + 0.64z^{-2}} = \frac{0.364z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.64z^{-1})}. \quad (7.4)$$

Al igual que para el caso del control de velocidad, el controlador GPC se ha diseñado utilizando los valores por defecto para los parámetros:  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_u$ ,  $\gamma$  y  $\lambda$ . Para el diseño del FGPC se han seguido también las mismas pautas que para el caso anterior: valores por defecto para  $N_1$ ,  $N_2$  y  $N_u$  y secuencias de pesos para  $\gamma$  y  $\lambda$  obtenidas mediante las expresiones (7.2) y (7.3) para los valores fraccionarios  $\alpha, \beta \in (-1, 6.3)$ .

En la Fig 7.6 y en la Fig 7.7 podemos observar la evolución de los márgenes de ganancia y fase para los controladores propuestos. Se ha elegido aquel definido por los valores de los parámetros  $\alpha = \beta = 0.5$ , por presentar los márgenes de ganancia y fase más parecidos a los obtenidos con el GPC.

En la Fig 7.8 podemos observar la dinámica que sigue el sistema servomotor cuando se le aplica los controladores predictivos propuestos. En ambos casos el sistema es estable, aunque en este caso se observa una diferencia mayor entre la respuesta teórica y la obtenida de forma práctica. Estos sistemas de control presentan unos márgenes de ganancia de 8.63 dB y 6.38 dB y unos márgenes de fase de 43.84° y 44.71°, para el GPC y FGPC, respectivamente. Si comparamos la evolución práctica de las salidas, podemos observar como la obtenida con el FGPC es un poco más rápida.

## 7. Resultados experimentales

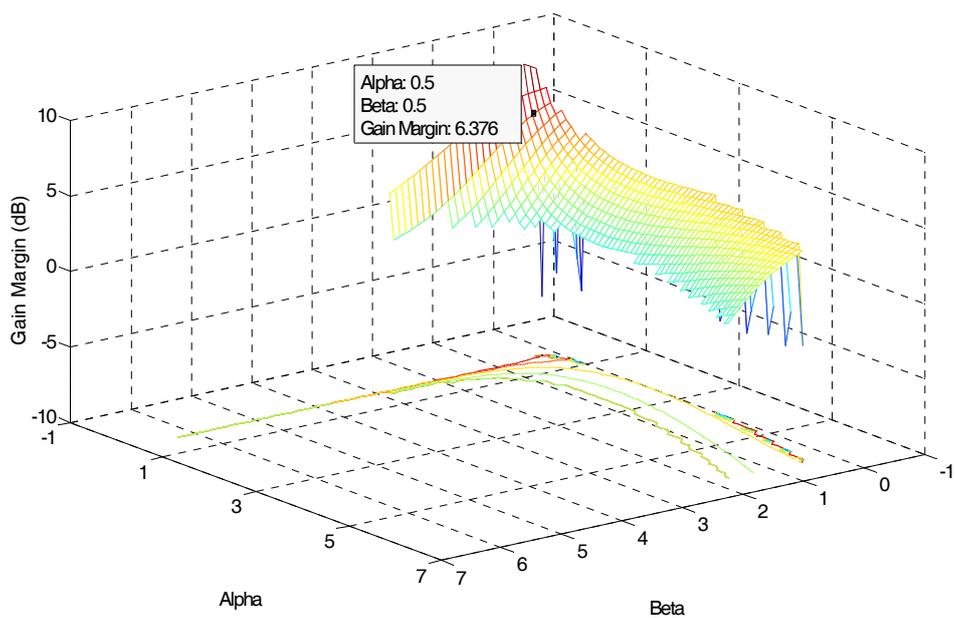


Fig 7.6 Margen de ganancia para el control de posición.

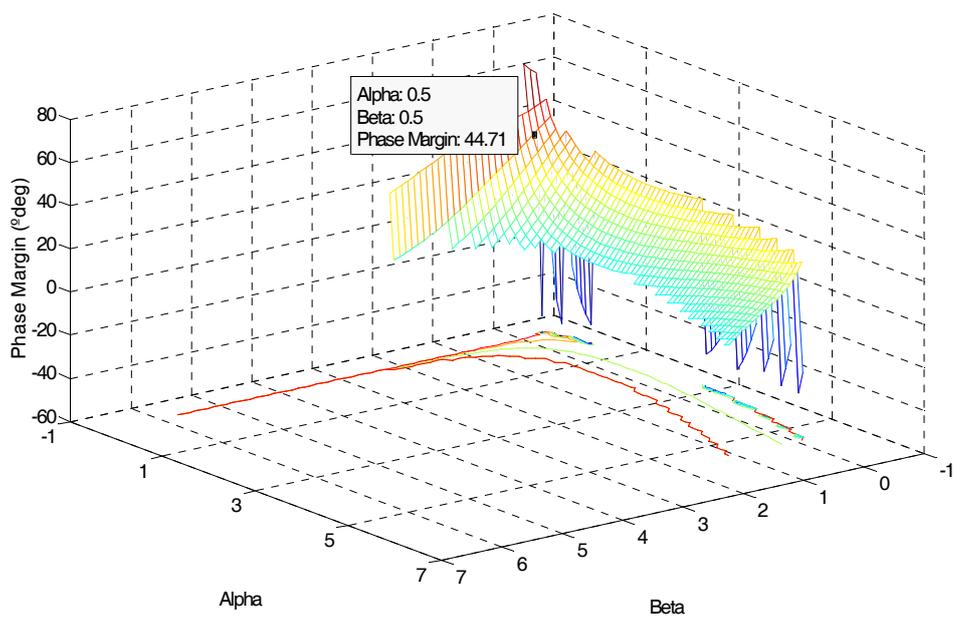


Fig 7.7 Margen de fase para el control de posición.

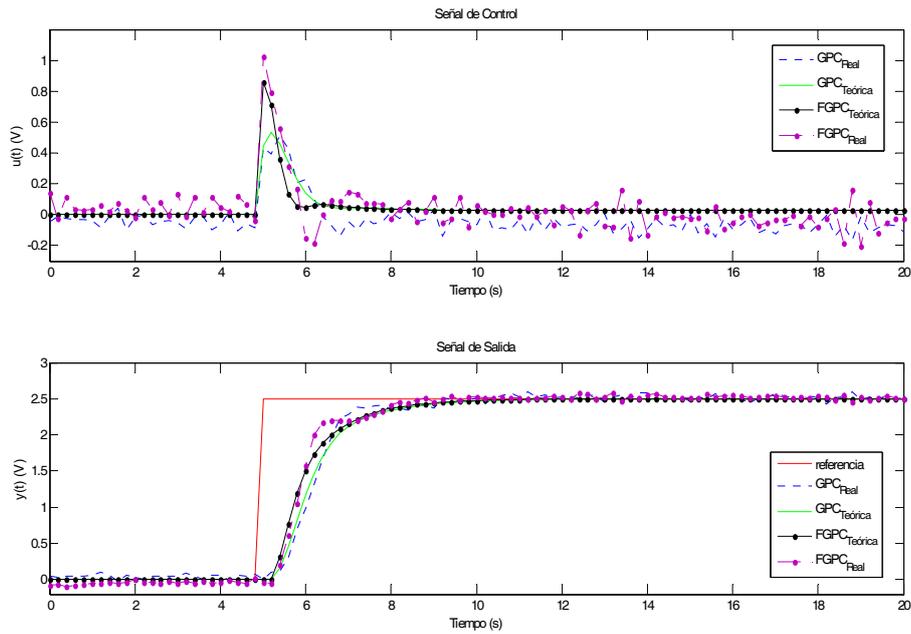


Fig 7.8 Control de posición usando los controladores predictivos propuestos.

### 7.1.3. Conclusiones

En esta sección nos hemos centrado en el diseño y la aplicación de un control predictivo de orden fraccionario (FGPC) a una planta servomotor, tanto para controlar su velocidad como su posición. Los resultados en simulación y experimentales han sido comparados con los obtenidos usando una estrategia GPC.

Se ha mostrado como el sistema controlado mediante FGPC puede alcanzar un buen rendimiento al igual que utilizando una estrategia de control GPC. El FGPC puede conferirle una amplia variedad de dinámicas al sistema controlado mediante el ajuste de dos de sus parámetros, los cuales son definidos por los órdenes fraccionarios  $\alpha$  y  $\beta$ . En este sentido es posible conseguir un ajuste fino en lazo cerrado para alcanzar los objetivos en cuanto a rendimiento y robustez.

## 7.2. Control de un sistema AGV en red mediante FGPC

En este apartado se estudiará la viabilidad de la metodología de control FGPC para controlar un sistema que cierra su lazo de control a través de una red de comunicación. Se presentará también una comparación mediante simulación con un

sistema de control GPC, cuando se trata de controlar una planta que representa la dinámica de un vehículo autónomo guiado (AGV) en red.

Algunos autores destacan que los sistemas futuros de automatización, e incluso los presentes, están compuestos por un número de dispositivos inteligentes y sistemas de control interconectados a través de redes de comunicaciones locales o globales (Vatanski, *et al.*, 2009). Los sistemas de control en red, conocidos por sus siglas en inglés Network Control Systems (NCS), los podemos definir como sistemas de control donde los sensores, actuadores y los elementos de procesado o cómputo digital están conectados mediante una red de comunicación o cualquier otro medio compartido.

En la actualidad podemos encontrar diversas estrategias de control que han sido ya implementadas en el desarrollo del NCS; sirvan de ejemplo (Banerjea, *et al.*, 1996), (Aweya, *et al.*, 2004), (Goodwin, *et al.*, 2004), (Tejado, *et al.* 2008a, 2008b).

El desempeño de un sistema de control en red se ve afectado, tanto directa como indirectamente, por los retardos en la transmisión y la pérdida de datos inherentes a las redes de comunicaciones. Basándonos en un modelo de comunicación en red se estudiarán los efectos de estas características no deseadas de las redes de comunicación en el control lateral de un vehículo AGV (Romero, *et al.*, 2009a).

El uso compartido de una red de comunicación multipropósito para cerrar el lazo de control ofrecen algunas ventajas frente a las arquitecturas de control tradicional, como pueden ser: un fácil mantenimiento, bajo coste de instalación y una alta eficiencia (Goodwin, *et al.*, 2004).

Sin embargo, el intercambio de información a través de ella hace el diseño y el análisis de un NCS complejo, puesto que se imponen nuevos retos para controlar el sistema debido a la aparición de una nueva serie de contrariedades: retardos en la transmisión de información entre los distintos componentes tanto de naturaleza fija como aleatoria, enlaces de comunicación no fiables con pérdidas de información “*packet dropout*”, y el limitado ancho de banda que permite el canal de comunicación. Todos estos problemas han sido ya estudiados por diferentes autores

(Gómez-Skarmeta, *et al.*, 2002), (Hristu-Varsakelis y Levine, 2005), (Hespanha, *et al.*, 2007), (Chai, *et al.*, 2008).

### 7.2.1. Modelado del sistema

#### Modelado de la red de comunicación

A continuación se presenta un modelo resumido de la red de comunicación, incluyendo los problemas típicos que son introducidos por su uso: retardos aleatorios en la transmisión y pérdidas de información. Una descripción más completa puede verse en (Tejado, *et al.*, 2008a, 2008b).

Un problema importante surge, con respecto a los sistemas de control convencionales, cuando se consideran los dos retardos de transmisión causados por la porción de la red de comunicación que une la salida de la planta y la entrada del controlador y la que une la salida del controlador y el actuador de la planta. Estos retardos los llamaremos retardo del sensor hacia el controlador ( $\tau_{sc}$ ) y retardo del controlador hacia el actuador ( $\tau_{ca}$ ). La modelización de estos retardos se lleva a cabo mediante dos generadores de retardos aleatorios que oscilan entre un valor máximo y un mínimo uniformemente distribuidos, y con valor diferente para cada uno de ellos, con el fin de tener en cuenta la posible asimetría de estos retardos.

La otra incidencia a modelar es el “*packet dropout*”. Un sistema NCS donde se tenga en cuenta esta particularidad puede ser modelado mediante un conmutador que se cierra cada cierto tiempo,  $r$ , como se describe en (Ostertag y Carvalho, 2006). Por consiguiente, la pérdida de datos en la red de comunicación se simula mediante un generador de números aleatorios uniformemente distribuido entre 0 y 1, un retenedor de orden cero y un conmutador cuyo umbral se fija en  $(1-r)$ . Con este modelo, durante un porcentaje  $r$  de tiempo, el estado actual se transmite a la salida, mientras tanto el resto del tiempo el estado anterior es transmitido a través de la red.

La Fig 7.9 ilustra el modelo de comunicación en red descrito anteriormente, con retardo en la transmisión, pérdida de información y conexión entre la planta y el controlador.

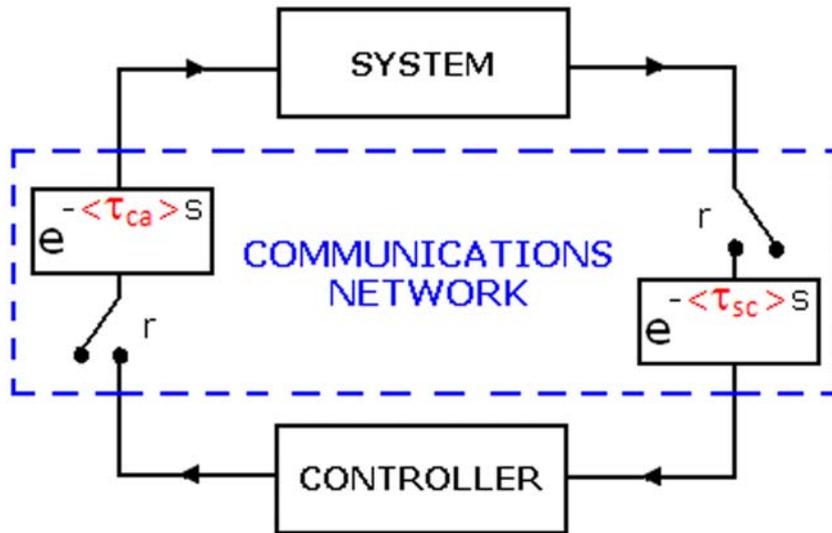


Fig 7.9 Modelo de la red de comunicación con pérdidas de información y retardos en la transmisión.

### Modelado del vehículo

Para llevar a cabo el control lateral del AGV, se tienen que obtener el modelo cinemático y dinámico del mismo:

- Modelo cinemático del vehículo: de acuerdo con (Suárez, *et al.*, 2006), consideraremos las ecuaciones que determinan el movimiento en el plano del vehículo a partir del conocido modelo del *bicycle kinematic model* (Fig 7.10).

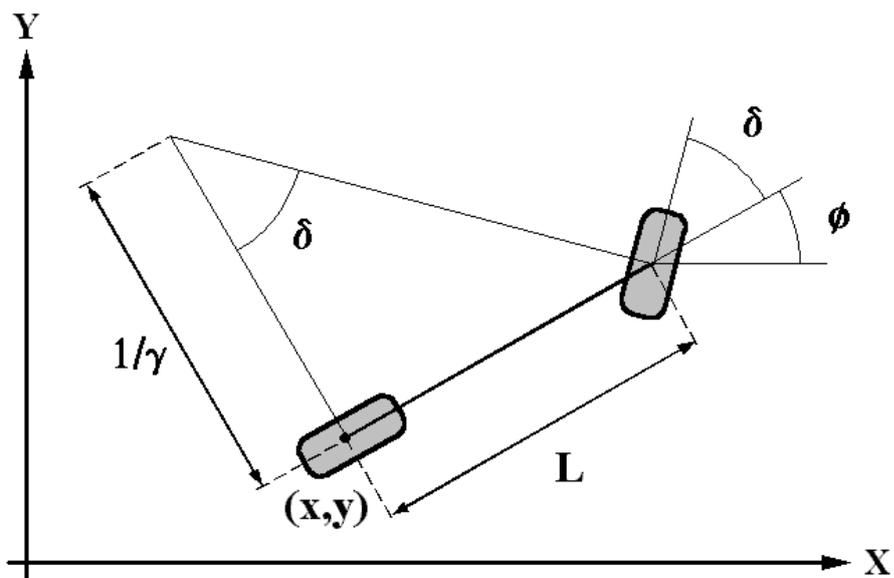


Fig 7.10 Modelo cinemático de la bicicleta.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \cos \phi \\ \dot{y} &= v \sin \phi \\ \dot{\phi} &= v\gamma,\end{aligned}\tag{7.5}$$

donde  $(x, y)$  son las coordenadas del punto de orientación en el plano  $XY$ ,  $v$  es la velocidad longitudinal del vehículo en el punto de orientación,  $\phi$  es el ángulo de viraje y  $\gamma$  es la curvatura instantánea del vehículo. La variable de control que se va a considerar es el ángulo de la dirección de las ruedas delanteras,  $\delta$ , el cual guarda la siguiente relación con la curvatura  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{\tan \delta}{L},\tag{7.6}$$

siendo  $L$  la distancia del eje delantero al trasero.

- Modelo dinámico del vehículo: la cinemática del modelo no es suficiente de cara a la simulación; por tanto, se debe tomar también en cuenta el comportamiento dinámico del vehículo. Con respecto a la dinámica lateral, consideraremos el efecto del actuador de dirección del vehículo como se describe en (Suárez, *et al.*, 2006), que viene dado por la siguiente expresión:

$$\dot{\delta} = -\frac{\delta}{\tau} + \frac{K_a}{\tau} \delta_f,\tag{7.7}$$

donde  $\tau$  es la constante de tiempo del actuador de dirección,  $K_a$  es la ganancia (se supone igual a 1) y  $\delta_f$  es la señal de mando de las ruedas delanteras.

Para el modelado de la dinámica longitudinal del vehículo se han utilizado los resultados experimentales que se resumen en (Suárez, *et al.*, 2004), de tal forma que puede ser aproximado con la siguiente función de transferencia de tercer orden:

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{8s^3 + 12s^2 + 6s + 1},\tag{7.8}$$

## 7. Resultados experimentales

---

donde  $V_o$  y  $V_i$  representan la transformadas de Laplace de la velocidad de salida del vehículo y la señal de mando de velocidad, respectivamente.

### Sensores

Para recrear un entorno de simulación lo más realista posible, se necesita un modelo de la salida del sensor en lugar de asumir que nosotros podemos medir los estados del vehículo con exactitud. Es bien sabido que todas las lecturas que provienen de un sensor son ruidosas. El modelo para este ruido lo tomaremos de acuerdo con (Wang, *et al.*, 1999). Es decir, tomaremos un generador de números aleatorios uniformemente distribuidos entre un valor máximo y mínimo ajustable.

En la Fig 7.11 podemos observar el diagrama de bloques completo del sistema, donde se han considerado las limitaciones impuestas por la red de comunicaciones y el ruido del sensor descrito previamente.

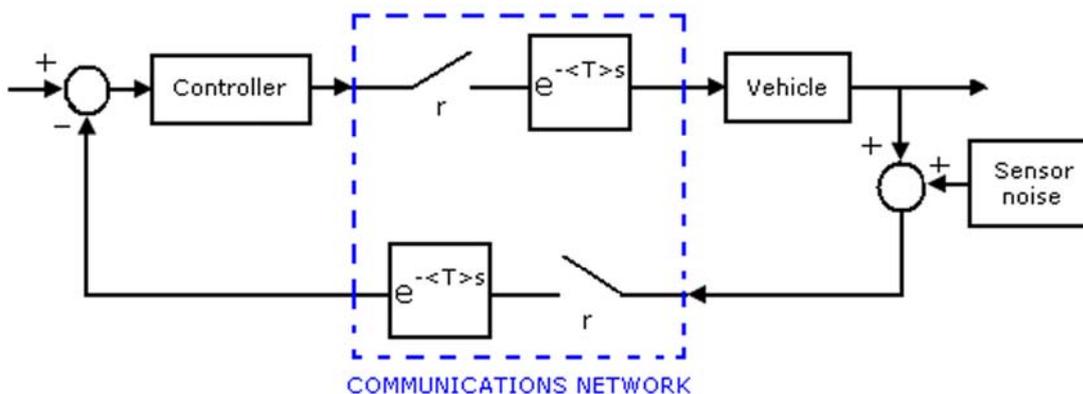


Fig 7.11 Diagrama de control del vehículo.

Durante la simulación se practicará un cambio de carril mediante una señal tipo escalón de valor inicial 0 y de valor final 3.5 metros, cuando la velocidad longitudinal del vehículo sea estable (aproximadamente unos 60 segundos). Ver Fig 7.12.

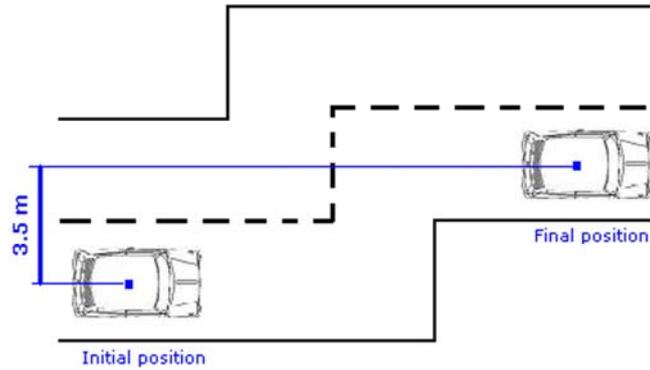


Fig 7.12 Descripción del cambio de carril del vehículo.

### 7.2.2. Diseño de los controladores

En este apartado se proponen dos estrategias de control predictivo para controlar el desplazamiento lateral del vehículo AGV (Romero *et al.*, 2009a). La primera es el diseño de un GPC y la segunda es el diseño de un FGPC. Una vez obtenidos los controladores, se simulará el sistema de control y se obtendrán algunas conclusiones.

El modelo matemático simplificado del movimiento lateral del vehículo puede ser obtenido mediante la linealización de las ecuaciones (7.5) y (7.6), el cual presenta la siguiente expresión en el dominio de Laplace:

$$G(s) = K \frac{v^2/L}{s^2(\tau s + 1)}, \quad (7.9)$$

donde  $K = 9.6963 \cdot 10^{-4}$  (corresponde a la relación existente entre el actuador de la dirección y el giro de las ruedas, y la conversión de grados a radianes),  $L = 2.69 \text{ m}$ ,  $v = 20 \text{ m/s}$  y  $\tau = 0.1 \text{ s}$ .

Ya que las metodologías de control predictivo propuestas necesitan un modelo discreto del sistema, la ecuación (7.9) ha sido discretizada con un tiempo de muestreo igual a  $20 \text{ ms}$ , presentando la siguiente expresión:

$$G(z^{-1}) = 10^{-5} \frac{0.1830 + 0.6968z^{-1} + 0.1655z^{-2}}{1 - 2.8187z^{-1} + 2.6374z^{-2} - 0.8187z^{-3}} z^{-1}. \quad (7.10)$$

Como prefiltro  $T$  hemos elegido uno que posea dos polos en 0.9, ya que el sistema anterior presenta polos muy cerca de 1.

$$T(z^{-1}) = (1 - 0.9z^{-1})^2. \quad (7.11)$$

## 7. Resultados experimentales

En el caso del GPC convencional se han tomado los siguientes valores para el ajuste del controlador:  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 200$ ,  $N_u = 3$  (número de polos de (7.10)),  $\gamma_i = 1$  y  $\lambda_i = 10^{-3}$ . Podemos observar que todos los términos de la secuencia de pesos son constantes en este caso. Este sistema de control presenta un margen de ganancia igual a 12.15 dB y un margen de fase de 48.81°. Los polinomios  $R$  y  $S$  tienen la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} R(z^{-1}) &= 0.0111 - 0.0106z^{-1} + 0.0038z^{-2} \\ S(z^{-1}) &= 67.2175 - 185.5890z^{-1} + 170.2838z^{-2} - 51.9023z^{-3}. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Para el caso del controlador FGPC, conservaremos los mismos valores para los parámetros  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_u$ . Sin embargo, los valores  $\gamma$  y  $\lambda$  vendrán determinados por las expresiones (7.2) y (7.3) para los valores fraccionarios  $\alpha, \beta \in (-1, 6.3)$ , de tal forma que  $\alpha$  y  $\beta$  son elegidos para obtener un margen de ganancia y fase similar al obtenido con el GPC convencional. La Fig 7.13 y la Fig 7.14 muestran los márgenes de ganancia y fase para todos los sistemas de control resultantes.

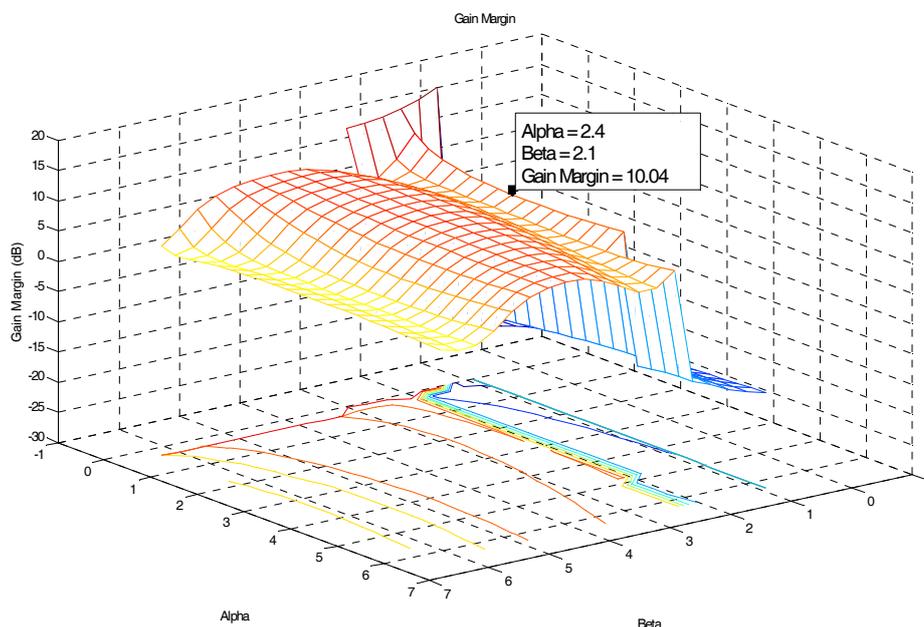


Fig 7.13 Margen de ganancia de acuerdo con  $\alpha$  y  $\beta$ .

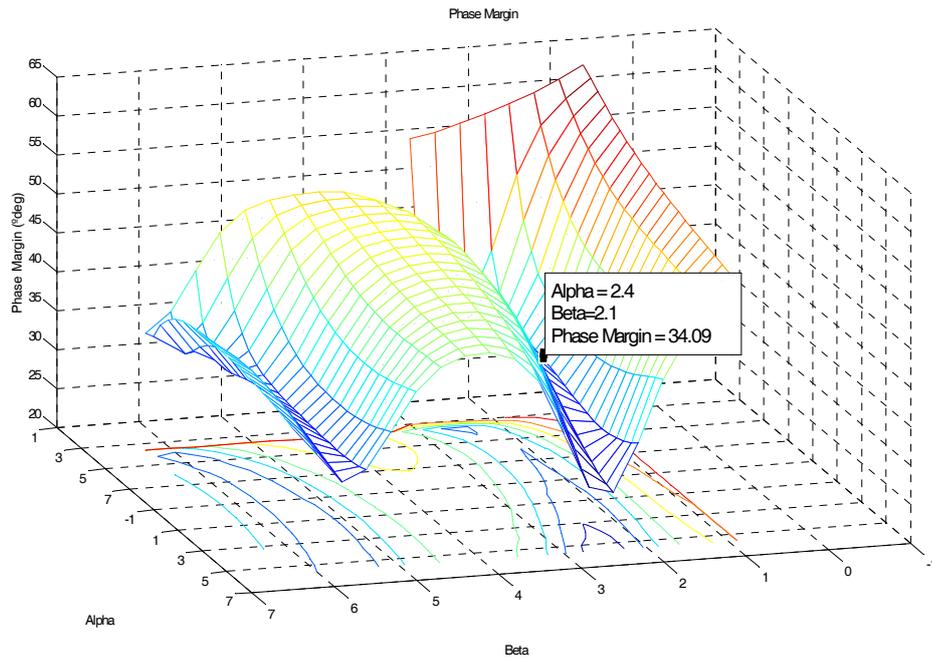


Fig 7.14 Margen de fase de acuerdo con  $\alpha$  y  $\beta$ .

Seleccionando el controlador cuyos valores para los operadores fraccionarios son  $\alpha = 2.4$  y  $\beta = 2.1$ , obtenemos unos márgenes de ganancia y fase de  $10.04 \text{ dB}$  y  $34.09^\circ$ , respectivamente, y los siguientes polinomios  $R$  y  $S$ :

$$\begin{aligned} R(z^{-1}) &= 0.0615 - 0.0912z^{-1} + 0.0359z^{-2} \\ S(z^{-1}) &= 66.3026 - 183.5740z^{-1} + 168.8961z^{-2} - 51.6147z^{-3}. \end{aligned} \quad (7.13)$$

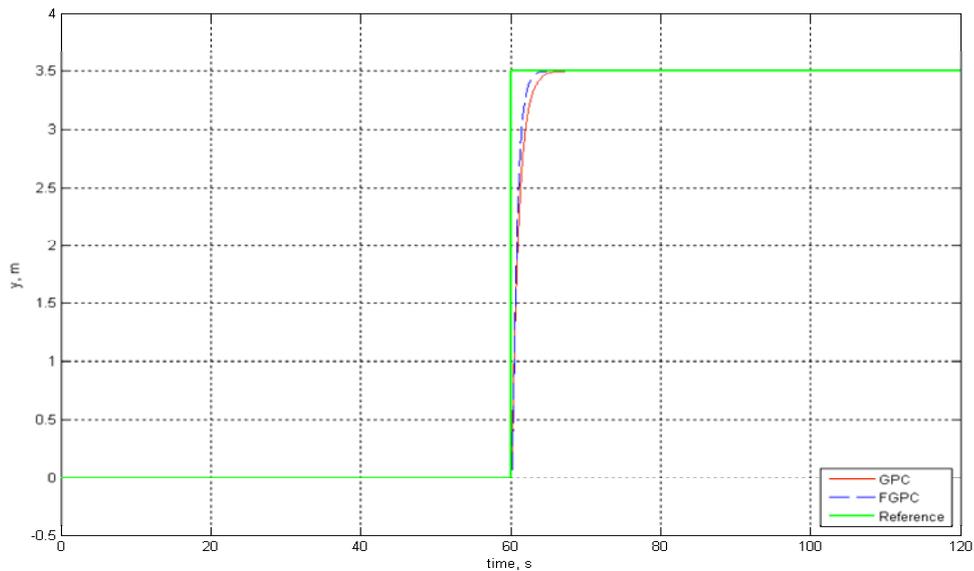


Fig 7.15 Respuesta ideal al escalón.

La respuesta ideal del sistema al escalón considerando el modelo dinámico lineal del vehículo descrito por la expresión (7.10) se muestra en la Fig 7.15. Como podemos ver ambas salidas son suaves y estables, destacando la respuesta del FGPC que es algo más rápida.

### 7.2.3. Resultado de la simulación

En este apartado se presenta la simulación del desplazamiento lateral del vehículo AGV usando los dos controladores propuestos anteriormente para dos entornos de simulación diferentes: en presencia de ruido del sensor y incluyendo o no la red de comunicación.

El valor de los parámetros usados para la simulación del sistema se resume a continuación:

- Vehículo:  $\phi|_{inicial} = \delta|_{inicial} = \delta_f|_{inicial} = 0$ ,  $(x, y)|_{inicial} = (0, 0)$ ,  $L = 2.69$  m, límite de giro de la dirección =  $(-540^\circ, 540^\circ)$ ,  $v = 20$  m/s y  $\tau = 0.1$  s, los cuales corresponden con el valor de los parámetros del vehículo real (Suárez, *et al.*, 2004).
- Red de comunicación: consideraremos una red Ethernet inalámbrica regida bajo el protocolo *IEEE 802.11b*. De acuerdo con (Hristu-Varsakelis y Levine, 2005) fijaremos el retardo medio de transmisión del protocolo en  $1.733$  ms; supondremos una red simétrica con unos retardos de emisión y recepción entre controlador y actuador acotados entre:  $\tau_{ca}|_{max} = \tau_{sc}|_{max} = 1.6 \cdot h$  y  $\tau_{ca}|_{min} = \tau_{sc}|_{min} = 0.2 \cdot h$ , donde  $h$  es el periodo de muestreo ( $h = 20$  ms). Además, fijaremos el parámetro  $r$  en 0.9, es decir, el 90% de la información transmitida por la red llega correctamente al receptor, el 10% restante de los mensajes se pierden.

En la primera simulación vamos a considerar un pequeño nivel de ruido en el sensor, acotado entre  $(-0.005, 0.005)$ . En la Fig 7.16 podemos observar la respuesta del sistema al desplazamiento lateral usando ambos controladores predictivos y en las condiciones de ruido descritas. Ambos sistemas presentan una respuesta bastante similar con un buen rechazo a las perturbaciones. Sin embargo, si introducimos en la

simulación el efecto de la red de comunicación, obtenemos una respuesta mucho más rizada como podemos observar en la Fig 7.17, siendo la del GPC convencional algo peor en estado estacionario.

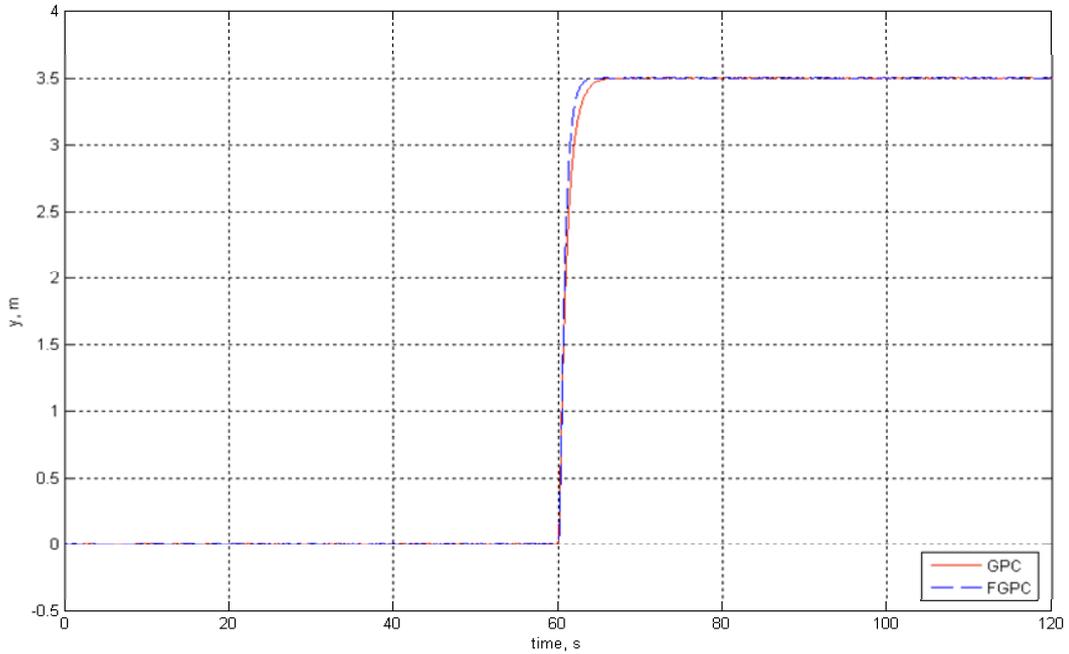


Fig 7.16 Cambio de posición lateral del vehículo considerando sólo ruido en el sensor.

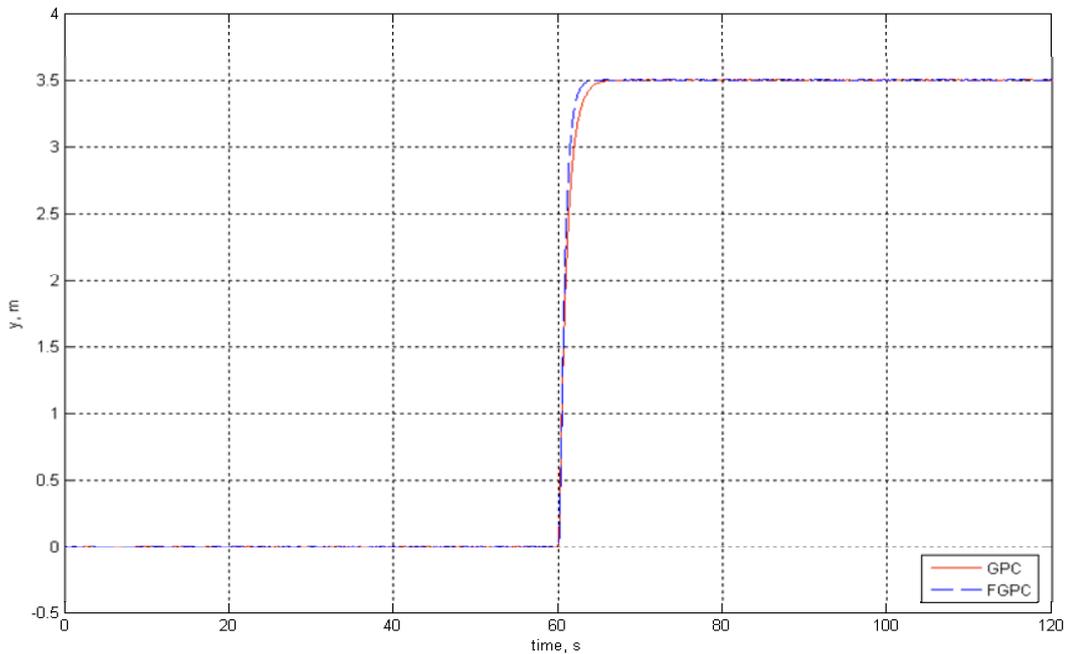


Fig 7.17 Cambio de posición lateral del vehículo considerando los efectos de la red de comunicación y poco ruido en el sensor.

## 7. Resultados experimentales

A continuación repetiremos la simulación usando ambos controladores pero en esta ocasión se va a incrementar considerablemente el nivel de ruido que llega desde el sensor, acortándolo entre los siguientes valores (-0.1, 0.1). En la Fig 7.18 podemos ver como en esta ocasión las salidas de los sistemas se han vuelto bastante ruidosas, aunque el FGPC tiene un mejor comportamiento de rechazo frente a ellas.

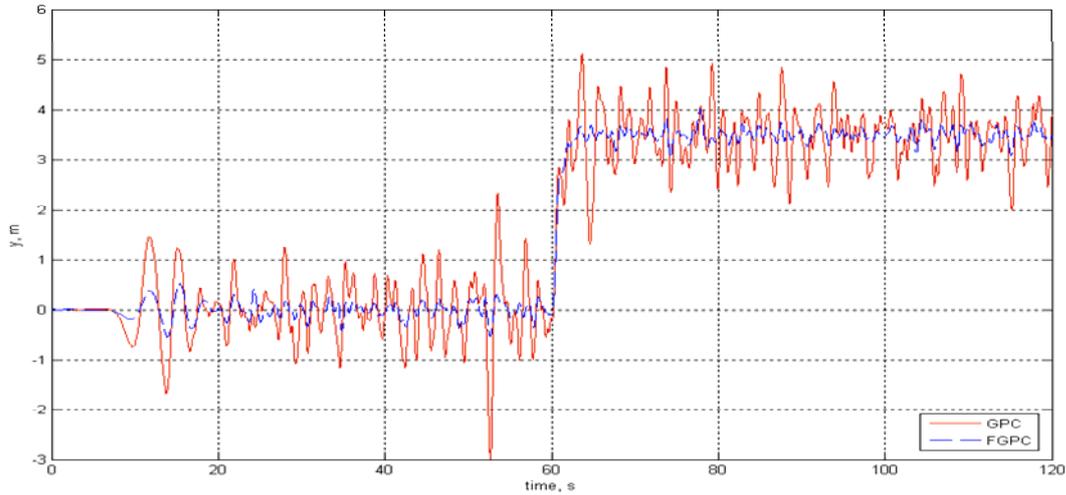


Fig 7.18 Cambio de posición lateral del vehículo considerando los efectos de la red de comunicación y mucho ruido en el sensor.

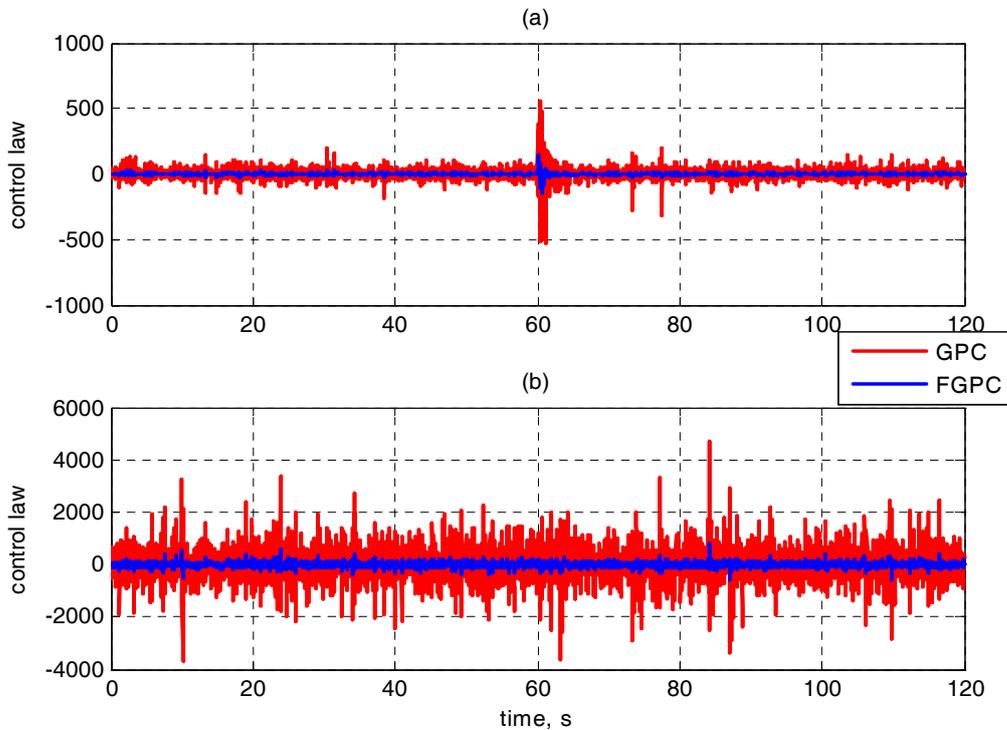


Fig 7.19 Esfuerzos de control: (a) con pequeño nivel de ruido, (b) con gran nivel de ruido.

Finalmente, los esfuerzos de control son representados en la Fig 7.19, donde podemos observar que éstos son sustancialmente menores en el caso de usar el controlador FGPC.

#### **7.2.4. Conclusiones**

En esta sección nos hemos centrado en el control lateral de un vehículo AGV aplicando estrategias de control predictivo en presencia de un sensor ruidoso. El lazo de control del vehículo AGV se ha cerrado por medio de una red de comunicaciones la cual afecta de forma negativa al normal desempeño del sistema.

Se ha podido comprobar como el comportamiento de ambos controladores predictivos, GPC y FGPC, es adecuado en el ambiente descrito, a pesar de los retardos aleatorios y las pérdidas de información que introduce la red de comunicaciones. Destacamos el comportamiento obtenido usando FGPC sobre todo en términos de rechazo de las perturbaciones, especialmente en ambientes muy ruidosos.

### **7.3. Control de un sistema *Smart wheel* en red mediante FGPC**

En este apartado se presenta un nuevo ejemplo de control con FGPC, en este caso de una planta llamada *Smart Wheel*. La planta y el controlador se hayan interconectados, de nuevo, por medio de una red de comunicación. Los resultados son obtenidos tomando un modelo de la planta y de la red mediante identificación; para más información consultar (Tejado, *et al.*, 2009b). Estos resultados deben de servir como base para la realización futura de las pruebas finales de control con la planta real, mediante una conexión en red entre la Universidad de Extremadura y la Universidad de Utah, que es donde se encuentra la planta.

Como ya vimos en el caso anterior, el controlador predictivo fraccionario ha probado ser una metodología de control adecuada para entornos de transmisión ruidosos con retardos aleatorios de comunicación y pérdidas de información. En este caso el rendimiento de este controlador fraccionario será comparado con otros controladores del tipo PID que también son diseñados tomando en cuenta las peculiaridades de la red de comunicación.

### 7.3.1. Plataforma experimental

#### Modelado de la planta

La planta que nos va a servir como plataforma experimental es la *Smart Wheel*. Ésta es una rueda robótica con tres ejes que ha sido ensamblada en el *Center for self-Organizing and Intelligent Systems* (CSOIS) en la Universidad de Utah. Los tres ejes son: eje de dirección, eje de rotación y eje  $z$ , que pueden ser operados de forma independiente tal y como se muestra en la Fig 7.20.



Fig 7.20 El sistema *Smart Wheel* del CSOIS.

La planta está equipada con motores que actúan sobre la dirección y la rotación de la rueda y además tiene un actuador lineal que le habilita el movimiento a lo largo del eje  $z$ . También dispone de los sensores y actuadores suficientes para su control, todos ellos gobernados por un microcontrolador.

Este sistema puede ser controlado a través de un ordenador remoto que esté conectado en red. Éste se conecta a un servidor que es el encargado de procesar la información y comunicarse con la planta. También se dispone de una cámara IP (DLINK-DCS5300) conectada a Internet encargada de enviar audio y video del movimiento de la planta al ordenador remoto. La señal de audio y video se envía de forma independiente, y no conjuntamente con la señal de control a través del servidor.

El rendimiento del sistema en lazo cerrado puede ser analizado mediante la visualización de los datos provenientes de los sensores en la pantalla del ordenador

remoto. Ver en (Bhambhani, *et al.*, 2008a, 2008b) los detalles sobre esta visualización y sobre la dinámica de la planta.

El modelo matemático de la dinámica de esta planta viene dado por la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} e^{-Ls} = \frac{0.1484}{0.045s + 1} e^{-0.592s}. \quad (7.14)$$

### Modelado de la red de comunicación

Para una correcta simulación de la planta anterior y un diseño robusto de controladores, es necesario tener un modelo lo más fidedigno posible de la red de comunicación entre la Universidad de Extremadura y la Universidad de Utah, donde se encuentran el terminal que ejerce de controlador y la *Smart Wheel*, respectivamente. Para ello, se han hecho varias pruebas para determinar los retardos en la transmisión, así como las pérdidas de paquetes de información, además de caracterizar el tráfico entre ambos nodos. Para más detalle sobre este estudio y el modelo del tráfico de la red ver (Tejado, *et al.*, 2009b). Este modelo del tráfico de la red se puede resumir en el siguiente esquema de Simulink listo para la simulación:

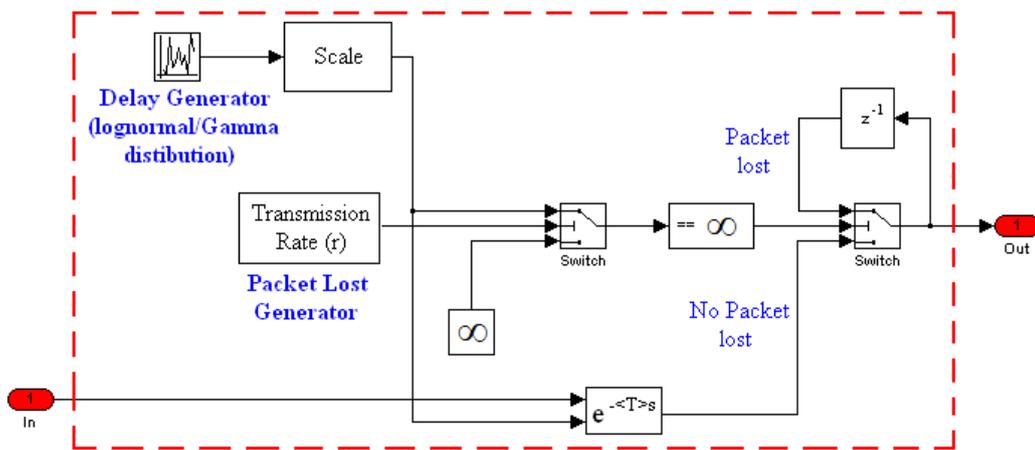


Fig 7.21 Esquema del modelo del tráfico de la red de comunicación.

donde el valor de  $r$  medido es igual a 0.9908 y el valor del retardo medio de la transmisión,  $\tau$ , en la red es igual a 266 ms.

### 7.3.2. Diseño de los controladores

Aquí se propone una estrategia de control predictivo fraccionario que permita controlar el sistema descrito anteriormente. Para ello el controlador FGPC será diseñado teniendo en cuenta las especiales características de la red de comunicación.

Por motivos de comparación, también se diseñarán dos controladores PID, los cuales ya han sido utilizados con anterioridad para el control de esta planta demostrando que son adecuados en simulación. Para más detalles ver (Tejado, *et al.*, 2009a).

Cabe destacar que todos los controladores han sido diseñados teniendo en cuenta el retardo medio de transmisión de la red de 266 ms, más el retardo inherente a la planta.

Para el diseño del FGPC, el primer paso es obtener la expresión discreta de la función de transferencia que sirve como modelo del sistema (7.14); esta función discreta se presenta con la siguiente forma:

$$G(z^{-1}) = \frac{0.04669 + 0.01657z^{-1}}{1 - 0.5738z^{-1}} z^{-35}. \quad (7.15)$$

La elección de los parámetros  $N_1$ ,  $N_2$ , y  $N_u$  pasa por seguir las recomendaciones por defecto vistas en capítulos anteriores, tomando los siguientes valores:

- $N_1 = 35$  (número de retardos que presenta el sistema).
- $N_2 = 45$  (tiempo de subida +  $N_I$ ).
- $N_u = 35$  (número de polos inestables o mal amortiguados +  $N_I$ ).<sup>1</sup>

Como no se tiene, a priori, más información del ruido que puede afectar al sistema real, para la simulación se ha decidido tomar el valor siguiente para el prefiltro  $T(z^{-1}) = 1$ .

---

<sup>1</sup> Esta elección de sumar el valor de  $N_I$  al número de polos inestables o mal amortiguados no aparece en las recomendaciones por defecto, pero se ha añadido aquí porque con ella hemos conseguido los mejores resultados de forma práctica.

Para el ajuste de los valores de los órdenes fraccionarios ( $\alpha = 2.6, \beta = 3.2$ ) se ha seguido el criterio de obtener un sistema con unos márgenes de ganancia y fase similares a los obtenidos con los controladores PID cuyas expresiones son (7.16) y (7.17), los cuales fueron propuestos para controlar NCS con pérdidas de información en (Ostertag y Carvalho-Ostertag, 2006).

$$PI(s) = k_p + \frac{k_i}{s} = 1.1345 + \frac{3.6210}{s}. \quad (7.16)$$

$$OPID(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s = 0.9057 + \frac{3.8041}{s} + 0.0334s. \quad (7.17)$$

El primer controlador con expresión (7.16) es un controlador PI obtenido aplicando un método mejorado de Ziegler-Nichols (Åström y Murray, 2008). El segundo cuya expresión es (7.17) es un PID con ajuste óptimo para sistemas con retardos de tiempo variables (Eriksson, 1998). Para el diseño de ambos se ha tenido en cuenta no sólo el retardo intrínseco del sistema sino también el retardo medio de transmisión de la red.

Los resultados obtenidos en el dominio de la frecuencia para la planta usando los controladores descritos anteriormente se resumen en la siguiente tabla:

Tabla 7.1 Resumen de los resultados en el dominio de la frecuencia

Controller	Margen de ganancia (dB)	Margen de fase (°)	$\omega_c$ (rad/s)
PI <sub>Z-N</sub>	11.3	71.5	0.545
OPID	11.5	68.3	0.568
FGPC	11.5	70.43	0.499

### 7.3.3. Resultado de la simulación

En esta sección se presenta la simulación de los controladores anteriores y su efectividad a la hora de controlar el sistema propuesto (ver Fig 7.22). Este estudio es ilustrado con simulaciones de MATLAB<sup>TM</sup>/Simulink, usando el modelo del tráfico de la red presentado anteriormente.

## 7. Resultados experimentales

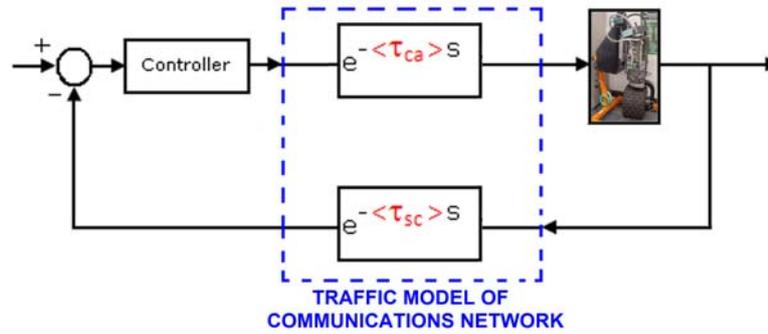


Fig 7.22 Diagrama del sistema de control completo.

Para ello, consideramos una red simétrica con  $\tau_{ca} = \tau_{sc}$ . El retardo de la transmisión viene dado por valores aleatorios generados por una distribución Gamma<sup>2</sup> con parámetros ( $a = 1.163$  y  $b = 1$ ). Los valores máximos y mínimos para los retardos son los siguientes:  $\tau_{ca}|_{\min} = \tau_{sc}|_{\min} = 164 \text{ ms}$ ,  $\tau_{ca}|_{\max} = \tau_{sc}|_{\max} = 171 \text{ ms}$ , que corresponden con los peores valores obtenidos en las pruebas de identificación de la red.

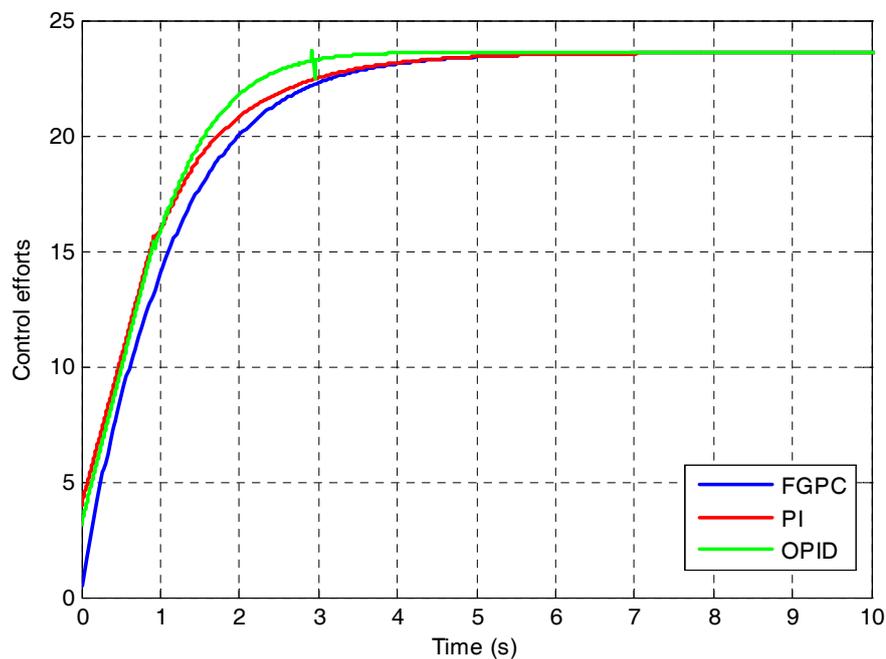


Fig 7.23 Esfuerzos de control.

$${}^2 f_{\text{Gamma}}(x | a, b) = \frac{1}{b^a \Gamma(a)} x^{a-1} \exp\left(-\frac{x}{b}\right).$$

La Fig 7.23 y la Fig 7.24 presentan la respuesta temporal de la señal de salida y los esfuerzos de control de los sistemas de control propuestos. Podemos observar que en todos los casos se presentan sistemas estables con respuestas bastante similares, destacando el PID con ajuste óptimo, que presenta una respuesta algo más rápida.

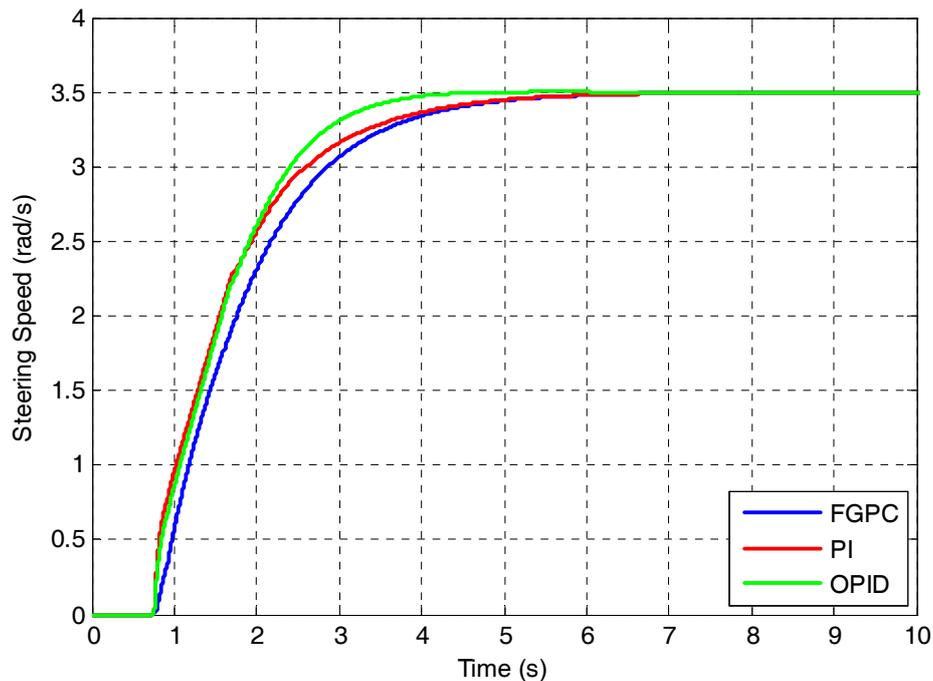


Fig 7.24 Respuesta escalón del *Smart Wheel* con los controladores propuestos.

### 7.3.4. Conclusiones

En esta sección se ha probado, a tenor de los resultados de la simulación, que el controlador fraccionario FGPC es una herramienta válida para controlar plantas que cierran su lazo de control a través de una red de comunicación (NCS). Hemos podido observar que con el ajuste de sus parámetros hemos obtenido resultados muy similares a los obtenidos con dos controladores específicamente concebidos para el control en estos entornos, a pesar de ser FGPC una metodología general.

## 7.4. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se ha presentado la aplicación práctica de FGPC. Este nuevo controlador ha demostrado su validez en entornos muy variados, donde están

## 7. Resultados experimentales

---

involucradas plantas reales y podemos encontrar diferentes formas de conexión entre la planta y el controlador.

Se ha comparado su funcionamiento con respecto a otras metodologías de control tales como GPC y PID, demostrando que es también una herramienta útil y valiosa cuando ha sido sometido a casos prácticos concretos.

# Capítulo 8

## Conclusiones y Trabajos futuros

### 8.1. Conclusiones

El objetivo fundamental de esta Tesis ha sido la aplicación de las herramientas de cálculo fraccionario al control predictivo basado en modelos, extendiendo su metodología y generalizando su formulación. Para la consecución de este objetivo se han estudiado los tres bloques constituyentes de todo controlador predictivo: la planta, el predictor y el optimizador para poder aplicar los operadores fraccionarios en tres frentes diferentes: la planta, el modelo y la función de coste.

Como consecuencia del estudio realizado, se han obtenido una serie de conclusiones, cuyo resumen se destaca a continuación como las principales aportaciones de esta Tesis:

- Se ha realizado un resumen tanto de la metodología de control predictivo basado en modelos como del cálculo fraccionario, con vistas a poder conjugar ambas disciplinas en la formulación del problema de control, de tal forma que se puedan aunar las ventajas de ambos.
- Se ha mostrado que el uso de aproximaciones basadas en los polinomios de Chebyshev es una herramienta perfectamente válida para obtener aproximaciones enteras de los operadores fraccionarios, ya que éstas suelen dar lugar a funciones de transferencia estables, con

un entrelazado de ceros y polos a lo largo de  $z \in (-1, 1)$ , y con fase mínima. Además, consiguen en muchos casos mayor precisión que otras aproximaciones, obtenidas con otros métodos, con el mismo número de términos en su función de transferencia.

- Se ha mostrado cómo la aproximación racional de Chebyshev (RC) presenta unos niveles de precisión muy elevados tanto en el dominio temporal como en el de la frecuencia. Sin embargo, a medida que vamos aumentando el grado del numerador/denominador o el orden del operador fraccionario esta aproximación se va degenerando. Por consiguiente, esta aproximación es idónea para órdenes y grados bajos, en caso contrario es recomendable el uso de la aproximación de Chebyshev – Padé (CP).
- Se ha probado que es posible el control predictivo de una planta que presenta naturaleza fraccionaria mediante la metodología general de control predictivo GPC, usando para ello modelos discretos finitos de la planta fraccionaria a controlar.
- Para la obtención de estos modelos se recomienda el uso de las distintas metodologías de Chebyshev usando Euler o Al–Alaoui como función generadora. Se desaconseja la obtención de modelos usando la metodología Crone al igual que el uso de Tustin como función generadora, debido principalmente al elevado número de sistemas inestables que se han obtenido.
- Al no disponerse en la actualidad de técnicas numéricas tipo Routh o Jury para estudiar la estabilidad de sistemas con operadores fraccionarios, se ha propuesto para el estudio de la estabilidad de los sistemas de control GPC de plantas fraccionarias el uso del criterio de Nyquist, ya que sólo técnicas geométricas de análisis complejo basadas en el principio del argumento son aplicables.
- Se han propuesto, para mejorar la estabilidad de estos sistemas de control GPC de plantas fraccionarias, tres técnicas las cuales podemos

resumir en: mejora de la respuesta del modelo a bajas frecuencias, uso del prefiltro del controlador  $T(z^{-1})$ , y ajuste de los parámetros  $N_u$  y  $\lambda$ . De forma general, podemos afirmar que estas técnicas mejoran la estabilidad y la robustez de estos sistemas frente a los problemas de desajuste entre la planta real fraccionaria y el modelo aproximado tomado.

- Se ha introducido y desarrollado el operador integral definida fraccionaria,  ${}^{\gamma}I_a^b$ . Asimismo, se han demostrado sus propiedades fundamentales, destacando la linealidad del operador para cualquier orden de integración al igual que su equivalente entero.
- Para la evaluación numérica de este operador, se han propuesto dos métodos diferentes, los cuales han sido desarrollados en el cuerpo de la memoria de esta Tesis.
- Se ha demostrado un teorema cuya conclusión es la generalización de la conocida regla de Barrow para el caso fraccionario.
- Se ha formulado la generalización fraccionaria del controlador predictivo GPC mediante el uso del operador integral definida fraccionaria. Esto ha dado lugar a un nuevo controlador llamado Fractional-order Generalized Predictive Control, FGPC, mediante la redefinición en términos fraccionarios de su función de coste.
- Este nuevo controlador presenta dos nuevos parámetros de ajuste,  $\alpha$  y  $\beta$ , que representan los órdenes de integración definida fraccionaria de los errores predichos y los esfuerzos de control, respectivamente. Estos son usados en lugar de las clásicas secuencias de pesos de GPC,  $\Gamma$  y  $\Lambda$ .
- Para la sintonía de estos dos nuevos parámetros, se ha propuesto un método basado en la resolución de un problema de optimización que tiene como variables de entrada los parámetros de ajuste del controlador, y como objetivo la consecución de unos criterios especificados en el dominio del tiempo y de la frecuencia.

- Se ha comprobado la eficacia de FGPC en los siguientes entornos: control de un servomotor, control de un sistema AGV en red, y control de un sistema *Smart wheel* en red. Para validar los resultados se ha comparado el rendimiento de FGPC con otros controladores bien conocidos como GPC y PID.

### 8.2. Trabajos futuros

A tenor de los resultados obtenidos, destacaremos una serie de ideas que pueden servir de base para la continuación futura del presente trabajo:

- Generalización del operador integral definida fraccionaria en el ámbito continuo, utilizando para ello otras definiciones de partida, cómo la definición de Riemann–Liouville y la de Caputo.
- Estudio del significado matemático y físico de la integral definida de orden fraccionario.
- Ampliación del estudio de las características de la función de coste del controlador FGPC.
- Formulación y estudio del controlador FGPC para sistemas multivariables.
- Desarrollo y generalización utilizando las herramientas de cálculo fraccionario de otros tipos de controladores predictivos (DMC, formulación en variables de estado, etc.).
- Aplicación del controlador FGPC a otras plantas reales.

## ***BIBLIOGRAFÍA***

Al-Alaoui, M.A. (1994). Novel IIR differentiator from the Simpson Integration rule, *IEEE Transactions on Circuits and systems I. Fundamental Theory and Applications*, 41(2), pp. 186 – 187.

Anastasio, T.J. (1994). *The fractional-order dynamics of brainstem vestibulo-oculomotor neurons*. *Biological Cybernetics*, no. 72, pp. 69 – 79. Springer-Verlag.

Åström, K.J. y R.M. Murray. (2008). *Feedback Systems. An introduction for Scientists and Engineers*. Princeton University Press. Princeton.

Aweya, J., M. Ouellette y D.Y. Montuno. (2004). Design and Stability Analysis of a Rate Control Algorithm Using the Routh-Hurwitz Stability Criterion. *IEEE/ACM Transactions on Networking*. Vol 12, No. 8, pp. 719 – 732.

Banerjee, A., D. Ferrari, B.A. Mah, M. Moran, D.C. Verma y H. Zhang. (1996). The Tenet Real-Time Protocol Suite: Design, Implementation, and Experiences. *IEEE/ACM Transactions on Networking*. Vol 4, No. 1.

Bhambhani, V., Y. Han, S. Mukhopadhyay, Y. Luo y Y.Q. Chen. (2008a). Experimental Study on the Real-time smart Wheel Networked Speed Control System Using Hardware-in-the-Loop Control. *Enviado a Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*.

Bhambhani, V., Y. Han, S. Mukhopadhyay, Y. Luo y Y.Q. Chen. (2008b). Random Delay Effect Minimization on a Hardware-in-the-Loop Networked Control System Using Optimal Fractional Order PI Controllers. *Proceedings of the IFAC Conference on Fractional Differentiation and Its Applications*. Ankara (Turquía).

Bitmead, R.B., M. Gevers y V. Wertz. (1990). *Adaptive Optimal Control: The Thinking Man's GPC*. Prentice Hall International. Series in Systems and Control Engineering.

Camacho, E.F. (1994). *Application of Generalized Predictive Control to a Solar Power Plant*. Proceedings of the 3<sup>rd</sup> IEEE Conference on Control Applications, Vol. 3, pp. 1657 – 1662.

Camacho, E.F. y C. Bordóns. (1995). *Model Predictive Control in the Process Industry*. Springer–Verlag.

Camacho, E.F. y C. Bordóns. (2004). *Model Predictive Control*, 2<sup>nd</sup> Edition. Springer.

Carlson, G.E. y C.A. Halijak. (1964). *Approximation of fractional capacitors  $(1/s)^{1/n}$  by a regular Newton process*. IEEE Transactions on Circuit Theory, no. 7, pp. 210 – 213.

Chai, S., G.P. Liu, D. Rees y Y. Xia. (2008). Design and Practical Implementation of Internet–Based Predictive Control of a Servo System. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*. Vol. 16, No. 1.

Chen, Y.Q. y K.L. Moore. (2002). Discretization Schemes for Fractional–Order differentiators and Integrators. *IEEE Transactions on Circuits and Systems–I: Fundamental Theory and Applications*, 49(3), pp. 363 – 367.

Chen, Y.Q., C.H. Hu y K.L. Moore. (2003). *Relay Feedback Tuning of Robust PID controllers with Iso–Damping Property*. Proceedings of 42<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control. Hawaii (USA).

Chen, Y.Q., H. Dou, B.M. Vinagre y C.A. Monje. (2006). A Robust Tuning Method for Fractional Order PI Controllers. *Proceedings of FDA'06*, Porto, Portugal.

---

Clarke, D.W., C. Mohtadi y P.S. Tuffs. (1987a). *Generalized Predictive Control. Part I. The Basic Algorithm*. Automatica, Vol. 23, N° 2, pp. 137 – 148.

Clarke, D.W., C. Mohtadi y P.S. Tuffs. (1987b). *Generalized Predictive Control. Part II. Extensions and Interpretations*. Automatica, Vol. 23, N° 2, pp. 149 – 160.

Clarke, D.W. y C. Mohtadi. (1988). *Properties of Generalized Predictive Control*. Report N° OUEL 1721/88. Department of Engineering Science. University of Oxford.

Clarke, D.W. y C. Mohtadi. (1989). *Properties of Generalized Predictive Control*. Automatica, Vol. 25, N° 6, pp. 859 – 875.

Clarke, D.W. y R. Scattolini. (1991). *Constrained Receding–Horizon Predictive Control*. IEE Proceedings–D, Vol. 138, N° 4, pp. 347 – 354.

Cody, W.J. (1970). *A survey of practical rational and polynomial approximation of functions*. SIAM Review. Vol. 12, No.3, pp. 400 – 423.

Cutler, C.R. y B.L. Ramaker. (1979). *Dynamic Matrix Control – A Computer Control Algorithm*. AIChE 86<sup>th</sup> National Meeting, Houston, Texas.

Debnath, L. (2002). *Fractional Calculus Fundamentals*. 41st IEEE conference on decision and control; tutorial workshop #2. (Y.Q. Chen and B. Vinagre, eds). Las Vegas (USA).

Demircioğlu, H. y P.J. Gawthrop. (1991). *Continuous–time Generalized Predictive Control (CGPC)*. Automatica, Vol. 27, N° 1, pp. 55 – 74.

Demircioğlu, H. y E. Karasu. (2000). *Generalized predictive control. A practical application and comparison of discrete and continuous time versions*. IEEE Control Systems Magazine, Vol 20, Issue 5, pp. 36–47.

Denis, J.E. Jr. y R.B. Schnabel. (1996). *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. Siam edition, 221–228.

Dorato, P. (1998). Non-Fragile Controller Design: An Overview. *Proceedings of the American Control Conference*. Philadelphia, Pennsylvania.

Dorčák, L., V. Lesko y I. Kostial. (1996). Identification of fractional-order dynamical system. *Proceedings of the 12<sup>th</sup> International Conference on Process Control and Simulation*. pp. 62 – 68, Slovak Republic.

Eriksson, L. (1998). Real-time Control Systems with Delays. Tesis doctoral, Lund Institute of Technology.

Eronini, U. (2001). *Dinámica de sistemas y control*. International Thomson Editores.

Farkas, H.M. y I. Kra. (1980). *Riemann surfaces* (2<sup>nd</sup> edition). Springer-Verlag, Berlin.

Fliege, N.J. (1994). *Multirate Digital Signal Processing*. John Wiley & Sons Ltd.

Gómez-Skarmeta, A.F., H. Martínez-Barberá y L.M. Tomás-Balibrea. (2002). Mimics: Exploiting Satellite Technology for an Intelligent Convoy. *Intelligent Transportation Systems*. pp. 85 – 89.

Goodwin, G.C, H. Haimoich, D.E. Quevedo y Welsh. (2004). A Moving Horizon Approach to Networked Control system Design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 49. No. 9, pp. 1573 – 1584.

Graves-Morris, P.R. (1979). Padé Approximation and Its Applications. *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 765, L. Wuytack, ed. Springer-Verlag, Berlin.

---

Greco, C., G. Menga, E. Mosca y G. Zappa. (1984). *Performance Improvement of Self Tuning Controllers by Multistep Horizons: The MUSMAR Approach*. Automatica, Vol. 20, pp. 681 – 700.

Hägglund, T. y K. Aström. (1996). Automatic tuning of PID controllers. I

Hartley, T.T. y C.F. Lorenzo. (2003). *Fractional–order system identification based on continuous order–distributions*. Signal processing. 83, pp. 2287 – 2300.

Hespanha, J.P., P. Naghshtabrizi y Y. Xu. (2007). A Survey of Recent Results in Networked Control Systems. *Proc. Of the IEEE*, Vol. 95, No. 1.

Hristu–Varsakelis, D. y W.S. Levine. (Eds) (2005). *Handbook of Networked and Embedded Control Systems*. Birkhäuser.

Ifeachor, E.C. y B.W. Jervis. (1993). *Digital Signal Processing: A Practical Approach*. Addison–Wesley Publishing Company, Great Britain.

Johansen, T.A. (2002). On Multi–Parametric Nonlinear Programming and Explicit Nonlinear Model Predictive Control. *Proc. 41<sup>th</sup> IEEE Conf. on Decision and Control*. Las Vegas.

Johansen, T.A. y A. Grancharova. (2003). Approximate Explicit Constrained Linear Model Predictive Control Via Orthogonal Search Tree. *IEEE Transactions on Automatic Control*. Vol. 48, No 5, pp. 810 – 815.

Keel, L.H. y S.P. Bhattacharyya. (1997). Robust, Fragile, or Optimal?. *IEEE Transactions on Automatic Control*. Vol. 42, No 8, pp. 1098 – 1105.

de Keyser, R.M.C. y A. Van Cauwenberghe. (1985). *Extended Prediction Self–Adaptive Control*. Proc. 7<sup>th</sup> IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation. York, U.K.

de Keyser, R.M.C. (1991). *Model Based Predictive Control without Explicit Process Identification*. IFAC International Symposium on Intelligent Tuning and Adaptive Control. Preprints, part III, pp. 110 – 115. Singapore.

de Keyser, R.M.C. (1992). *The MBPC Methodology*. Intensive Training Course on Model Based Predictive Control. U.N.E.D., Madrid.

Kouvaritakis, B., J. A. Rossiter y A.O.T. Chang. (1992). *Stable Generalized Predictive Control: an Algorithm with Guaranteed Stability*. IEE Proceedings–D, Vol 139, N° 4, pp. 349 – 362.

Kouvaritakis, B., J.A. Rossiter y G.J. Ju. (1996). *Robust Multivariable Generalized Predictive Control (RMSGPC)*. CESA'96 IMACS Multiconference: computational engineering in systems applications, pp. 179 – 184. Lille, France.

Lambert, M. (1987a). *Process Control Applications of Long-Range Prediction*. Report N° OUEL. 1715/87. Department of Engineering Science. University of Oxford.

Lambert, M. (1987b). *Adaptive Control of Flexible Systems*. Tesis Doctoral. Department of Engineering Science. University of Oxford.

Lay, L., A. Oustaloup, J.C. Trigeassou y F. Levron. (1998). Frequency domain identification by non integer model. *IFAC Conference on System Structure and Control*. No. 2, pp. 297 – 302. Nantes, France.

Levy, E. (1959). Complex curve fitting. *IRE transactions on automatic control*. Vol. 4, pp 37 – 43.

Linkens, D.A. y M. Mahfouf. (1994). *Generalized Predictive Control (GPC) in Clinical Anaesthesia*. Advances in Model-Based Predictive Control, pp. 429 – 445. D.W. Clarke (ed). Oxford University Press.

---

Lublin, L., S. Grocott y M. Athans. (1996).  $H_2$  (LQG) and  $H_\infty$  control. In LEVINE William S. The control handbook. Boca Raton: CRC Press, pp. 651 – 661.

Luyben, W.L. (ed) (1992). *Practical Distillation Control*. Van Nostrand Reinhold. New York.

Maciejowski, J.M. (2002). *Predictive Control with Constraints*. Prentice Hall.

de Madrid, A.P., C. Mañoso y R. Hernández. (2006). New direct discretization of the fractional-order differentiator/integrator by the Chebyshev–Padé approximation. *Proceedings of FDA'06*, Porto, Portugal.

Maione G. (2006). A Rational discrete Approximation to the Operator  $s^{0.5}$ . IEEE Signal Processing Letters.

Mañoso, C. (1998). *Estabilidad Robusta de Controladores Predictivos. Análisis utilizando la teoría de resultados de puntos extremos*. Tesis Doctoral. Universidad Nacional de Educación a Distancia, Madrid.

Martín Sánchez, J.M. (1974). Contribución a los Sistemas Adaptativos con Modelo de Referencia a partir de la Teoría de la Hiperestabilidad. Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Catalunya, Barcelona.

Martín Sánchez, J. M. (1976a). Adaptive predictive control system, *USA Patent* No. 4,197,576.

Martín Sánchez, J. M. (1976b). A new solution to adaptive control. *Proceedings of the IEEE*, Vol. 64, pp. 1209 – 1218.

Martín Sánchez, J. M. (1977). *Moderna Teoría de Control: Método de Control Adaptativo Predictivo. Teoría y Realizaciones*. Fundación Juan March, Serie Universidad, Madrid.

Martín Sánchez, J. M. y J. Rodellar. (1996). *Adaptive Predictive Control. From the Concepts to Plant Optimization*. Prentice Hall.

Martín Sánchez, J. M. y J. Rodellar. (2005). *Control Adaptativo Predictivo Experto. Metodología, Diseño y Aplicación*. UNED, Madrid.

Mason, J.C. y D.C. Handscomb. (2003). *Chebyshev Polynomials*. Taylor & Francis, CRC Press, ISBN: 0849303559.

Matignon, D. (1998). Stability properties for generalized fractional differential system, *Proceedings of the Colloquium FDS'98: fractional Differential Systems: Models, Methods and applications* (D. Matignon and G. Montseny, eds.). No. 5, pp. 145 – 158. Paris.

*Matlab Optimization Toolbox, Version 3.0. User's Guide*.(2005). The MathWorks, Inc.

Matsuda, K. y H. Fujii. (1993). *Hinf. Optimized wave-absorbing control: Analytical and experimental results*. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol 16, no. 6, pp. 1146 – 1153.

Megías, D., J. Serrano y C. de Prada. (1997). *Uncertainty Treatment in GPC: Design of T polynomial*. European Control Conference.

Megías, D. (2000). *Robustness aspects of Model Predictive Control*. Tesis Doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona (Spain).

Mittag-Leffler, G. (1904). *Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogene*. Acta Mathematica, Vol. 29, pp. 101 – 181.

Mohtadi, C. (1987). *Studies in Advanced Self-Tuning Algorithms*. Report N° OUEL 1689/87. Department of Engineering Science. University of Oxford.

---

Monje, C.A., B.M. Vinagre, Y.Q. Chen, V. Feliu, P. Lanusse y J. Sabatier. (2004). Proposals for fractional  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  tuning. *First IFAC workshop on fractional differentiation and its applications*. Bordeaux.

Monje, C.A. (2006). Design Methods of Fractional Order Controllers for Industrial Applications. Tesis Doctoral. Universidad de Extremadura (Spain).

Morari, M. y J.H. Lee. (1997). *Model predictive control: past, present and future*. PSE'97-ESCAPE-7 symposium. Trondheim, Norway.

Moreno, R. (1994). *Estimación de Estados y Control Predictivo del Proceso de Fangos Activados*. Tesis Doctoral. Facultad de Ciencias. Universidad Autónoma de Barcelona.

Mosca, E., J.M. Lemos y J. Zhang. (1990). *Stabilizing I/O Receding Horizon Control*. IEEE Conference on Decision and Control.

Neumaier, A. (2004). Complete Search in Continuous Global Optimization and Constraint Satisfaction". *Acta Numerica 2004* (A. Iserles, ed.), pp. 271 – 369. Cambridge University Press.

Oldham, K.B. y J. Spanier (1974). *The Fractional Calculus*. Academic Press, New York.

Ostertag, E. y J. Carvalho-Ostertag. (2006). Inverted Pendulum Stabilization in an NCS Scheme with Packet Losses. *Proceedings of the 7<sup>th</sup> Portuguese conference on automatic Control*. Lisbon, Portugal.

Oustaloup, A. (1983). *Systèmes asservis linéaires d'ordre fractionnaire*, Masson.

Oustaloup, A. (1991). *La commande CRONE: commande robuste d'ordre non entiere*. Hermès ed. Paris.

Peterka, V. (1984). *Predictor-based Self-tuning Control*. Automatica, Vol. 20, N° 1, pp. 39 – 50.

Petráš, I., I. Podlubny, P. O’Leary y L. Dorcak. (2001). Analogue fractional-order controllers: Realization, tuning and implementation. *Proceedings of the ICC’2001*. pp 9 – 14, Krynica, Poland.

Petráš, I. y M. Hypiusova. (2002). Design of Fractional-Order Controllers via  $H_\infty$  Norm Minimisation. *Selected Topics in Modelling and Control*. Slovak University of Technology Press, Bratislava, pp. 50 – 54.

Podlubny, I. (1999a). Fractional-order systems and  $PI^\lambda D^\mu$  controllers. *IEEE Trans. Automatic Control*, **44**(1), pp. 208 – 214.

Podlubny, I. (1999b). *Fractional Differential Equations*. Academic Press. San Diego.

Podlubny, I. (1999c). *Fractional Differential Equations*. Mathematics in Science and Engineering, **198**. Academic Press, San Diego, California.

Prada, C., J. Serrano, P. Vega y M.A. Piera. (1994). *A comparative study of DMC and GPC controllers*. Advances in Model Based Predictive Control (D.W. Clarke, Ed.). Oxford University Press.

Press, W.H., S.A. Teukolsky, W. T. Vetterling y B.P. Flannery. (1992). *Numerical recipes in C. The art of scientific computation, 2<sup>nd</sup> edition*. Cambridge University Press.

Quintana, J.J., A. Ramos y I. Nuez. (2006). *Identification of the Fractional Impedance of Ultracapacitor*. Proceedings of FDA’06. Oporto (Portugal).

Ralston, A. y H.S. Wilf. (1960). *Mathematical Methods for Digital Computers*. Chapter 13. John Wiley & Sons Inc, New York.

---

Ralston, A. y P. Rabinowitz. (1978). *A First Course in numerical Analysis*, 2<sup>nd</sup> edition. McGraw–Hill, New York.

Remes, E.Y. (1957). *General Computational Methods of Chebyshev Approximations. The Problems with Linear Real Parameters*, Books 1 and 2, Publishing House of the Academy of Science of the Ukrainian S.S.R. Kiev: English translation, AEC–TR–4491, United States Atomic Energy Commission.

Richalet, J., A. Rault, J.L. Testud y J. Papon. (1978). *Model Predictive Heuristic Control, Application to Industrial Processes*. Automatica, Vol. 14, 413 – 428.

Richalet, J. (1993). *Pratique de la Commande Prédictive*. Hermès.

Rivera, D.E., M. Morari y S. Skogestad. (1986). *Internal Model Control: 4, PID controller design*. Industrial and engineering Process Design and Development.

Rivlin, T. J. (1990). *Chebyshev Polynomials*. New York: Wiley.

Robinson, B.D. y D.W. Clarke. (1989). *A Robust Stability Result for Generalized Predictive Control*. Report N° OUEL 1773/89. Department of Engineering Science. University of Oxford.

Robinson, B.D. y D.W. Clarke. (1991). *Effects of a Prefilter in Generalized Predictive Control*. Proceedings IEE, Part D, Vol. 138, pp. 2–8.

Romero. M., A.P. de Madrid, C. Mañoso y R. Hernández. (2006). Discretization of the fractional–order differentiator/integrator by the Rational Chebyshev approximation. *Proceedings of Controlo 2006*. Lisboa, Portugal.

Romero, M., A.P. de Madrid, C. Mañoso y R. Hernández. (2008a). Fractional–Order Generalized Predictive Control. *Proceedings of 2008 Fractional differentiation and its Applications*. Ankara, Turquía.

Romero, M., I. Tejado, B.M. Vinagre y A.P. de Madrid. (2008b). Fractional–Order Generalized Predictive Control of a Servomotor Plant. *Proceedings of 2008 Fractional differentiation and its Applications*. Ankara, Turquía.

Romero, M., B.M. Vinagre y A.P. de Madrid. (2008c). GPC Control of a Fractional–Order Plant: Improving Stability and Robustness. *Proceedings of IFAC World Congress*. Seoul, Korea.

Romero, M., I. Tejado, J.I. Suárez, B.M. Vinagre y A.P. de Madrid. (2009a). GPC Strategies for the Lateral Control of a Networked AGV. *Proceedings of 2009 5<sup>th</sup> IEEE International Conference on Mechatronics*. Málaga, España.

Romero, M., A.P. de Madrid, C. Mañoso y R. Hernández. (2009b). Generalized Predictive Control of arbitrary real order. *New Trends in Nanotechnology and Fractional calculus Applications*, pp. 411–418. D. Baleanu *et al.* (eds.). Springer.

Romero, M., I. Tejado, B.M. Vinagre y A.P. de Madrid. (2009c). Position and velocity control of a servo by using GPC of arbitrary real order. *New Trends in Nanotechnology and Fractional calculus Applications*, pp. 369–376. D. Baleanu *et al.* (eds.). Springer.

Romero, M., A.P. de Madrid y B.M. Vinagre. (2010a). Arbitrary real–order cost functions for signals and systems. *Signal Processing*, Elsevier, (En prensa.)

Romero, M., A.P. de Madrid, C. Mañoso y B.M. Vinagre. (2010b). Fractional–Order Generalized Predictive Control: Formulation and some Properties. *Proceedings of 11th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision*. Singapore.

Rossiter, J.M., B. Kouvaritakis y R. M. Dunnett. (1991). *Application of Generalized Predictive Control to a Boiler–Turbine Unit for Electricity Generation*. IEE Proceedings–D. Vol. 138, N° 1, pp. 59 – 67.

---

Rossiter, J.M. (2003). *Model – Based Predictive Control. A Practical Approach*. CRC Press LLC.

Roy, S.C.D. (1967). *On the realization of a constant–argument immittance or fractional operator*. IEEE Transaction on Circuit Theory, vol. 14, no. 3, pp. 264 – 274.

Sanchis, J. (2002). *GPC mediante descomposición en valores singulares (SVD). Análisis de componentes principales (PCA) y criterios de selección*. Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Valencia (España).

Sáez, D., C.E. Cortés, E. Sáez, M. Riquelme, A. Núñez y A. Tirachini. (2007). *Hybrid Predictive Control Strategy for a Public Transport System with Uncertain Demand*. Proceedings of the Triennial Symposium on Transportation Analysis (TRISTAN) VI, Phunke, Thailand.

Skogestad, S. y I. Postlethwaite. (1996). *Multivariable feedback control. Analysis and Design*. John Wiley and Sons.

Soeterboek, R. (1992). *Predictive Control. A Unified Approach*. Prentice Hall.

Spanier, J. y Oldham, K.B. (1987). *The Chebyshev Polynomials  $T_n(x)$  and  $U_n(x)$* . Ch. 22 in An Atlas of Functions. Hemisphere. pp. 193 – 207. Washington, DC.

Suárez, J.I., B.M. Vinagre, F. Gutiérrez, J.E. Naranjo y Y.Q. Chen. (2004). Dynamics models o fan AGV Based on Experimental Results. *Proceedings of the 5<sup>th</sup> IFAC Symposium on Intelligent Autonomous Vehicles*. Lisbon, Portugal.

Suárez, J.I., B.M. Vinagre y Y.Q. Chen. (2006). A Fractional Adaptation Scheme for Lateral Control of an AGV. *Proceedings of the 2<sup>nd</sup> IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications*. Porto, Portugal.

Tejado, I., B.M. Vinagre y J.I. Suárez. (2008a). Effects of a Communication Network on the Longitudinal and Lateral Control of an AGV. *Proc. Of 2008 IEEE International Symposium on Industrial Electronics*. pp. 2084 – 2089.

Tejado, I., B.M. Vinagre, J.I. Suárez y T. de Pedro. (2008b). Bounded Control Strategies for Minimizing the Effects of the Communications Network on Lateral Control of an AGV. *Proc. of 14<sup>th</sup> IEEE Mediterranean Electrotechnical Conference*. Ajaccio, France.

Tejado, I., B.M. Vinagre y Y.Q. Chen. (2009a). Comparing Generalized Order PID Controllers for Network Control Systems with Random Delays and Data Dropouts. *Proceedings of the 2009 ASME Conference*.

Tejado, I., M. Romero, B.M. Vinagre, A.P. de Madrid y Y.Q. Chen. (2009b). Characterization and Modeling of Network Traffic to Control a Smart Wheel Remotely. *Proc. of Symposium on Fractional Signals and Systems*. Lisbon, Portugal.

Tenreiro, J.A. (2001). *Discrete-time fractional-order controllers*. Journal of Fractional Calculus and Applied Analysis. Vol. 4, no. 1, pp. 47 – 66.

Tøndel, P., T. A. Johansen y A. Bemporad. (2001). An Algorithm for Multi-Parametric Quadratic Programming and Explicit MPC Solutions. *Proc. of 40<sup>th</sup> IEEE conference on Decision and Control*. Vol. 2, pp. 1199 – 1204.

Valério, D. (2005). *Fractional robust system control*. PhD thesis. Instituto Superior Técnico, Lisboa (Portugal).

Valério, D. y J. Sá da Costa. (2006). *Tuning of Fractional controllers minimising  $H_2$  and  $H_\infty$  norms*. Acta polytechnica hungarica. Vol. 3, No. 4.

Vatanski, N., J.P. Georges, C. Aubrun, E. Rondeau y S.L. Jämsä-Jounela. (2009). *Networked Control with Delay Measurement and Estimation*. Control Engineering Practice. Vol 17, pp. 231–244.

---

Vinagre, B. M., I. Podlubny, A. Hernandez y V. Feliu. (2000). Some approximations of fractional order operators used in control theory and applications, *Fractional Calculus & Applied analysis*, **3(3)**, pp. 231 – 248.

Vinagre, B.M. (2001). *Modelado y control de sistemas dinámicos caracterizados por ecuaciones íntegro–diferenciales de orden fraccional*. Tesis Doctoral. Universidad Nacional de Educación a Distancia, Madrid (Spain).

Vinagre, B.M., C.A. Monje y A.J. Calderón. (2002). *Fractional Order Systems and Fractional Order Control Action*. 41st IEEE conference on decision and control; tutorial workshop #2. (Y.Q. Chen and B. Vinagre, eds). Las Vegas (USA).

Vinagre, B.M. y C.A. Monje. (2006). *Introducción al control fraccionario*. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial. No. 3, pp. 5 – 23.

Vinagre, B.M. y V. Feliu. (2007). *Optimal Fractional Controllers for Rational Order Systems: A Special Case of the Wiener–Hopf Spectral Factorization Method*. IEEE Transactions on Automatic Control. Vol. 52, No. 12.

Wang J., S. Y. Chao y A.M. Agogino. (1999). Sensor Noise Model Development of a Longitudinal Positioning Systems for AVCS. *Proceedings of the American Control Conference*. pp. 3760 – 3764. San Diego, USA.

West, B.J., Bologna, M. y P. Grigolini. (2003). *Physics of Fractal Operators*. Springer–Verlag. New York.

Ydstie, B. (1984). *Extended Horizon Adaptive Control*. 9<sup>th</sup> IFAC World Congress. Budapest, Hungría.

Yoon, T.W. (1994). *Robust Adaptive Predictive Control*. Tesis doctoral. Report N° OUEL 2022/94. Department of Engineering Science. University of Oxford

## Bibliografía

---

Yoon, T.W. y D.W. Clarke. (1995). *Observer Design in Receding-Horizon Control*. International Journal of Control. Vol. 61, N° 1, pp. 151 – 171.

# Anexo I

## Comparación estadística entre las aproximaciones de Chebyshev

En este anexo se presentan una serie de tablas que muestran la comparación estadística de las dos aproximaciones de Chebyshev: Chebyshev-Padé (CP) y racional de Chebyshev (RC), las cuales fueron descritas en el capítulo 3 de esta Tesis.

### I.1 Comparación de las respuestas escalón

Tabla I.1 Comparación usando Euler para discretizar y CP para aproximar

Orden   Grado	2	3	4	5
<b>-0.3</b>	$\bar{e} = 1.888196$	$\bar{e} = 1.217021$	$\bar{e} = 0.746426$	$\bar{e} = 0.420142$
	$\sigma = 1.114955$	$\sigma = 0.944666$	$\sigma = 0.730867$	$\sigma = 0.510480$
	$MQ=2.192737$	$MQ=1.540557$	$MQ=1.044598$	$MQ=0.661093$
<b>-0.5</b>	$\bar{e} = 6.436571$	$\bar{e} = 3.980913$	$\bar{e} = 2.231656$	$\bar{e} = 1.114261$
	$\sigma = 4.667968$	$\sigma = 3.717795$	$\sigma = 2.600748$	$\sigma = 1.612760$
	$MQ=7.950719$	$MQ=5.446670$	$MQ=3.426732$	$MQ=1.960082$
<b>-0.7</b>	$\bar{e} = 16.027003$	$\bar{e} = 8.519083$	$\bar{e} = 4.058063$	$\bar{e} = 1.723169$
	$\sigma = 14.685768$	$\sigma = 9.803784$	$\sigma = 5.745496$	$\sigma = 3.089655$
	$MQ=21.73666$	$MQ=2.987106$	$MQ=7.033516$	$MQ=3.537356$

I. Comparación estadística entre las aproximaciones de Chebyshev

Tabla I.2 Comparación usando Euler para discretizar y RC para aproximar

Orden   Grado	2	3	4	5
<b>-0.3</b>	$\bar{e} = 0.636368$	$\bar{e} = 0.189651$	$\bar{e} = -4.329420$	$\bar{e} = 1.004060$
	$\sigma = 0.741697$	$\sigma = 0.335108$	$\sigma = 3.095350$	$\sigma = 0.737977$
	$MQ=0.977211$	$MQ=0.385015$	$MQ=5.321905$	$MQ=1.246038$
<b>-0.5</b>	$\bar{e} = 1.368248$	$\bar{e} = 0.125569$	$\bar{e} = 10.739734$	$\bar{e} = -15.841434$
	$\sigma = 2.194876$	$\sigma = 0.689472$	$\sigma = 5.519074$	$\sigma = 11.317819$
	$MQ=2.586190$	$MQ=0.700729$	$MQ=12.07453$	$MQ=19.46823$
<b>-0.7</b>	$\bar{e} = 2.060124$	$\bar{e} = -14.60354$	$\bar{e} = 24.962281$	$\bar{e} = \infty$
	$\sigma = 4.359834$	$\sigma = 11.694370$	$\sigma = 21.766415$	$\sigma = \infty$
	$MQ=4.821567$	$MQ=18.70795$	$MQ=33.11757$	$MQ = \infty$

Tabla I.3 Comparación utilizando Tustin para discretizar y CP para aproximar

Orden   Grado	2	3	4	5
<b>-0.3</b>	$\bar{e} = 2.458753$	$\bar{e} = 1.815770$	$\bar{e} = 1.332896$	$\bar{e} = 0.958325$
	$\sigma = 1.185494$	$\sigma = 1.104329$	$\sigma = 0.985760$	$\sigma = 0.841719$
	$MQ=2.729562$	$MQ=2.125149$	$MQ=1.657737$	$MQ=1.275422$
<b>-0.5</b>	$\bar{e} = 8.108996$	$\bar{e} = 5.962731$	$\bar{e} = 4.239334$	$\bar{e} = 2.872804$
	$\sigma = 5.027184$	$\sigma = 4.537034$	$\sigma = 3.855430$	$\sigma = 3.069384$
	$MQ=9.540549$	$MQ=7.492242$	$MQ=5.729972$	$MQ=4.203780$
<b>-0.7</b>	$\bar{e} = 20.610142$	$\bar{e} = 13.846223$	$\bar{e} = 8.760554$	$\bar{e} = 5.249764$
	$\sigma = 16.693160$	$\sigma = 13.508660$	$\sigma = 10.014064$	$\sigma = 6.949158$
	$MQ=26.52112$	$MQ=19.34311$	$MQ=13.30427$	$MQ=8.708545$

I.1. Comparación de las respuestas escalón

Tabla I.4 Comparación usando Tustin para discretizar y RC para aproximar

Orden   Grado	2	3	4	5
<b>-0.3</b>	$\bar{e} = 0.923680$	$\bar{e} = 0.560426$	$\bar{e} = 0.290714$	$\bar{e} = 0.171211$
	$\sigma = 0.972247$	$\sigma = 0.721333$	$\sigma = 0.444701$	$\sigma = 0.362769$
	$MQ=1.340974$	$MQ=0.913382$	$MQ=0.531248$	$MQ=0.401100$
<b>-0.5</b>	$\bar{e} = 3.185059$	$\bar{e} = \infty$	$\bar{e} = \infty$	$\bar{e} = \infty$
	$\sigma = 3.678842$	$\sigma = \infty$	$\sigma = \infty$	$\sigma = \infty$
	$MQ=4.865706$	$MQ=\infty$	$MQ=\infty$	$MQ=\infty$
<b>-0.7</b>	$\bar{e} = 4.612583$	$\bar{e} = 9.488645$	$\bar{e} = \infty$	$\bar{e} = \infty$
	$\sigma = 7.483637$	$\sigma = 11.410750$	$\sigma = \infty$	$\sigma = \infty$
	$MQ=8.790150$	$MQ=14.83937$	$MQ=\infty$	$MQ=\infty$

Tabla I.5 Comparación usando Al-Alaoui para discretizar y CP para aproximar

Orden   Grado	2	3	4	5
<b>-0.3</b>	$\bar{e} = 1.953857$	$\bar{e} = 1.282550$	$\bar{e} = 0.807331$	$\bar{e} = 0.471272$
	$\sigma = 1.125960$	$\sigma = 0.967498$	$\sigma = 0.764762$	$\sigma = 0.550392$
	$MQ=2.255000$	$MQ=1.606472$	$MQ=1.111980$	$MQ=0.724537$
<b>-0.5</b>	$\bar{e} = 6.648227$	$\bar{e} = 4.212995$	$\bar{e} = 2.443057$	$\bar{e} = 1.274069$
	$\sigma = 4.724855$	$\sigma = 3.835989$	$\sigma = 2.761200$	$\sigma = 1.771993$
	$MQ=8.155832$	$MQ=5.697409$	$MQ=3.686577$	$MQ=2.182299$
<b>-0.7</b>	$\bar{e} = 16.644311$	$\bar{e} = 9.136953$	$\bar{e} = 4.522773$	$\bar{e} = 2.019592$
	$\sigma = 14.997534$	$\sigma = 10.292463$	$\sigma = 6.221435$	$\sigma = 3.459237$
	$MQ=22.40318$	$MQ=13.76198$	$MQ=7.691037$	$MQ=4.005257$

## I. Comparación estadística entre las aproximaciones de Chebyshev

Tabla I.6 Comparación usando Al-Alaoui para discretizar y RC para aproximar

Orden   Grado	2	3	4	5
<b>-0.3</b>	$\bar{e} = 0.683058$	$\bar{e} = 0.220240$	$\bar{e} = 0.962783$	$\bar{e} = 1.539716$
	$\sigma = 0.778013$	$\sigma = 0.391995$	$\sigma = 0.560379$	$\sigma = 0.926155$
	$MQ=1.035239$	$MQ=0.449586$	$MQ=1.113955$	$MQ=1.796740$
<b>-0.5</b>	$\bar{e} = 1.569149$	$\bar{e} = 0.012985$	$\bar{e} = -7.690672$	$\bar{e} = 3.918309$
	$\sigma = 2.340675$	$\sigma = 0.791984$	$\sigma = 5.929351$	$\sigma = 2.883336$
	$MQ=2.817733$	$MQ=0.791992$	$MQ=9.710554$	$MQ=4.864637$
<b>-0.7</b>	$\bar{e} = 2.310040$	$\bar{e} = -19.20793$	$\bar{e} = 4.058578$	$\bar{e} = 21.407938$
	$\sigma = 4.607443$	$\sigma = 14.864160$	$\sigma = 3.112790$	$\sigma = 14.655808$
	$MQ=5.153592$	$MQ=24.28647$	$MQ=5.114596$	$MQ=5.942992$

## I.2 Comparación en el dominio de la frecuencia

Tabla I.7 Comparación de magnitud usando Euler para discretizar y CP para aproximar

Orden   Grado	2	3	4	5
<b>-0.3</b>	$\bar{e} = 2.529049$	$\bar{e} = 1.928464$	$\bar{e} = 1.543274$	$\bar{e} = 1.259199$
	$\sigma = 5.059419$	$\sigma = 4.271826$	$\sigma = 3.759657$	$\sigma = 3.383640$
	$MQ=5.654044$	$MQ=4.685000$	$MQ=4.062336$	$MQ=3.608761$
<b>-0.5</b>	$\bar{e} = 3.624077$	$\bar{e} = 2.816046$	$\bar{e} = 2.253531$	$\bar{e} = 1.825739$
	$\sigma = 7.731778$	$\sigma = 6.598865$	$\sigma = 5.836580$	$\sigma = 5.264435$
	$MQ=8.535487$	$MQ=7.171582$	$MQ=6.253799$	$MQ=5.569550$
<b>-0.7</b>	$\bar{e} = 4.131591$	$\bar{e} = 3.190011$	$\bar{e} = 2.503100$	$\bar{e} = 1.977125$
	$\sigma = 9.530235$	$\sigma = 8.197468$	$\sigma = 7.262090$	$\sigma = 6.549068$
	$MQ=10.382899$	$MQ=8.792465$	$MQ=7.677937$	$MQ=6.837866$

## I.2. Comparación en el dominio de la frecuencia

Tabla I.8 Comparación de magnitud usando Euler para discretizar y RC para aproximar

Orden   Grado	2	3	4	5
<b>-0.3</b>	$\bar{e} = 1.498824$	$\bar{e} = 1.035964$	$\bar{e} = -5.846957$	$\bar{e} = 1.804845$
	$\sigma = 3.726404$	$\sigma = 3.108196$	$\sigma = 11.974077$	$\sigma = 3.807992$
	$MQ=4.014807$	$MQ=3.274819$	$MQ=13.319987$	$MQ=4.212336$
<b>-0.5</b>	$\bar{e} = 2.093087$	$\bar{e} = 1.353349$	$\bar{e} = 6.555450$	$\bar{e} = -5.782282$
	$\sigma = 5.563217$	$\sigma = 4.666704$	$\sigma = 10.232844$	$\sigma = 10.596610$
	$MQ=5.941334$	$MQ=4.856738$	$M=12.148264$	$MQ=12.066923$
<b>-0.7</b>	$\bar{e} = 2.343546$	$\bar{e} = -3.297787$	$\bar{e} = -2.148400$	$\bar{e} = -3.027047$
	$\sigma = 6.939539$	$\sigma = 9.026295$	$\sigma = 7.097868$	$\sigma = 8.393948$
	$MQ=7.321287$	$MQ=9.605620$	$MQ=7.412488$	$MQ=8.919132$

Tabla I.9 Comparación de fase usando Euler para discretizar y CP para aproximar

Orden Grado	2	3	4	5
<b>-0.3</b>	$\bar{e} = -14.980696$	$\bar{e} = -13.619405$	$\bar{e} = -12.678781$	$\bar{e} = -11.940438$
	$\sigma = 13.979644$	$\sigma = 13.344411$	$\sigma = 12.941686$	$\sigma = 12.664475$
	$M=20.485513$	$M=19.062618$	$MQ=18.112737$	$MQ=17.401224$
<b>-0.5</b>	$\bar{e} = -23.742736$	$\bar{e} = -21.752029$	$\bar{e} = -20.303410$	$\bar{e} = -19.137518$
	$\sigma = 22.710743$	$\sigma = 21.750311$	$\sigma = 21.169642$	$\sigma = 20.760424$
	$M=32.847824$	$MQ=30.753109$	$MQ=29.324632$	$MQ=28.227802$
<b>-0.7</b>	$\bar{e} = -30.989303$	$\bar{e} = -28.493080$	$\bar{e} = -26.590404$	$\bar{e} = -25.034355$
	$\sigma = 30.380420$	$\sigma = 29.404285$	$\sigma = 28.760926$	$\sigma = 28.255610$
	$MQ=43.386448$	$MQ=40.934129$	$MQ=39.158821$	$MQ=37.739900$

I. Comparación estadística entre las aproximaciones de Chebyshev

Tabla I.10 Comparación de fase usando Euler para discretizar y RC para aproximar

Orden Grado	2	3	4	5
<b>-0.3</b>	$\bar{e} = -12.384055$	$\bar{e} = -11.326500$	$\bar{e} = 18.566323$	$\bar{e} = -13.038016$
	$\sigma = 13.759006$	$\sigma = 12.626406$	$\sigma = 31.642575$	$\sigma = 12.394865$
	$MQ = 18.506370$	$MQ = 16.957485$	$MQ = 36.673691$	$MQ = 17.985242$
<b>-0.5</b>	$\bar{e} = -19.480288$	$\bar{e} = -17.742724$	$\bar{e} = -28.838003$	$\bar{e} = 12.318407$
	$\sigma = 21.999423$	$\sigma = 20.604830$	$\sigma = 21.844408$	$\sigma = 29.996889$
	$MQ = 29.376389$	$MQ = 27.183427$	$MQ = 36.170864$	$MQ = 32.413834$
<b>-0.7</b>	$\bar{e} = -25.811551$	$\bar{e} = 1.084433$	$\bar{e} = -53.405262$	$\bar{e} = 0.546310$
	$\sigma = 29.192876$	$\sigma = 29.559404$	$\sigma = 57.398098$	$\sigma = 28.368854$
	$MQ = 38.956488$	$MQ = 29.564516$	$MQ = 78.379647$	$MQ = 28.359928$

Tabla I.11 Comparación de magnitud usando Tustin para discretizar y CP para aproximar

Orden Grado	2	3	4	5
<b>-0.3</b>	$\bar{e} = 3.459593$	$\bar{e} = 2.748477$	$\bar{e} = 2.315627$	$\bar{e} = 2.008213$
	$\sigma = 5.787895$	$\sigma = 4.903605$	$\sigma = 4.345615$	$\sigma = 3.949879$
	$MQ = 6.740550$	$MQ = 5.619201$	$MQ = 4.922155$	$MQ = 4.429318$
<b>-0.5</b>	$\bar{e} = 4.753990$	$\bar{e} = 3.946945$	$\bar{e} = 3.381803$	$\bar{e} = 2.951852$
	$\sigma = 8.595348$	$\sigma = 7.397897$	$\sigma = 6.638461$	$\sigma = 6.076109$
	$MQ = 9.818684$	$MQ = 8.381678$	$MQ = 7.447260$	$MQ = 6.752453$
<b>-0.7</b>	$\bar{e} = 5.374344$	$\bar{e} = 4.548097$	$\bar{e} = 3.901668$	$\bar{e} = 3.390288$
	$\sigma = 10.320220$	$\sigma = 9.039506$	$\sigma = 8.189373$	$\sigma = 7.529516$
	$MQ = 11.631165$	$MQ = 10.115145$	$MQ = 9.067622$	$MQ = 8.254148$

## I.2. Comparación en el dominio de la frecuencia

Tabla I.12 Comparación de magnitud usando Tustin para discretizar y RC para aproximar

Orden Grado	2	3	4	5
<b>-0.3</b>	$\bar{e} = 1.743775$	$\bar{e} = 1.722841$	$\bar{e} = 1.438083$	$\bar{e} = 1.333846$
	$\sigma = 4.532898$	$\sigma = 3.665649$	$\sigma = 3.315540$	$\sigma = 3.145006$
	$MQ=4.854623$	$MQ=4.048669$	$MQ= 3.612464$	$MQ =3.414721$
<b>-0.5</b>	$\bar{e} = 3.090668$	$\bar{e} = 2.665997$	$\bar{e} = 2.115427$	$\bar{e} = 1.166363$
	$\sigma = 6.552492$	$\sigma = 5.438430$	$\sigma = 5.113733$	$\sigma = 4.173076$
	$MQ=7.241854$	$MQ = .054295$	$MQ =5.531650$	$MQ= 4.330999$
<b>-0.7</b>	$\bar{e} = 3.501477$	$\bar{e} = 4.000747$	$\bar{e} = 1.903053$	$\bar{e} = -2.398649$
	$\sigma = 7.523226$	$\sigma = 8.494526$	$\sigma = 5.599775$	$\sigma = 9.264864$
	$MQ=8.294737$	$MQ =9.385670$	$MQ =5.911660$	$MQ =9.565845$

Tabla I.13 Comparación de fase usando Tustin para discretizar y CP para aproximar

Orden Grado	2	3	4	5
<b>-0.3</b>	$\bar{e}=-15.176395$	$\bar{e} = -13.609015$	$\bar{e} = -12.660021$	$\bar{e} = -11.932720$
	$\sigma =17.572689$	$\sigma = 16.646655$	$\sigma = 15.994126$	$\sigma = 15.631377$
	$MQ=23.21235$	$MQ=21.495099$	$MQ=20.391969$	$MQ=19.659232$
<b>-0.5</b>	$\bar{e}=-23.473924$	$\bar{e} = -21.310003$	$\bar{e} = -19.979450$	$\bar{e} = -18.895377$
	$\sigma =28.243603$	$\sigma = 26.864725$	$\sigma = 26.034915$	$\sigma = 25.542313$
	$MQ=36.71414$	$MQ=34.279848$	$MQ=32.807277$	$MQ=31.761496$
<b>-0.7</b>	$\bar{e}=-29.910006$	$\bar{e} = -27.464103$	$\bar{e} = -25.819701$	$\bar{e} = -24.429312$
	$\sigma =37.350834$	$\sigma = 36.001270$	$\sigma = 35.272458$	$\sigma = 34.762383$
	$MQ=47.83615$	$MQ=45.266680$	$MQ=43.698502$	$MQ=42.473593$

I. Comparación estadística entre las aproximaciones de Chebyshev

Tabla I.14 Comparación de fase usando Tustin para discretizar y RC para aproximar

Orden Grado	2	3	4	5
<b>-0.3</b>	$\bar{e} = -12.611132$	$\bar{e} = -11.031766$	$\bar{e} = -10.551388$	$\bar{e} = -10.186773$
	$\sigma = 19.493264$	$\sigma = 16.164298$	$\sigma = 15.563671$	$\sigma = 15.212594$
	$MQ=23.208792$	$MQ=19.563310$	$MQ=18.796739$	$MQ=18.301966$
<b>-0.5</b>	$\bar{e} = -19.622630$	$\bar{e} = -17.369511$	$\bar{e} = -16.478673$	$\bar{e} = -13.986813$
	$\sigma = 27.963400$	$\sigma = 24.677135$	$\sigma = 25.391744$	$\sigma = 24.536043$
	$MQ=34.149925$	$MQ=30.167067$	$MQ=30.259587$	$MQ=28.232008$
<b>-0.7</b>	$\bar{e} = -24.533827$	$\bar{e} = -26.240678$	$\bar{e} = -19.465769$	$\bar{e} = 21.286279$
	$\sigma = 34.376978$	$\sigma = 35.980046$	$\sigma = 32.855781$	$\sigma = 51.662243$
	$MQ=42.219705$	$MQ=44.517888$	$MQ=38.175110$	$MQ=55.851805$

Tabla I.15 Comparación de magnitud usando Al-Alaoui para discretizar y CP para aproximar

Orden Grado	2	3	4	5
<b>-0.3</b>	$\bar{e} = 2.654606$	$\bar{e} = 2.043347$	$\bar{e} = 1.653669$	$\bar{e} = 1.366983$
	$\sigma = 5.105852$	$\sigma = 4.305993$	$\sigma = 3.788368$	$\sigma = 3.409190$
	$MQ=5.752442$	$MQ=4.764274$	$MQ=4.131828$	$MQ=3.671457$
<b>-0.5</b>	$\bar{e} = 3.800399$	$\bar{e} = 2.989621$	$\bar{e} = 2.425484$	$\bar{e} = 1.995719$
	$\sigma = 7.778800$	$\sigma = 6.635634$	$\sigma = 5.870124$	$\sigma = 5.295934$
	$MQ=8.654030$	$MQ=7.274987$	$MQ=6.348769$	$MQ=5.657011$
<b>-0.7</b>	$\bar{e} = 4.348288$	$\bar{e} = 3.413392$	$\bar{e} = 2.727575$	$\bar{e} = 2.200077$
	$\sigma = 9.555606$	$\sigma = 8.223206$	$\sigma = 7.289567$	$\sigma = 6.576525$
	$MQ=10.494089$	$MQ=8.899705$	$MQ=7.779737$	$MQ=6.931650$

## I.2. Comparación en el dominio de la frecuencia

Tabla I.16 Comparación de magnitud usando Al-Alaoui para discretizar y RC para aproximar

Orden Grado	2	3	4	5
<b>-0.3</b>	$\bar{e} = 1.596965$	$\bar{e} = 1.140935$	$\bar{e} = 1.742971$	$\bar{e} = 2.391188$
	$\sigma = 3.755692$	$\sigma = 3.154923$	$\sigma = 3.561778$	$\sigma = 4.334556$
	$MQ=4.079389$	$MQ=3.353404$	$MQ= 3.963777$	$MQ = 4.948471$
<b>-0.5</b>	$\bar{e} = 2.276208$	$\bar{e} = 1.478734$	$\bar{e} = -4.342073$	$\bar{e} = 2.915048$
	$\sigma = 5.578215$	$\sigma = 4.697616$	$\sigma = 9.768836$	$\sigma = 6.068125$
	$MQ=6.022167$	$MQ=4.922620$	$MQ=10.685894$	$MQ= 6.729251$
<b>-0.7</b>	$\bar{e} = 2.558324$	$\bar{e} = -3.546974$	$\bar{e} = -0.947718$	$\bar{e} = 5.298269$
	$\sigma = 6.889400$	$\sigma = 10.322883$	$\sigma = 7.514368$	$\sigma = 9.692811$
	$MQ=7.345842$	$MQ=10.910379$	$MQ = 7.570167$	$MQ=11.042114$

Tabla I.17 Comparación de fase usando Al-Alaoui para discretizar y CP para aproximar

Orden Grado	2	3	4	5
<b>-0.3</b>	$\bar{e} = -14.891305$	$\bar{e} = -13.513426$	$\bar{e} = -12.570663$	$\bar{e} = -11.832682$
	$\sigma = 14.347230$	$\sigma = 13.672869$	$\sigma = 13.247896$	$\sigma = 12.955105$
	$MQ=20.673368$	$MQ=19.219081$	$MQ=18.257952$	$MQ=17.540789$
<b>-0.5</b>	$\bar{e} = -23.540936$	$\bar{e} = -21.544102$	$\bar{e} = -20.101733$	$\bar{e} = -18.941277$
	$\sigma = 23.283493$	$\sigma = 22.266305$	$\sigma = 21.656140$	$\sigma = 21.226541$
	$MQ=33.102185$	$MQ=30.974843$	$MQ=29.539788$	$MQ=28.440947$
<b>-0.7</b>	$\bar{e} = -30.647979$	$\bar{e} = -28.167994$	$\bar{e} = -26.282684$	$\bar{e} = -24.738526$
	$\sigma = 31.099332$	$\sigma = 30.070400$	$\sigma = 29.401937$	$\sigma = 28.878780$
	$MQ=43.652032$	$MQ=41.191754$	$MQ=39.425739$	$MQ=38.015058$

## I. Comparación estadística entre las aproximaciones de Chebyshev

Tabla I.18 Comparación de fase usando Al-Alaoui para discretizar y RC para aproximar

Orden Grado	2	3	4	5
<b>-0.3</b>	$\bar{e} = -12.216992$	$\bar{e} = -11.257036$	$\bar{e} = -12.334224$	$\bar{e} = -13.886455$
	$\sigma = 14.177928$	$\sigma = 12.992369$	$\sigma = 12.018609$	$\sigma = 12.547357$
	$MQ = 18.710092$	$MQ = 17.185858$	$MQ = 17.217305$	$MQ = 18.711290$
<b>-0.5</b>	$\bar{e} = -19.157915$	$\bar{e} = -17.532838$	$\bar{e} = 9.850857$	$\bar{e} = -20.768600$
	$\sigma = 22.515488$	$\sigma = 21.186967$	$\sigma = 29.654429$	$\sigma = 20.533788$
	$MQ = 29.554458$	$MQ = 27.492528$	$MQ = 31.233718$	$MQ = 29.198451$
<b>-0.7</b>	$\bar{e} = -25.271278$	$\bar{e} = 2.340160$	$\bar{e} = -3.690704$	$\bar{e} = -31.561705$
	$\sigma = 29.759527$	$\sigma = 29.293254$	$\sigma = 26.584001$	$\sigma = 28.263642$
	$MQ = 39.030518$	$MQ = 29.371976$	$MQ = 26.825802$	$MQ = 42.357713$

### I.3 Distribución de ceros y polos

Tabla I.19 Ceros de las aproximaciones obtenidas usando Euler para discretizar y CP para aproximar

Orden   Grado	2	3	4	5
<b>-0.3</b>	0.283893	0.148045	0.089772	0.060030
	0.944532	0.731056	0.520567	0.373479
		0.982252	0.890418	0.749664
			0.991779	0.945116
				0.996591
<b>-0.5</b>	0.207899	0.104600	0.062405	0.041346
	0.929146	0.693692	0.481391	0.340207
		0.978022	0.875962	0.727312
			0.989958	0.940201
				0.994345
<b>-0.7</b>	0.127255	0.061692	0.036213	0.023732
	0.909753	0.650946	0.439134	0.305575
		0.973125	0.859796	0.703235
			0.987997	0.933995
				0.992582

Tabla I.20 Ceros de las aproximaciones obtenidas usando Euler para discretizar y RC para aproximar

<b>Orden   Grado</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<b>-0.3</b>	0.595951	0.362931	0.125043	-0.467660
	0.988868	0.940124	0.760186	0.392530
		0.996691	0.977620	0.919062
			0.998726	0.988623
				1.004864
<b>-0.5</b>	0.549687	0.300764	-0.057323	0.042223
	0.988755	0.942254	0.665545	0.346635
		0.996436	0.977180	0.735743
			0.998052	0.944287
				0.994851
<b>-0.7</b>	0.449782	0.219502	-0.221248	-0.732056
	0.986545	0.949823	0.564961	0.291368
		0.996609	0.981391	0.954483
			1.000498	0.997266
				1.098421

I. Comparación estadística entre las aproximaciones de Chebyshev

Tabla I.21 Polos de las aproximaciones obtenidas usando Euler para discretizar y CP para aproximar

<b>Orden   Grado</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<b>-0.3</b>	0.548016	0.309494	0.192513	0.130077
	0.986764	0.856469	0.660546	0.494549
		0.994992	0.942218	0.830946
			0.997269	0.969317
				0.999999
<b>-0.5</b>	0.653337	0.380771	0.238016	0.160748
	0.994285	0.897454	0.714633	0.543760
		0.997524	0.958203	0.860945
			0.998876	0.977970
				0.999999
<b>-0.7</b>	0.750477	0.456371	0.287718	0.194428
	0.997929	0.929923	0.764743	0.592575
		0.998951	0.971810	0.887574
			0.998853	0.984553
				0.999999

Tabla I.22 Polos de las aproximaciones obtenidas usando Euler para discretizar y RC para aproximar

<b>Orden  Grado</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<b>-0.3</b>	0.843969	0.634105	0.293580	-0.452171
	0.997090	0.974075	0.876914	0.628432
		0.998840	0.988924	0.961219
			1.000000	0.997753
				1.000000
<b>-0.5</b>	0.924989	0.760679	0.169931	0.164057
	0.998760	0.985702	0.908186	0.552324
		0.999415	0.996 - 0.001i	0.867512
			0.996 + 0.001i	0.979851
				0.999999
<b>-0.7</b>	0.960081	0.869475	0.054012	-0.697558
	0.999448	0.992445	0.950806	0.885615
		0.999999	0.999118	0.993535
			1.000000	1.000000
				1.097991

I. Comparación estadística entre las aproximaciones de Chebyshev

Tabla I.23 Ceros de las aproximaciones obtenidas usando Tustin para discretizar y CP para aproximar

<b>Orden   Grado</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<b>-0.3</b>	-0.882685	0.946431	-0.987428	0.988023
	0.812628	-0.968740	-0.626499	0.795853
		-0.065867	0.977359	-0.993570
			0.551293	-0.834137
				-0.042753
<b>-0.5</b>	-0.911296	0.938602	-0.990836	0.986126
	0.784990	-0.976764	-0.653931	0.782876
		-0.116060	0.973913	-0.995391
			0.524770	-0.847788
				-0.072678
<b>-0.7</b>	-0.944470	0.930055	-0.994373	0.984176
	0.749997	-0.985516	-0.684325	0.769268
		-0.174926	0.970332	-0.997217
			0.495674	-0.862456
				-0.104764

Tabla I.24 Ceros de las aproximaciones obtenidas usando Tustin para discretizar y RC para aproximar

<b>Orden   Grado</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<b>-0.3</b>	0.959994	-0.979649	0.995133	-0.996838
	-0.843321	0.988617	0.854914	-0.895262
		0.408618	-0.993860	0.996090
			-0.498235	0.923918
				0.110386
<b>-0.5</b>	0.947743	-1.035179	0.995100	-1.018700
	-0.694530	0.988280	0.878387	-0.955028
		0.227947	-1.021922	0.996905
			-0.661467	0.946685
				0.182998
<b>-0.7</b>	0.955083	0.938995	0.996274	0.997518
	-0.488357	-0.987182	0.920113	0.954272
		-0.167002	-1.031468	-1.112685
			-0.598567	-1.008865
				-0.115151

## I. Comparación estadística entre las aproximaciones de Chebyshev

Tabla I.25 Polos de las aproximaciones obtenidas usando Tustin para discretizar y CP para aproximar

<b>Orden   Grado</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<b>-0.3</b>	0.964614	-0.876877	0.993985	-0.978358
	-0.520710	0.987707	0.780638	-0.680885
		0.420445	-0.954388	0.996459
			-0.309547	0.899575
				0.277420
<b>-0.5</b>	0.988437	-0.774314	-0.919614	-0.963543
	-0.168070	0.995111	0.997292	-0.559817
		0.636117	0.863223	0.998271
			-0.089207	0.935513
				0.443150
<b>-0.7</b>	0.996707	-0.619329	-0.865804	-0.940996
	0.219767	0.998300	0.998939	0.999273
		0.786891	0.917947	0.959702
			0.137169	0.584667
				-0.413838

Tabla I.26 Polos de las aproximaciones obtenidas usando Tustin para discretizar y RC para aproximar

<b>Orden   Grado</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<b>-0.3</b>	0.993223	-0.870560	-0.969851	-0.989014
	-0.113629	0.997167	0.998506	-0.755050
		0.798635	0.945302	0.998730
			0.030714	0.967188
				0.518638
<b>-0.5</b>	0.997307	-1.037487	-1.041738	-1.026560
	0.408810	0.998741	0.999258	-0.616417
		0.907934	0.976130	0.999590
			0.391460	0.987039
				0.770125
<b>-0.7</b>	0.999157	-0.623884	-1.038156	-1.014382
	0.818432	0.998673	0.999758	-0.899974
		0.804565	0.991059	0.999999
			0.773127	0.994075
				0.877801

I. Comparación estadística entre las aproximaciones de Chebyshev

Tabla I.27 Ceros de las aproximaciones obtenidas usando Al -Alaoui para discretizar y CP para aproximar

Orden   Grado	2	3	4	5
<b>-0.3</b>	0.936744	0.980093	0.990957	0.995284
	0.168365	0.685193	0.872861	0.938476
		0.017049	0.438225	0.706112
			-0.046576	0.268893
				-0.078733
<b>-0.5</b>	0.919453	0.975405	0.989033	0.994211
	0.084255	0.642223	0.856315	0.930959
		-0.030085	0.393619	0.681020
			-0.075975	0.231500
				-0.098684
<b>-0.7</b>	0.897631	0.969944	0.986744	0.992911
	-0.004374	0.593120	0.837953	0.923153
		-0.076453	0.345730	0.653552
			-0.104085	0.192734
				-0.117463

Tabla I.28 Ceros de las aproximaciones obtenidas usando Al -Alaoui para discretizar y RC para aproximar

<b>Orden   Grado</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<b>-0.3</b>	0.987161	0.996023	0.997918	-0.675996
	0.512206	0.922952	0.971493	1.001703
		0.232012	0.671478	0.989989
			-0.064678	0.899914
				0.273352
<b>-0.5</b>	0.987752	0.995668	0.997973	0.994457
	0.468025	0.919459	0.971234	0.936188
		0.150942	0.557069	0.691078
			-0.300717	0.238966
				-0.097735
<b>-0.7</b>	0.985625	0.994681	-0.492284	0.993901
	0.357351	0.914945	0.999410	0.927862
		0.051395	0.977923	0.664179
			0.446193	0.199633
				-0.116919

I. Comparación estadística entre las aproximaciones de Chebyshev

Tabla I.29 Polos de las aproximaciones obtenidas usando AI - Alaoui para discretizar y CP para aproximar

Orden   Grado	2	3	4	5
<b>-0.3</b>	0.985281	0.994494	0.997050	0.999259
	0.471153	0.833228	0.933634	0.966118
		0.196732	0.601834	0.802538
			0.065836	0.407785
				-0.002813
<b>-0.5</b>	0.993795	0.997323	0.998507	0.998333
	0.595939	0.882021	0.952882	0.977185
		0.278542	0.666223	0.838284
			0.116838	0.465603
				0.031036
<b>-0.7</b>	0.997807	0.998888	0.999323	0.999999
	0.711544	0.920316	0.967689	0.982886
		0.366404	0.726202	0.870189
			0.173131	0.523279
				0.068528

Tabla I.30 Polos de las aproximaciones obtenidas usando AI - Alaoui para discretizar y RC para aproximar

<b>Orden   Grado</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<b>-0.3</b>	0.996772	0.998676	0.998978	-0.665539
	0.810058	0.967063	0.987127	1.000000
		0.541138	0.832072	0.996510
			0.094409	0.952012
				0.548170
<b>-0.5</b>	0.998683	0.999352	1.000000	0.998782
	0.914135	0.980861	0.992123	0.978901
		0.677005	0.882080	0.846162
			-0.105723	0.475796
				0.034741
<b>-0.7</b>	0.999430	1.000000	0.999999	0.998654
	0.956096	0.987441	0.998049	0.986016
		0.792730	0.940348	0.876985
			-0.263164	0.533946
				0.073050



# Anexo II

## Comparación entre la estabilidad y las respuestas temporales de sistemas de control GPC para el integrador fraccionario de orden 0.4

A continuación se presenta un extenso estudio del comportamiento temporal de diferentes sistemas de control GPC, cuando la planta a controlar es el integrador fraccionario de orden 0.4.

Para el diseño del controlador se toman diferentes modelos de la esta planta fraccionaria usando las diferentes metodologías vistas en el capítulo 3: Chebyshev-Padé (CP), racional de Chebyshev (RC), expansión en fracciones continuas (CFE), Crone (CRN) y utilizando la función *invfreqz* de MATLAB<sup>TM</sup> (INV), las cuales fueron descritas en el capítulo 3 de esta Tesis.

Todos los controladores predictivos son sintonizados siguiendo los mismos parámetros:  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 10$ ,  $N_u =$  grado de la aproximación,  $\gamma = 1$ , y  $\lambda = 10^{-6}$ . El periodo de muestreo de todas las aproximaciones es igual a 0.1 segundos.

Cabe destacar que se toman aproximaciones con diferentes funciones de generación: Euler, Tustin y Al-Alaoui. También se toman diferentes grados para los polinomios que definen la función de transferencia, desde grado 2 hasta grado 4.

## II.1 Función de transferencia de las aproximaciones

Las funciones de transferencia de las aproximaciones de este integrador fraccionario son las siguientes:

- Chebyshev – Padé (Euler)

$$G_{CP}(z^{-1}) = \frac{0.307300 - 0.363773z^{-1} + 0.071000z^{-2}}{0.770776 - 1.227426z^{-1} + 0.459367z^{-2}} z^{-1}. \quad (\text{II.1})$$

$$G_{CP}(z^{-1}) = \frac{-0.226352 + 0.411845z^{-1} - 0.206593z^{-2} + 0.019978z^{-3}}{-0.568564 + 1.261632z^{-1} - 0.864601z^{-2} + 0.171371z^{-3}} z^{-1}. \quad (\text{II.2})$$

$$G_{CP}(z^{-1}) = \frac{0.160689 - 0.393941z^{-1} + 0.320645z^{-2} - 0.092671z^{-3} + 0.005357z^{-4}}{0.403633 - 1.150995z^{-1} + 1.152768z^{-2} - 0.461983z^{-3} + 0.056587z^{-4}} z^{-1}. \quad (\text{II.3})$$

- Chebyshev – Padé (Tustin)

$$G_{CP}(z^{-1}) = \frac{-0.377105 - 0.036530z^{-1} + 0.270270z^{-2}}{-1.209693 + 0.755871z^{-1} + 0.420227z^{-2}} z^{-1}. \quad (\text{II.4})$$

$$G_{CP}(z^{-1}) = \frac{0.475364 + 0.057113z^{-1} - 0.434537z^{-2} - 0.039249z^{-3}}{1.584031 - 1.104190z^{-1} - 1.170402z^{-2} + 0.701101z^{-3}} z^{-1}. \quad (\text{II.5})$$

$$G_{CP}(z^{-1}) = \frac{0.573915 + 0.066052z^{-1} - 0.750949z^{-2} - 0.058945z^{-3} + 0.190774z^{-4}}{1.900576 - 1.294992z^{-1} - 2.026106z^{-2} + 1.127947z^{-3} + 0.295720z^{-4}} z^{-1}. \quad (\text{II.6})$$

- Chebyshev – Padé (Al – Alaoui)

$$G_{CP}(z^{-1}) = \frac{0.299318 - 0.315927z^{-1} + 0.035277z^{-2}}{0.791169 - 1.206086z^{-1} + 0.418498z^{-2}} z^{-1}. \quad (\text{II.7})$$

$$G_{CP}(z^{-1}) = \frac{-0.229263 + 0.374964z^{-1} - 0.146469z^{-2} - 0.000980z^{-3}}{-0.607483 + 1.270763z^{-1} - 0.786606z^{-2} + 0.123072z^{-3}} z^{-1}. \quad (\text{II.8})$$

$$G_{CP}(z^{-1}) = \frac{0.169880 - 0.375387z^{-1} + 0.252931z^{-2} - 0.043562z^{-3} - 0.003719z^{-4}}{0.450133 - 1.200460z^{-1} + 1.083681z^{-2} - 0.357727z^{-3} + 0.024391z^{-4}} z^{-1}. \quad (\text{II.9})$$

- Racional de Chebyshev (Euler)

$$G_{RC}(z^{-1}) = \frac{0.385984 - 0.605888z^{-1} + 0.221659z^{-2}}{1.000000 - 1.891537z^{-1} + 0.891736z^{-2}} z^{-1}. \quad (\text{II.10})$$

$$G_{RC}(z^{-1}) = \frac{0.395274 - 0.897793z^{-1} + 0.626306z^{-2} - 0.123733z^{-3}}{1.000000 - 2.679155z^{-1} + 2.364368z^{-2} - 0.685208z^{-3}} z^{-1}. \quad (\text{II.11})$$

$$G_{RC}(z^{-1}) = \frac{0.399190 - 1.089428z^{-1} + 0.994997z^{-2} - 0.315727z^{-3} + 0.010973z^{-4}}{1.000000 - 3.123158z^{-1} + 3.460459z^{-2} - 1.550711z^{-3} + 0.213410z^{-4}} z^{-1}. \quad (\text{II.12})$$

- Racional de Chebyshev (Tustin)

$$G_{RC}(z^{-1}) = \frac{0.326020 - 0.047003z^{-1} - 0.245630z^{-2}}{1.000000 - 1.037081z^{-1} + 0.041722z^{-2}} z^{-1}. \quad (\text{II.13})$$

$$G_{RC}(z^{-1}) = \frac{0.299627 + 0.034825z^{-1} - 0.277744z^{-2} - 0.024979z^{-3}}{1.000000 - 0.704419z^{-1} - 0.757008z^{-2} + 0.466358z^{-3}} z^{-1}. \quad (\text{II.14})$$

$$G_{RC}(z^{-1}) = \frac{0.302033 + 0.034638z^{-1} - 0.401000z^{-2} - 0.031337z^{-3} + 0.105161z^{-4}}{1.000000 - 0.680994z^{-1} - 1.082835z^{-2} + 0.602151z^{-3} + 0.162979z^{-4}} z^{-1}. \quad (\text{II.15})$$

- Racional de Chebyshev (Al – Alaoui)

$$G_{RC}(z^{-1}) = \frac{0.361180 - 0.537623z^{-1} + 0.178628z^{-2}}{1.000000 - 1.872437z^{-1} + 0.872689z^{-2}} z^{-1}. \quad (\text{II.16})$$

$$G_{RC}(z^{-1}) = \frac{0.375638 - 0.793466z^{-1} + 0.485007z^{-2} - 0.067082z^{-3}}{1.000000 - 2.586457z^{-1} + 2.182908z^{-2} - 0.596442z^{-3}} z^{-1}. \quad (\text{II.17})$$

$$G_{RC}(z^{-1}) = \frac{0.378416 - 0.910208z^{-1} + 0.650650z^{-2} - 0.078910z^{-3} + 0.039938z^{-4}}{1.000000 - 2.847228z^{-1} + 2.699364z^{-2} - 0.855480z^{-3} + 0.003344z^{-4}} z^{-1}. \quad (\text{II.18})$$

- Expansión en fracciones continuas (Euler)

$$G_{CFE}(z^{-1}) = \frac{9.952679 - 7.962143z^{-1} + 0.796214z^{-2}}{25 - 30z^{-1} + 7z^{-2}} z^{-1}. \quad (\text{II.19})$$

$$G_{CFE}(z^{-1}) = \frac{4.976339 - 6.469241z^{-1} + 2.070157z^{-2} - 0.103507z^{-3}}{12.50 - 21.25z^{-1} + 10.20z^{-2} - 1.19z^{-3}} z^{-1}. \quad (\text{II.20})$$

II. Comparación entre la estabilidad y las respuestas temporales de sistemas de control GPC para el integrador fraccionario de orden 0.4

---

$$G_{CFE}(z^{-1}) = \frac{1.741718 - 3.135093z^{-1} + 1.746695z^{-2} - 0.310523z^{-3} + 0.009315z^{-4}}{4.3750 - 9.6250z^{-1} + 7.0125z^{-2} - 1.8700z^{-3} + 0.1309z^{-4}} z^{-1}. \quad (\text{II.21})$$

- Expansión en fracciones continuas (Tustin)

$$G_{CFE}(z^{-1}) = \frac{-7.542720 - 3.017088z^{-1} + 2.111961z^{-2}}{-25 + 10z^{-1} + 7z^{-2}} z^{-1}. \quad (\text{II.22})$$

$$G_{CFE}(z^{-1}) = \frac{1.885680 + 0.754272z^{-1} - 1.010724z^{-2} - 0.193093z^{-3}}{6.25 - 2.50z^{-1} - 3.35z^{-2} + 0.64z^{-3}} z^{-1}. \quad (\text{II.23})$$

$$G_{CFE}(z^{-1}) = \frac{6.599880 + 2.639952z^{-1} - 5.204477z^{-2} - 1.342604z^{-3} + 0.466743z^{-4}}{21.875 - 8.750z^{-1} - 17.250z^{-2} + 4.450z^{-3} + 1.547z^{-4}} z^{-1}. \quad (\text{II.24})$$

- Expansión en fracciones continuas (Al – Alaoui)

$$G_{CFE}(z^{-1}) = \frac{4.623164 - 2.905988z^{-1} - 0.026418z^{-2}}{12.25 - 13.30z^{-1} + 2.33z^{-2}} z^{-1}. \quad (\text{II.25})$$

$$G_{CFE}(z^{-1}) = \frac{8.090537 - 8.552853z^{-1} + 1.456957z^{-2} + 0.155074z^{-3}}{21.4375 - 32.4625z^{-1} + 12.2605z^{-2} - 0.5699z^{-3}} z^{-1}. \quad (\text{II.26})$$

$$G_{CFE}(z^{-1}) = \frac{1.982181 - 2.944955z^{-1} + 1.091529z^{-2} - 0.012231z^{-3} - 0.015348z^{-4}}{5.252187 - 10.204250z^{-1} + 5.979225z^{-2} - 0.956690z^{-3} - 0.022549z^{-4}} z^{-1}. \quad (\text{II.27})$$

- Función *invfreqz* (Euler)

$$G_{INV}(z^{-1}) = \frac{0.398055 - 0.414725z^{-1} + 0.065025z^{-2}}{1.000000 - 1.441591z^{-1} + 0.460101z^{-2}} z^{-1}. \quad (\text{II.28})$$

$$G_{INV}(z^{-1}) = \frac{0.398097 - 0.647703z^{-1} + 0.281034z^{-2} - 0.022287z^{-3}}{1.000000 - 2.026932z^{-1} + 1.236722z^{-2} - 0.207105z^{-3}} z^{-1}. \quad (\text{II.29})$$

$$G_{INV}(z^{-1}) = \frac{0.398105 - 0.881429z^{-1} + 0.634971z^{-2} - 0.157617z^{-3} + 0.007559z^{-4}}{1.000000 - 2.614046z^{-1} + 2.360598z^{-2} - 0.832218z^{-3} + 0.086058z^{-4}} z^{-1}. \quad (\text{II.30})$$

- Función *invfreqz* (Tustin)

$$G_{INV}(z^{-1}) = \frac{0.301740 + 0.022132z^{-1} - 0.130366z^{-2}}{1.000000 - 0.725102z^{-1} - 0.172132z^{-2}} z^{-1}. \quad (\text{II.31})$$

$$G_{INV}(z^{-1}) = \frac{0.301706 + 0.020466z^{-1} - 0.217579z^{-2} - 0.006332z^{-3}}{1.000000 - 0.731413z^{-1} - 0.456024z^{-2} + 0.226626z^{-3}} z^{-1}. \quad (\text{II.32})$$

$$G_{INV}(z^{-1}) = \frac{0.301703 + 0.018610z^{-1} - 0.305322z^{-2} - 0.010991z^{-3} + 0.042172z^{-4}}{1.000000 - 0.737988z^{-1} - 0.741573z^{-2} + 0.441308z^{-3} + 0.053420z^{-4}} z^{-1}. \quad (\text{II.33})$$

- Función *invfreqz* (Al –Alaoui)

$$G_{INV}(z^{-1}) = \frac{0.377336 - 0.339567z^{-1} + 0.023075z^{-2}}{1.000000 - 1.356689z^{-1} + 0.381103z^{-2}} z^{-1}. \quad (\text{II.34})$$

$$G_{INV}(z^{-1}) = \frac{0.377387 - 0.536029z^{-1} + 0.166692z^{-2} - 0.005308z^{-3}}{1.000000 - 1.877419z^{-1} + 0.999560z^{-2} - 0.118049z^{-3}} z^{-1}. \quad (\text{II.35})$$

$$G_{INV}(z^{-1}) = \frac{0.377398 - 0.733471z^{-1} + 0.414407z^{-2} - 0.049473z^{-3} - 0.006166z^{-4}}{1.000000 - 2.400616z^{-1} + 1.895079z^{-2} - 0.515447z^{-3} + 0.021674z^{-4}} z^{-1}. \quad (\text{II.36})$$

- Crone

$$G_{CRN}(z^{-1}) = \frac{0.158489 + 0.018514z^{-1} - 0.168770z^{-2}}{1.000000 - 1.667616z^{-1} + 0.668921z^{-2}} z^{-1}. \quad (\text{II.37})$$

$$G_{CRN}(z^{-1}) = \frac{0.158489 - 0.051940z^{-1} - 0.300778z^{-2} + 0.194803z^{-3}}{1.000000 - 2.256450z^{-1} + 1.551021z^{-2} - 0.294480z^{-3}} z^{-1}. \quad (\text{II.38})$$

$$G_{CRN}(z^{-1}) = \frac{0.158489 - 0.165568z^{-1} - 0.270660z^{-2} + 0.412741z^{-3} - 0.134963z^{-4}}{1.000000 - 2.933348z^{-1} + 2.979095z^{-2} - 1.154704z^{-3} + 0.108964z^{-4}} z^{-1}. \quad (\text{II.39})$$

## II.2 Respuestas de los sistemas de control

A continuación se presentan una serie de tablas que resumen las características en cuanto a respuesta temporal y estabilidad de las aproximaciones racionales anteriores, cuando se usan como modelo interno del controlador GPC. La planta real

## II. Comparación entre la estabilidad y las respuestas temporales de sistemas de control GPC para el integrador fraccionario de orden 0.4

---

a controlar esta simulada mediante la aproximación GL del integrador fraccionario de orden 0.4.

Descripción de los parámetros:

- Grado: número de términos en el numerador y el denominador de la función de transferencia.
- M. G.: margen de ganancia en (dB).
- $\omega_{MG}$ : frecuencia de cruce de ganancia en (rad/s).
- M. F.: margen de fase en (°).
- $\omega_{MF}$ : frecuencia de cruce de fase en (rad/s).
- $y_{MAX}$ : valor máximo de la función.
- $t_{MAX}$ : momento en el que se produce el valor máximo en (s).

Las tablas que recogen los datos de la aproximación se encuentran clasificadas por el tipo de aproximación:

### Aproximación de Chebyshev – Padé

Tabla II.1 Parámetros del sistema de control GPC usando CP con Euler

Grado	M. G.	$\omega_{MG}$	M. F.	$\omega_{MF}$	$y_{MAX}$	$t_{MAX}$
2	2.6822	18.0544	36.7263	8.9057	1.103	0.1
3	2.3851	20.6361	23.7002	12.6675	1.023	0.1
4	1.3562	21.4374	14.1048	14.8145	1.006	0.1

Tabla II.2 Parámetros del sistema de control GPC usando CP con Tustin

Grado	M. G.	$\omega_{MG}$	M. F.	$\omega_{MF}$	$y_{MAX}$	$t_{MAX}$
2	-3.8020	31.4159	38.3028	28.1588	inestable	inestable
3	-1.1906	31.4159	$\infty$	$\infty$	inestable	inestable
4	-1.4844	27.1134	19.9929	24.5866	inestable	inestable

Tabla II.3 Parámetros del sistema de control GPC usando CP con Al-Alaoui

<b>Grado</b>	<b>M. G.</b>	$\omega_{MG}$	<b>M. F.</b>	$\omega_{MF}$	$y_{MAX}$	$t_{MAX}$
2	2.7363	19.3979	43.7010	8.9499	1.168	0.4
3	4.1903	26.5801	30.7429	14.9762	1.074	0.1
4	2.1353	24.9166	20.9143	16.9611	1.061	0.1

**Aproximación racional de Chebyshev**

Tabla II.4 Parámetros del sistema de control GPC usando RC con Euler

<b>Grado</b>	<b>M. G.</b>	$\omega_{MG}$	<b>M. F.</b>	$\omega_{MF}$	$y_{MAX}$	$t_{MAX}$
2	0.1694	12.9559	1.6561	12.2297	1.649	0.7
3	0.2407	17.8524	5.1982	13.9690	1.240	0.5
4	0.4254	20.8141	5.8095	12.9501	1.066	0.3

Tabla II.5 Parámetros del sistema de control GPC usando RC con Tustin

<b>Grado</b>	<b>M. G.</b>	$\omega_{MG}$	<b>M. F.</b>	$\omega_{MF}$	$y_{MAX}$	$t_{MAX}$
2	-1.9502	31.4159	36.1729	28.1039	inestable	inestable
3	-0.2897	31.4159	$\infty$	$\infty$	inestable	inestable
4	-1.4680	27.0376	18.9028	24.7182	inestable	inestable

Tabla II.6 Parámetros del sistema de control GPC usando RC con Al-Alaoui

<b>Grado</b>	<b>M. G.</b>	$\omega_{MG}$	<b>M. F.</b>	$\omega_{MF}$	$y_{MAX}$	$t_{MAX}$
2	-0.3510	14.6000	$\infty$	$\infty$	inestable	inestable
3	-0.0785	21.0486	0.9596	20.4632	inestable	inestable
4	-1.1876	27.9188	2.0778	20.9467	inestable	inestable

II. Comparación entre la estabilidad y las respuestas temporales de sistemas de control GPC para el integrador fraccionario de orden 0.4

**Expansión en fracciones continuas**

Tabla II.7 Parámetros del sistema de control GPC usando CFE con Euler

<b>Grado</b>	<b>M. G.</b>	$\omega_{MG}$	<b>M. F.</b>	$\omega_{MF}$	$y_{MAX}$	$t_{MAX}$
2	2.7369	31.4159	28.6511	17.4944	1.119	0.1
3	1.7648	31.4159	17.7374	20.2891	1.022	0.1
4	1.2132	31.4159	11.7488	21.6898	1.007	0.1

Tabla II.8 Parámetros del sistema de control GPC usando CFE con Tustin

<b>Grado</b>	<b>M. G.</b>	$\omega_{MG}$	<b>M. F.</b>	$\omega_{MF}$	$y_{MAX}$	$t_{MAX}$
2	-3.0189	31.4159	34.3862	26.3701	inestable	inestable
3	-2.3267	31.4159	22.0629	28.1867	inestable	inestable
4	0.359	28.2973	39.3016	16.1463	1.778	0.3

Tabla II.9 Parámetros del sistema de control GPC usando CFE con Al-Alaoui

<b>Grado</b>	<b>M. G.</b>	$\omega_{MG}$	<b>M. F.</b>	$\omega_{MF}$	$y_{MAX}$	$t_{MAX}$
2	1.6743	31.4159	28.1355	19.1501	1.175	0.1
3	0.7692	31.4159	16.5122	22.8413	1.148	0.3
4	0.3013	31.4159	9.5993	25.8197	1.195	0.3

**Función *invfreqz***

Tabla II.10 Parámetros del sistema de control GPC usando INV con Euler

<b>Grado</b>	<b>M. G.</b>	$\omega_{MG}$	<b>M. F.</b>	$\omega_{MF}$	$y_{MAX}$	$t_{MAX}$
2	7.1067	26.8657	41.5786	11.9026	1.122	0.1
3	4.0109	31.4159	28.3280	15.7860	1.022	0.1
4	3.5113	31.4159	19.4180	17.5217	1.007	0.1

Tabla II.11 Parámetros del sistema de control GPC usando INV con Tustin

<b>Grado</b>	<b>M. G.</b>	$\omega_{MG}$	<b>M. F.</b>	$\omega_{MF}$	$y_{MAX}$	$t_{MAX}$
2	-4.1409	31.4159	42.7863	23.8569	inestable	inestable
3	-5.9049	31.4159	$\infty$	$\infty$	inestable	inestable
4	-0.3076	29.7663	-2.5213	30.161	inestable	inestable

Tabla II.12 Parámetros del sistema de control GPC usando INV con Al-Alaoui

<b>Grado</b>	<b>M. G.</b>	$\omega_{MG}$	<b>M. F.</b>	$\omega_{MF}$	$y_{MAX}$	$t_{MAX}$
2	4.1779	31.4159	44.4034	13.5450	1.184	0.1
3	1.1220	31.4159	21.2532	21.2935	1.119	0.3
4	0.7053	31.4159	15.5765	23.0849	1.148	0.3

### Aproximación Crone

Tabla II.13 Parámetros del sistema de control GPC usando CRN

<b>Grado</b>	<b>M. G.</b>	$\omega_{MG}$	<b>M. F.</b>	$\omega_{MF}$	$y_{MAX}$	$t_{MAX}$
2	$-\infty$	$\infty$	66.7207	11.5893	inestable	inestable
3	-2.5813	7.7887	$\infty$	$\infty$	inestable	inestable
4	$-\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	inestable	inestable

## II.3 Conclusiones

En este anexo nos hemos centrados en comprobar que aproximación es mejor desde el punto de vista de la estabilidad y su respuesta temporal, para utilizarla como modelo de planta fraccionaria utilizando para ello diversas metodologías y funciones de generación: Euler, Tustin y Al-Alaoui.

A continuación se presentan las principales conclusiones de dicha comparación:

## II. Comparación entre la estabilidad y las respuestas temporales de sistemas de control GPC para el integrador fraccionario de orden 0.4

---

- Se recomienda el método de Euler (*backward rule*) como función generadora, ya que todos las aproximaciones discretizadas con esta función han conducido a sistemas estables.
- Los mejores resultados, en cuanto a margen de ganancia y de fase, se han obtenido usando las aproximaciones de Chebyshev–Padé, usando Al–Alaoui como función generadora, y mediante la función *invfreqz* usando Euler como función generadora.
- Todas las aproximaciones estables tienen en general una rápida respuesta, aunque algunas de ellas conducen a sistemas que presentan sobreoscilaciones importantes. Podemos destacar el caso de aquella obtenida con el método de expansión en fracciones continuas y Tustin, que presenta un sistema con una sobreoscilación superior al 75%.
- Se desaconseja el uso de la metodología Crone para obtener modelos de la planta, ya que no se ha conseguido ningún sistema estable a partir de estas aproximaciones.
- También se desaconseja utilizar Tustin como función generadora para discretizar, principalmente por el bajo número de sistemas estables que se han obtenido.

# Anexo III

## Un ejemplo de aplicación de los operadores fraccionarios en el diseño de un filtro digital

### III.1 Introducción

El filtrado digital es una de las operaciones más importantes dentro del procesamiento digital de señales. Un filtro es esencialmente un sistema que selectivamente cambia las características de forma de onda, amplitud y/o fase de la señal que le llega a su entrada obteniendo una señal de salida deseada.

Son comunes a todos los filtros los siguientes objetivos: mejorar la calidad de la señal (eliminando o reduciendo el ruido), extracción de información de señales o separación de dos o más señales previamente combinadas, para por ejemplo, hacer un uso eficiente de un canal de comunicación disponible.

Un filtro digital se puede definir como la implementación de un algoritmo matemático dentro de un circuito *hardware* o un programa *software* que opera sobre una señal de entrada digital con el propósito de obtener una señal de salida alcanzando unos objetivos de filtrado. Los filtros digitales generalmente actúan sobre señales analógicas digitalizadas o simplemente muestras que representan algún tipo de variable en la memoria de un ordenador.

### III. Un ejemplo de aplicación de los operadores fraccionarios en el diseño de un filtro digital

---

Los filtros digitales juegan un papel relevante dentro del procesamiento digital de señales. En comparación con los filtros analógicos, los digitales se prefieren en un elevado número de aplicaciones, como por ejemplo: compresión de datos, procesamiento biomédico de señales, reconocimiento de voz, procesamiento de imagen, transmisión de datos, audio digital, etc. (Ifeachor y Jervis, 1993).

En general la mecánica del procesamiento es:

- 1.- Tomar las muestras actuales y algunas muestras anteriores (que previamente han podido ser almacenadas) para multiplicarlas por unos coeficientes definidos.
- 2.- También se podría tomar valores de la salida en instantes pasados y multiplicarlos por otros coeficientes.
- 3.- Finalmente todos los resultados de todas estas multiplicaciones son sumados, dando una salida para el instante actual.

#### III.2 Diseño del filtro

Los filtros digitales se clasifican en dos clases diferentes atendiendo a como responde a un impulso unidad: filtro de respuesta a impulso finita (FIR) y filtro de respuesta a impulso infinita (IIR). Las expresiones de ambos en términos de transformada  $z$  son las siguientes, respectivamente:

$$H(z^{-1}) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k z^{-k}. \quad (\text{III.1})$$

$$H(z^{-1}) = \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} / \left( 1 + \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right). \quad (\text{III.2})$$

El objetivo perseguido en el diseño de filtros digitales es obtener los valores de  $a_k$ ,  $b_k$ , o  $c_k$  de tal forma que el filtro obtenido cumpla con los requerimientos iniciales de diseño en un grado suficiente para considerarlo útil. Para conseguir esto podemos encontrar, en la extensa literatura sobre el tema, muchos métodos como el método de la ventana, métodos basados en la frecuencia de muestreo, métodos que optimizan algún parámetro, etc.

En el caso del diseño utilizando optimización podemos afirmar que se suele perseguir un filtro selectivo en frecuencia que se define, evidentemente, en el dominio de la frecuencia. La idea general es perder la menor potencia posible de señal en la banda pasante del filtro y transmitir la menor potencia posible en la banda de parada. Por ejemplo, en (Fliege, 1994) encontramos un criterio de diseño basado en la optimización de un índice basado en el error cuadrático medio de la desviación de la señal real de salida y la deseada.

Así pues, podemos afirmar que estos métodos, en el caso de filtros IIR, se basan en la minimización de un índice de coste discreto del tipo:

$$J = \sum_{k=1}^n \left( h(\omega_k) - \frac{B(\omega_k)}{A(\omega_k)} \right)^2, \quad (\text{III.3})$$

donde  $A$ ,  $B$  son las transformadas de Fourier de los polinomios  $a$  y  $b$  (III.2) a la frecuencia  $\omega_k$ ,  $n$  es el número de puntos y  $h$  es la respuesta en frecuencia deseada del filtro.

La minimización de la expresión (III.3) puede ser llevada a cabo mediante el método no-lineal de Gauss-Newton (Denis y Schnabel, 1996). Este método se encuentra implementado en la función *invfreqz* de MATLAB<sup>TM</sup>, que resuelve

$$\min_{b,a} \sum_{k=1}^n W(\omega_k) \left( h(\omega_k) - \frac{B(\omega_k)}{A(\omega_k)} \right)^2, \quad (\text{III.4})$$

permitiendo cuantificar los errores de ajuste mediante una serie de pesos distribuidos frente a la frecuencia.

Con el fin de usar los operadores fraccionarios, proponemos la siguiente función de coste como índice para el diseño (Romero *et al.*, 2010a) :

$$J = {}^\alpha I_1^n \left( h(\omega) - \frac{B(\omega)}{A(\omega)} \right)^2 = {}^\alpha I_1^n f(\omega) \quad (\text{III.5})$$

Como ya vimos en el capítulo 5 de esta tesis, este tipo de expresiones pueden discretizarse quedando una expresión del tipo:

$$J = \Delta \omega^\alpha \overline{W f} \quad (\text{III.6})$$

### III. Un ejemplo de aplicación de los operadores fraccionarios en el diseño de un filtro digital

---

donde  $\Delta\omega$  es el incremento de frecuencia,  $\overline{W}$  es la secuencia de pesos fraccionarios (truncada de acuerdo con el principio de memoria corta) y  $\overline{f}$  es un vector que contiene los errores al cuadrado, es decir,  $f(\omega) = \left( h(\omega) - \frac{B(\omega)}{A(\omega)} \right)^2$ .

Si comparamos las expresiones (III.4) y (III.6), podemos fácilmente identificar que los pesos  $W(\omega_k)$ , para  $k = 1, \dots, n$  vienen dados por  $\Delta\omega^\alpha \overline{W}$ . En este sentido, podemos considerar la expresión (III.5), mediante el uso de los pesos  $W(\omega_k)$ , un índice de coste con sentido fraccionario. De esta forma podemos usar un software de computación convencional como MATLAB<sup>TM</sup> para diseñar filtros óptimos IIR mediante su función *invfreqz*.

#### III.3 Ejemplo de diseño

Para ilustrar el método de diseño propuesto anteriormente, vamos a considerar el diseño de un filtro rechazo de banda IIR con las siguientes especificaciones:

- Banda de operación del filtro desde  $\omega_a = 10^{-4} \text{ rad/s}$  hasta  $\omega_b = 1 \text{ rad/s}$ .
- Ganancia de las frecuencias de paso = 0 dB.
- Frecuencia inferior de parada  $\omega_l = 10^{-3} \text{ rad/s}$ , con caída exponencial.
- Frecuencia superior de parada  $\omega_h = 10^{-1} \text{ rad/s}$ .
- Ganancia a la frecuencia ( $\omega_m = 10^{-2} \text{ rad/s}$ ) = -20 dB.

A continuación vamos a diseñar cuatro filtros diferentes fraccionarios, para los valores de  $\alpha = [0.9, 1.0, 1.1, 1.2]$ . Para que la expresión (III.6) corresponda con una integral, las frecuencias elegidas deben de estar lineal y equiespaciadas en toda la banda de operación del filtro. Para la comparación también se ha decidido diseñar un filtro de forma “convencional”, con una secuencia constante de pesos  $W(\omega_k) = 1, \forall k$ , con frecuencias logarítmicamente espaciadas. Las funciones de transferencia para estos filtros son las siguientes:

$$H_{0.9} = \frac{0.8871z^{-1} - 4.3308z^{-2} + 8.4642z^{-3} - 8.2777z^{-4} + 4.0508z^{-5} - 0.7935z^{-6}}{1 - 4.9159z^{-1} + 9.7445z^{-2} - 9.7987z^{-3} + 5.0900z^{-4} - 1.1820z^{-5} + 0.0622z^{-6}} \quad (\text{III.7})$$

$$H_{1.0} = \frac{0.8777z^{-1} - 4.2949z^{-2} + 8.4136z^{-3} - 8.2479z^{-4} + 4.0460z^{-5} - 0.7945z^{-6}}{1 - 4.9330z^{-1} + 9.8178z^{-2} - 9.9226z^{-3} + 5.1920z^{-4} - 1.2226z^{-5} + 0.0683z^{-6}} \quad (\text{III.8})$$

$$H_{1.1} = \frac{0.8435z^{-1} - 4.1520z^{-2} + 8.1829z^{-3} - 8.0712z^{-4} + 3.9842z^{-5} - 0.7874z^{-6}}{1 - 4.9981z^{-1} + 10.1129z^{-2} - 10.4550z^{-3} + 5.6695z^{-4} - 1.4351z^{-5} + 0.1058z^{-6}} \quad (\text{III.9})$$

$$H_{1.2} = \frac{0.7778z^{-1} - 3.8519z^{-2} + 7.6368z^{-3} - 7.5771z^{-4} + 3.7624z^{-5} - 0.7480z^{-6}}{1 - 5.0999z^{-1} + 10.5959z^{-2} - 11.3737z^{-3} + 6.5458z^{-4} - 1.8544z^{-5} + 0.1863z^{-6}} \quad (\text{III.10})$$

$$H_{W=1} = \frac{0.7166z^{-1} - 1.2956z^{-2} - 2.0310z^{-3} + 6.7193z^{-4} - 5.7466z^{-5} + 1.6374z^{-6}}{1 - 2.7912z^{-1} + 1.4511z^{-2} + 2.2499z^{-3} - 2.5226z^{-4} + 0.4478z^{-5} + 0.1650z^{-6}} \quad (\text{III.11})$$

En la Fig. III.1 están representadas las respuestas en frecuencia de la magnitud de estos filtros frente a la respuesta ideal descrita anteriormente. La Tabla III.1 contiene los valores numéricos de los errores. Podemos observar cómo algunos de los filtros obtenidos para valores no enteros del parámetro fraccionario  $\alpha$  están más cercanos a la respuesta ideal que el filtro obtenido usando la secuencia de pesos constantes  $W = 1$ . Particularmente, el mayor índice de coincidencia se obtiene para  $\alpha = 0.9$ . Es importante recordar que para valores de  $\alpha < 1$  se generan elementos negativos en el vector de pesos  $\overline{W}$ , ver Fig. III.2.

Tabla III.1 Comparación estadística de los filtros en términos de error

	Media	Desviación típica	Error cuadrático medio
$\alpha = 0.9$	0.2185	0.7688	0.7992
$\alpha = 1.0$	0.2673	0.7909	0.8348
$\alpha = 1.1$	0.3423	0.8379	0.9050
$\alpha = 1.2$	0.4969	1.0921	1.1998
$W = 1$	0.4815	1.1694	1.2646

### III. Un ejemplo de aplicación de los operadores fraccionarios en el diseño de un filtro digital

---

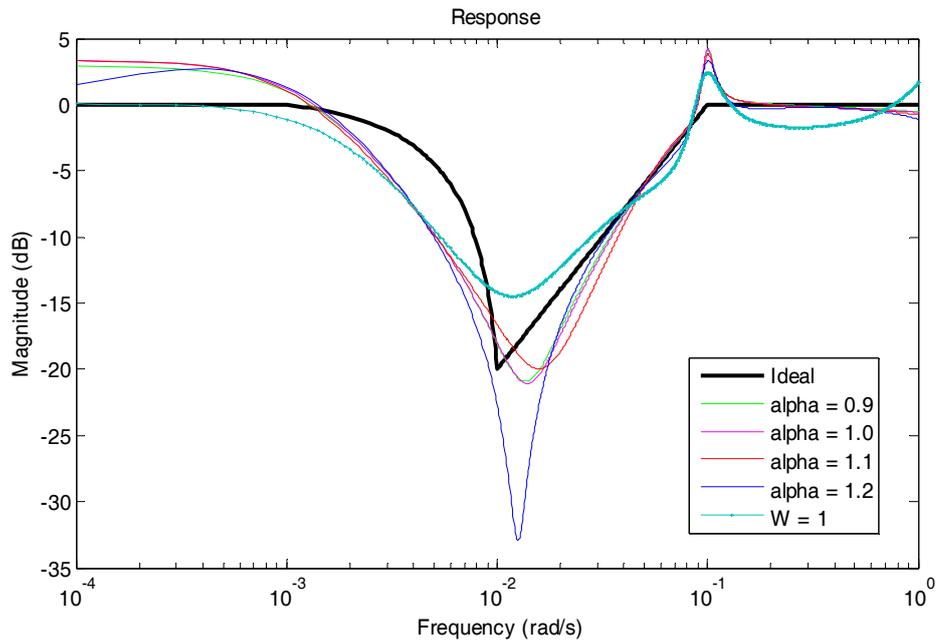


Fig. III.1 Respuesta en frecuencia de la magnitud.

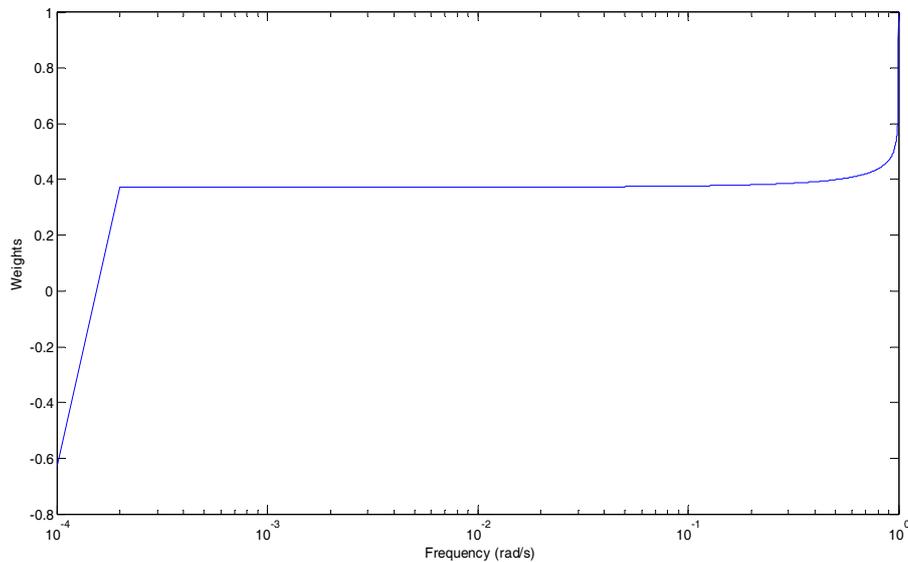


Fig. III.2 Pesos frente a la frecuencia para  $\alpha = 0.9$

A tenor de los resultados obtenidos, podemos considerar el orden de integración fraccionario  $\alpha$  como un nuevo grado de libertad para el diseño de filtros IIR para intentar conseguir un mayor índice de coincidencia con la respuesta real.

Es importante tener en cuenta que los casos  $W = 1$  y  $\alpha = 1$  no representan la misma situación ya que dan lugar a filtros diferentes como se muestra en la Fig. III.2. Por construcción, cuando  $W = 1$  todos los valores del vector de pesos son constantes e iguales a 1. Sin embargo, cuando  $\alpha = 1$  se evalúa  ${}^{\alpha}I_a^b$  y, por consiguiente, todos los valores del vector de pesos son iguales a  $\Delta\omega$  excepto el primero, que es 0, de acuerdo con la fórmula de Euler para la integración entera, como vimos en el capítulo 5 de esta Tesis.



