



UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y DE CONTROL

TESIS DOCTORAL

MÉTODOS DE IDENTIFICACIÓN DE INTERVALOS DE PLANTA EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

JUAN ÁNGEL GARCÍA MARTÍNEZ

Licenciado en Ciencias (Sección Matemáticas)

por la Universidad de Extremadura

MADRID, 2012

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y DE CONTROL
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES

MÉTODOS DE IDENTIFICACIÓN DE INTERVALOS DE PLANTA
EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

AUTOR:

Juan Ángel García Martínez

Licenciado en Ciencias (Sección Matemáticas)

DIRECTOR:

Dr. D. Roberto Hernández Berlinches

CODIRECTOR:

Dr. D. José Carpio Ibáñez

Agradecimientos.

En estas pocas líneas quiero expresar mi agradecimiento a todas las personas que me han ayudado y que han hecho posible que, lo que en principio era un proyecto, sea ahora una realidad, en particular a:

D. Roberto Hernández Berlinches, por su interés y dedicación en la dirección de esta tesis.

D. José Carpio Ibáñez, por su labor de codirección y sus acertados consejos.

D^a. Mercedes Bermejo Solera, por su colaboración en la elaboración y revisión de este documento.

Índice general

Resumen.	13
Abstract.	15
Introducción.	17
1. Control Robusto.	21
1.1. Introducción.	21
1.2. Incertidumbres estructuradas y no estructuradas.	22
1.2.1. Métodos con perturbaciones no estructuradas.	25
1.2.2. Métodos con perturbaciones estructuradas.	26
1.3. Resultados de puntos extremos.	28
1.3.1. Estabilidad de familias de polinomios.	29
1.3.1.1. Lugar de las raíces.	30
1.3.1.2. Cruce por la frontera.	31
1.3.1.3. Criterios en el dominio de la frecuencia.	32
1.3.2. El Teorema de Kharitonov.	36
1.3.3. El Teorema de la Arista.	39
1.3.4. Teorema de Kharitonov Generalizado.	41
1.3.4.1. Formulación del problema y notación.	42

1.3.4.2. El Teorema de Kharitonov Generalizado.	46
2. Sistemas de intervalos de planta.	51
2.1. Introducción.	51
2.2. Identificación de sistemas de intervalos.	56
2.2.1. Determinación de la frontera.	56
2.2.1.1. Lazo cerrado.	56
2.2.1.2. Lazo abierto.	60
2.2.2. Identificación.	66
2.2.2.1. Algoritmo de modelado con un conjunto de datos simple.	66
3. Identificación de sistemas de intervalos.	73
3.1. Planteamiento del problema.	74
3.2. Caracterización de la frontera del conjunto de valores.	77
3.3. Ejemplos.	99
3.4. Valores de los polinomios de Kharitonov. Condiciones necesarias para la identificación.	103
3.5. Solución del sistema de ecuaciones.	109
3.5.1. Grados del polinomio numerador y denominador.	114
3.5.2. Número de conjuntos de valores a considerar.	120
4. Identificación de sistemas de intervalos. Menos de cinco vértices.	123
4.1. Determinación de los polinomios asignados a partir de un segmento completo en un cuadrante.	124
4.2. Determinación de los polinomios asignados a partir de un arco completo en un cuadrante.	147
4.3. Algoritmo para la identificación.	170

5. Casos particulares.	191
5.1. A. $n_{2R} = 0, n_{2I} \neq 0.$	192
5.2. B. $n_{2I} = 0, n_{2R} \neq 0.$	195
5.3. C. $n_{1R} = 0, n_{1I} \neq 0.$	198
5.4. A. $n_{2R} = 0, n_{2I} \neq 0.$	201
5.5. B. $n_{2I} = 0, n_{2R} \neq 0.$	204
5.6. C. $n_{1R} = 0, n_{1I} \neq 0.$	207
5.7. A. $d_{2R} = 0, d_{2I} \neq 0.$	209
5.8. B. $d_{2I} = 0, d_{2R} \neq 0.$	212
5.9. C. $d_{1R} = 0, d_{1I} \neq 0.$	216
5.10. A. $d_{2R} = 0, d_{2I} \neq 0.$	218
5.11. B. $d_{2I} = 0, d_{2R} \neq 0.$	221
5.12. C. $d_{1R} = 0, d_{1I} \neq 0.$	224
Conclusiones y futuros desarrollos.	227
Bibliografía	231

Índice de figuras

1.	Conjunto de valores con menos de 5 vértices en un cuadrante.	20
1.1.	Sistema de control realimentado con incertidumbre y perturbaciones.	23
1.2.	Perturbación aditiva.	23
1.3.	Perturbación multiplicativa a la entrada.	24
1.4.	Perturbación multiplicativa a la salida.	24
1.5.	Diagrama de bloques con realimentación de incertidumbres.	26
1.6.	Planta para el problema de la arista.	41
2.1.	Sistema de intervalos lineales con realimentación.	57
2.2.	Evolución del conjunto imagen de los 32 segmentos.	60
2.3.	Geometría para determinar MND.	63
2.4.	AAS para diferentes valores de la tolerancia.	65
2.5.	Estructura del experimento para identificación robusta.	67
3.1.	Notación para el lema 3.2.	78
3.2.	Cocientes entre elementos.	84
3.3.	Los 32 sistemas frente a los Segmentos generalizados de Kharitonov.	85
3.4.	32 sistemas con sólo 4 vértices en la frontera.	89
3.5.	(a) Segmentos iniciales. (b) Intersección de los segmentos.	93

3.6. Ángulos para los elementos de un conjunto de valores situados en un cuadrante.	97
3.7. Situaciones de arco y segmento no posibles en un mismo cuadrante.	98
3.8. Frontera del conjunto de valores para $\omega = 3.15$	100
3.9. Frontera del conjunto de valores para $\omega = 1.35$	101
3.10. Frontera del conjunto de valores a frecuencia $\omega = 1.25$	102
4.1. Segmento y arcos predecesor y sucesor completos.	124
4.2. Segmento y arcos predecesor y sucesor no completos.	125
4.3. v_x vértice de los elementos arco-segmento.	126
4.4. v_x vértice de los elementos segmento-arco.	127
4.5. Casos donde d_x es un vértice de Kharitonov del denominador.	129
4.6. Casos donde d_x no es un vértice de Kharitonov del denominador.	129
4.7. Vértices para las condiciones del teorema 4.1.	131
4.8. Arco y dos segmentos completos.	148
4.9. v_x vértice de dos elementos, segmento-arco.	149
4.10. v_x vértice de dos elementos, arco-segmento.	149
4.11. Tres conjuntos de valores de un intervalo de plantas.	171
4.12. Comparación de los 32 sistemas para $\omega = 1.0$	176
4.13. Comparación de los 32 sistemas para $\omega = 1.1$	181
4.14. Comparación de los 32 sistemas para $\omega = 1.2$	187
4.15. Conjunto de valores con los parámetros solución del sistema de ecuaciones.	188
4.16. Diagrama resumen del proceso seguido en el ejemplo 4.1.	190
5.1. Rectángulo con $n_{2R} = 0, n_{2I} \neq 0$	192
5.2. Rectángulo con $n_{2I} = 0, n_{2R} \neq 0$	195
5.3. Rectángulo con $n_{1R} = 0, n_{1I} \neq 0$	198

5.4. Rectángulo con $d_{2R} = 0, d_{2I} \neq 0$	210
5.5. Rectángulo con $d_{2I} = 0, d_{2R} \neq 0$	213
5.6. Rectángulo con $d_{1R} = 0, d_{1I} \neq 0$	216

Índice de tablas

1.1.	Número de aristas expuestas vs. número de segmentos extremos.	49
3.1.	Información de la frontera del conjunto de valores.	110
3.2.	Algoritmo. Resultados de su aplicación.	111
4.1.	Datos iniciales para el ejemplo.	171
4.2.	Resultados del algoritmo para conjunto de valores a frecuencia $w = 1.0$. .	176
4.3.	Resultados del algoritmo para conjunto de valores a frecuencia $w = 1.1$. .	182
4.4.	Resultados del algoritmo para conjunto de valores a frecuencia $w = 1.2$. .	188

Resumen.

El control robusto es una de las áreas que más interés despierta entre los investigadores en teoría de control. Dentro de las diferentes aproximaciones al problema de control robusto, cabe destacar los resultados de puntos extremos, que permiten determinar si se satisface robustamente una propiedad dada para un sistema de control, a partir del estudio de un subconjunto finito de sistemas extremos. Desde el punto de vista del análisis, la teoría de resultados de puntos extremos puede considerarse madura, pero no se puede decir lo mismo para ámbitos de control, como por ejemplo la identificación de sistemas.

El propósito de esta tesis es abordar la identificación de intervalos de planta, es decir, identificar sistemas tales que los polinomios numerador y denominador de la planta son intervalos de polinomios. Se persigue encontrar propiedades que faciliten el desarrollo de algoritmos de identificación eficaces, evitando mallados en los parámetros de perturbación y disminuyendo el coste computacional.

La identificación de tales sistemas se realiza en frecuencia. Para ello, se estudian diversas propiedades de la geometría del conjunto de valores de los intervalos de planta, determinando la estructura de la familia de plantas. Conocida dicha estructura, se caracteriza la frontera del conjunto de valores de los intervalos de planta, para una frecuencia determinada. Las propiedades obtenidas sobre la continuidad de los elementos de la frontera permiten obtener las condiciones necesarias (existencia de al menos cinco vértices de la frontera en un cuadrante) para la identificación de los polinomios de Kharitonov asociados, determinando sus valores a partir de los polinomios asignados calculados con el algoritmo de identificación construido. A continuación, se plantea y resuelve un sistema de ecuaciones para obtener los intervalos de indeterminación de la familia de plantas, es decir, los intervalos de polinomios numerador y denominador de la familia de funciones de transferencia.

Al ser la condición necesaria restrictiva, se mejora el algoritmo de identificación propuesto, determinando los polinomios asignados a partir de un elemento de la frontera (arco o segmento) completo en un cuadrante. Esta nueva condición no es restrictiva, pues prácticamente todos los conjuntos de valores la verifican. El nuevo algoritmo es válido tanto para el caso de cinco vértices como para el caso de un elemento (arco o segmento) completo en un cuadrante.

Abstract.

Robust control is one of the areas that arouses more interest among researchers in control theory. Among the different approaches to the problem of robust control, we would stand out the extreme points results, to determine whether a given property is robustly satisfied for a control system, based on the study of a finite subset of extreme points. From the point of view of the analysis, the theory of extreme points results may be considered developed. However, this cannot be said for areas of control, such as systems identification.

The purpose of this thesis is to address the identification of plant intervals, i.e. to identify systems in which numerator and denominator polynomials of the plant are interval polynomials. The objective is to find properties to provide the development of effective identification algorithms, avoiding disturbance parameters and reducing the computational cost.

Identification of such systems is performed in frequency. This is done studying some properties of the geometry of the value set of the interval plant, determining the structure of the plant family. Knowing this structure, the value set boundary of the plant will be characterized for certain frequency ranges. The properties obtained about the continuity of the boundary elements allow to obtain necessary conditions (existence of at least five vertices of the boundary on a quadrant) to identify the associated Kharitonov polynomials, determining their values from the assigned polynomials computed by the given algorithm identification. Then, a equations system is formulated and solved, to obtain the indeterminate intervals of the plant family, i.e. the numerator and denominator interval polynomials of the transfer function family.

The former necessary condition is restrictive. Then, the proposed identification algorithm is improved, determining the assigned polynomials from a complete element of the boundary (arc or segment), lying on a quadrant. This new condition is not restrictive, because practically all the value sets verify it. The new algorithm is valid in the case of five vertices and in the case of a complete element (arc or segment) on a quadrant.

Introducción.

En la actualidad existen diversos tipos de sistemas de control, entre los que se encuentran los sistemas de control de tiempo continuo y de tiempo discreto, sistemas de control variante e invariante en tiempo, sistemas de control lineales y no lineales.

Todos ellos requieren de un modelo matemático para representar el comportamiento del sistema real. Los modelos matemáticos de los procesos físicos reales son obtenidos bajo numerosas suposiciones, las cuales provocan generalmente que su comportamiento dinámico difiera del proceso real. Lo anterior se realiza con el objeto de simplificar los modelos matemáticos para su análisis. Esta diferencia, entre el comportamiento dinámico del modelo matemático y el proceso físico real, afecta al sistema.

Una forma de tomar en cuenta esas diferencias entre el modelo matemático y el proceso físico real, es mediante la inclusión de incertidumbre en los parámetros del modelo matemático.

La incertidumbre se puede describir de muchas formas: restricciones sobre los parámetros de un modelo, acotaciones en el dominio de la frecuencia, etc. Para tomar en cuenta las incertidumbres del modelo, puede suponerse que la conducta dinámica de la planta viene descrita no por un único modelo, sino por una familia de modelos. Desde esta perspectiva, el adjetivo robusto se utiliza para indicar una propiedad que se mantiene no solo para el modelo, sino también en la presencia de incertidumbres.

Entre las diferentes aproximaciones al control robusto, destaca la basada en puntos extremos, que permite verificar que alguna propiedad de un sistema de control se satisface de forma robusta mediante la verificación de dicha propiedad sobre un subconjunto finito de los sistemas extremos. El origen de esta teoría es el trabajo de Kharitonov [Kharitonov, 1978].

La teoría de puntos extremos trabaja con diferentes tipos de estructuras de

incertidumbres.

Los intervalos de planta, introducen las incertidumbres en el modelo considerando familias de sistemas formadas por todas las plantas representadas de la forma $G(s, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{N(s, \mathbf{a})}{D(s, \mathbf{b})}$, tal que el numerador y denominador de la familia son intervalos de polinomios. Las incertidumbres se modelan de tal forma que los polinomios numerador y denominador de la planta tienen sus coeficientes limitados en intervalos independientes conocidos a priori.

Los intervalos de planta han sido estudiados y analizados con detalle en los últimos años. Existen numerosos resultados orientados a resolver el problema de calcular la respuesta en frecuencia de dichas familias, sin embargo, el problema inverso, es decir, calcular los intervalos de planta a partir de la respuesta en frecuencia no ha sido resuelto.

La identificación de intervalos de planta fue investigada en [Bhattacharyya et al., 1995], donde se desarrolla un método en el que la identificación se realiza para plantas del intervalo en las que el numerador y denominador tienen el mismo grado, a partir de la variación de los valores de los coeficientes de una función de transferencia nominal. Es decir, inicialmente se realiza una identificación de una función de transferencia nominal, y posteriormente se determinan los intervalos de variación de los coeficientes.

El objetivo fundamental de esta tesis es obtener un algoritmo para la identificación de intervalos de planta a partir de los vértices de la frontera de sus conjuntos de valores, basándose en propiedades que caracterizan los conjuntos de valores de la familia. Este algoritmo será no conservador, en el sentido de que si se conocen exactamente los valores de los intervalos de la planta y en particular los vértices de sus conjuntos de valores, la familia de intervalos de planta identificada es exactamente la utilizada para obtener los conjuntos de valores. La estructura de este trabajo se ha realizado de acuerdo a los siguientes capítulos.

En el capítulo 1 se desarrolla una breve introducción al control robusto y se comentan algunas teorías de control robusto basadas en las estructuras de las perturbaciones (H_∞ , LQG y QFT para las no estructuradas y μ para las estructuradas). Se detallan los resultados de puntos extremos enunciando los más relevantes. Se revisan también algunos métodos para la estabilidad de familias de polinomios, haciendo énfasis en el Teorema de Kharitonov y extensiones del mismo. Finalmente se indican tests de estabilidad robusta basados en la determinación de conjuntos finitos de elementos.

En el capítulo 2 se introduce el concepto de familia de intervalos de planta para abordar dos de los aspectos fundamentales sobre la identificación:

- la determinación de una cota superior de su conjunto de valores, en términos de su recubrimiento convexo o en términos de su frontera,
- la identificación de una familia de sistemas, o familia de funciones de transferencia, que satisfaga el comportamiento de sus conjuntos de valores.

En este mismo capítulo se expone el procedimiento desarrollado en [Willson et al., 1999], que obtiene una cota superior y una cota inferior del recubrimiento convexo de la frontera del conjunto de valores para sistemas de intervalos y familias de intervalos de polinomios.

Se resalta la importancia del proceso de identificación, centrándose en la idea del modelado de familia de sistemas con incertidumbres. Se estudia el procedimiento de identificación desarrollado en [Bhattacharyya et al., 1995]. El proceso de identificación utilizando el marco de trabajo de los sistemas de intervalos en el dominio de la frecuencia, es el núcleo de esta tesis.

Así pues, en el capítulo 3 se formula un algoritmo de identificación de intervalos de planta, a partir de propiedades obtenidas de sus conjuntos de valores, calculados a frecuencias conocidas. Este algoritmo requiere la existencia de al menos cinco vértices de la frontera del conjunto de valores en un mismo cuadrante, y a partir de ellos se determina el valor de un polinomio de Kharitonov (polinomio asignado) asociado al intervalo de plantas. A partir de él, se obtienen los valores de los polinomios de Kharitonov del numerador y del denominador asociados al intervalo de plantas. Posteriormente, planteando un sistema de ecuaciones, el algoritmo permite obtener los intervalos de parámetros a partir de los polinomios de Kharitonov calculados. Dicho algoritmo es de bajo coste computacional. Se incluyen varios ejemplos de la aplicación del algoritmo, habiéndose realizado su programación en el entorno Matlab (*MathWorks* ©).

Es de destacar, que no siempre es posible disponer de todo el conjunto de valores, para una frecuencia dada, o al menos de cinco vértices del mismo en un cuadrante (véase figura 1).

Por tanto, en el capítulo 4 se mejora el algoritmo expuesto, siendo posible identificar y calcular los polinomios de Kharitonov asociados a la familia de intervalos que generó el conjunto de valores, con al menos dos vértices de la frontera del conjunto en un mismo

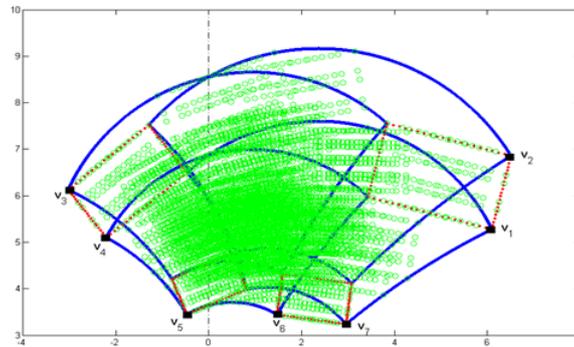


Figura 1: Conjunto de valores con menos de 5 vértices en un cuadrante.

cuadrante. Es decir a partir de un segmento o de un arco completo de la frontera del conjunto de valores, se obtienen los valores de los polinomios asignados del numerador y del denominador

Es decir, se logra identificar la familia de funciones de transferencia si y solo si existe al menos un arco o un segmento de la frontera del conjunto de valores en un cuadrante. Análogamente al proceso de identificación anterior, se presenta un ejemplo en el que se aplica este nuevo algoritmo, realizándose su programación en Matlab (*MathWorks* ©).

Por último, en el capítulo 5 se enuncia y demuestra la extensión y generalización de los resultados y teoremas del capítulo 4, en los casos en los que la normalización utilizada asigne el polinomio inicial con alguna de las condiciones siguientes:

- A) $n_{2R} = 0, n_{2I} \neq 0$.
- B) $n_{2I} = 0, n_{2R} \neq 0$.
- C) $n_{1R} = 0, n_{1I} \neq 0$.

para el caso de un segmento completo, y

- A) $d_{2R} = 0, d_{2I} \neq 0$.
- B) $d_{2I} = 0, d_{2R} \neq 0$.
- C) $d_{1R} = 0, d_{1I} \neq 0$.

para el caso de un arco completo..

Capítulo 1

Control Robusto.

En este capítulo se realiza una breve introducción al control robusto. Se comentan algunas teorías de control robusto basadas en las estructuras de las perturbaciones (H_∞ , LQG y QFT para las no estructuradas, y μ para las estructuradas). Se detallan los resultados de puntos extremos revisando los más relevantes y se revisan también algunos métodos para la estabilidad de familias de polinomios, haciendo énfasis en el Teorema de Kharitonov y extensiones del mismo.

Finalmente se indican tests de estabilidad robusta basados en la determinación de conjuntos finitos de elementos, y se muestran algunas propiedades importantes de los resultados de puntos extremos.

1.1. Introducción.

Se entiende por *Control Robusto* la teoría de control que estudia los sistemas considerando un modelo matemático de las perturbaciones de la planta que se va a controlar.

En la teoría de control clásica el modelo de la planta no describe de forma precisa el proceso real, si no que existen errores de modelado o incertidumbres. Como es bien sabido, estas incertidumbres aparecen en los sistemas de control reales debido, por ejemplo, a las perturbaciones externas y a errores de modelado de los métodos de identificación existentes, obteniendo una representación de la planta «la mejor posible» [LJung, 1999]. Cuando se hace identificación clásica se pretende obtener la mejor aproximación posible.

En general, cuando se considera Control Robusto se trata de obtener no sólo la mejor aproximación posible a una planta, sino el comportamiento completo de la dinámica de la misma. Para ello, se consideran familias de plantas. El adjetivo *robusto* se utiliza para indicar que una propiedad se mantiene no sólo para una planta, sino también para una familia de plantas.

Entre las diferentes aproximaciones al control robusto, destaca la basada en *resultados de puntos extremos*, consistente en determinar si se satisface robustamente una propiedad dada para un sistema de control, a partir del estudio de un subconjunto finito de sistemas extremos. El origen de esta teoría reside en el trabajo de Kharitonov [Kharitonov, 1978] introducido en la literatura occidental por B.R. Barmish y S. Bialas.

La aplicación fundamental de los resultados de puntos extremos se centra principalmente en sistemas con incertidumbres paramétricas estructuradas, formando así una familia de sistemas.

1.2. Incertidumbres estructuradas y no estructuradas.

En el Control Clásico, las incertidumbres en el proceso de diseño de sistemas realimentados se tratan de forma cualitativa mediante la especificación de los márgenes de ganancia y fase. El Control Óptimo, presta atención al comportamiento nominal optimizando alguna medida del comportamiento del sistema, además de garantizar la estabilidad del mismo. El Control Robusto añade un tercer elemento: la dinámica del sistema.

El Control Robusto establece modelos explícitos de las perturbaciones, con la finalidad de encontrar herramientas que conduzcan a controladores estables y con determinadas características de comportamiento bajo un conjunto de incertidumbres en el modelo de la planta o de cambios en la dinámica de la misma.

En la figura 1.1 se muestra, como ejemplo, un diagrama de bloques general para un sistema de control de una planta con incertidumbres, donde Δ representa los errores de modelado existentes en la planta y d_0, d_1 son perturbaciones.

Se distinguen distintos modelos o representaciones de las perturbaciones. En general, se considera una planta nominal caracterizada por su función de transferencia $G_0(s)$, que es la mejor estimación posible del sistema real. Entonces se considera la planta real

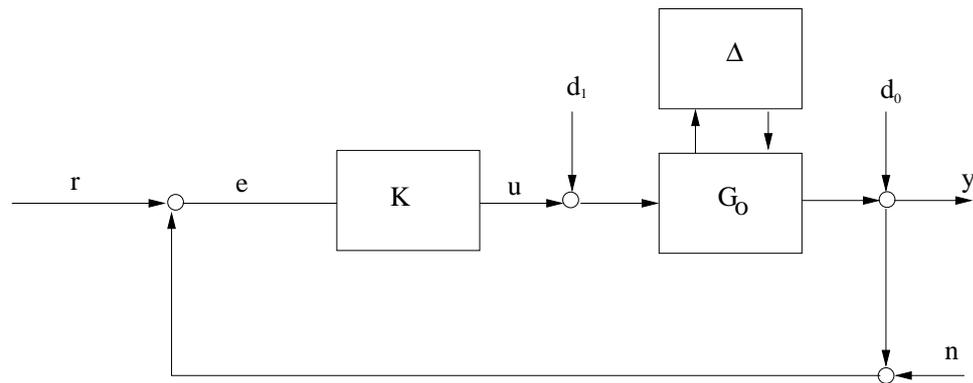


Figura 1.1: Sistema de control realimentado con incertidumbre y perturbaciones.

de las siguientes tres posibles formas, dependiendo de donde esté situado el bloque Δ representativo de los errores de modelado existentes en la planta:

$$G(s) = G_0(s) + \Delta_a(s)$$

$$G(s) = G_0(s) (\Delta_i(s) + I)$$

$$G(s) = (\Delta_o(s) + I) G_0(s) ,$$

donde $\Delta_a(s)$ representa una perturbación aditiva (figura 1.2), $\Delta_i(s)$ una perturbación multiplicativa a la entrada (figura 1.3) y $\Delta_o(s)$ una perturbación multiplicativa a la salida (figura 1.4).

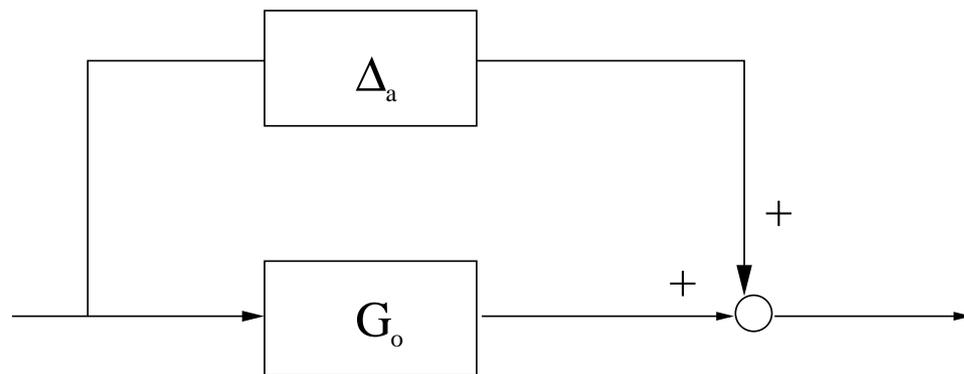


Figura 1.2: Perturbación aditiva.

Sin embargo, en algunos casos no es apropiado establecer la perturbación únicamente en la entrada o en la salida, apareciendo así modelos mixtos tales como

$$G(s) = (\Delta_o(s) + I) G_0(s) (\Delta_i(s) + I) .$$

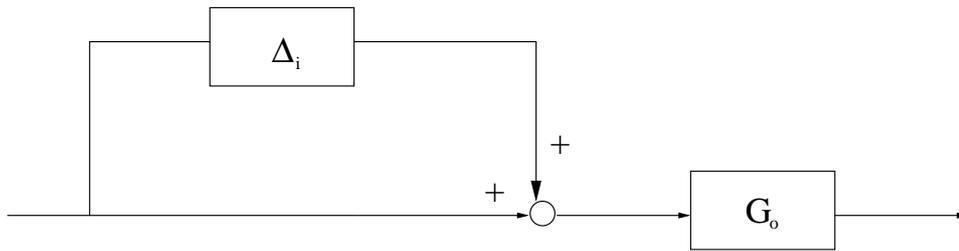


Figura 1.3: Perturbación multiplicativa a la entrada.

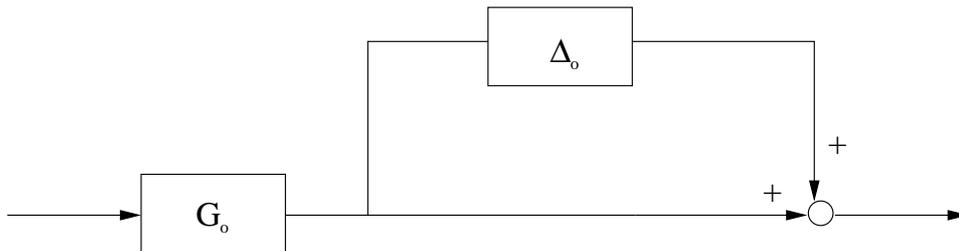


Figura 1.4: Perturbación multiplicativa a la salida.

Se consideran dos tipos de incertidumbres: *estructuradas* y *no estructuradas*. Una incertidumbre se dice *estructurada* cuando se establece en los parámetros de la planta, por ejemplo, la variación de uno o varios coeficientes de los polinomios de la función de transferencia. En caso contrario, se dice que la incertidumbre es *no estructurada*.

Con respecto al bloque de incertidumbre $\Delta(s)$, en el caso de perturbaciones estructuradas, este puede ser descrito de forma que posea algún tipo de estructura. En el caso no estructurado no sería posible establecer ninguna estructura dentro de $\Delta(s)$, aunque sí sería posible conocer alguna cota de su magnitud (mediante alguna norma).

El modelo clásico de perturbaciones determinado mediante margen de fase y de ganancia puede considerarse no estructurado, en el sentido de que limita la magnitud de posibles perturbaciones, pero no determina el origen de estas en ningún parámetro de la planta.

Por tanto, para considerar las incertidumbres del sistema no se describe la dinámica de la planta mediante un sólo modelo lineal e invariante en el tiempo, sino por una familia de modelos lineales e invariantes en el tiempo, es decir, mediante una familia de plantas que describe toda la dinámica del sistema. Sin embargo, la representación matemática de estas regiones de incertidumbre suele ser compleja, tomando en su lugar las menores regiones circulares que la contienen, para cada frecuencia. Evidentemente, esta elección produce un conservadurismo para el caso en el que la perturbación es realmente estructurada.

1.2.1. Métodos con perturbaciones no estructuradas.

Inicialmente la teoría de *realimentación cuantitativa* propuesta por Horowitz, conocida como *QFT*, aborda el problema del diseño robusto suponiendo que la incertidumbre de la planta se representa por medio de un conjunto de plantillas («templates») sobre el plano de Nyquist, cada una de las cuales encierra todas las posibles respuestas en frecuencia, para una frecuencia dada, cada una para una frecuencia. Las especificaciones de diseño se dan como los límites en las magnitudes de los elementos de la respuesta en frecuencia de las funciones de sensibilidad $S(j\omega)$ y/o sensibilidad complementaria $T(j\omega)$:

$$\begin{aligned} S(s) &= F_0^{-1}(s) \\ T(s) &= S(s)G(s)K(s), \end{aligned}$$

donde $F_0(s) = I + G(s)K(s)$, $G(s)$ es la planta y $K(s)$ es el controlador.

En la década de los 70 han ido apareciendo diferentes técnicas de Control Robusto. Basándose en la representación de las perturbaciones no estructuradas, la teoría de Control Robusto conocida como *teoría H_∞* tiene como objetivo minimizar la norma infinito de una función vectorial que relaciona las señales de entradas externas y las señales de error, siendo estas el conjunto de todas las señales necesarias para caracterizar el comportamiento del sistema en lazo cerrado [Francis, 1987]. La solución a este problema de minimización puede realizarse de diferentes formas, entre las que destacan los algoritmos en el espacio de estados [Doyle et al., 1988], la solución de Glover y Doyle [Glover and Doyle, 1988], y la solución basada en la parametrización de Youla, que fue introducida por Zames [Zames and Francis, 1981].

Otro conjunto destacable de métodos de control robusto son los basados en la teoría de control óptimo, y en particular los *métodos LQG (Linear Quadratic Gaussian)*. Esta teoría se establece en el espacio de estados de la siguiente forma: se considera el modelo de la planta

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + \Gamma w \\ y &= Cx + v, \end{aligned}$$

donde w y v son ruidos blancos, correspondientes a procesos estocásticos gaussianos de valor medio nulo y no correlacionados con el tiempo, de covarianzas $E\{ww^T\} = W \geq 0$

y $E\{vv^T\} = V > 0$.

El problema que se plantea es cómo resolver la función de coste

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \int_0^T (z^T Q z + u^T R u) dt \right\},$$

donde $z = Mx$ es alguna combinación lineal de los estados, y $Q = Q^T \geq 0$ y $R = R^T > 0$ son matrices de pesos.

1.2.2. Métodos con perturbaciones estructuradas.

Desde el punto de vista de las perturbaciones estructuradas también existen diferentes teorías para tratar las incertidumbres. En primer lugar, destaca la teoría μ propuesta por Doyle [Doyle and Stein, 1981], [Doyle, 1982]. El esquema de realimentación utilizado en esta teoría se muestra en la figura 1.5. El bloque $M(s)$ es una matriz de transferencia de interconexión, y $\Delta(s) = \text{diag}(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$ es una matriz diagonal perteneciente a la clase de perturbaciones

$$D_1^U(r) = \{\text{diag}(\Delta_1, \dots, \Delta_r) : \Delta_i \in \Delta^*\},$$

donde Δ^* es una esfera en el espacio de las funciones racionales, de radio unidad, es decir

$$\Delta^* = \{\Delta : \Delta \in RH_\infty, \|\Delta\|_\infty \leq 1\}.$$

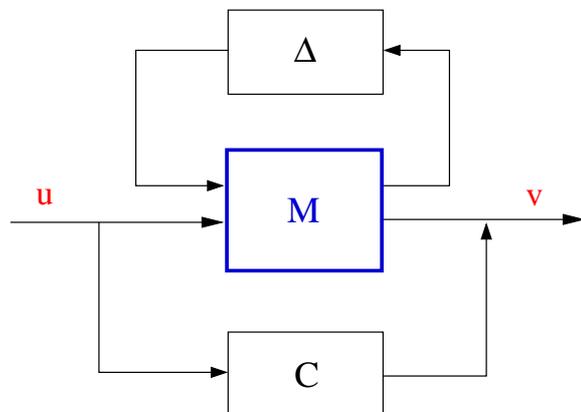


Figura 1.5: Diagrama de bloques con realimentación de incertidumbres.

La matriz M puede calcularse a partir de una realización en el espacio de estados de

la planta nominal SISO, $G^0(s) = N^0(s)/D^0(s)$, resultando

$$M(s) = \begin{pmatrix} M_{11}(s) & M_{12}(s) \\ M_{21}(s) & M_{22}(s) \end{pmatrix},$$

donde

$$M_{11}(s) = D_o^{-1}(s) = \begin{pmatrix} -D_e(s) & -D_e(s) & N_e(s)D_e(s) & N_o(s)D_e(s) \\ -D_o(s) & -D_o(s) & N_e(s)D_e(s) & N_o(s)D_e(s) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{12}(s) = D^0(s)^{-1} \begin{pmatrix} N^0(s)D_e(s) & N^0(s)D_o(s) & N_e(s) & N_o(s) \end{pmatrix}^t$$

$$M_{21}(s) = D^0(s)^{-1} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{22}(s) = D^0(s)^{-1}N^0(s) = G^0(s)$$

siendo $N_e(s)$, $D_e(s)$, $N_o(s)$, $D_o(s)$ las partes pares e impares de $N^0(s)$ y $D^0(s)$ respectivamente.

Si se añade un controlador $C(s)$, el sistema en lazo cerrado puede representarse como una interconexión realimentada de la matriz diagonal de incertidumbres Δ^R con una matriz de transferencia $M_{cl}(s) = P_{cl}(s)^{-1}D_c(s)V(s)W^t(s)$, donde

$$V(s) = \begin{pmatrix} D_e(s) & D_o(s) & -C(s) & -C(s) \end{pmatrix}^t$$

$$W(s) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & N_e(s) & N_o(s) \end{pmatrix}^t$$

y $P_{cl}(s) = D^o(s)D_c(s) + N^o(s)N_c(s)$ es el polinomio característico nominal en lazo cerrado. El sistema en lazo cerrado es robustamente estable si y sólo si $P_{cl}(s)$ es estable y $\det(I - M_{cl}(jw)\Delta^R) \neq 0$, $\forall w \geq 0$, $\forall \Delta : |\Delta_i^R| \leq 1$.

Como puede observarse la representación de estas incertidumbres es de norma acotada, de ahí que a este tipo de perturbaciones se las denomine *incertidumbres estructuradas con norma acotada*.

La teoría μ considera este tipo de perturbaciones, obteniendo resultados tanto desde el punto de vista de análisis como de síntesis, entre los que cabe destacar el Teorema de la Estabilidad Robusta [Doyle, 1982].

El tratamiento de las incertidumbres estructuradas mediante normas limitadas no está lejano al realizado para las incertidumbres no estructuradas. De hecho, algunas de las herramientas utilizadas son comunes.

Sin embargo, la descripción de las incertidumbres estructuradas puede realizarse directamente atendiendo a las posibles variaciones de los coeficientes de los polinomios numerador y denominador de la planta. A este tipo de modelado de las incertidumbres estructuradas se le conoce como *incertidumbres estructuradas paramétricas*, o simplemente *incertidumbres paramétricas*, resaltando el hecho de que se consideran en el espacio de parámetros.

Este modelo de perturbaciones, utilizado por un gran número de trabajos que se iniciaron a partir del Teorema de Kharitonov, resulta muy natural, ya que es posible considerar las perturbaciones directamente sobre los coeficientes de los polinomios. Además, los sistemas reales tienen parámetros que no tienen valores constantes para todas las condiciones, o que se degradan con el tiempo. Por tanto este modelado de las perturbaciones suele estar íntimamente ligado a los parámetros físicos del sistema.

1.3. Resultados de puntos extremos.

De las distintas metodologías que existen para tratar el problema del Control Robusto, en este apartado se realiza una revisión de los resultados más relevantes de la conocida como *Teoría de Resultados de Puntos Extremos*.

Se entiende por *resultados de puntos extremos* aquellos que pueden determinar si se satisface robustamente una propiedad dada para un sistema de control, a partir del estudio de un subconjunto finito de sistemas extremos.

Esta teoría trabaja con distintos tipos de estructuras de incertidumbres. De manera general, la ecuación característica en lazo cerrado de un sistema realimentado con incertidumbres paramétricas se puede escribir de la forma

$$p(s, \mathbf{q}) = a_0(\mathbf{q}) + a_1(\mathbf{q})s + a_2(\mathbf{q})s^2 + \dots + a_n(\mathbf{q})s^n, \quad (1.1)$$

donde $\mathbf{q} = (q_1, q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de perturbaciones que representa las incertidumbres en los parámetros, y $Q = \{\mathbf{q} : q_i \in [q_i^-, q_i^+], i = 0, 1, \dots, n\}$ denota un

hiperrectángulo del vector de incertidumbres \mathbf{q} .

La forma clásica de tratar estas incertidumbres consiste en realizar una discretización del rango admisible de cada parámetro de perturbación q_i . Cuando el número de parámetros crece, esta aproximación es completamente intratable en la práctica.

En el análisis de estabilidad de una familia de polinomios, la forma de la ecuación característica 1.1 desempeña un papel importante en esta teoría. En general se consideran cuatro clases de polinomios con incertidumbres $p(s, \mathbf{q})$ dependiendo de la estructura de los coeficientes $a_i(\mathbf{q})$:

1. *Incertidumbre independiente (intervalo de polinomios)*. Cada componente q_i de \mathbf{q} aparece sólo en un coeficiente $a_i(\mathbf{q})$.
2. *Incertidumbre afín lineal*. Cada coeficiente $a_i(\mathbf{q})$ es una función afín lineal. En este caso q_i puede aparecer de forma lineal en más de un coeficiente.
3. *Incertidumbre multilineal*. Al menos uno de los coeficientes $a_i(\mathbf{q})$ es una función multilineal de los parámetros con incertidumbres.
4. *Incertidumbre polinomial*. Al menos uno de los coeficientes $a_i(\mathbf{q})$ es un polinomio multivariable de los parámetros con incertidumbres.

El interés de los resultados de puntos extremos, aplicado principalmente a sistemas con incertidumbres estructuradas paramétricas, radica en el hecho de que para los sistemas reales con estas incertidumbres, los otros métodos son más conservadores. Además el modelo de perturbaciones estructuradas está directamente relacionado con el conocimiento de los parámetros físicos del sistema, dentro de unos límites determinados. En esta sección se revisan algunos resultados importantes de la teoría de puntos extremos.

1.3.1. Estabilidad de familias de polinomios.

El problema del análisis robusto con incertidumbres paramétricas reales considera una familia de polinomios $P(s, Q)$, generada por un polinomio $p(s, \mathbf{q})$ de grado n cuyos coeficientes reales $a_i(\mathbf{q})$ son funciones continuas de un vector \mathbf{q} de dimensión l de parámetros inciertos reales, cada uno acotado en un intervalo $[q_i^-, q_i^+]$:

$$\begin{aligned}
 P(s, Q) &= \{p(s, \mathbf{q}) : \mathbf{q} \in Q\} \\
 p(s, \mathbf{q}) &= a_0(\mathbf{q}) + a_1(\mathbf{q})s + a_2(\mathbf{q})s^2 + \dots + a_n(\mathbf{q})s^n, \mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2, \dots, q_l) \quad (1.2)
 \end{aligned}$$

formando entonces el conjunto de vectores \mathbf{q} de todos los parámetros posibles un hiperrectángulo Q en el espacio de parámetros, $Q = \{\mathbf{q} : q_i^- \leq q_i \leq q_i^+, i = 0, 1, 2, \dots, l\}$. En este contexto, la propiedad básica que necesita garantizar el análisis es la estabilidad robusta de $P(s, Q)$.

La forma clásica de tratar este problema consistía en aplicar un test de estabilidad a un polinomio específico $p(s, q_i)$, con $\mathbf{q} = q_i$ y repetir el test para un número suficientemente grande de puntos $q_i \in Q$. Es decir hay que realizar un mallado en el espacio de parámetros. El problema está en que de esta forma no se puede asegurar que exista un punto inestable en Q , aparte de que cuando el número de parámetros inciertos crece, esta solución puede ser difícilmente tratable en la práctica.

A continuación se van a presentar distintos métodos para comprobar la estabilidad de polinomios y su extensión a familia de polinomios.

1.3.1.1. Lugar de las raíces.

Es la formulación clásica del análisis de estabilidad a partir de la localización de las raíces. Si alguna de las raíces de un polinomio $p(s)$ de orden n no se encuentra en el semiplano izquierdo del plano complejo, entonces el polinomio es inestable. A partir de este hecho, la manera inmediata de analizar la estabilidad de un polinomio consiste en determinar sus raíces. Este análisis de estabilidad se puede extender a una familia de polinomios. Para ello, sea $R[P(s, Q)] = \{v \in C : p(v, \mathbf{q}) = 0, p(s, \mathbf{q}) \in P(s, Q)\}$ el conjunto de todas las raíces de una familia de polinomios. Esta será robustamente estable si y sólo si todas las raíces están contenidas en el semiplano izquierdo del plano complejo.

Si el número de elementos de $P(s, Q)$ es finito, el análisis mediante el lugar de las raíces es sencillo. Sin embargo, esto no es posible normalmente. Entonces, el cálculo de las raíces se aproxima escogiendo un mallado en los parámetros, y calculando las raíces en cada uno de sus puntos.

El problema principal del mallado anterior reside en que, aún siendo un mallado denso, no garantiza la estabilidad debido a la existencia de frecuencias singulares, aparte del elevado coste computacional que presenta.

1.3.1.2. Cruce por la frontera.

Un resultado clásico fundamental que muestra un argumento de continuidad de las raíces es el siguiente:

Teorema 1.1

Sea $P(s, Q)$ una familia de polinomios de la forma 1.2. Sean \mathbf{q}_1 y \mathbf{q}_2 dos vectores de parámetros pertenecientes a Q , tal que:

$$\begin{aligned} a_0(\mathbf{q}_1) + a_1(\mathbf{q}_1)s + \dots + a_n(\mathbf{q}_1)s^n &= a_n(\mathbf{q}_1)(s - \alpha_1)(s - \alpha_2) \dots (s - \alpha_n) \\ a_0(\mathbf{q}_2) + a_1(\mathbf{q}_2)s + \dots + a_n(\mathbf{q}_2)s^n &= a_n(\mathbf{q}_2)(s - \beta_1)(s - \beta_2) \dots (s - \beta_n) \end{aligned}$$

Las raíces α_i pueden ordenarse respecto a las raíces β_i de forma que las raíces de la familia de polinomios $P(s, Q)$ contienen al menos un camino continuo que comienza en α_i y termina en β_i , para $i = 1, 2, \dots, n$.

Una demostración del mismo puede encontrarse en [Marden, 1949]. Basándose en esta propiedad de continuidad, Frazer y Duncan [Frazer and Duncan, 1929] mostraron que no es necesario calcular todas las raíces del polinomio para determinar la estabilidad de una familia de polinomios, si no que las raíces que hay que localizar son aquellas que se encuentran en la frontera de estabilidad en el plano s .

A partir del siguiente teorema, Frazer y Duncan demostraron el Teorema de Cruce por la Frontera.

Teorema 1.2

[Frazer y Duncan] Sea $P(s, Q)$ una familia de polinomios de la forma 1.2. Si existen dos vectores $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in Q$ tales que

$$p(s, \mathbf{q}_1) = a_0(\mathbf{q}_1) + a_1(\mathbf{q}_1)s + \dots + a_n(\mathbf{q}_1)s^n$$

es estable y

$$p(s, \mathbf{q}_2) = a_0(\mathbf{q}_2) + a_1(\mathbf{q}_2)s + \dots + a_n(\mathbf{q}_2)s^n$$

es inestable, entonces el conjunto de raíces de $P(s, Q)$ contiene al menos un punto en el eje imaginario no negativo.

Teorema 1.3

[Teorema de Cruce por la Frontera] Sea $P(s, Q)$ una familia de polinomios de la forma 1.2. $P(s, Q)$ es robustamente estable si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:

1. Al menos uno de los polinomios de la familia es estable.
2. No existe ninguna raíz en el eje imaginario positivo.

Este resultado desempeña un papel muy importante en otros métodos de análisis de estabilidad de polinomios, así como en el Teorema de Kharitonov y sus extensiones.

1.3.1.3. Criterios en el dominio de la frecuencia.

Algunos de los criterios de estabilidad más conocidos se presentan en el dominio de la frecuencia.

Definición 1.1

Dado un polinomio $p(s)$, se denomina *valor del polinomio en la frecuencia w* al número complejo que resulta de evaluar $p(s)$ en $s = jw$.

El Principio del Argumento sirve como base para el planteamiento del problema de la estabilidad en el dominio de la frecuencia. En 1932 Nyquist presenta un trabajo en el que hace uso de este principio:

Teorema 1.4

[Principio del Argumento] Sea Γ un contorno cerrado simple orientado positivamente. Sea f una función analítica sobre Γ y dentro de Γ , salvo en polos interiores a Γ . Si f no tiene ceros sobre Γ , el incremento neto del argumento de $f(z)$ ($\Delta_{\Gamma} \arg f(z)$) cuando z da una vuelta completa a lo largo de Γ es $2\pi(Z - P)$, donde Z y P son el número de ceros y de polos de f interiores a Γ .

Basándose en el Principio del Argumento, Mikhailov [Mikhailov, 1938] presentó el siguiente Teorema para el análisis de la estabilidad Hurwitz de un polinomio:

Teorema 1.5

[Teorema de Mikhailov] Un polinomio $p(s)$ es estable si y sólo si el diagrama en el plano complejo de sus valores $p(jw)$ para $0 \leq w \leq \infty$ satisface las dos condiciones siguientes:

1. $p(j0) = a_0$, es decir, el diagrama comienza en el eje real positivo.
2. Cuando w crece, el diagrama de $p(jw)$ encierra al origen en sentido positivo y su fase tiende a $n\frac{\pi}{2}$ cuando w tiende a ∞ .

A partir de este resultado, se obtiene el siguiente.

Teorema 1.6

Si un polinomio $p(s)$ es estable, entonces su argumento es monótonamente creciente, es decir $\frac{\partial \arg p(jw)}{\partial w} > 0$, para todo w .

La propiedad de entrelazado permite obtener un test de estabilidad Hurwitz conocido como Teorema de Entrelazado o de Hermite-Biehler. Para ello, sea $p(s)$ un polinomio de orden n . Se definen las partes par e impar de $p(s)$, respectivamente, como

$$\begin{aligned} p^e(s) &= a_0 + a_2s^2 + \dots \\ p^o(s) &= a_1s + a_3s^3 + \dots, \end{aligned}$$

y sean

$$\begin{aligned} P^e(w) &\equiv p^e(jw) = a_0 - a_2w^2 + a_4w^4 - \dots \\ P^o(w) &\equiv \frac{p^o(jw)}{jw} = a_1 - a_3w^2 + a_5w^4 - \dots \end{aligned}$$

Como $P^e(w)$ y $P^o(w)$ son polinomios en w^2 sus raíces son simétricas respecto al origen del plano complejo.

Si el grado de $p(s)$ es par ($n = 2m$, $m > 0$) se tiene que

$$\begin{aligned} P^e(w) &= a_0 - a_2w^2 + a_4w^4 - \dots + (-1)^m a_{2m}w^{2m} \\ P^o(w) &= a_1 - a_3w^2 + a_5w^4 - \dots + (-1)^{m-1} a_{2m-1}w^{2m-2} \end{aligned}$$

y si el grado es impar ($n = 2m + 1$, $m \geq 0$), entonces

$$\begin{aligned} P^e(w) &= a_0 - a_2w^2 + a_4w^4 - \dots + (-1)^m a_{2m}w^{2m} \\ P^o(w) &= a_1 - a_3w^2 + a_5w^4 - \dots + (-1)^m a_{2m+1}w^{2m} \end{aligned}$$

Definición 1.2

Un polinomio $p(s)$ de grado par (respectivamente impar) satisface la propiedad de entrelazado, si cumple las dos condiciones siguientes:

- $a_{2m}(a_{2m+1})$ y $a_{2m-1}(a_{2m})$ tienen el mismo signo.
- Todas las raíces de $P^e(w)$ y de $P^o(w)$ son reales y distintas y además las m raíces

positivas de $P^e(w)$ y las $m-1(m)$ raíces positivas de $P^o(w)$ se entrelazan de la siguiente forma:

$$0 < w_{e,1} < w_{o,1} < w_{e,2} < \dots < w_{e,m-1} < w_{o,m-1} < w_{e,m}$$

si n es par y

$$0 < w_{e,1} < w_{o,1} < \dots < w_{e,m-1} < w_{o,m-1} < w_{e,m} < w_{o,m}$$

si n es impar.

Por tanto, un polinomio $p(s) = p^e(s) + p^o(s)$ satisface la propiedad de entrelazado si y sólo si los coeficientes correspondientes a los términos de mayor grado de su parte par y de su parte impar son del mismo signo, los ceros de los polinomios par e impar son distintos, situados en el eje imaginario y alternan a lo largo de dicho eje. Se puede enunciar el siguiente Teorema de entrelazado o de Hermite-Biehler:

Teorema 1.7

Un polinomio real $p(s)$ es Hurwitz si y sólo si satisface la propiedad de entrelazado.

La propiedad de entrelazado es equivalente a la propiedad de incremento monótonamente creciente de la fase (Teorema de Mikhailov). Es decir, el diagrama de $p(jw)$ debe cruzar los ejes de forma ordenada en la secuencia eje imaginario positivo - eje real negativo - eje imaginario negativo - eje real positivo - etc., satisfaciéndose el entrelazado de las raíces de $Re[p(jw)]$ y de $Im[p(jw)]$. De esta forma, con un dibujo en el dominio de la frecuencia, es fácil determinar si un polinomio es estable.

Para extender el Teorema del entrelazado al análisis de la estabilidad de una familia de polinomios, se debe realizar la misma aproximación que se comentó para el lugar de las raíces. Esto es, calcular el diagrama polar para cada polinomio de la familia y comprobar si cumple o no el entrelazado correcto. El siguiente resultado resume esta interpretación.

Teorema 1.8

La familia de polinomios $P(s, Q)$ es robustamente estable si y sólo si:

1. Existe un polinomio estable en la familia.
2. No existe $\mathbf{q} \in Q$ tal que su diagrama polar $p(jw, \mathbf{q})$, con $w \leq 0$, contiene al origen.

La segunda condición de este Teorema es la misma que la segunda condición del Teorema de Cruce por la Frontera (teorema 1.3). Si el diagrama polar no contiene al

origen, implica que la existencia de raíces en el eje imaginario positivo está descartada. El problema surge, de nuevo, con la existencia de las frecuencias singulares, con lo que el mallado escogido no garantiza la estabilidad, aparte del coste computacional que este mallado puede suponer para familias de polinomios infinitas.

Otro resultado conocido y ampliamente aplicado es el Principio de Exclusión de Cero, basado en una idea cercana al Principio de Nyquist, comentada en el libro de Zadeh y Desoer [Zadeh and Desoer, 1963], aunque esta idea estaba ya presente anteriormente en un trabajo de Fazer y Duncan [Frazer and Duncan, 1929].

Definición 1.3

El *conjunto de valores* («value set») es el conjunto de puntos definido por

$$P(jw, Q) = \{p(jw, \mathbf{q}) \in \mathbb{C} : \mathbf{q} \in Q\}.$$

Este conjunto recibe el nombre de *conjunto de valores* porque corresponde al conjunto de posibles valores que se obtiene fijando el valor de $s = jw$ para cada frecuencia, y calculando los polinomios cuando \mathbf{q} varía en Q .

Teorema 1.9

[Principio de Exclusión del Cero] La familia de polinomios $P(s, Q)$ es robustamente estable si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:

1. Existe un polinomio estable en la familia.
2. $0 \notin P(jw, Q), \forall w \leq 0$.

El principio de Exclusión del Cero proporciona un test de estabilidad robusta muy general, fácil de aplicar siempre que el conjunto de valores se genere sin dificultad. Es por esto por lo que los investigadores se centraron en encontrar clases de dependencias de los coeficientes respecto a los parámetros de perturbación para las que el conjunto de valores se construye de forma sencilla. Por ejemplo, el conjunto de valores para un intervalo de polinomios es un rectángulo (geometría de Dasgupta) y es un polígono para un politopo de polinomios.

La forma trivial de construir el conjunto de valores consiste en realizar un mallado del conjunto Q y evaluar el polinomio $p(s, q)$ en cada punto de la malla. Es un método delicado, ya que el número de puntos de la rejilla crece con la dimensión l de \mathbf{q} , y

además debe realizarse para cada frecuencia. Es, por tanto, un método aplicable a casos prácticos sólo cuando el número de parámetros de incertidumbre no es muy elevado. Sin embargo, se han elaborado otras estrategias de construcción del conjunto de valores que simplifican el procedimiento, en términos del recubrimiento convexo del conjunto de valores [Willson et al., 1999]. Estas técnicas proporcionan métodos conservadores, ya que el hecho de que el recubrimiento convexo del conjunto de valores no contenga el cero, es una condición suficiente pero no necesaria para la estabilidad robusta.

1.3.2. El Teorema de Kharitonov.

El Teorema de Kharitonov se considera el punto de partida del desarrollo de la teoría de resultados de puntos extremos. Las incertidumbres en los parámetros se representan mediante el vector de perturbaciones $\mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ independientes, es decir, el valor de cada parámetro de perturbación no está relacionado con el valor de otro parámetro de perturbación, y con límites conocidos $q_i^- \leq q_i \leq q_i^+$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Dada esta estructura de perturbaciones independientes, se considera la familia de intervalos de polinomios P_I descrita por

$$p(s, \mathbf{q}) = q_0 + q_1 s + q_2 s^2 + \dots + q_n s^n \quad (1.3)$$

El problema es determinar si toda la familia P_I es estrictamente estable, es decir si todas las raíces de todos los polinomios pertenecientes a la familia P_I se encuentran en el semiplano izquierdo del plano complejo \mathbb{C} . En este contexto se realizan las siguientes definiciones.

Definición 1.4

Un polinomio $p(s)$ es estable (de Hurwitz) si todas sus raíces están en el semiplano izquierdo abierto del plano complejo.

Definición 1.5

Una familia de polinomios se dice robustamente estable si todos sus polinomios son estables.

Definición 1.6

Una familia de polinomios presenta invariancia de grado si todos sus polinomios son del mismo grado, es decir, si el coeficiente de mayor grado es distinto de cero para todos los polinomios de la familia.

De la familia de intervalos de polinomios P_I (ecuación 1.3) se toman los siguientes cuatro polinomios distinguidos:

$$K_1(s) = q_o^- + q_1^- s^1 + q_2^+ s^2 + q_3^+ s^3 + q_4^- s^4 + q_5^- s^5 + \dots$$

$$K_2(s) = q_o^+ + q_1^- s^1 + q_2^- s^2 + q_3^+ s^3 + q_4^+ s^4 + q_5^- s^5 + \dots$$

$$K_3(s) = q_o^+ + q_1^+ s^1 + q_2^- s^2 + q_3^- s^3 + q_4^+ s^4 + q_5^+ s^5 + \dots$$

$$K_4(s) = q_o^- + q_1^+ s^1 + q_2^+ s^2 + q_3^- s^3 + q_4^- s^4 + q_5^+ s^5 + \dots$$

denominados *polinomios de Kharitonov* de la familia de intervalos de polinomios. El Teorema de Kharitonov, en la versión ofrecida por [Barmish and Kang, 1993], es el siguiente:

Teorema 1.10

[Teorema de Kharitonov] Sea P_I una familia de intervalos de polinomios que mantiene la invariancia de grado. Entonces P_I es robustamente estable si y sólo si los cuatro polinomios de Kharitonov asociados son estables.

Por tanto, para analizar la estabilidad de una familia de intervalos de polinomios basta con aplicar el test de estabilidad cuatro veces, una para cada polinomio de Kharitonov.

En este contexto se entiende la importancia del Teorema de Kharitonov y el concepto de resultados de puntos extremos. La realización clásica de un mado para todos los coeficientes y el análisis de estabilidad para cada punto del mismo, conlleva un coste computacional enorme y además no soluciona el problema de las frecuencias singulares. El Teorema de Kharitonov reduce el test de estabilidad al de cuatro polinomios extremos, independientemente del número n de parámetros de perturbación del intervalo de polinomios.

El Teorema de Kharitonov trata con intervalos de polinomios de coeficientes reales. Sin embargo, se extiende también a intervalos de polinomios de coeficientes complejos [Kharitonov, 1978].

Se debe resaltar la existencia de numerosas demostraciones alternativas del Teorema de Kharitonov, al ser la original bastante compleja. La realizada por Dasgupta [Dasgupta, 1988] en el dominio de la frecuencia describe una interpretación geométrica del comportamiento de un intervalo de polinomios en el plano complejo. Considera intervalos

de polinomios mónicos con invariancia de grado de la forma

$$p(s) = s^n + \sum_{i=1}^n a_i s^{n-i}, \quad 0 < a_i^- \leq a_i \leq a_i^+. \quad (1.4)$$

Descomponiendo $p(s)$ en sus partes par e impar $p(s) = h(s^2) + sg(s^2)$ se construyen los polinomios de Kharitonov

$$\begin{aligned} K_1(s) &= h_1(s^2) + sg_1(s^2); & K_2(s) &= h_2(s^2) + sg_1(s^2) \\ K_3(s) &= h_1(s^2) + sg_2(s^2); & K_4(s) &= h_2(s^2) + sg_2(s^2) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} h_1(s) &= a_n^- + a_{n-2}^- s^2 + a_{n-4}^- s^4 + \dots, & h_2(s) &= a_n^+ + a_{n-2}^- s^2 + a_{n-4}^+ s^4 + \dots \\ g_1(s) &= a_{n-1}^- + a_{n-3}^+ s^2 + a_{n-5}^- s^4 + \dots, & g_2(s) &= a_{n-1}^+ + a_{n-3}^- s^2 + a_{n-5}^+ s^4 + \dots \end{aligned}$$

La demostración del Teorema de Kharitonov se basa en que para $s = jw$ la parte par de los polinomios es un número real y la parte impar es un número imaginario puro, es decir,

$$Re(p(jw)) = h(-w^2); \quad Im(p(jw)) = wg(-w^2).$$

Evaluando $h_1(s^2)$ y $h_2(s^2)$ en $s = jw$ se obtiene

$$h_1(-w^2) = a_n^- - a_{n-2}^+ w^2 + a_{n-4}^- w^4 + \dots$$

y

$$h_2(-w^2) = a_n^+ - a_{n-2}^- w^2 + a_{n-4}^+ w^4 + \dots$$

Teniendo en cuenta las restricciones de la ecuación 1.4 se satisfacen las siguientes desigualdades

$$h_1(-w^2) \leq h(-w^2) = a_n - a_{n-2} w^2 + a_{n-4} w^4 + \dots \leq h_2(-w^2) \quad (1.5)$$

Análogamente

$$g_1(-w^2) \leq g(-w^2) \leq g_2(-w^2). \quad (1.6)$$

Las condiciones 1.5 y 1.6 indican que, para una frecuencia dada, el valor $p(jw)$ de

cualquier polinomio del intervalo de polinomios 1.4 está en un rectángulo en el plano complejo. Es decir el conjunto de valores de un intervalo de polinomios es un rectángulo, siendo los vértices de dicho rectángulo los polinomios de Kharitonov. Esta observación es conocida como la *geometría de Dasgupta* y con ella Dasgupta demuestra el Teorema de Kharitonov.

La mayoría de los resultados existentes en la literatura tratan con familias de intervalos de polinomios invariantes de grado. Hernández [Hernández, 1996b] estudió la estabilidad Hurwitz de intervalos de polinomios, demostrando que el Teorema de Kharitonov puede extenderse a familias de polinomios que pueden disminuir en grado.

1.3.3. El Teorema de la Arista.

El hecho de que el Teorema de Kharitonov sea únicamente aplicable a familias de intervalos de polinomios (incertidumbres independientes) constituye una limitación práctica, ya que cuando los parámetros de perturbación forman parte de más de un coeficiente, es necesario delimitar los coeficientes para aplicar el Teorema de Kharitonov. De este modo se tratan las perturbaciones dependientes como si fueran independientes, con lo que se obtienen resultados conservadores.

Un ejemplo típico de este hecho es el caso discreto. Aplicando la transformación bilineal $z = \frac{s+1}{s-1}$ se transforma el intervalo de polinomios en z en una familia de polinomios en s con coeficientes independientes, por lo que al aplicar el Teorema de Kharitonov se obtienen resultados solamente suficientes. El Teorema de la Arista resuelve esta limitación.

Se consideran representaciones de las perturbaciones en la que los coeficientes de los polinomios son linealmente dependientes (incertidumbres afines lineales), dando lugar a familia de intervalos lineales de polinomios. En concreto, se consideran polinomios de la forma

$$p(s, \mathbf{q}) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\mathbf{q}) s^i,$$

donde los coeficientes $a_i(\mathbf{q})$ dependen de forma afín lineal de los parámetros físicos $\mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2, \dots, q_l)$. Cuando cada uno de estos parámetros se conoce dentro de los límites dados, es decir, $q_i \in [q_i^-, q_i^+]$, $i = 0, 1, 2, \dots, l$, el vector \mathbf{q} de parámetros de perturbación está confinado en una caja multidimensional Q , y la familia de intervalos lineales de polinomios resultante es un politopo de polinomios.

Debe observarse que si un polinomio de la familia tiene una estructura de perturbaciones afín lineal, el conjunto de coeficientes asociados

$$a(Q) = \{a_0(\mathbf{q}), a_1(\mathbf{q}), \dots, a_n(\mathbf{q}) : \mathbf{q} \in Q\}$$

define un politopo en \mathbb{R}^{n+1} . De hecho, utilizando argumentos de análisis convexo, se puede expresar $a(Q)$ como el recubrimiento convexo de los generadores $a(q^i)$, $a(Q) = \text{conv}(a(q^i))$, siendo $q^i, i = 0, 1, \dots, l$, los puntos extremos de Q . Entonces, es posible crear la asociación entre politopos en \mathbb{R}^{n+1} y familias de intervalos de polinomios con estructura de perturbaciones afín lineal.

Conviene tener presente que todos los polinomios de la familia $P = \{p(s, \mathbf{q}) : \mathbf{q} \in Q\}$ pueden expresarse como una combinación convexa de los polinomios extremos $p(s, q^i)$, es decir, $P = \text{conv}(p(s, q^i))$. Esto justifica que la familia de intervalos lineales de polinomios P se denomine *politopo de polinomios*.

El Teorema de la Arista indica que para asegurar la estabilidad estricta de todo el politopo de polinomios es necesario y suficiente que las aristas expuestas sean estrictamente estables. Teniendo en cuenta que las aristas expuestas son unidimensionales, se produce una disminución del coste computacional en la determinación de la estabilidad.

El Teorema de la Arista va aún más lejos, ya que se plantea en términos de D -estabilidad.

Teorema 1.11

[Teorema de la Arista. [Bartlett et al., 1988]] Sea $D \subset \mathbb{C}$ un dominio simplemente conexo. Entonces todas las raíces de un politopo de polinomios invariantes en grado están en D , si y sólo si todas las raíces de las aristas expuestas del politopo de polinomios están en D .

Como puede observarse, dependiendo del dominio de D -estabilidad que se proponga, se obtendrán resultados en relación a la estabilidad Hurwitz (D es el semiplano izquierdo abierto del plano complejo) o Schur (D es el círculo unidad abierto). Del mismo modo, considerando otros dominios se pueden estudiar un gran número de problemas de asignación de polos. Además, el Teorema de la Arista es un resultado no conservador, al obtener condiciones necesarias y suficientes.

Existen un gran número de test computacionalmente eficaces para comprobar la estabilidad Hurwitz de una arista. El más evidente es el propuesto por Bartlett, Hollot

y Lin [Barlett et al., 1988], consistente en calcular el lugar de las raíces para todas las aristas expuestas. Para ello se forman las aristas a partir de los polinomios vértices del politopo de polinomios, y se encuentran las raíces de los polinomios $(1 - \lambda)p_i(s) + \lambda p_j(s)$ variando λ de 0 a 1, siendo $p_i(s)$ y $p_j(s)$ dos polinomios vértices del politopo de polinomios.

Otra posibilidad, propuesta por Barmish y Kang [Barmish and Kang, 1993], es la de aplicar el lugar de las raíces clásico a las plantas formadas tal que los polinomios numerador y denominador son los polinomios vértices de la arista

$$P(s) = \frac{p_i(s)}{p_j(s)},$$

compensada mediante realimentación unitaria (figura 1.6).

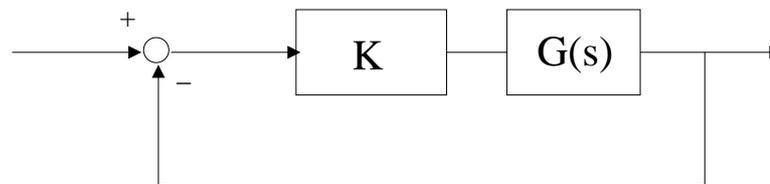


Figura 1.6: Planta para el problema de la arista.

Existen otros resultados, como el Teorema de Zeheb [Zeheb, 1989], que resuelven el problema del análisis para politopos de polinomios de forma computacionalmente tratable, y son simples de aplicar. Además el problema está resuelto no sólo para la estabilidad de Hurwitz sino también para la D -estabilidad y en particular para la estabilidad de Schur y para la estabilidad cónica.

1.3.4. Teorema de Kharitonov Generalizado.

A la hora de aplicar de forma directa el Teorema de Kharitonov a un sistema de control (en lazo cerrado) existe cierto grado de conservadurismo, debido principalmente a que los coeficientes del polinomio característico del sistema son dependientes entre sí, mientras que una de las hipótesis del Teorema de Kharitonov es que los coeficientes de dicho polinomio característico deben ser independientes.

En estos casos, una alternativa al estudio de la estabilidad consiste en la aplicación del Teorema de la Arista, ya que los parámetros de la planta se sitúan en el interior de una caja, que puede considerarse un caso particular de politopo. Sin embargo, esta solución implica realizar comprobaciones redundantes. Además, el Teorema de la Arista no es una

generalización del Teorema de Kharitonov.

Cabe esperar que una generalización del Teorema de Kharitonov produzca un conjunto de test que, basándose en las características de los polinomios de Kharitonov, evite cualquier tipo de conservadurismo.

Teniendo en cuenta estas consideraciones, en la siguiente sección se formulará el problema de la generalización del Teorema de Kharitonov. Previamente se introducirá la notación a utilizar.

1.3.4.1. Formulación del problema y notación.

Se utilizan familias de intervalos lineales de polinomios, siendo éstos de la forma

$$\delta(s) = F_1(s)P_1(s) + F_2(s)P_2(s) + \dots + F_m(s)P_m(s). \quad (1.7)$$

Escribiendo

$$\begin{aligned} \underline{F}(s) &\equiv (F_1(s), F_2(s), \dots, F_m(s)) \\ \underline{P}(s) &\equiv (P_1(s), P_2(s), \dots, P_m(s)) \end{aligned}$$

resulta

$$\langle \underline{F}(s), \underline{P}(s) \rangle \equiv F_1(s)P_1(s) + F_2(s)P_2(s) + \dots + F_m(s)P_m(s).$$

Se dice que $\underline{F}(s)$ estabiliza $\underline{P}(s)$ si $\delta(s) \equiv \langle \underline{F}(s), \underline{P}(s) \rangle$ es estable Hurwitz. A lo largo de esta sección estable significa estable en el sentido de Hurwitz.

Los polinomios $F_i(s)$ son polinomios reales de grado fijo, mientras que $P_i(s)$ son polinomios reales cuyos coeficientes varían de forma independiente en un determinado intervalo.

Sea $d^\circ(P_i)$ el grado de $P_i(s) \equiv p_{i,0} + p_{i,1}s + \dots + p_{i,d^\circ(P_i)}s^{d^\circ(P_i)}$ y denotemos por $\mathbf{p}_i \equiv (p_{i,0}, p_{i,1}, \dots, p_{i,d^\circ(P_i)})$.

Sea $\underline{m} = (1, 2, \dots, m)$. Cada $P_i(s)$ pertenece a una familia de intervalos $\mathbf{P}_i(s)$ especificada por los intervalos $p_{i,j} \in [\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}]$, $i \in \underline{m}$, $j = 0, \dots, d^\circ(P_i)$. La caja definida en el espacio de parámetros correspondiente es

$$\Pi_i \equiv \{\mathbf{p}_i : \alpha_{i,j} \leq p_{i,j} \leq \beta_{i,j}, j = 0, 1, \dots, d^\circ(P_i)\}$$

Se denota por $\underline{P}(s) \equiv (P_1(s), P_2(s), \dots, P_m(s))$ y por $\mathbf{P}(s)$ a la familia de m-uplas $\mathbf{P}(s) \times \mathbf{P}_2(s) \times \dots \times \mathbf{P}_m(s)$.

Sea $\mathbf{p} \equiv [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_m]$ el vector de parámetros globales, y sea $\Pi \equiv \Pi_1 \times \Pi_2 \times \dots \times \Pi_m$ el conjunto de incertidumbres de los parámetros globales. El polinomio 1.7 se escribe como $\delta(s, \mathbf{p})$ o $\delta(s, \underline{P}(s))$ para enfatizar su dependencia del vector de parámetros \mathbf{p} o de la m-upla $\underline{P}(s)$.

El objetivo consiste en determinar la estabilidad Hurwitz del conjunto de polinomios

$$\Delta(s) \equiv \{\delta(s, \mathbf{p}), \mathbf{p} \in \Pi\} = \left\{ \langle \underline{F}(s), \underline{P}(s) \rangle : \underline{P}(s) \in \mathbf{P}(s) \right\}$$

que se denomina *familia de intervalos lineal de polinomios*, adoptando la notación

$$\Delta(s) = F_1(s)\mathbf{P}_1(s) + F_2(s)\mathbf{P}_2(s) + \dots + F_m(s)\mathbf{P}_m(s).$$

Las siguientes suposiciones sobre esta familia son necesarias:

1. Los elementos de \mathbf{p} son independientes. De forma equivalente, Π es una caja rectangular de lados paralelos a los ejes.
2. Todos los polinomios de $\Delta(s)$ tienen el mismo grado.

Las suposiciones anteriores permiten utilizar resultados tales como el Teorema de la Arista para desarrollar la solución. Así, $\Delta(s)$ es estable si todo polinomio de $\Delta(s)$ es estable Hurwitz. De forma equivalente, $\underline{F}(s)$ estabiliza todo elemento $\underline{P}(s) \in \mathbf{P}(s)$.

La solución aportada a continuación construye un subconjunto extremo de segmentos $\Delta_E(s) \subset \Delta(s)$, con la propiedad de que la estabilidad de $\Delta_E(s)$ implica la estabilidad de $\Delta(s)$. Es una solución constructiva, ya que la estabilidad de $\Delta_E(s)$ puede verificarse resolviendo un problema de determinación del lugar de las raíces.

La solución es eficiente, ya que el número de elementos de $\Delta_E(s)$ es independiente de la dimensión del espacio de parámetros Π . El subconjunto $\Delta_E(s)$ se genera construyendo en primer lugar un subconjunto extremo $\mathbf{P}_E(s)$ de la familia de m-uplas $\mathbf{P}(s)$. El subconjunto extremo $\mathbf{P}_E(s)$ se construye a partir de los polinomios de Kharitonov de $\mathbf{P}_i(s)$.

Construcción del Subconjunto Extremo $\Delta_E(s)$.

Los polinomios de Kharitonov correspondientes a cada $\mathbf{P}_i(s)$ son

$$\begin{aligned} K_i^1(s) &= \alpha_{i,0} + \alpha_{i,1}s + \beta_{i,0}s^2 + \beta_{i,3}s^3 + \dots \\ K_i^2(s) &= \alpha_{i,0} + \beta_{i,1}s + \beta_{i,2}s^2 + \alpha_{i,3}s^3 + \dots \\ K_i^3(s) &= \beta_{i,0} + \alpha_{i,1}s + \alpha_{i,2}s^2 + \beta_{i,3}s^3 + \dots \\ K_i^4(s) &= \beta_{i,0} + \beta_{i,1}s + \alpha_{i,2}s^2 + \alpha_{i,3}s^3 + \dots \end{aligned}$$

y constituyen el conjunto $\mathcal{K}_i(s) \equiv \{K_i^1(s), K_i^2(s), K_i^3(s), K_i^4(s)\}$.

Para cada $\mathbf{P}_i(s)$ se introducen 4 segmentos que unen pares de polinomios de Kharitonov, de la forma siguiente:

$$S_i(s) \equiv \{[K_i^1(s), K_i^2(s)], [K_i^1(s), K_i^3(s)], [K_i^2(s), K_i^4(s)], [K_i^3(s), K_i^4(s)]\}$$

Estos 4 segmentos se denominan *segmentos de Kharitonov*.

Para cada $l \in \{1, \dots, m\}$ se define $\mathbf{P}_E^l(s) \equiv \mathcal{K}_1(s) \times \dots \times \mathcal{K}_{l-1}(s) \times S_l \times \mathcal{K}_{l+1}(s) \times \dots \times \mathcal{K}_m(s)$, cuyos elementos son de la forma

$$\left(K_1^{j_1}(s), K_2^{j_2}(s), \dots, K_{l-1}^{j_{l-1}}(s), (1-\lambda)K_l^1(s) + \lambda K_l^2(s), K_{l+1}^{j_{l+1}}(s), \dots, K_m^{j_m}(s) \right), \quad (1.8)$$

con $\lambda \in [0, 1]$. La expresión 1.8 puede escribirse como

$$\begin{aligned} (1-\lambda) &\left(K_1^{j_1}(s), K_2^{j_2}(s), \dots, K_{l-1}^{j_{l-1}}(s), K_l^1, K_{l+1}^{j_{l+1}}(s), \dots, K_m^{j_m}(s) \right) \\ &+ \lambda \left(K_1^{j_1}(s), K_2^{j_2}(s), \dots, K_{l-1}^{j_{l-1}}(s), K_l^2, K_{l+1}^{j_{l+1}}(s), \dots, K_m^{j_m}(s) \right). \end{aligned}$$

Correspondiente a la m-upla $\mathbf{P}_E^l(s)$, se define la familia de polinomios

$$\Delta_E^l(s) \equiv \left\{ \langle \underline{F}(s), \underline{P}(s) \rangle : \underline{P}(s) \in \mathbf{P}_E^l(s) \right\},$$

que puede escribirse como

$$\begin{aligned} \Delta_E^l(s) &= F_1(s)\mathcal{K}_1(s) + \dots + F_{l-1}(s)\mathcal{K}_{l-1}(s) + F_l(s)S_l(s) + \\ &+ F_{l+1}(s)\mathcal{K}_{l+1}(s) + \dots + F_m(s)\mathcal{K}_m(s). \end{aligned}$$

Un elemento típico de $\Delta_E^l(s)$ el segmento de polinomios

$$F_1(s)K_1^{j_1}(s) + \dots + F_{j-1}(s)K_{l-1}^{j_{l-1}} + F_l(s) [(1-\lambda)K_l^1(s) + \lambda K_l^2(s)] + \\ + F_{l+1}(s)K_{l+1}^{j_{l+1}}(s) + \dots + F_m(s)K_m^{j_m}(s)$$

con $\lambda \in [0, 1]$.

El subconjunto extremo de $\mathbf{P}(s)$ está definido por

$$\mathbf{P}_E(s) \equiv \bigcup_{l=1}^m \mathbf{P}_E^l(s).$$

Los polinomios de segmentos generalizados de Kharitonov son

$$\Delta_E(s) \equiv \bigcup_{l=1}^m \Delta_E^l(s) = \left\{ \langle \underline{F}(s), \underline{P}(s) \rangle : \underline{P}(s) \in \mathbf{P}_E(s) \right\}.$$

El conjunto de m-uplas de polinomios de Kharitonov se denota por $\mathbf{P}_K(s)$ y se conoce como los vértices de Kharitonov de $\mathbf{P}(s)$:

$$\mathbf{P}_K(s) \equiv \mathcal{K}_1(s) \times \mathcal{K}_2(s) \times \dots \times \mathcal{K}_m(s) \subset \mathbf{P}_E(s).$$

El conjunto de polinomios de vértices de Kharitonov es

$$\Delta_K(s) \equiv \left\{ \langle \underline{F}(s), \underline{P}(s) \rangle : \underline{P}(s) \in \mathbf{P}_K(s) \right\},$$

y un elemento de este conjunto es de la forma

$$F_1(s)K_1^{j_1}(s) + F_2(s)K_2^{j_2}(s) \dots + F_m(s)K_m^{j_m}.$$

El conjunto $\mathbf{P}_E(s)$ está construido a partir de una familia uniparamétrica de vectores de polinomios. Existen $m4^m$ segmentos en el caso general, donde hay 4 polinomios de Kharitonov distintos para cada $\mathbf{P}_i(s)$. Los subconjuntos del espacio de parámetros correspondientes a $\mathbf{P}_E^l(s)$ y a $\mathbf{P}_E(s)$ se denotan por Π_l y

$$\Pi_E \equiv \bigcup_{l=1}^m \Pi_l$$

respectivamente. De forma similar, si Π_K son los vértices de Π correspondientes a los polinomios de Kharitonov, entonces se tiene que

$$\Delta_E(s) \equiv \{\delta(s, \mathbf{p}) : \mathbf{p} \in \Pi_E\}$$

$$\Delta_K(s) \equiv \{\delta(s, \mathbf{p}) : \mathbf{p} \in \Pi_K\}$$

El conjunto $\mathbf{P}_K(s)$ tiene 4^m elementos distintos, donde cada $\mathbf{P}_i(s)$ tiene cuatro polinomios de Kharitonov distintos. Por tanto, $\Delta_K(s)$ es un conjunto discreto de polinomios, $\Delta_E(s)$ es un conjunto de segmentos de polinomios, $\Delta(s)$ es un politopo de polinomios, y $\Delta_K(s) \subset \Delta_E(s) \subset \Delta(s)$.

1.3.4.2. El Teorema de Kharitonov Generalizado.

Se dice que $\underline{F}(s)$ estabiliza un conjunto de m-uplas, cuando estabiliza cada elemento del conjunto.

La generalización del Teorema de Kharitonov para familias de intervalos lineales de polinomios es la siguiente:

Teorema 1.12

[Teorema de Kharitonov Generalizado. [Chapellat and Bhattacharyya, 1989]] Para una m-upla $\underline{F}(s) = (F_1(s), \dots, F_m(s))$ de polinomios reales:

1. $\underline{F}(s)$ estabiliza la familia $\mathbf{P}(s)$ de m-uplas si y sólo si \underline{F} estabiliza cada m-upla de segmentos de $\mathbf{P}(s)$. De forma equivalente $\Delta(s)$ es estable si y sólo si $\Delta_E(s)$ es estable.
2. Si los polinomios $F_i(s)$ son de la forma $F_i(s) = s^{t_i} (a_i s + b_i) U_i(s) Q_i(s)$ donde $t_i \geq 0$ es un número entero arbitrario, a_i y b_i son números reales arbitrarios, $U_i(s)$ es un polinomio anti-Hurwitz, y $Q_i(s)$ es un polinomio par o impar, entonces es suficiente que $\underline{F}(s)$ estabilice el conjunto finito de m-uplas $\mathbf{P}_K(s)$, o de forma equivalente, que el conjunto de polinomios vértices de Kharitonov $\Delta(s)$ sea estable.
3. Finalmente, que el conjunto finito $\mathbf{P}_K(s)$ sea estable, no es suficiente para estabilizar \mathbf{P} cuando los polinomios $F_i(s)$ no satisfacen la condición 2. De forma equivalente, la estabilidad de $\Delta_K(s)$ no implica la estabilidad de $\Delta(s)$ cuando $F_i(s)$ no satisface las condiciones de 2.

La estrategia seguida para su demostración (véase [Bhattacharyya et al., 1995]) consiste en construir un politopo intermedio $\Delta_I(s)$ de dimensión $2m$ que verifique $\Delta_E(s) \subset \Delta_I(s) \subset \Delta(s)$. Dicha demostración está basada en tres lemas interesantes, que se recuerdan a continuación.

En el primer lema, (lema 1.1), se demuestra que la estabilidad de $\Delta_E(s)$ implica la estabilidad de $\Delta_I(s)$.

El segundo y el tercer lema, (lemas 1.2 y 1.3) se usan para demostrar que la estabilidad de $\Delta_I(s)$ implica la estabilidad de $\Delta(s)$.

Recordando la posibilidad de construir los polinomios de Kharitonov a partir de su parte par e impar:

$$\begin{aligned} K_i^1(s) &= K_i^{par,min}(s) + K_i^{impar,min}(s) \\ K_i^2(s) &= K_i^{par,min}(s) + K_i^{impar,max}(s) \\ K_i^3(s) &= K_i^{par,max}(s) + K_i^{impar,min}(s) \\ K_i^4(s) &= K_i^{par,max}(s) + K_i^{impar,max}(s) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} K_i^{par,min}(s) &= \alpha_{i,0} + \beta_{i,2}s^2 + \alpha_{i,4}s^4 + \dots \\ K_i^{par,max}(s) &= \beta_{i,0} + \alpha_{i,2}s^2 + \beta_{i,4}s^4 + \dots \\ K_i^{impar,min}(s) &= \alpha_{i,1} + \beta_{i,3}s^3 + \alpha_{i,5}s^5 + \dots \\ K_i^{impar,max}(s) &= \beta_{i,1} + \alpha_{i,3}s^3 + \beta_{i,5}s^5 + \dots \end{aligned}$$

puede construirse el politopo $\Delta_I(s)$ de la forma:

$$\Delta_I(s) \equiv \left\{ \sum_{i=1}^m F_i(s) \left((1 - \lambda_i) K_i^{par,min}(s) + \lambda_i K_i^{par,max}(s) \right) \right. \\ \left. + (1 - \mu_i) K_i^{impar,min}(s) + \mu_i K_i^{impar,max}(s) \right\} : \\ (\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2, \dots, \lambda_m, \mu_m), \lambda_i \in [0, 1], \mu_i \in [0, 1] \}.$$

Lema 1.1

$\Delta_I(s)$ es estable si y sólo si $\Delta_E(s)$ es estable.

Demostración:

Es claro que la estabilidad de $\Delta_I(s)$ implica la estabilidad de $\Delta_E(s)$. Para la implicación contrario, nótese que el grado de todos los polinomios de $\Delta_I(s)$ es el mismo. Además las aristas expuestas de $\Delta_I(s)$ se obtienen estableciendo el valor de $2m - 1$ coordenadas del conjunto $(\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2, \dots, \lambda_m, \mu_m)$ a 0 ó a 1, y el resto de las coordenadas variando entre $[0, 1]$. Las líneas de segmentos así obtenidas forman el conjunto $\Delta_E(s)$. Aplicando el Teorema de la Arista, se sigue que la estabilidad de $\Delta_E(s)$ implica la estabilidad de $\Delta_I(s)$. ■

Lema 1.2

Sea $\mathbf{B}^e(s)$ la familia de polinomios reales pares, y sea $B(s) = b_0 + b_2s^2 + b_4s^4 + \dots + b_{2p}s^{2p} \in \mathbf{B}^e(s)$, donde $b_0 \in [x_0, y_0]$, $b_2 \in [x_2, y_2]$, \dots , $b_{2p} \in [x_{2p}, y_{2p}]$; se definen $K_1(s) = x_0 + y_2s^2 + x_4s^4 + \dots$ y $K_2(s) = y_0 + x_2s^2 + y_4s^4 + \dots$. Sean $A(s)$ y $B(s)$ dos polinomios arbitrarios, de coeficientes reales fijos. Entonces:

- 1) $A(s) + C(s)B(s)$ es estable para cada polinomio $B(s) \in \mathbf{B}^e(s)$ si y sólo si el segmento $[A(s) + C(s)K_1(s), A(s) + C(s)K_2(s)]$ es estable.
- 2) Además, si $C(s) = s^t(as+b)U(s)R(s)$ donde $t \geq 0$, a y b son números reales arbitrarios, $U(s)$ es un polinomio anti-Hurwitz, y $R(s)$ es un polinomio par o impar, entonces $A(s) + C(s)B(s)$ es Hurwitz estable para todo polinomio $B(s) \in \mathbf{B}^e(s)$ si y sólo si $A(s) + C(s)K_1(s)$ y $A(s) + C(s)K_2(s)$ son Hurwitz estable.

Lema 1.3

Sea $\mathbf{B}^o(s)$ la familia de polinomios reales impares, y sea $B(s) = b_1 + b_3s^3 + b_5s^5 + \dots + b_{2p+1}s^{2p+1} \in \mathbf{B}^o(s)$, donde $b_1 \in [x_1, y_1]$, $b_3 \in [x_3, y_3]$, \dots , $b_{2p+1} \in [x_{2p+1}, y_{2p+1}]$; se definen $K_1(s) = x_1 + y_3s^3 + x_5s^5 + \dots$ y $K_2(s) = y_1 + x_3s^3 + y_5s^5 + \dots$. Sean $D(s)$ y $E(s)$ dos polinomios arbitrarios, de coeficientes reales fijos. Entonces:

- 1) $D(s) + E(s)B(s)$ es estable para cada polinomio $B(s) \in \mathbf{B}^o(s)$ si y sólo si el segmento $[D(s) + E(s)K_1(s), D(s) + E(s)K_2(s)]$ es estable.
- 2) Además, si $E(s) = s^t(as+b)U(s)R(s)$ donde $t \geq 0$, a y b son números reales arbitrarios, $U(s)$ es un polinomio anti-Hurwitz, y $R(s)$ es un polinomio par o impar, entonces $D(s) + E(s)B(s)$ es Hurwitz estable para todo polinomio $B(s) \in \mathbf{B}^o(s)$ si y sólo si $D(s) + E(s)K_1(s)$ y $D(s) + E(s)K_2(s)$ son Hurwitz estable.

Una demostración de ambos lemas, así como dos demostraciones diferentes del Teorema Generalizado de Kharitonov pueden encontrarse en [Bhattacharyya et al., 1995].

Comparación con el Teorema de la Arista.

El Teorema Generalizado de Kharitonov trata con familia de intervalos lineales de polinomios, es decir, politopo de polinomios, y por tanto puede resolverse también utilizando el Teorema de la Arista.

El Teorema de la Arista comprueba la estabilidad de las aristas expuestas del politopo de polinomios $\Delta(s)$. Por el contrario, el Teorema Generalizado de Kharitonov comprueba la estabilidad de los segmentos $\Delta_E(s)$. Normalmente, estos dos conjuntos son diferentes.

Como ejemplo, en el caso particular de un intervalo de polinomios que contenga tres parámetros variables, se tienen 12 aristas expuestas y 4 segmentos extremos. Mientras dos de los segmentos extremos son también aristas expuestas, los otros dos segmentos extremos se encuentran sobre las caras expuestas y no son aristas.

Más importante es el número de aristas expuestas, y su crecimiento exponencial dependiente del número de parámetros inciertos (dimensión de $\mathbf{p} \in \Pi$). Por el contrario, el número de segmentos extremos depende solamente de m (el número de polinomios inciertos). La comparación de dichos valores (véase tabla 1.1) establece que el número de aristas expuestas crece de forma exponencial respecto al número de parámetros, mientras que el número de segmentos extremos permanece constante, para un valor dado de m .

m	$N.$ de parámetros (q)	Aristas expuestas	Segmentos extremos
2	2	32	32
2	3	80	32
2	4	192	32
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
3	4	24576	192
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Tabla 1.1: Número de aristas expuestas vs. número de segmentos extremos.

Capítulo 2

Sistemas de intervalos de planta.

Hasta ahora se han presentado resultados existentes en la literatura para analizar la estabilidad y el comportamiento robusto de familias de polinomios formadas por intervalos de polinomios o por politopos. Este capítulo presenta alguno de estos resultados para familias de intervalos de planta.

Se abordan brevemente dos aspectos fundamentales de la identificación de sistemas, presentando resultados sobre la determinación y la acotación del conjunto de valores de la familia de polinomios en el dominio de la frecuencia, para poder aplicar de forma cómoda resultados sobre estabilidad. Se comenta también uno de los métodos expuestos en [Bhattacharyya et al., 1995] para la identificación de una familia de sistemas con incertidumbres utilizando las propiedades de los sistemas de intervalos.

2.1. Introducción.

Se define una familia de intervalos de planta propia de coeficientes reales, como el conjunto

$$P_I = \left\{ G(s, a, b) : G(s, a, b) = \frac{N_p(s, a)}{D_p(s, b)}, N_p(s, a) \in N_I, D_p(s, b) \in D_I \right\},$$

donde $N_p(s, a)$ y $D_p(s, b)$ son polinomios con incertidumbres de la forma

$$\begin{aligned} N_p(s, a) &= a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0, & a \in A &= \{a : a_i^- \leq a_i \leq a_i^+, i = 0, \dots, n\}, \\ D_p(s, b) &= b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0, & b \in B &= \{b : b_i^- \leq b_i \leq b_i^+, i = 0, \dots, m\}, \end{aligned}$$

con $n \geq 1$, $n \leq m$, y donde $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$, $a_n \neq 0$, y $b = (b_0, b_1, \dots, b_m)$, $b_m \neq 0$ son los parámetros inciertos.

Por tanto, las incertidumbres de una familia de intervalos de planta se modelan de tal forma que los polinomios numerador y denominador de la planta tienen sus coeficientes limitados en intervalos independientes conocidos a priori. Así, las familias de intervalos de polinomios se definen como $N_I = \{N_p(\cdot, a) : a \in A\}$; $D_I = \{D_p(\cdot, b) : b \in B\}$.

Desde el punto de vista del control, los tres aspectos fundamentales a considerar son el análisis, el diseño y la identificación.

Para el análisis, en el capítulo anterior se comentaron resultados válidos tanto en lazo abierto (Teorema de Kharitonov) como en lazo cerrado (Teorema de Kharitonov Generalizado).

Respecto al diseño, existen diversos resultados en la literatura, que se comentan seguidamente.

Dado el controlador $C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$ y la familia de intervalos de planta P_I , la familia de polinomios característicos asociada tiene la expresión $\delta_I(s) = N_c(s)N_p(s, a) + D_c(s)D_p(s, b)$. Por tanto, el problema del diseño consistirá en encontrar dos polinomios $N_c(s)$ y $D_c(s)$ tal que la familia de polinomios característicos $\delta_I(s)$ (que resulta ser un politopo de polinomios) sea estable, y por tanto la familia de plantas también lo será.

En el caso de controladores robustos para familias de intervalos de planta con perturbaciones estructuradas basadas en resultados de puntos extremos, el problema del diseño tiene como objetivo (común al objetivo de los métodos de síntesis clásico) determinar los parámetros del controlador que garanticen la estabilidad de la familia de polinomios en lazo cerrado. Teniendo esto en cuenta, este problema del diseño puede plantearse desde tres enfoques diferentes:

1. Métodos basados en las 16 plantas de Kharitonov. La estabilidad del sistema en lazo cerrado se fundamenta en condiciones necesarias y suficientes en términos de la estabilidad de determinados polinomios vértices, sin tener en cuenta las aristas. Proporcionan resultados fuertes de Kharitonov, pero en general los métodos de diseño de este tipo llevan implícitas limitaciones en los parámetros del controlador.
2. Resultados basados en condiciones necesarias y suficientes, teniendo en cuenta las aristas.

3. Resultados basados en condiciones suficientes pero no necesarias, cuyos objetivos son encontrar un conjunto finito y mínimo de polinomios cuya estabilidad garantice la estabilidad de la familia en lazo cerrado.

El trabajo de Ghosh [Ghosh, 1985] puede considerarse el primer resultado de interés aplicado al problema de diseño. Ghosh resuelve la estabilidad del intervalo de plantas para controladores positivos. El resultado es conservador, pues proporciona condiciones suficientes para la estabilidad, ya que basta con garantizar la estabilidad de los cuatro polinomios de Kharitonov del menor intervalo de polinomios que contiene al politopo de polinomios característicos en lazo cerrado. En el mismo trabajo establece un corolario en el que da condiciones necesarias y suficientes que garantizan la estabilidad del intervalo de plantas utilizando como controladores ganancias puras, $C(s) = K$.

El primer resultado que trata de estabilizar una familia de intervalos de planta utilizando controladores de cualquier orden es el *Teorema de la Caja*, establecido por Chapellat y Bhattacharyya [Chapellat and Bhattacharyya, 1989], según el cual, dada una familia de polinomios característicos en lazo cerrado, es necesario y suficiente asegurar la estabilidad de 32 aristas distinguidas.

Estas aristas distinguidas son conocidas como los *segmentos CB* o *segmentos de Kharitonov*. El número 32 es independiente de los grados de los polinomios numerador y denominador. Este teorema da una condición necesaria y suficiente de estabilidad, siendo un resultado no conservador que permite encontrar todos los controladores que estabilizan la familia, aunque el coste computacional asociado es elevado.

Para el caso particular en el que el controlador sea de primer orden hay dos resultados que proporcionan condiciones suficientes de estabilidad (resultados no conservadores).

El primero, de Hollot y Yang [Hollot and Yang, 1990] establece que el controlador de primer orden estabiliza el intervalo de plantas si y sólo si son estables todas las plantas extremas, es decir, todas las combinaciones posibles de polinomios extremos del numerador con polinomios extremos del denominador. Es por tanto un resultado débil de Kharitonov, ya que el número de plantas extremas (2^{m+n+1}) depende del rango del intervalo de plantas considerado.

El segundo resultado, de Barmish [Barmish et al., 1992], conocido como *Teorema de las 16 plantas*, es un resultado más fuerte que el anterior, pues se presenta únicamente en función de las 16 plantas de Kharitonov, que son las formadas por todas las combinaciones

posibles entre los cuatro polinomios de Kharitonov del intervalo de polinomios del numerador y los cuatro del intervalo de polinomios del denominador.

Se ha investigado (véase [Hollot and Yang, 1990]) el comportamiento de intervalos de plantas con controladores de mayor grado, concluyendo en general, que no es suficiente con garantizar la estabilidad de las 16 plantas ni la de todas las plantas extremas. Para controladores de orden mayor que 1 el Teorema de Rantzer indica la construcción del conjunto de vértices y aristas que se deben analizar para asegurar la estabilidad. De hecho, si el numerador y el denominador del controlador $C(s)$ satisfacen la condición de crecimiento de Rantzer, la estabilidad de las 16 plantas de Kharitonov garantiza la estabilidad de toda la familia P_I .

Por tanto, únicamente para los controladores de primer orden se encuentran resultados en términos de las 16 plantas para todos los valores de los parámetros del controlador. En general se deben considerar las aristas expuestas. En el capítulo 3 de [Hernández, 1994] se aborda el diseño de controladores para aristas de plantas bajo condiciones necesarias y suficientes. Hernández [Hernández, 2002] desarrolla un método no conservador para estabilizar una arista de polinomios. Este método cuantitativo se basa en una búsqueda iterativa y consiste en descartar sucesivamente los controladores que no pueden ser estables. De este modo determina cómo encontrar los parámetros del controlador que estabilizan la arista, ya que no todos los que estabilicen los polinomios vértices estabilizarán toda la familia. Además, caracteriza el comportamiento en frecuencia que permite el desarrollo de un método gráfico sencillo, cuyo objetivo es determinar cualitativamente la influencia que tienen los parámetros de diseño en la estabilidad de la arista, pudiendo de esta forma determinar los parámetros más sensibles.

Otro enfoque posible para el diseño de controladores robustos hace uso de *polinomios virtuales*, que no tienen que pertenecer necesariamente a la familia, pero que se consideran para estabilizarla. El resultado conservador más intuitivo si se consideran intervalos de planta en un sistema en lazo cerrado, consiste en tomar el menor intervalo de polinomios que contiene al politopo de polinomios $\delta_I(s)$ y aplicar el Teorema de Kharitonov. Este método fue realizado por Ghosh [Ghosh, 1985] para controladores positivos.

Djaferis [Djaferis, 1993] demuestra que para estabilizar un intervalo de plantas utilizando controladores de cualquier orden y sin restricciones de signo, es suficiente con estabilizar 64 polinomios virtuales. Posteriormente Hernández [Hernández, 1995] plantea

una construcción que conduce a mejoras significativas respecto al trabajo de Djaferis. Esta construcción se basa en el análisis del comportamiento en el plano complejo de la familia de polinomios característicos en lazo cerrado, de manera que se considera la sobrelimitación de la familia. Basándose en este comportamiento global obtiene dos mejoras significativas. Demuestra que 32 de los 64 polinomios de Djaferis son siempre superfluos, y detalla cómo dependiendo de los argumentos de los polinomios numerador y denominador del controlador, se reduce significativamente el número de polinomios virtuales, cuya estabilidad es condición suficiente para garantizar la estabilidad de $\delta_I(s)$.

Otro trabajo destacable en esta línea es el desarrollado por Hernández en [Hernández, 1996a]. En él se comparan dos resultados conservadores que solucionan el problema de diseño de un intervalo de plantas. Se muestra que estabilizar la planta utilizando los 32 polinomios virtuales es, en general, menos conservador que hacerlo con los polinomios de Kharitonov del menor intervalo de polinomios que contiene al politopo de polinomios característicos. Se prueba que utilizando los 32 polinomios, es posible encontrar todos los controladores tales que el conjunto de valores del politopo de polinomios característicos se aplica en dos cuadrantes como máximo para cada frecuencia, y utilizando los polinomios de Kharitonov solo se encuentran algunos de ellos.

En [Hernández, 1998] se continúa este estudio sobre los polinomios de Ghosh generalizados, mostrando además los casos para los que ambos métodos coinciden.

En [Hernández, 1999] se establece un nuevo conjunto de polinomios virtuales (un total de 80), basado en el resultado de Bialas y Garloff para estabilizar una arista [Bialas and Garloff, 1985], y se compara el conservadurismo de los distintos resultados de puntos extremos existentes en la literatura para estabilizar un intervalo de plantas. Si SC_4 representa al conjunto de controladores que estabiliza la familia utilizando los cuatro polinomios de Kharitonov del menor intervalo de polinomios que contiene al politopo de polinomios, SC_{32} a los 32 polinomios virtuales, SC_{bg} a los 80 polinomios de Bialas y SC a los segmentos CB , entonces $SC_4 \subset SC_{32} \subset SC_{bg} \subset SC$. De esta expresión se deduce que el método basado en los polinomios virtuales de Bialas y Garloff es menos conservador que el de los 32 polinomios, en el sentido de que se obtiene mayor número de controladores. Sin embargo, el coste requerido es mayor, pues necesita estabilizar un número mayor de polinomios. Se concluye que los 32 polinomios virtuales representan el mejor compromiso entre coste computacional y conservadurismo.

2.2. Identificación de sistemas de intervalos.

En el estudio de la identificación de los sistemas de intervalos existen dos aspectos fundamentales;

1. Dada una familia de plantas determinar la frontera o el recubrimiento convexo de su conjunto de valores.
2. Identificar un familia de sistemas que satisfaga el comportamiento de sus conjuntos de valores.

2.2.1. Determinación de la frontera.

La acotación de la frontera o su determinación a partir de un conjunto de valores es de interés. Por ejemplo, si la cota verifica el Principio de Exclusión del Cero, la familia de plantas que generó el conjunto de valores también lo verifica, y si la cota no verifica dicho principio, la familia tampoco.

Aunque conservadores, existen en la literatura varios resultados, fundamentalmente en el dominio de la frecuencia, y tanto en lazo cerrado como en lazo abierto, orientados al cálculo y determinación de cotas para el conjunto de valores.

2.2.1.1. Lazo cerrado.

El Teorema de Kharitonov Generalizado (teorema 1.12) introduce un conjunto extremo de segmentos que caracteriza completamente el comportamiento en el dominio de la frecuencia de las familias de intervalos lineales. Para ello, se definen los subconjuntos extremos basados en los segmentos y polinomios de Kharitonov. Considérese el sistema realimentado de la figura 2.1, con

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{F_2(s)}, \quad G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Supóngase que $F(s)$ es fijo, y que $G(s)$ es una función de transferencia de un sistema de intervalos, es decir, contiene incertidumbres paramétricas reales que aparecen en los

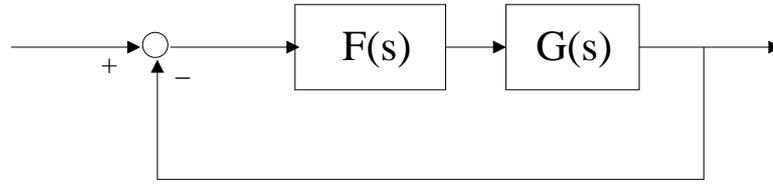


Figura 2.1: Sistema de intervalos lineales con realimentación.

coeficientes de $N(s)$ y $D(s)$. Sean

$$\begin{aligned} N(s) &= a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + a_ns^n \\ D(s) &= b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_{m-1}s^{m-1} + b_ms^m, \end{aligned}$$

donde $a_k \in [a_k^-, a_k^+]$ para $k \in \underline{n} = (0, \dots, n)$ y $b_k \in [b_k^-, b_k^+]$ para $k \in \underline{m} = (0, \dots, m)$. Se definen igualmente los conjuntos de intervalos de polinomios

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(s) &= \{N(s) = a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n, a_k \in [a_k^-, a_k^+], k \in \underline{n}\} \\ \mathbf{D}(s) &= \{D(s) = b_0 + b_1s + \dots + b_ms^m, b_k \in [b_k^-, b_k^+], k \in \underline{m}\}, \end{aligned}$$

y el correspondiente conjunto de sistemas de intervalos lineales

$$\mathbf{G} = \left\{ \frac{N(s)}{D(s)} : (N(s), D(s)) \in (\mathbf{N}(s) \times \mathbf{D}(s)) \right\}. \quad (2.1)$$

El sistema unitario realimentado de la figura 2.1 se considerará como un sistema de control de intervalos. Para simplificar, se utilizará la notación

$$\mathbf{G} = \frac{\mathbf{N}(s)}{\mathbf{D}(s)}$$

para denotar la familia 2.1. El polinomio característico del sistema es $\delta(s) = F_1(s)N(s) + F_2(s)D(s)$, y el conjunto de polinomios característicos del sistema de control de intervalos (que forma una familia de intervalos lineales de polinomios) se escribe como

$$\Delta(s) = F_1(s)\mathbf{N}(s) + F_2(s)\mathbf{D}(s). \quad (2.2)$$

El sistema de control es robustamente estable si cada polinomio de $\Delta(s)$ es estable Hurwitz. Este es el tipo de estabilidad robusta tratada por el Teorema de Kharitonov Generalizado, que demuestra que la estabilidad Hurwitz del sistema de control sobre el

conjunto $\mathbf{G}(s)$ puede reducirse a la comprobación de la estabilidad Hurwitz del conjunto de sistemas extremos $\mathbf{G}_E(s)$.

Siguiendo con la notación introducida en el Teorema de Kharitonov Generalizado, sean $\mathcal{K}_N(s)$ y $\mathcal{K}_D(s)$ los polinomios de Kharitonov asociados con $\mathbf{N}(s)$ y $\mathbf{D}(s)$, y sean $\mathcal{S}_N(s)$ y $\mathcal{S}_D(s)$ los correspondientes segmentos de Kharitonov. Estos segmentos son combinaciones convexas de dos polinomios de Kharitonov que comparten su parte par o su parte impar. Se definen los *subconjuntos extremos*

$$\mathbf{G}_E(s) = \frac{\mathcal{K}_N(s)}{\mathcal{S}_D(s)} \cup \frac{\mathcal{S}_N(s)}{\mathcal{K}_D(s)}$$

para los sistemas extremos, y

$$\mathbf{G}_K(s) = \frac{\mathcal{K}_N(s)}{\mathcal{K}_D(s)}$$

para los sistemas de Kharitonov.

El Teorema de Kharitonov Generalizado reduce el problema de verificar la estabilidad robusta del conjunto de parámetros múltiples $\mathbf{G}(s)$, a problemas de estabilidad de un parámetro sobre $\mathbf{G}_E(s)$ en el caso general. Bajo condiciones especiales sobre $F(s)$, lo reduce al conjunto de vértices $\mathbf{G}_K(s)$. Seguidamente aborda el estudio de las propiedades que los sistemas $\mathbf{G}_E(s)$ y $\mathbf{G}_K(s)$ presentan en el dominio de la frecuencia, de forma que el estudio de propiedades importantes (por ejemplo márgenes de estabilidad) pueda realizarse reemplazando $G(s) \in \mathbf{G}(s)$ por elementos $G(s) \in \mathbf{G}_E(s)$.

Las imágenes en el plano complejo de $\Delta(s)$ y $\mathbf{G}(s)$ en el punto $s = jw$, denominadas plantillas de incertidumbres, se denotan por $\Delta(jw)$ y $\mathbf{G}(jw)$. Como $\mathbf{N}(s)$ y $\mathbf{D}(s)$ son familias de intervalos de polinomios, $\mathbf{N}(jw)$ y $\mathbf{D}(jw)$ son rectángulos de lados paralelos a los ejes en el plano complejo. $F_1(jw)\mathbf{N}(jw)$ y $F_2(jw)\mathbf{D}(jw)$ son rectángulos girados en el plano complejo. Se supondrá además que $0 \notin \mathbf{D}(jw)$.

Para determinar $\Delta(s)$ y $\mathbf{G}(s)$ se observa que los vértices de $\mathbf{N}(jw)$ y $\mathbf{D}(jw)$ corresponden a los polinomios de Kharitonov, mientras que las aristas corresponden a los segmentos de Kharitonov. El conjunto de puntos $\mathcal{K}_N(jw)$ son los vértices de $\mathbf{N}(jw)$, y las cuatro líneas $\mathcal{S}_N(jw)$ son las aristas de $\mathbf{N}(jw)$. $F_1(jw)\mathbf{N}(s)$ es un polígono de vértices $F_1(jw)\mathcal{K}_N(jw)$ y aristas $F_1(jw)\mathcal{S}_N(jw)$. De forma similar, $F_2(jw)\mathbf{D}(jw)$ es un polígono de vértices $F_2(jw)\mathcal{K}_D(jw)$ y aristas $F_2(jw)\mathcal{S}_D(jw)$. La imagen en el plano complejo del conjunto extremo $\mathbf{G}_E(s)$, coincide exactamente con estos pares de aristas - vértices.

El siguiente ejemplo desarrollado en [Bhattacharyya et al., 1995] muestra cómo caracterizar la frontera del conjunto de valores de una familia de sistemas de intervalos lineales, a partir del conjunto extremo construido según las ecuaciones 2.2, para un sistema estable.

Ejemplo 2.1

Considérese la familia de plantas y el controlador dados por las ecuaciones siguientes:

$$\mathbf{G}(s) = \frac{P_1(s)}{P_2(s)} = \frac{a_1s + a_0}{b_2s^2 + b_1s + b_0}, \quad \mathbf{C}(s) = \frac{F_1(s)}{F_2(s)} = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s}$$

donde $b_0 \in [1.9, 2.1]$, $b_1 \in [1.8, 2.0]$, $b_2 \in [0.9, 1.0]$, $a_0 \in [0.9, 1.1]$, y $a_1 \in [0.1, 0.2]$ son los valores de los parámetros.

El Teorema de Kharitonov Generalizado afirma que la estabilidad del sistema en lazo cerrado es equivalente a la estabilidad de los 32 segmentos de Kharitonov. Para construirlos, se determinan los polinomios de Kharitonov asociados a $P_1(s)$

$$\begin{aligned} K_1^1(s) &= 0.1s + 0.9, & K_1^2(s) &= 0.2s + 0.9 \\ K_1^3(s) &= 0.1s + 1, & K_1^4(s) &= 0.2s + 1 \end{aligned}$$

y a $P_2(s)$

$$\begin{aligned} K_2^1(s) &= s^2 + 1.8s + 1.9, & K_2^2(s) &= s^2 + 2s + 1.9 \\ K_2^3(s) &= 0.9s^2 + 1.8s + 2.1, & K_2^4(s) &= 0.9s^2 + 2s + 2.1 \end{aligned}$$

Los segmentos de Kharitonov generalizados son $F_1(s)K_1^i(s) + F_2(s)(\lambda K_2^j(s) + (1 - \lambda)K_2^k(s))$ y $F_1(s)(\lambda K_1^i(s) + (1 - \lambda)K_1^j(s)) + F_2(s)K_2^k(s)$, con $\lambda \in [0, 1]$ e $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

La estabilidad de los 32 segmentos puede verificarse, por ejemplo, mediante el Principio de Exclusión del Cero. La figura 2.2 muestra la evolución del conjunto imagen de los 32 segmentos para diferentes frecuencias.



Como se observa en el ejemplo 2.1, al realizar el estudio de la robustez del sistema de intervalos en el dominio de la frecuencia, la dificultad más importante es averiguar la forma de los conjuntos extremos para cada valor de la frecuencia, ya que el Principio de

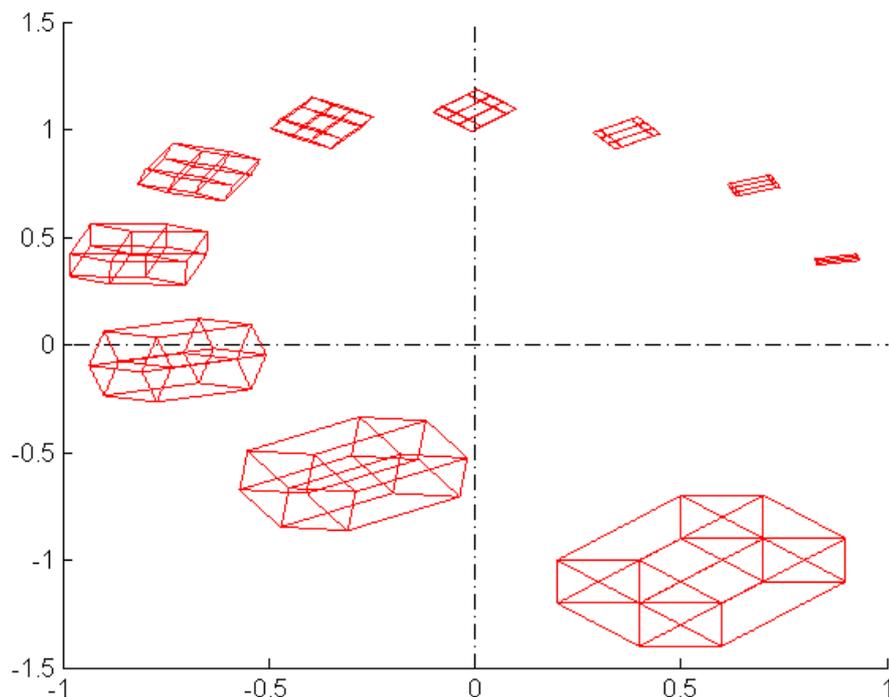


Figura 2.2: Evolución del conjunto imagen de los 32 segmentos.

Exclusión del cero proporciona un test de estabilidad robusta muy general, fácil de aplicar siempre que el conjunto de valores se genere sin dificultad.

Es por ello que, para familias de intervalos de polinomios y para sistemas de intervalos, la caracterización del comportamiento del conjunto de puntos extremos se base principalmente en la determinación del recubrimiento convexo del conjunto de valores.

2.2.1.2. Lazo abierto.

Teniendo en mente la determinación y el cálculo del recubrimiento convexo, para su posterior utilización en el estudio del diseño y estabilidad, existen algunos resultados de interés.

En [Wilson et al., 1997] se proporciona un algoritmo para el diseño de la aproximación de una familia de plantas con coeficientes no lineales, mediante recubrimiento convexos en el dominio de la frecuencia, consiguiendo una reducción del conservadurismo del método empleado, frente a la utilización de subconjuntos extremos. Dicha reducción del conservadurismo simplifica el proceso de diseño, facilitando el análisis y el diseño de

controladores robustos.

Entre los algoritmos utilizados para la generación de recubrimientos convexos de conjuntos de valores de familias de polinomios y de sistemas de intervalos, destaca el algoritmo AAS (An Adaptative Angular Sweep Algorithm for Value Set Construction), desarrollado en [Willson et al., 1999]. Este algoritmo determina una aproximación de la frontera del conjunto de valores para sistemas de intervalos y familias de intervalos de polinomios del tipo

$$G(s, \mathbf{q}) = \frac{N(s, \mathbf{q})}{D(s, \mathbf{q})} = \frac{\sum_{k=1}^m b_k(\mathbf{q})s^k}{\sum_{l=1}^n a_l(\mathbf{q})s^l},$$

donde n es el orden del modelo, $m \leq n$, y $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ es el vector de parámetros variando en la región

$$\nabla = [q_1^-, q_1^+] \times [q_2^-, q_2^+] \times \dots \times [q_p^-, q_p^+]$$

El algoritmo AAS aproxima el conjunto de valores, determinando el recubrimiento convexo de los puntos de su frontera, a partir de dos recubrimientos convexos que actúan, respectivamente, como cota superior («overbounding») y cota inferior («underbounding») de la frontera del conjunto de valores. Los puntos del recubrimiento convexo de la frontera del conjunto de puntos, se obtienen calculando el valor denominado "máxima distancia normal" (MND) entre los recubrimientos convexos cota superior y cota inferior, de forma que sea menor que un valor arbitrario dado, denominado "tolerancia" (TOL).

En [Wilson et al., 1997] se define el producto interior

$$f_{e^{j\theta}}(w, \mathbf{q}) = \langle e^{j\theta}, p(jw, \mathbf{q}) \rangle, \quad (2.3)$$

siendo, en general, $\langle z_1, z_2 \rangle = \text{Re}(z_1)\text{Re}(z_2) + \text{Im}(z_1)\text{Im}(z_2)$.

Los autores demuestran que para cada $\theta \in [0, 2\pi]$ existe una "función de incertidumbres distinguida", $q^*(w, \theta)$, donde se alcanza el máximo de $f_{e^{j\theta}}(w, \mathbf{q})$. Es decir,

$$q^*(w, \theta) \in \arg \max_{q \in Q} (f_{e^{j\theta}}(w, \mathbf{q})),$$

para algún $w \geq 0$. Al sustituir en el polinomio $p(s, \mathbf{q})$, esta función de incertidumbres produce un punto de la frontera del recubrimiento convexo, $p(jw, q^*(w, \theta)) \in$

$\partial co(p(jw, Q))$, donde $\partial co(p(jw, Q))$ denota la frontera del recubrimiento convexo. Se demuestra seguidamente que

$$co(p(jw, Q)) = co\{p(jw, q^*(w, \theta)) : \theta \in [0, 2\pi]\} \quad (2.4)$$

Sin embargo, cuando la frontera del recubrimiento convexo es un arco de circunferencia, la igualdad 2.4 es cierta para puntos $\theta \in [0, 2\pi]$. Como en la práctica los valores de θ serán discretos, la parte derecha de la ecuación 2.4 formará una cota inferior del recubrimiento convexo.

Por otra parte, el algoritmo CHA descrito en [Bartlett et al., 1993] proporciona un procedimiento similar, tanto para familias de intervalos de polinomios, como para sistemas de intervalos, sustituyendo en este último caso el polinomio $p(s, \mathbf{q})$ por una función de transferencia P en las ecuaciones 2.3 y 2.4. En dicho algoritmo se reconoce la necesidad de discretizar el intervalo de valores de θ para obtener los puntos del recubrimiento convexo. De la misma forma que w se discretiza para obtener la respuesta en frecuencia, θ se discretiza para obtener puntos de la frontera del recubrimiento convexo.

El procedimiento estándar utiliza un número finito de valores de $\theta \in [0, 2\pi]$ y los sustituye en la ecuación 2.3. Sin embargo, cuando la frontera está ligeramente curvada, se necesita un discretizado muy denso de θ para conseguir representar esta porción de la frontera en su recubrimiento convexo.

Para evitar el exceso de cálculo originado por el discretizado del intervalo $[0, 2\pi]$, en [Willson et al., 1999] se desarrolla el método AAS, que realiza un discretizado no uniforme $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_L\} \subset [0, 2\pi]$, de forma que la máxima distancia normal entre $\partial co(p(jw, \mathbf{q}))$ y $\partial co\{p(jw, q^*(w, \theta)) : \theta \in \Theta\}$ sea menor que una cota de error arbitraria, la tolerancia.

El objetivo del algoritmo AAS es determinar el conjunto de ángulos Θ . El método obtiene igualmente una cota superior del recubrimiento convexo, que contiene el verdadero recubrimiento convexo de $p(jw, Q)$ o de $P(jw, Q)$, y una cota inferior que está contenida en el verdadero recubrimiento convexo de $p(jw, Q)$ o de $P(jw, Q)$.

Ambas cotas son útiles a la hora de aplicar las condiciones de estabilidad basadas en el Principio de Exclusión del Cero. Si la cota superior verifica la condición de exclusión del cero, el recubrimiento convexo también la verifica, y si la cota inferior no verifica dicha

condición de exclusión de cero, el recubrimiento convexo tampoco la verifica.

Generación de los puntos frontera.

La forma de construcción e identificación de los puntos frontera nos permite entender el algoritmo AAS. Considérese el conjunto de valores $p(jw, Q)$ en una frecuencia particular w sobre el plano complejo, la semirrecta definida por el origen de coordenadas y $e^{j\theta}$ para un θ particular, y una arista, perpendicular a la semirrecta, situada a cierta distancia del origen. Cuando la arista se traslada hacia el origen, contacta con la frontera de $p(jw, Q)$ en el punto $p(jw, q^*(w, \theta))$, que por las ecuaciones 2.3 y 2.4 será un punto de la frontera del recubrimiento convexo.

Considérese la geometría del error para dos puntos genéricos de la frontera, tal y como se muestra en la figura 2.3.

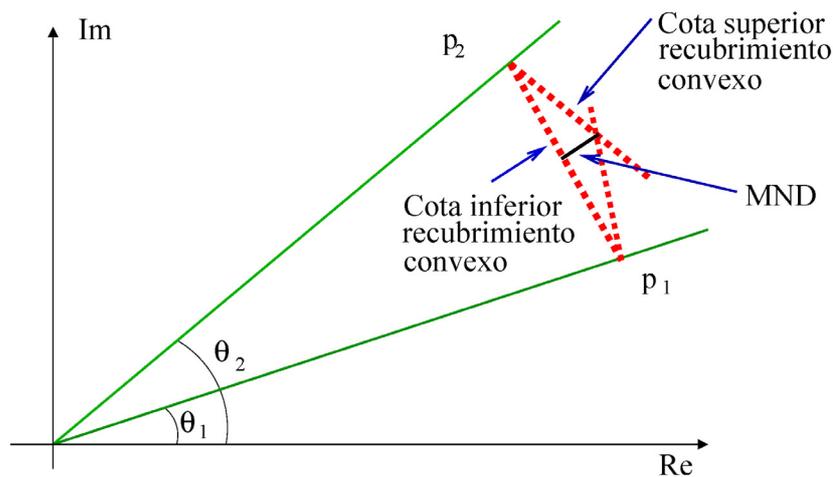


Figura 2.3: Geometría para determinar MND.

Sean $p_1 = p(\theta_1)$ y por $p_2 = p(\theta_2)$ los puntos de la frontera del recubrimiento convexo obtenidos al aplicar los resultados anteriores a los rayos $e^{j\theta_1}$ y $e^{j\theta_2}$. La recta que une los puntos p_1 y p_2 define la frontera del recubrimiento convexo o es una cota inferior para ella. Además, las líneas perpendiculares a los rayos $e^{j\theta_1}$ y $e^{j\theta_2}$ y su punto intersección, definen la frontera del recubrimiento convexo o son una cota superior de la misma. Por tanto el recubrimiento convexo está situado dentro o sobre el triángulo indicado en la figura 2.3 con trazo discontinuo.

Desarrollo del algoritmo.

Se define inicialmente una función que calcula la máxima distancia normal entre las cotas superior e inferior del recubrimiento convexo, obtenidas con los puntos p_1 y p_2 . El objetivo del algoritmo AAS es identificar un conjunto discreto de ángulos θ , de forma que los puntos frontera obtenidos para estos ángulos verifiquen la condición de que la máxima distancia normal entre la cota superior e inferior del recubrimiento convexo sea menor que un valor de la tolerancia previamente elegido. De esta forma es posible obtener aproximaciones de una cota inferior y una cota superior del verdadero recubrimiento convexo, con cualquier tolerancia previamente especificada.

El algoritmo es el siguiente:

1. Determinar los puntos generadores $\{p(0^\circ), p(90^\circ), p(180^\circ), p(270^\circ)\}$, utilizando el conjunto inicial de ángulos $\Theta = \{0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ\}$.
2. Evaluar la necesidad de añadir puntos adicionales de la frontera, recorriendo los cuadrantes y comenzando por el primero:

a) Asignar $\theta^- = 0^\circ$, $\theta^+ = 90^\circ$.

b) Si $MND[p(\theta^-), p(\theta^+)] > TOL$ entonces

- 1) $\theta^{med} = \frac{\theta^- + \theta^+}{2}$;

- 2) se determina $p(\theta^{med})$;

- 3) se añade $p(\theta^{med})$ a la lista de puntos frontera;

- 4) repetir el paso (2b) con $\theta^- = \theta^-$, $\theta^+ = \theta^{med}$;

- 5) repetir el paso (2b) con $\theta^- = \theta^{med}$, $\theta^+ = \theta^+$;

Si $MND(p(\theta^-), p(\theta^+)) \leq TOL$ el par $[p(\theta^-), p(\theta^+)]$ representa la frontera del recubrimiento convexo para $\theta \in [\theta^-, \theta^+]$.

3. Repetir el paso (2) para los cuadrantes restantes.

Aplicación del método.

Considérese la familia de funciones de transferencia dada por la ecuación

$$\mathbf{G}(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0},$$

donde los coeficientes del numerador y del denominador verifican

$$\begin{aligned} a_0 &\in [-2.0, -1.0], & a_1 &\in [2.0, 3.0], & a_2 &\in [1.0, 2.0], \\ b_0 &\in [0.5, 1.0], & b_1 &\in [1.0, 2.0], & b_2 &\in [-2.0, -1.0], & b_3 &\in [1.0, 3.0], \end{aligned}$$

Las figuras 2.4a a la 2.4d muestran el recubrimiento convexo del conjunto de valores de la familia $\mathbf{G}(s)$, y los puntos que forma la cota inferior y superior de dicho conjunto de valores.

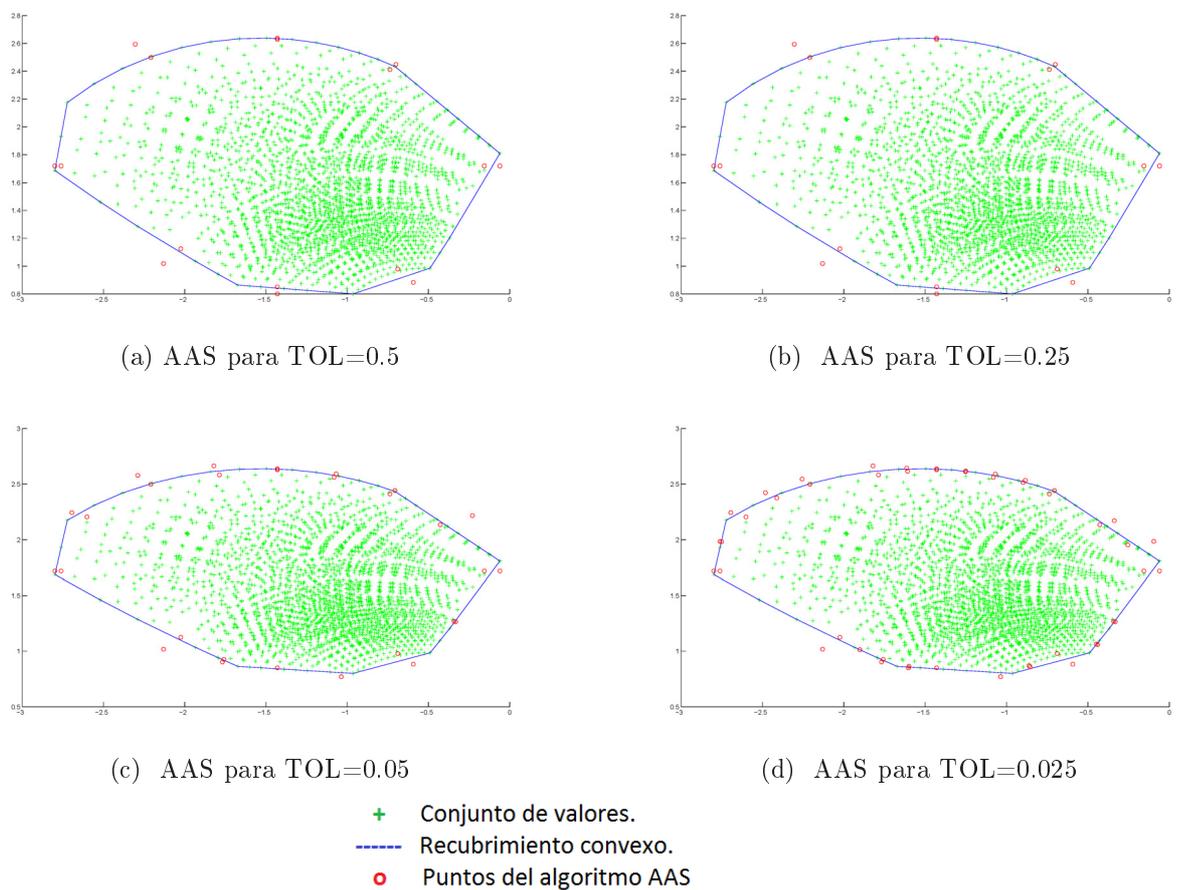


Figura 2.4: AAS para diferentes valores de la tolerancia.

Se han obtenido al aplicar el algoritmo AAS con valores de la tolerancia $TOL = 0.5$, $TOL = 0.25$, $TOL = 0.05$ y $TOL = 0.025$, y para la frecuencia de trabajo $w = 0.5$. En ellas se representa con una línea continua el recubrimiento convexo, con el símbolo «+» los puntos del conjunto de valores, y con el símbolo «o» los puntos obtenidos al aplicar el algoritmo AAS.

2.2.2. Identificación.

La identificación de sistemas comprende un conjunto de modelos y métodos que permiten aproximar el comportamiento real de un sistema desconocido, a través de un modelo matemático válido capaz de describir las propiedades esenciales del sistema. Dichos modelos pueden ser usados posteriormente en tareas de control, o en cualquier otra actividad en la que se requiera conocer la dinámica del sistema. En la literatura se encuentra una gran variedad de métodos de identificación, desde los basados en la teoría clásica [LJung, 1999] hasta las técnicas basadas, por ejemplo, en la programación genética [Aguilar and Cerrada, 2001].

En el caso particular de los sistemas de intervalos, el objetivo es identificar una familia de sistemas a partir de uno o varios de sus conjuntos de valores. En [vanOverschee and deMoor, 1996] los autores centran su estudios en el espacio de estados, desarrollando una técnica de identificación para sistemas lineales que permite obtener un modelo lineal multivariable a partir de la medición de datos de entrada - salida.

En el marco de trabajo de la identificación robusta, en [Parrilo and Sanchez, 2001] se desarrolla la identificación robusta de modelos mixtos paramétricos y no paramétricos, basados en experimentos realizados en el dominio del tiempo y en la frecuencia, utilizando para ello conceptos de la teoría de interpolación.

Por otro lado, es natural modelar familias de sistemas con incertidumbres usando el marco de trabajo de los sistemas de intervalos, donde a partir de un experimento en el dominio de la frecuencia, se determina la expresión de la familia de funciones de transferencia que contenga el comportamiento de todo el sistema de intervalos.

Basándose en esta idea, S.P. Bhattacharyya y H.Chapellat desarrollan en [Bhattacharyya et al., 1995] un procedimiento de identificación de una familia de funciones de transferencias, cuyos coeficientes están acotados en algún intervalo y centrados en los valores nominales. A continuación se estudia el procedimiento de identificación seguido por estos autores.

2.2.2.1. Algoritmo de modelado con un conjunto de datos simple.

En el método desarrollado en [Bhattacharyya et al., 1995], los autores parten de la configuración mostrada en la figura 2.5.



Figura 2.5: Estructura del experimento para identificación robusta.

Con el objetivo de determinar el mejor modelo lineal e invariante en el tiempo que se ajuste al conjunto de datos obtenidos en la respuesta del sistema, los autores denotan por w_1, w_2, \dots, w_N las frecuencias a las que se realiza el test, y los números complejos $u(jw_i), y(jw_i)$ representan el par de puntos de entrada - salida a la frecuencia w_i . Sea

$$y(jw_i) = D(jw_i)u(jw_i), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.5)$$

el resultado de un experimento de identificación. Supóngase que $G^I(s)$ es la función de transferencia de un sistema lineal e invariante en el tiempo, de forma que $G^I(jw)$ sea próxima a $D(jw)$ según una norma determinada. En general, no es posible encontrar una función racional $G^I(s)$ para la que $G^I(jw_i) = D(jw_i) \forall w_i$. Por ello es más completo identificar una familia $\mathbf{G}(s)$ de funciones de transferencia que sean capaces de validar los datos, en el sentido de que para cada punto $D(jw_i)$ resultado de la identificación, exista alguna función de transferencia $G_i(s) \in \mathbf{G}(s)$ con la propiedad de que $G_i(jw_i) = D(jw_i)$. La familia $\mathbf{G}(s)$ puede ser parametrizada de varias formas. Por ejemplo, para un caso no estructurado, cada elemento $G(s)$ de $\mathbf{G}(s)$ puede describirse como $G(s) = G^I(s) + \Delta G(s)$ donde $\|\Delta G(s)\| < \rho$. En este caso, la familia $\mathbf{G}(s)$ queda identificada una vez que se determinen $G^I(s)$ y ρ .

El algoritmo de identificación debería ser eficiente, en el sentido de que la familia $\mathbf{G}(s)$ obtenida debe ser la menor todas las familias que contengan a los datos. En el ejemplo anterior basta con elegir el menor valor posible de ρ .

El objetivo marcado por los autores, es desarrollar un algoritmo de identificación para el caso estructurado, donde la familia $\mathbf{G}(s)$ de sistemas invariantes en el tiempo, se obtenga a partir de la variación de los valores de los coeficientes de la función de transferencia nominal $G^I(s)$ en ciertos intervalos. Para ello, se requiere que $D(jw_i) \in \mathbf{G}(jw_i), \forall w_i$.

A tal fin los autores definen

$$G^I(s) = \frac{n_0 + n_1s + n_2s^2 + n_3s^3 + \dots + n_ns^n}{d_0 + d_1s + d_2s^2 + d_3s^3 + \dots + d_ns^n}, \quad (2.6)$$

$$G(s) = \frac{\hat{n}_0 + \hat{n}_1 s + \hat{n}_2 s^2 + \hat{n}_3 s^3 + \dots + \hat{n}_n s^n}{\hat{d}_0 + \hat{d}_1 s + \hat{d}_2 s^2 + \hat{d}_3 s^3 + \dots + \hat{d}_n s^n}$$

y

$$\mathbf{G}(s) = \left\{ G(s) : \hat{n}_i \in [n_i - w_{n_i} \varepsilon_{n_i}^-, n_i + w_{n_i} \varepsilon_{n_i}^+], \hat{d}_i \in [d_i - w_{d_i} \varepsilon_{d_i}^-, d_i + w_{d_i} \varepsilon_{d_i}^+], \forall i \right\} \quad (2.7)$$

Los componentes de $\underline{w} = (w_{d_0}, \dots, w_{d_n}, w, \dots, w_{n_n})$ se consideran como los pesos elegidos a priori, mientras que $\underline{\varepsilon}^+ = (\varepsilon_{d_0}^+, \dots, \varepsilon_{d_n}^+, \varepsilon_{n_0}^+, \dots, \varepsilon_{n_n}^+)$ y $\underline{\varepsilon}^- \equiv (\varepsilon_{d_0}^-, \dots, \varepsilon_{d_n}^-, \varepsilon_{n_0}^-, \dots, \varepsilon_{n_n}^-)$ se consideran como los parámetros de dilatación a determinar por el algoritmo de identificación y por los datos $D(jw_i)$.

Los requerimientos que los autores realizan sobre la familia de modelos $\mathbf{G}(s)$ son los siguientes:

1. *Requerimiento de pertenencia:* $D(jw_i) \in \mathbf{G}(jw_i)$, para todo i .
2. *Requerimiento de tamaño:* $\|\underline{\varepsilon}^+\|$ y $\|\underline{\varepsilon}^-\|$ tan pequeños como sea posible.
3. *Requerimiento de respuesta en frecuencia:* Los pesos \underline{w} deben elegirse de tal forma que la respuesta en frecuencia de $\mathbf{G}(jw)$ este acotada tan aproximadamente como sea posible, y para todas las frecuencias.

Los requerimientos de respuesta en frecuencia y de tamaño, son importantes, ya que intervalos de indeterminación pequeños no siempre se corresponden con conjuntos de valores pequeños o familias de funciones pequeñas.

Obsérvese que los autores consideran que tanto el orden de los polinomios numerador y denominador del modelo nominal, como el orden de la familia de polinomios del numerador y denominador, es el mismo.

Modelado de la familia de funciones de transferencia.

Como se describió anteriormente, el procedimiento se divide en dos partes. En primer lugar se identifica un modelo lineal e invariante en el tiempo $G^I(s)$ que represente los datos del test $D(jw)$ de la forma más ajustada posible. Para ello existen en la literatura gran cantidad de algoritmos de identificación de sistemas que pueden utilizarse. Los autores usan uno basado en el método de los mínimos cuadrados.

Una vez obtenido el modelo nominal, se determinan los intervalos en los que cada coeficiente de la función de transferencia nominal $G^I(s)$ se encuentra definido, de forma que se satisfagan los requerimientos de pertenencia y los de respuesta en frecuencia.

Identificación del sistema nominal.

Los autores comienzan con la descripción de un método estándar de mínimos cuadrados, con el objetivo de identificar una función de transferencia nominal cuya respuesta en frecuencia se ajuste, lo más posible, a los datos del test $D(jw_i)$.

El orden del modelo lo obtienen verificando los autovalores de la matriz de Hankel generada a partir de los datos de la respuesta al impulso. Bajo la suposición de que el dato está libre de ruido, el número de autovalores distintos de cero determina el orden del sistema. Una vez determinado el orden del sistema, consideran la función de transferencia nominal como cociente de dos polinomios

$$G^I(s) = \frac{n(s)}{d(s)}.$$

Los coeficientes de la función de transferencia nominal son elegidos de forma que minimicen la expresión

$$\sum_{i=1}^N \{W^I(jw_i) \{Re[D(jw_i)d(jw_i) - n(jw_i)]\}^2 + \{Im[D(jw_i)d(jw_i) - n(jw_i)]\}^2\},$$

que determina un sistema lineal de $2N$ ecuaciones y $2n$ incógnitas, que son los coeficientes de la función de transferencia. Los pesos W^I se pueden seleccionar encontrando el estimador de mínima varianza de las incógnitas. Como el error relativo en la parte valle de la respuesta en frecuencia es más significativo que el error en las partes pico, es necesario asignar pesos altos para los rangos de frecuencias en las partes valle de la respuesta en frecuencia.

Selección de pesos.

Como se muestra en la expresión 2.7, el tamaño del intervalo de variación de cada coeficiente de la familia $\mathbf{G}(s)$ depende de \underline{w} y de $\underline{\varepsilon}^+$ y $\underline{\varepsilon}^-$. En esta sección se considera el problema de encontrar el conjunto de pesos adecuado \underline{w} y la solución aportada por los autores. La selección de pesos es importante, ya que una elección inadecuada conlleva una familia de funciones de transferencia excesivamente numerosa, y un conjunto de valores

extremadamente grande, incluso cuando el intervalo de valores sea pequeño.

Los autores establecen lo siguiente para la selección de los pesos. Suponiendo que los puntos datos del test constan de N puntos obtenidos a las frecuencias correspondientes,

$$D(jw) = \{D(jw_i) = \alpha_i + j\beta_i, i = 1, 2, \dots, N\}$$

definen el modelo l -ésimo como sigue:

$$G_l(jw) = \begin{cases} D(jw_i), & i = l \\ G^I(jw_i), & i = 1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, N \end{cases}$$

En otras palabras, el modelo $G_l(jw)$ es idéntico al modelo nominal $G^I(jw)$ identificado, pero con el punto l -ésimo reemplazado por el l -ésimo componente del dato del test $D(jw)$. Posteriormente construyen el l -ésimo modelo identificado, denotado por $G_l^I(s)$, e identificado a partir del l -ésimo conjunto de datos $G_l(jw)$. Para ello, sea

$$G_l^I(s) = \frac{n_0^l + n_1^l s + n_2^l s^2 + n_3^l s^3 + \dots + n_n^l s^n}{d_0^l + d_1^l s + d_2^l s^2 + d_3^l s^3 + \dots + d_n^l s^n}$$

y denotamos $\mathbf{p} \equiv (n_0, n_1, \dots, n_n, d_0, d_1, \dots, d_n)$.

Al suponer que $|G_l(jw) - G_l^I(jw)|$ es pequeño, la sensibilidad de los coeficientes del modelo nominal con respecto a las variaciones en el punto l -ésimo se describe como

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial G^I(jw_l)} = \begin{pmatrix} |n_0 - n_0^l| \\ \vdots \\ |n_n - n_n^l| \\ |d_0 - d_0^l| \\ \vdots \\ |d_n - d_n^l| \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta el cálculo para todos los coeficientes del modelo nominal, respecto a todos los puntos dados $l = 1, 2, \dots, N$, se tiene

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial G^I(jw)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial G^I(jw_1)} \\ \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial G^I(jw_2)} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial G^I(jw_N)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |n_0 - n_0^1| & \dots & |d_0 - d_0^1| & \dots & |d_n - d_n^1| \\ |n_0 - n_0^2| & \dots & |d_0 - d_0^2| & \dots & |d_n - d_n^2| \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ |n_0 - n_0^N| & \dots & |d_0 - d_0^N| & \dots & |d_n - d_n^N| \end{pmatrix}$$

Los pesos se definen como el valor medio para cada coeficiente

$$\underline{w} = \frac{1}{N} \left(\sum_{l=1}^N |n_0 - n_0^l|, \dots, \sum_{l=1}^N |d_n - d_n^l| \right) = (w_{n_0}, \dots, w_{n_n}, w_{d_0}, \dots, w_{d_n}).$$

Identificación de la familia de funciones.

Después de determinar el vector de pesos adecuado, es necesario encontrar $\underline{\varepsilon}^+$ y $\underline{\varepsilon}^-$ para satisfacer los requerimientos dados. Los autores consideran en primer lugar los requerimientos de pertenencia. Volviendo al sistema nominal definido en 2.6 y sustituyendo $s = jw$ obtienen:

$$\begin{aligned} G^I(jw) &= \frac{n(jw)}{d(jw)} \\ &= \frac{(n_0 - w^2 n_2 + \dots) + j(w n_1 - w^3 n_3 + \dots)}{(d_0 - w^2 d_2 + \dots) + j(w d_1 - w^3 d_3 + \dots)} \\ &= \frac{n^{par}(w) + j n^{impar}(w)}{d^{par}(w) + j d^{impar}(w)} \end{aligned}$$

Como la función de transferencia nominal $G^I(s)$ no puede representar de forma exacta el conjunto de datos $D(jw)$, para una frecuencia particular w_i se tiene

$$D(jw_i) = \alpha_i + j\beta_i \approx G^I(jw_i) = \frac{n^{par}(w_i) + j n^{impar}(w_i)}{d^{par}(w_i) + j d^{impar}(w_i)}$$

La diferencia puede añadirse a los coeficientes del modelo nominal de la forma

$$D(jw_i) = \alpha_i + j\beta_i = \frac{(\hat{n}_0 - w_i^2 \hat{n}_2 + \dots) + j(w_i \hat{n}_1 - w_i^3 \hat{n}_3 + \dots)}{(\hat{d}_0 - w_i^2 \hat{d}_2 + \dots) + j(w_i \hat{d}_1 - w_i^3 \hat{d}_3 + \dots)}$$

donde $\hat{n}_i = n_i + w_{n_i} \varepsilon_{n_i}$ y $\hat{d}_i = d_i + w_{d_i} \varepsilon_{d_i}$, para $i = 1, 2, \dots, N$. Escribiendo las ecuaciones

Capítulo 3

Identificación de sistemas de intervalos.

Como se indicó en el capítulo 2, existen diferentes soluciones para la identificación de intervalos de planta. Por ejemplo, el método analizado en [Bhattacharyya et al., 1995], determina la expresión matemática de la ecuación de la familia de funciones de transferencia, basándose en el cálculo de los coeficientes del polinomio numerador y del polinomio denominador de un modelo nominal perteneciente a la familia. A partir de este modelo, se determinan los intervalos de variación de los coeficientes del polinomio numerador y del polinomio denominador de toda la familia.

En este capítulo y siguientes se presenta un algoritmo de identificación de intervalos de planta, con bajo coste computacional, basado en las propiedades de los conjuntos de valores. El algoritmo es no conservador en el sentido de que, si se conocen exactamente los valores de las fronteras del intervalo de plantas, y en concreto sus vértices, el intervalo de plantas identificado es exactamente el utilizado para obtener dichos conjuntos de valores.

Como primer paso para la identificación de intervalos de plantas, se muestran propiedades que caracterizan el conjunto de valores cuando éste se encuentra en un único cuadrante. Posteriormente, utilizando dichas propiedades, se obtendrá un algoritmo para identificar el intervalo de plantas a partir de los vértices del conjunto de valores, cuando al menos cinco vértices se encuentran en un mismo cuadrante. Con este algoritmo, que utiliza los vértices del conjunto de valores, se obtendrán los valores de los polinomios de Kharitonov del numerador y del denominador, asociados al intervalo de plantas al que pertenece el conjunto de valores.

3.1. Planteamiento del problema.

Consideremos una familia de intervalos de planta de coeficientes reales, de la forma

$$G(s, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{N_p(s, \mathbf{a})}{D_p(s, \mathbf{b})},$$

donde $N_p(s, \mathbf{a})$ y $D_p(s, \mathbf{b})$ son intervalos de polinomios de la forma

$$\begin{aligned} N_p(s, \mathbf{a}) &= a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0, & a_i &\in [a_i^-, a_i^+], & i &= 0, \dots, n \\ D_p(s, \mathbf{b}) &= b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0, & b_i &\in [b_i^-, b_i^+], & i &= 0, \dots, m \end{aligned}$$

con $m \geq 1, n \geq 1, 0 \notin D_p(s, \mathbf{b})$, y donde $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n)$, $a_n \neq 0$, y $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_m)$, $b_m \neq 0$ son los parámetros inciertos.

El numerador y el denominador de la familia de intervalos se caracterizan por sus respectivos polinomios de Kharitonov, que pueden expresarse en términos de sus partes par e impar evaluados en $s = j\omega$, como sigue.

Familia $N_p(s, \mathbf{a})$:

$$\begin{aligned} K_{n1} &= p_{e \text{ mín}}(j\omega) + j p_{o \text{ mín}}(j\omega); & K_{n2} &= p_{e \text{ máx}}(j\omega) + j p_{o \text{ mín}}(j\omega) \\ K_{n3} &= p_{e \text{ máx}}(j\omega) + j p_{o \text{ máx}}(j\omega); & K_{n4} &= p_{e \text{ mín}}(j\omega) + j p_{o \text{ máx}}(j\omega) \end{aligned} \quad (3.1)$$

siendo

$$\begin{aligned} p_{e \text{ mín}}(j\omega) &= a_0^- - a_2^+ \omega^2 + a_4^- \omega^4 - a_6^+ \omega^6 + \dots, & p_{e \text{ máx}}(j\omega) &= a_0^+ - a_2^- \omega^2 + a_4^+ \omega^4 - a_6^- \omega^6 + \dots \\ p_{o \text{ mín}}(j\omega) &= a_1^- \omega - a_3^+ \omega^3 + a_5^- \omega^5 - a_7^+ \omega^7 + \dots, & p_{o \text{ máx}}(j\omega) &= a_1^+ \omega - a_3^- \omega^3 + a_5^+ \omega^5 - a_7^- \omega^7 + \dots \end{aligned}$$

Familia $D_p(s, \mathbf{b})$:

$$\begin{aligned} K_{d1} &= q_{e \text{ mín}}(j\omega) + j q_{o \text{ mín}}(j\omega); & K_{d2} &= q_{e \text{ máx}}(j\omega) + j q_{o \text{ mín}}(j\omega) \\ K_{d3} &= q_{e \text{ máx}}(j\omega) + j q_{o \text{ máx}}(j\omega); & K_{d4} &= q_{e \text{ mín}}(j\omega) + j q_{o \text{ máx}}(j\omega) \end{aligned} \quad (3.2)$$

siendo

$$\begin{aligned} q_{e \text{ mín}}(j\omega) &= b_0^- - b_2^+ \omega^2 + b_4^- \omega^4 - b_6^+ \omega^6 + \dots, & q_{e \text{ máx}}(j\omega) &= b_0^+ - b_2^- \omega^2 + b_4^+ \omega^4 - b_6^- \omega^6 + \dots \\ q_{o \text{ mín}}(j\omega) &= b_1^- \omega - b_3^+ \omega^3 + b_5^- \omega^5 - b_7^+ \omega^7 + \dots, & q_{o \text{ máx}}(j\omega) &= b_1^+ \omega - b_3^- \omega^3 + b_5^+ \omega^5 - b_7^- \omega^7 + \dots \end{aligned}$$

El método de identificación propuesto se basa en la identificación inicial de los valores de los polinomios de Kharitonov del numerador y del denominador, obtenidos a partir de los conjuntos de valores. Una vez obtenidos los valores $(K_{n1}(j\omega), K_{n2}(j\omega), K_{n3}(j\omega), K_{n4}(j\omega))$ y $(K_{d1}(j\omega), K_{d2}(j\omega), K_{d3}(j\omega), K_{d4}(j\omega))$ se plantea el siguiente sistema de ecuaciones, para $s = j\omega$:

$$\begin{aligned}
Re(K_{n1}(\omega)) &= p_{e\text{mín}}(j\omega) = a_0^- - a_2^+\omega^2 + a_4^-\omega^4 - \dots \\
Im(K_{n1}(\omega)) &= p_{o\text{mín}}(j\omega) = a_1^-\omega - a_3^+\omega^3 + a_5^-\omega^5 - \dots \\
Re(K_{n3}(\omega)) &= p_{e\text{máx}}(j\omega) = a_0^+ - a_2^-\omega^2 + a_4^+\omega^4 - \dots \\
Im(K_{n3}(\omega)) &= p_{o\text{máx}}(j\omega) = a_1^+\omega - a_3^-\omega^3 + a_5^+\omega^5 - \dots \\
Re(K_{d1}(\omega)) &= q_{e\text{mín}}(j\omega) = b_0^- - b_2^+\omega^2 + b_4^-\omega^4 - \dots \\
Im(K_{d1}(\omega)) &= q_{o\text{mín}}(j\omega) = b_1^-\omega - b_3^+\omega^3 + b_5^-\omega^5 - \dots \\
Re(K_{d3}(\omega)) &= q_{e\text{máx}}(j\omega) = b_0^+ - b_2^-\omega^2 + b_4^+\omega^4 - \dots \\
Im(K_{d3}(\omega)) &= q_{o\text{máx}}(j\omega) = b_1^+\omega - b_3^-\omega^3 + b_5^+\omega^5 - \dots
\end{aligned} \tag{3.3}$$

donde las incógnitas son los parámetros inciertos.

Como se observa, existen cuatro valores para el numerador $(p_{e\text{mín}}(j\omega), p_{e\text{máx}}(j\omega), p_{o\text{mín}}(j\omega), p_{o\text{máx}}(j\omega))$ y cuatro valores para el denominador $(q_{e\text{mín}}(j\omega), q_{e\text{máx}}(j\omega), q_{o\text{mín}}(j\omega), q_{o\text{máx}}(j\omega))$, para cada conjunto de valores. Se denominan, respectivamente, *valores de los polinomios de Kharitonov p y q*.

La identificación de los parámetros de la función de transferencia se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones 3.3. Para ello, los valores de los polinomios de Kharitonov p y q se calculan a partir de los vértices de los conjuntos de valores, basándose en las propiedades de los conjuntos de valores para intervalos de plantas [Barmish and Kang, 1993]. El algoritmo puede considerarse un resultado de Puntos Extremos para la identificación.

Una primera cuestión que se plantea es determinar cuántos conjuntos de valores se necesitan para identificar la planta. En principio podemos disponer, por experimentos en frecuencia adecuados, de cualquier número de conjunto de valores que se desee. Sin embargo, siempre es más conveniente trabajar con el mínimo número de conjuntos de valores necesarios.

En el desarrollo del algoritmo de Bhattacharyya et al, [Bhattacharyya et al., 1995], que se vio ampliamente en el capítulo 2, hay tres aspectos a considerar:

1. Según 2.2.2.1 los *puntos dato*, denotados por $D(jw) \equiv \{D(jw_i) = \alpha_i + j\beta_i, i = 1, 2, \dots, N\}$, se obtienen como resultado de un experimento de identificación, a partir de las ecuaciones 2.5.
2. Los autores suponen que el *orden* del polinomio numerador es igual al *orden* del polinomio denominador, tal y como se refleja en las expresiones 2.6 y en la definición que los autores hacen de la familia de modelos (2.7).
3. Los autores definen el modelo l -ésimo de la siguiente forma:

$$G_l(jw) = \begin{cases} D(jw_i), & i = l \\ G^I(jw_i), & i = 1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, N, \end{cases}$$

es decir, el modelo $G_l(jw)$ es idéntico al modelo nominal $G^I(jw)$ identificado, pero con el punto l -ésimo reemplazado por el l -ésimo componente del dato del test $D(jw)$.

Del análisis del método se deduce que el procedimiento de identificación resulta conservador, ya que no se está considerando la posibilidad de identificar tanto a familias estrictamente propias como no propias. De igual forma, la elección del modelo l -ésimo puede dar lugar a una familia de modelos identificada muy numerosa, ya que si el l -ésimo componente del dato del test $D(jw)$ utilizado está cercano a la frontera, se incorporarán, como parte de la familia identificada, modelos muy diferentes de la familia original.

Con el fin de eliminar el conservadurismo que introduce este método, se elaborará un nuevo planteamiento de identificación, donde se tendrán en cuenta las relaciones de un polinomio de Kharitonov con sus partes par e impar (ecuaciones 3.1 y 3.2), y la relación de éstas con los coeficientes de la función de transferencia de la familia de intervalos (ecuaciones 3.3). El algoritmo de identificación que se propone resuelve, para una frecuencia determinada w , el siguiente sistema de ecuaciones:

$$Re(K_{n4}(jw)) = Re(K_{n1}(jw)) = a_0^- - a_2^+ w^2 + a_4^- w^4 - a_6^+ w^6 + \dots$$

$$Re(K_{n2}(jw)) = Re(K_{n3}(jw)) = a_0^+ - a_2^- w^2 + a_4^+ w^4 - a_6^- w^6 + \dots$$

$$Im(K_{n2}(jw)) = Im(K_{n1}(jw)) = a_1^- w - a_3^+ w^3 + a_5^- w^5 - a_7^+ w^7 + \dots$$

$$Im(K_{n4}(jw)) = Im(K_{n3}(jw)) = a_1^+ w - a_3^- w^3 + a_5^+ w^5 - a_7^- w^7 + \dots$$

$$Re(K_{d4}(jw)) = Re(K_{d1}(jw)) = b_0^- - b_2^+ w^2 + b_4^- w^4 - b_6^+ w^6 + \dots$$

$$Re(K_{d2}(jw)) = Re(K_{d3}(jw)) = b_0^+ - b_2^- w^2 + b_4^+ w^4 - b_6^- w^6 + \dots$$

$$Im(K_{d2}(jw)) = Im(K_{d1}(jw)) = b_1^- w - b_3^+ w^3 + b_5^- w^5 - b_7^+ w^7 + \dots$$

$$Im(K_{d4}(jw)) = Im(K_{d3}(jw)) = b_1^+ w - b_3^- w^3 + b_5^+ w^5 - b_7^- w^7 + \dots$$

donde los coeficientes $A_-^+ = \{a_i^-, a_i^+, i = 0, \dots, n\}$ y $B_-^+ = \{b_i^-, b_i^+, i = 0, \dots, m\}$ son las incógnitas.

3.2. Caracterización de la frontera del conjunto de valores.

En esta sección se estudia la geometría del conjunto de valores de un intervalo de plantas y su comportamiento, con el fin de determinar los *valores de los polinomios de Kharitonov* p y q .

La frontera de un rectángulo de Kharitonov está determinada por las aristas de Kharitonov (que son los segmentos o lados del rectángulo de Kharitonov), definidas como sigue:

$$\begin{aligned} A_1 &= \lambda K_2(j\omega) + (1 - \lambda) K_1(j\omega), & A_2 &= \lambda K_3(j\omega) + (1 - \lambda) K_2(j\omega) \\ A_3 &= \lambda K_4(j\omega) + (1 - \lambda) K_3(j\omega), & A_4 &= \lambda K_1(j\omega) + (1 - \lambda) K_4(j\omega) \end{aligned}$$

dónde $\lambda \in [0, 1]$ y $K_1(j\omega)$, $K_2(j\omega)$, $K_3(j\omega)$, $K_4(j\omega)$ son los polinomios de Kharitonov del intervalo del polinomios dados por las ecuaciones 3.1 y 3.2.

La caracterización del conjunto de valores de un intervalo de plantas está determinada por los elementos de la frontera, tal y como se muestra más adelante.

Lema 3.1

[Frontera de suma y cociente de polígonos. [Bhattacharyya et al., 1995]] Para $i = 1, 2$, sea Q_i un polígono en el plano complejo de vértices V_i y aristas E_i . $\partial(\bullet)$ denota la frontera del conjunto (\bullet) . Se verifica:

1. $\partial(Q_1 + Q_2) \subset (V_1 + E_2) \cup (E_1 + V_2)$.
2. $\partial\left(\frac{Q_1}{Q_2}\right) \subset \frac{E_1}{V_2} \cup \frac{V_1}{E_2}$.

Cuando los polígonos del Lema 3.1 son rectángulos, la frontera del cociente de dos polígonos puede caracterizarse de forma más precisa.

Lema 3.2

En los términos del lema 3.1, si Q_i ($i = 1, 2$) es un rectángulo de lados paralelos a los ejes, se verifica:

1. $\partial(Q_1 + Q_2) = \partial(Q_1) + \partial(Q_2)$.
2. $\partial(Q_1 + Q_2) = \partial((V_1 + E_2) \cup (E_1 + V_2))$.
3. $\partial\left(\frac{Q_1}{Q_2}\right) = \partial\left(\frac{E_1}{V_2} \cup \frac{V_1}{E_2}\right)$.

Demostración:

1. Se demostrará que $z \in \partial(Q_1 + Q_2) \Leftrightarrow z \in \partial(Q_1) + \partial(Q_2)$, aunque la implicación $z \in \partial(Q_1 + Q_2) \Rightarrow z \in \partial(Q_1) + \partial(Q_2)$ es conocida (véase el lema 3.1).

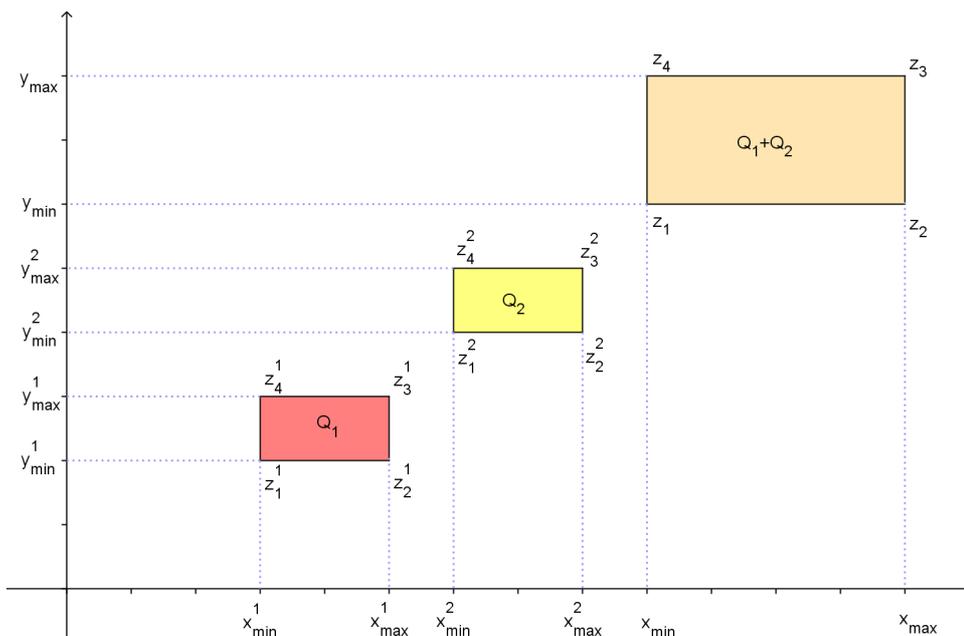


Figura 3.1: Notación para el lema 3.2.

Según la figura 3.1 se tiene:

- Vértices de Q_1 : $z_1^1, z_2^1, z_3^1, z_4^1$ y sus partes real e imaginaria

$$\begin{aligned} x_{min}^1 &= Re(z_1^1) = Re(z_4^1), & x_{max}^1 &= Re(z_2^1) = Re(z_3^1), \\ y_{min}^1 &= Im(z_1^1) = Im(z_2^1), & y_{max}^1 &= Im(z_4^1) = Im(z_3^1). \end{aligned}$$

- Lados o aristas de Q_1 : $\overline{z_1^1 z_2^1}, \overline{z_2^1 z_3^1}, \overline{z_3^1 z_4^1}, \overline{z_4^1 z_1^1}$, donde $\overline{z_i^1 z_k^1} = \lambda z_i^1 + (1 - \lambda) z_k^1$, con $\lambda \in [0, 1]$.

- Vértices de Q_2 : $z_1^2, z_2^2, z_3^2, z_4^2$ y sus partes real e imaginaria

$$\begin{aligned} x_{min}^2 &= Re(z_1^2) = Re(z_4^2), & x_{max}^2 &= Re(z_2^2) = Re(z_3^2), \\ y_{min}^2 &= Im(z_1^2) = Im(z_2^2), & y_{max}^2 &= Im(z_4^2) = Im(z_3^2). \end{aligned}$$

- Lados o aristas de Q_2 : $\overline{z_1^2 z_2^2}, \overline{z_2^2 z_3^2}, \overline{z_3^2 z_4^2}, \overline{z_4^2 z_1^2}$, donde $\overline{z_i^2 z_k^2} = \lambda z_i^2 + (1 - \lambda) z_k^2$, con $\lambda \in [0, 1]$.

- Vértices de $Q_1 + Q_2$: z_1, z_2, z_3, z_4 y sus partes real e imaginaria

$$\begin{aligned} x_{min} &= Re(z_1) = Re(z_4), & x_{max} &= Re(z_2) = Re(z_3), \\ y_{min} &= Im(z_1) = Im(z_2), & y_{max} &= Im(z_4) = Im(z_3). \end{aligned}$$

- Lados o aristas de $Q_1 + Q_2$: $\overline{z_1 z_2}, \overline{z_2 z_3}, \overline{z_3 z_4}, \overline{z_4 z_1}$, donde $\overline{z_i z_k} = \lambda z_i + (1 - \lambda) z_k$, con $\lambda \in [0, 1]$.

De acuerdo con esta notación

$$\begin{aligned} \partial(Q_1) + \partial(Q_2) &= \left(\overline{z_1^1 z_2^1} \cup \overline{z_2^1 z_3^1} \cup \overline{z_3^1 z_4^1} \cup \overline{z_4^1 z_1^1} \right) + \left(\overline{z_1^2 z_2^2} \cup \overline{z_2^2 z_3^2} \cup \overline{z_3^2 z_4^2} \cup \overline{z_4^2 z_1^2} \right) \\ &= \left(\overline{z_1^1 z_2^1} + \overline{z_1^2 z_2^2} \right) \cup \left(\overline{z_2^1 z_3^1} + \overline{z_2^2 z_3^2} \right) \cup \left(\overline{z_3^1 z_4^1} + \overline{z_3^2 z_4^2} \right) \cup \left(\overline{z_4^1 z_1^1} + \overline{z_4^2 z_1^2} \right), \end{aligned} \quad (3.4)$$

puesto que los lados de los polígonos son paralelos a los ejes.

Análogamente

$$\partial(Q_1 + Q_2) = \overline{z_1 z_2} \cup \overline{z_2 z_3} \cup \overline{z_3 z_4} \cup \overline{z_4 z_1}. \quad (3.5)$$

Como

$$\overline{z_1 z_2} = \lambda z_2 + (1 - \lambda) z_1 = \lambda(x_{max} + jy_{min}) + (1 - \lambda)(x_{min} + jy_{min}) \quad (3.6)$$

y, al ser los lados paralelos a los ejes,

$$\begin{aligned}x_{max} &= x_{max}^1 + x_{max}^2, & x_{min} &= x_{min}^1 + x_{min}^2, \\y_{max} &= y_{max}^1 + y_{max}^2, & y_{min} &= y_{min}^1 + y_{min}^2,\end{aligned}$$

sustituyendo en la ecuación 3.6, se obtiene que

$$\overline{z_1 z_2} = \lambda(x_{max}^1 + x_{max}^2 + j(y_{min}^1 + y_{min}^2)) + (1 - \lambda)(x_{min}^1 + x_{min}^2 + j(y_{min}^1 + y_{min}^2)),$$

haciendo operaciones y agrupando términos

$$\begin{aligned}\overline{z_1 z_2} &= (\lambda x_{max}^1 + \lambda j y_{min}^1 + (1 - \lambda)(x_{min}^1 + j y_{min}^1)) \\ &+ (\lambda x_{max}^2 + \lambda j y_{min}^2 + (1 - \lambda)(x_{min}^2 + j y_{min}^2)) = \overline{z_1^1 z_2^1} + \overline{z_1^2 z_2^2}.\end{aligned}$$

Razonando de forma análoga para el resto de los lados, se obtienen las siguientes relaciones:

$$\overline{z_2 z_3} = \overline{z_2^1 z_3^1} + \overline{z_2^2 z_3^2}, \quad \overline{z_3 z_4} = \overline{z_3^1 z_4^1} + \overline{z_3^2 z_4^2}, \quad \overline{z_4 z_1} = \overline{z_4^1 z_1^1} + \overline{z_4^2 z_1^2}. \quad (3.7)$$

Por tanto si un punto $z \in \partial(Q_1 + Q_2)$, entonces z pertenece a alguno de los segmentos que forman esta frontera (ecuación 3.5), por ejemplo $z \in \overline{z_2 z_3}$. Dado que $\overline{z_2 z_3} = \overline{z_2^1 z_3^1} + \overline{z_2^2 z_3^2}$, $\exists z^1 \in \overline{z_2^1 z_3^1}$ y $\exists z^2 \in \overline{z_2^2 z_3^2}$ tal que $z = z^1 + z^2$. Como $z^1 \in \overline{z_2^1 z_3^1} \Leftrightarrow z^1 \in \partial(Q_1)$ y $z^2 \in \overline{z_2^2 z_3^2} \Leftrightarrow z^2 \in \partial(Q_2)$, según la ecuación 3.4, $z \in \partial(Q_1) + \partial(Q_2)$.

Recíprocamente, si $z \in \partial(Q_1) + \partial(Q_2)$, entonces z pertenece a alguno de los segmentos que forman esta frontera (ecuación 3.5), por ejemplo $z \in \overline{z_2^1 z_3^1} + \overline{z_2^2 z_3^2} = \overline{z_2 z_3}$ (por 3.7), y por tanto $z \in \partial(Q_1 + Q_2)$.

2. Sea $z_0 \in \partial(Q_1 + Q_2)$. Por el apartado (1), $\partial(Q_1 + Q_2) = \partial(Q_1) + \partial(Q_2)$. Por tanto, existen $z_0^1 \in \partial Q_1$ y $z_0^2 \in \partial Q_2$ verificando $z_0 = z_0^1 + z_0^2$.

Como $z_0^1 \in \partial Q_1$ y $\partial Q_1 = V_1 \cup E_1$ entonces para todo $\varepsilon_0^1 > 0$ el disco abierto $|z_1 - z_0^1| < \varepsilon_0^1$ tiene, al menos, un punto z_1 tal que $z_1 \notin (V_1 \cup E_1)$, lo cual implica que $z_1 \notin V_1$ y $z_1 \notin E_1$.

Como $z_0^2 \in \partial Q_2$ y $\partial Q_2 = V_2 \cup E_2$ entonces para todo $\varepsilon_0^2 > 0$ el disco abierto

$|z_2 - z_0^2| < \varepsilon_0^2$ tiene, al menos, un punto z_2 tales que $z_2 \notin (V_2 \cup E_2)$, lo cual implica que $z_2 \notin V_2$ y $z_2 \notin E_2$.

Por tanto, como $z_1 \notin V_1$ y $z_2 \notin E_2$, entonces $z = z_1 + z_2 \notin V_1 + E_2$. Igualmente, como $z_1 \notin E_1$ y $z_2 \notin V_2$, entonces $z = z_1 + z_2 \notin E_1 + V_2$. Luego el punto $z = z_1 + z_2 \notin (V_1 + E_2) \cup (E_1 + V_2)$.

Ahora bien, el punto $z_0 \in \partial((V_1 + E_2) \cup (E_1 + V_2))$, ya que para todo $\varepsilon = \varepsilon_0^1 + \varepsilon_0^2$ el disco abierto $|z - z_0| = |z_1 + z_2 - z_0^1 - z_0^2| < \varepsilon_0^1 + \varepsilon_0^2$ contiene, al menos, un punto $z = z_1 + z_2$ tales que $z \notin (V_1 + E_2) \cup (E_1 + V_2)$.

Razonando de forma similar, se obtiene la otra inclusión. Para ello, sea $z_0 \in \partial((V_1 + E_2) \cup (E_1 + V_2))$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ el disco abierto $|z - z_0| < \varepsilon$ contiene, al menos, un punto z tal que $z \notin (V_1 + E_2) \cup (E_1 + V_2)$. Luego $z \notin (V_1 + E_2)$ y $z \notin (E_1 + V_2)$. Por tanto, existen z_1^* y z_2^* tal que $z_1^* \notin V_1$ y $z_1^* \notin E_1$ y por tanto $z_1^* \notin V_1 \cup E_1$, y tal que $z_2^* \notin V_2$ y $z_2^* \notin E_2$ y por tanto $z_2^* \notin V_2 \cup E_2$, siendo $z = z_1^* + z_2^*$.

El punto $z_0 \in \partial(Q_1) + \partial(Q_2)$, ya que existe al menos un punto $z = z_1^* + z_2^*$ verificando que $z_1^* \notin \partial(Q_1)$ y $z_2^* \notin \partial(Q_2)$ tal que $|z - z_0| < \varepsilon$.

3. Por el Lema 3.1 se sabe que

$$z \in \partial\left(\frac{Q_1}{Q_2}\right) \Leftrightarrow 0 \in \partial(Q_1 - z \cdot Q_2).$$

Por esto y utilizando el apartado (2)

$$\begin{aligned} z \in \partial\left(\frac{Q_1}{Q_2}\right) &\Leftrightarrow 0 \in \partial(Q_1 - z \cdot Q_2) \\ &\Leftrightarrow 0 \in \partial((V_1 - zE_2) \cup (E_1 - zV_2)) \Leftrightarrow z \in \partial\left(\frac{V_1}{E_2} \cup \frac{E_1}{V_2}\right). \end{aligned}$$

■

Los apartados 1 y 2 del lema anterior, aunque ya conocidos, se demuestran por claridad. El apartado 3 introduce un resultado similar al aportado en [Bhattacharyya et al., 1995], pero con la particularidad de que la expresión es una igualdad, por ser los polígonos rectángulos de lados paralelos a los ejes.

Para una familia de intervalos el conjunto de valores de su numerador y de su denominador, calculados para una frecuencia particular, están caracterizados por sus respectivos rectángulos de Kharitonov. Entonces el conjunto de valores de la familia de

intervalos es el conjunto de puntos determinado por el cociente de dos rectángulos, que siendo de Kharitonov, son de lados paralelos a los ejes. Por tanto, si K_{ni} y K_{dj} son los vértices de ambos rectángulos, aplicando el lema anterior, se formula el siguiente teorema.

Teorema 3.1

Para una familia de intervalos lineales $\mathbf{G}(s)$ evaluada en la frecuencia particular w_l , se verifica que

$$\partial(\mathbf{G}(jw_l)) = \partial \left(\frac{K_{ni}(jw_l)}{\lambda K_{dj}(jw_l) + (1 - \lambda)K_{dk}(jw_l)} \cup \frac{\lambda K_{nj}(jw_l) + (1 - \lambda)K_{nk}(jw_l)}{K_{di}(jw_l)} \right)$$

con $\lambda \in [0, 1]$ y los índices $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $(k, j) \in \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$.

Demostración:

Considérese un punto $z \in \partial(\mathbf{G}(jw_l))$. En virtud del Lema 3.2, apartado 3, el punto z pertenece a la frontera del conjunto extremo (unión de los cocientes de pares arista-vértice y vértice-arista). En este caso, las aristas son los segmentos de Kharitonov y los vértices son los vértices de Kharitonov, luego el punto z pertenece al conjunto

$$\partial \left(\frac{K_{ni}(jw_l)}{\lambda K_{dj}(jw_l) + (1 - \lambda)K_{dk}(jw_l)} \cup \frac{\lambda K_{nj}(jw_l) + (1 - \lambda)K_{nk}(jw_l)}{K_{di}(jw_l)} \right).$$

■

El teorema 3.1 establece que la frontera del conjunto de valores de la familia $\mathbf{G}(s)$, no sólo está incluida en el conjunto extremo formado por la unión de los cocientes de pares arista-vértice y vértice-arista, si no que *es la frontera de dicho conjunto extremo*.

Nótese además que el teorema 3.1 caracteriza la frontera de un conjunto de valores de una familia de intervalos, obtenidos en lazo abierto, para una frecuencia particular, por medio de 32 sistemas (cocientes de pares arista-vértice y vértice-arista) que **no son los sistemas** asociados a la familia de polinomios característicos en lazo cerrado que se utilizan para estudiar la estabilidad de las 32 aristas distinguidas, conocidas como los *segmentos CB* ó *segmentos de Kharitonov*, y que se obtienen utilizando la planta y un controlador, a partir del polinomio característico del sistema en lazo cerrado.

El siguiente resultado, muestra algunas propiedades de los elementos que forman los 32 sistemas asociados al conjunto de valores de un intervalo de plantas.

Teorema 3.2

[Teorema de los arcos y de las aristas.] [Hernández, 1994]

1. Para cada punto $s = j\omega_l$ fijo del plano, el conjunto de puntos obtenido mediante la transformación $T_a(s) = \frac{K_{ni}(j\omega_l)}{\lambda K_{dj}(j\omega_l) + (1-\lambda)K_{dk}(j\omega_l)}$ forma 16 arcos de circunferencia de extremos $\frac{K_{ni}(s)}{K_{dj}(s)}$ y $\frac{K_{ni}(s)}{K_{dk}(s)}$. Las circunferencias que contienen a dichos arcos forman un haz que pasa por el origen.
2. Para cada punto $s = j\omega_l$ fijo del plano, el conjunto de puntos obtenidos mediante la transformación $T_s(s) = \frac{\lambda K_{nj}(j\omega_l) + (1-\lambda)K_{nk}(j\omega_l)}{K_{di}(j\omega_l)}$ forma cuatro paralelogramos (16 segmentos) de vértices $\frac{K_{nk}(s)}{K_{di}(s)}, \frac{K_{nj}(s)}{K_{di}(s)}$ cuyos lados están contenidos en rectas de pendientes $\frac{-\sin(\theta_d^i)}{\cos(\theta_d^i)}$, o $\frac{\cos(\theta_d^i)}{\sin(\theta_d^i)}$ si el segmento sin transformar es un segmento de Kharitonov del numerador de la familia de intervalos, paralelo al eje x o paralelo al eje y , respectivamente. Estas pendientes son la tangente del ángulo que forma cada con el eje transformado u (transformado del eje x según T_s), medido en sentido contrario a las agujas del reloj, y donde θ_d^i es el argumento del número complejo resultado de evaluar el polinomio de Kharitonov $K_{di}(s)$ asociado al denominador de $\mathbf{G}(s)$ en $s = j\omega_l$.

El siguiente ejemplo, cuya familia de plantas se propone en [Bhattacharyya et al., 1995], servirá para mostrar de forma gráfica tanto los resultados del teorema 3.2, como las diferencias entre los 32 *sistemas* de interés para el proceso de identificación a realizar y los *segmentos CB*.

Ejemplo 3.1

Considérese la familia de intervalos de planta definida por la ecuación

$$\mathbf{G}(s) = \frac{a_1 s + a_0}{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}$$

donde los parámetros de la planta varían como se indica

$$0.9 \leq a_0 \leq 1.1, \quad 0.1 \leq a_1 \leq 0.2, \quad 1.9 \leq b_0 \leq 2.1, \quad 1.8 \leq b_1 \leq 2.0, \quad 0.9 \leq b_2 \leq 1.0.$$

Los polinomios de Kharitonov asociados al numerador son

$$\begin{aligned} K_N^1(s) &= 0.9 + 0.1s, & K_N^2(s) &= 1 + 0.1s, \\ K_N^3(s) &= 1 + 0.2s, & K_N^4(s) &= 0.9 + 0.2s, \end{aligned}$$

y al denominador

$$K_D^1(s) = 1.9 + 1.8s + s^2, \quad K_D^2(s) = 2.1 + 1.8s + 0.9s^2,$$

$$K_D^3(s) = 2.1 + 2s + 0.9s^2, \quad K_D^4(s) = 1.9 + 2s + s^2.$$

Para la familia anterior, se construyen los 32 sistemas para el valor particular de la frecuencia $w_l = 1.0$, obteniéndose:

- Las 16 aristas pertenecientes a cocientes entre una arista del rectángulo de Kharitonov del polinomio numerador y un vértice del rectángulo de Kharitonov del polinomio denominador, que se muestran en la figura 3.2a.
- Los 16 arcos correspondientes a cocientes entre un vértice del rectángulo de Kharitonov del polinomio numerador y una arista del rectángulo de Kharitonov del polinomio denominador, mostrados en la figura 3.2b.

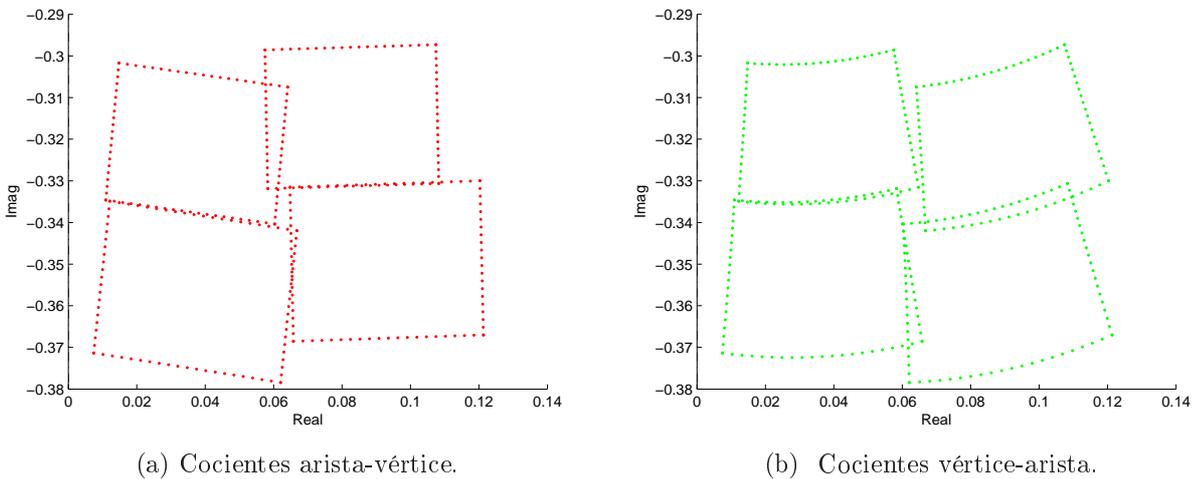


Figura 3.2: Cocientes entre elementos.

Para construir los segmentos CB, considérese el controlador definido por

$$\mathbf{C}(s) = \frac{F_1(s)}{F_2(s)} = \frac{a_1s + a_0}{b_2s^2 + b_1s + b_0}$$

Los correspondientes segmentos generalizados de Kharitonov, o segmentos CB, son

$$F_1(s)K_N^i(s) + F_2(s) (\lambda K_D^j(s) + (1 - \lambda)K_D^k(s))$$

$$F_2(s)K_D^i(s) + F_1(s) (\lambda K_N^j(s) + (1 - \lambda)K_N^k(s)).$$

La figura 3.3a muestra los 32 sistemas asociados al conjunto de valores, y la figura 3.3b los correspondientes segmentos generalizados de Kharitonov, ambos para la frecuencia $w = 1.0$.

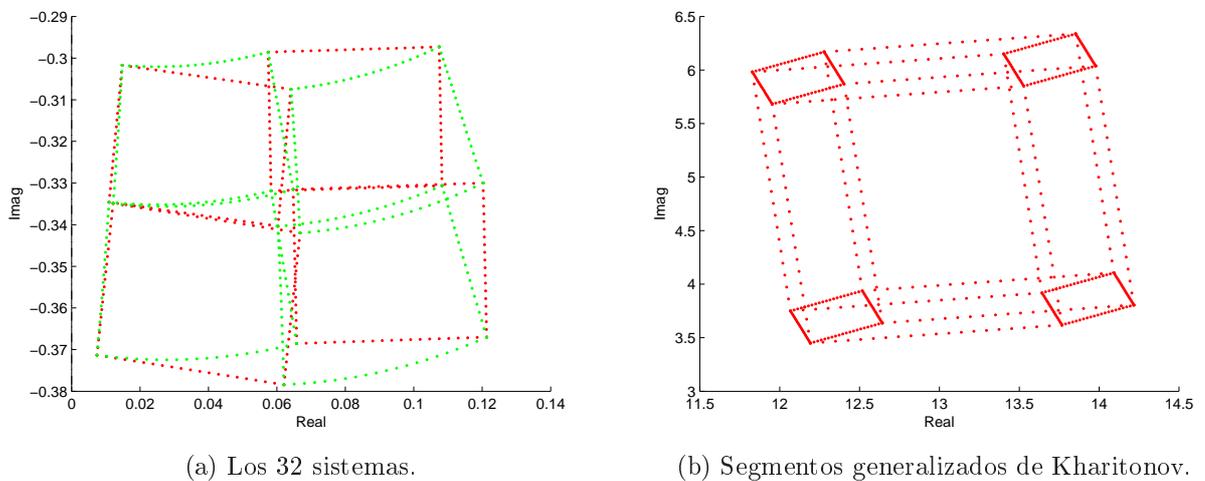


Figura 3.3: Los 32 sistemas frente a los Segmentos generalizados de Kharitonov.



El Lema 3.1 afirma que la frontera del conjunto de valores de un intervalo de plantas, está formada por elementos pertenecientes al conjunto de los cocientes entre pares de aristas y vértices asociados. Como es conocido, los elementos $\frac{E_1}{V_2}$ son segmentos, y los elementos $\frac{V_1}{E_2}$ son arcos que pasan por los vértices ([Conway, 1984] y [Churchill and Brown, 1992]).

Nótese que si $VS(\omega)$ es un conjunto de valores determinado por $\gamma N_p(s)$, donde γ es un número complejo y $N_p(s)$ es un rectángulo de Kharitonov, entonces $VS(\omega)$ es un paralelogramo cuyos vértices son $\gamma K_i(s)$ donde $K_i(s)$, $i = 1, 2, 3, 4$, son los polinomios de Kharitonov de $N_p(s)$. Se tiene pues el siguiente lema.

Lema 3.3

La frontera del conjunto de valores de un intervalo de plantas está formado por un subconjunto

del conjunto de los segmentos de los cuatro paralelogramos determinados por los rectángulos del numerador girados $\frac{N_p}{K_{di}}$, $i = 1, 2, 3, 4$, y por los arcos entre sus vértices.

Demostración:

Consecuencia inmediata del Lema 3.1 y del Teorema 3.2. ■

Seguidamente se caracteriza un rectángulo de Kharitonov con vértices ordenados y definidos según las ecuaciones 3.1 y 3.2, por un conjunto de vértices en sentido antihorario. La siguiente definición establece esta característica.

Definición 3.1

Dado un rectángulo de Kharitonov N con vértices n_1, n_2, n_3, n_4 , el Conjunto Ordenado de vértices $SSn = \{n_1, n_2, n_3, n_4\}$, viene dado por $n_{i+1} = next(n_i)$, $i = 1, 2, 3$, $n_1 = next(n_i)$ para $i = 4$ donde $next$ significa el siguiente vértice cuando recorremos el rectángulo de Kharitonov en sentido antihorario.

Utilizando la definición 3.1, los Conjuntos Ordenados de vértices del rectángulo de Kharitonov del numerador y del denominador son $SSn = \{n_1, n_2, n_3, n_4\}$, donde n_1 es cualquier vértice del rectángulo de Kharitonov del numerador, y $SSd = \{d_1, d_2, d_3, d_4\}$, donde d_1 es cualquier vértice del rectángulo de Kharitonov del denominador.

Como n_1 y d_1 son arbitrarios, no tienen que coincidir necesariamente con los polinomios de Kharitonov K_{n1} y K_{d1} respectivamente. Por ello, se denominarán **polinomios asignados**. Obviamente, los polinomios de Kharitonov se obtienen de los polinomios asignados, utilizando la siguiente reasignación:

$$\begin{aligned}
 K_{n1}(j\omega) &= \min \{Re(SSn)\} + j \min \{Im(SSn)\} \\
 K_{n2}(j\omega) &= \max \{Re(SSn)\} + j \min \{Im(SSn)\} \\
 K_{n3}(j\omega) &= \max \{Re(SSn)\} + j \max \{Im(SSn)\} \\
 K_{n4}(j\omega) &= \min \{Re(SSn)\} + j \max \{Im(SSn)\}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

para el numerador, y para el denominador:

$$\begin{aligned}
K_{d1}(j\omega) &= \min \{Re(SSd)\} + j \min \{Im(SSd)\} \\
K_{d2}(j\omega) &= \max \{Re(SSd)\} + j \min \{Im(SSd)\} \\
K_{d3}(j\omega) &= \max \{Re(SSd)\} + j \max \{Im(SSd)\} \\
K_{d4}(j\omega) &= \min \{Re(SSd)\} + j \max \{Im(SSd)\}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Basándose en la estructura de los polinomios asignados, estas expresiones pueden simplificarse, obteniéndose

$$\begin{aligned}
K_{n1}(j\omega) &= \min \{Re(n_1), Re(n_3)\} + j \min \{Im(n_1), Im(n_3)\} \\
K_{n2}(j\omega) &= \max \{Re(n_1), Re(n_3)\} + j \min \{Im(n_1), Im(n_3)\} \\
K_{n3}(j\omega) &= \max \{Re(n_1), Re(n_3)\} + j \max \{Im(n_1), Im(n_3)\} \\
K_{n4}(j\omega) &= \min \{Re(n_1), Re(n_3)\} + j \max \{Im(n_1), Im(n_3)\}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

para el numerador, y para el denominador:

$$\begin{aligned}
K_{d1}(j\omega) &= \min \{Re(d_1), Re(d_3)\} + j \min \{Im(d_1), Im(d_3)\} \\
K_{d2}(j\omega) &= \max \{Re(d_1), Re(d_3)\} + j \min \{Im(d_1), Im(d_3)\} \\
K_{d3}(j\omega) &= \max \{Re(d_1), Re(d_3)\} + j \max \{Im(d_1), Im(d_3)\} \\
K_{d4}(j\omega) &= \min \{Re(d_1), Re(d_3)\} + j \max \{Im(d_1), Im(d_3)\}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones 3.10 y 3.11 es suficiente determinar los polinomios asignados n_1, n_3, d_1 y d_3 . Para ello, es necesario plantear y resolver el sistema de ecuaciones

$$v_i = \frac{n_j}{d_k} \tag{3.12}$$

con $j = 1, 2, 3, 4$ y $k = 1, 2, 3, 4$, en el que dichos polinomios figuran como incógnitas.

Definición 3.2

Un conjunto de valores se dice *identificable por sus vértices* cuando entre los vértices conocidos se encuentran, al menos, los polinomios asignados n_1, n_3, d_1 y d_3 .

Debe tenerse en cuenta que no todos los conjuntos de valores son identificables de forma única mediante los vértices, ya que es posible obtener el mismo conjunto de valores con un único numerador, pero distintos denominadores. Por tanto, distintas funciones de

transferecia podrían tener el mismo conjunto de valores. El siguiente ejemplo es una muestra de ello.

Ejemplo 3.2

Considérese intervalo de plantas cuyo conjunto de valores está representado en la figura 3.4.

Como puede observarse, sólo tiene en su frontera cuatro vértices, $v_1 = \frac{K_{n4}}{K_{d3}}$, $v_2 = \frac{K_{n2}}{K_{d3}}$, $v_3 = \frac{K_{n3}}{K_{d4}}$ y $v_4 = \frac{K_{n1}}{K_{d4}}$.

En este caso se parte de la asociación entre vértice y cociente de polinomios, conocida de antemano, situación que se ha considerado solo para este ejemplo, ya que en la práctica la asociación real entre vértice y cociente entre polinomios no será conocida.

Al plantear el sistema de ecuaciones 3.12 para estos cuatro vértices,

$$\begin{aligned} -14.2976 - 2.4376j &= \frac{K_{n4}}{K_{d3}}, & 9.1554 + 1.9344j &= \frac{K_{n2}}{K_{d3}} \\ -1.992 + 0.0200j &= \frac{K_{n3}}{K_{d4}}, & 3.0935 - 0.1673j &= \frac{K_{n1}}{K_{d4}} \end{aligned} \quad (3.13)$$

se observa que la identificación del numerador se puede realizar de forma única, pues la solución del sistema proporciona el valor de K_{n4} y de K_{n2} , mientras que no es posible determinar suficientes polinomios del denominador, para obtener un único denominador que satisfaga dicho sistema de ecuaciones.

Por ejemplo, los rectángulos de Kharitonov

$$\begin{aligned} K_{n1}(jw) &= -10 + 2j, & K_{n2}(jw) &= 10 + 2j, & K_{n3}(jw) &= 10 + 3j, & K_{n4}(jw) &= -10 + 3j, \\ K_{d1}(jw) &= -5 - 2j, & K_{d2}(jw) &= 1 - 2j, & K_{d3}(jw) &= 1 - 3j, & K_{d4}(jw) &= -5 - 3j, \end{aligned}$$

verifican el sistema de ecuaciones 3.13, al igual que los rectángulos

$$\begin{aligned} K_{n1}(jw) &= -10 + 2j, & K_{n2}(jw) &= 10 + 2j, & K_{n3}(jw) &= 10 + 3j, & K_{n4}(jw) &= -10 + 3j, \\ K_{d1}(jw) &= -5 - 2j, & K_{d2}(jw) &= 1 - 2j, & K_{d3}(jw) &= 1 - 4j, & K_{d4}(jw) &= -5 - 4j, \end{aligned}$$

siendo el conjunto de valores que determinan en cada caso los rectángulos exactamente el mismo, es decir, el representado en la figura 3.4.



Para plantear y resolver el sistema de ecuaciones 3.12 deben estudiarse las propiedades de la frontera del conjunto de valores. El siguiente lema establece la orientación de los

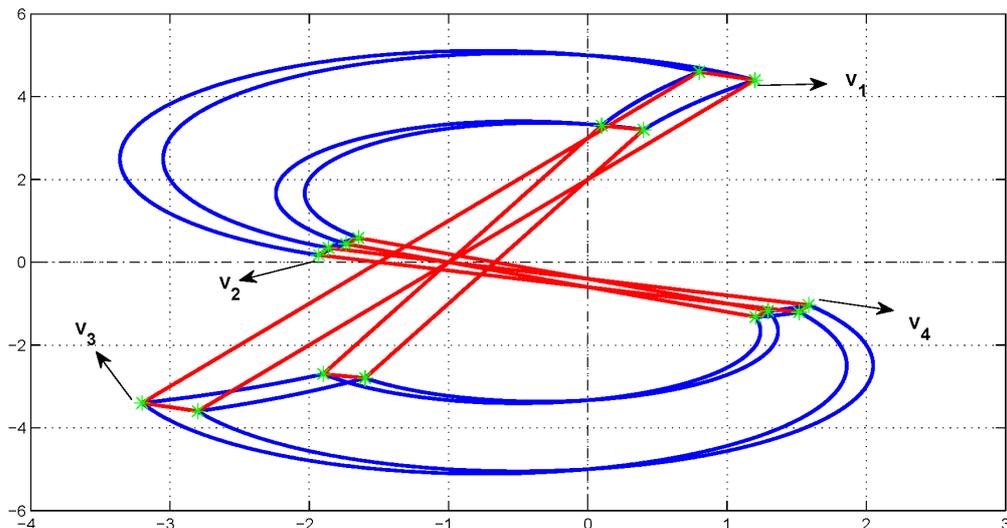


Figura 3.4: 32 sistemas con sólo 4 vértices en la frontera.

elementos de la frontera, en las condiciones del Lema 3.3.

Lema 3.4

$T_a = \frac{E_1}{V_2}$ y $T_s = \frac{V_1}{E_2}$ son transformaciones conformes, y conservan ángulos tanto en magnitud como en orientación.

Demostración:

Las transformaciones $T_a = \frac{E_1}{V_2}$ y $T_s = \frac{V_1}{E_2}$ son biyectivas y conformes (véase, por ejemplo [Marsden, 1983]). Además la orientación de los ángulos transformados, se conserva cuando el Jacobiano (J) es positivo (véase, por ejemplo [Nehari, 1975]).

Las transformación $T_a(s) = \frac{K_N^i(s)}{\lambda K_D^j(s) + (1 - \lambda)K_D^k(s)}$ puede escribirse, de forma más general $T_a(s) = \frac{\eta}{s}$, con $\eta = \eta_x + j\eta_y \in \mathbb{C}$ y $s \in \{\lambda K_D^j(s) + (1 - \lambda)K_D^k(s), \lambda \in [0, 1]\}$.

Como $T_a(s)$ es el cociente de dos números complejos, para cualquier $s = x + jy$, puede escribirse de la forma $f_1(x, y) + jf_2(x, y)$, donde $f_1(x, y) = \frac{\eta_x x + \eta_y y}{x^2 + y^2}$, $f_2(x, y) = \frac{\eta_y x - \eta_x y}{x^2 + y^2}$.

Derivando y simplificando, resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= \frac{y^2 \eta_x - x^2 \eta_x - 2xy \eta_y}{(x^2 + y^2)^2}, & \frac{\partial f_1}{\partial y} &= \frac{x^2 \eta_y - y^2 \eta_y - 2xy \eta_x}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} &= \frac{y^2 \eta_y - x^2 \eta_y + 2xy \eta_x}{(x^2 + y^2)^2}, & \frac{\partial f_2}{\partial y} &= \frac{y^2 \eta_x - x^2 \eta_x - 2xy \eta_y}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Por tanto, $\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}$ y $\frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}$ (T_a es conforme) y $J = \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial f_2}{\partial x} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2 > 0$.

Para T_s se demuestra de forma análoga. ■

El siguiente teorema sirve para determinar la forma de la frontera del conjunto de valores y permitirá establecer propiedades de "continuidad" de elementos de la misma.

Teorema 3.3

Dos elementos de la frontera del conjunto de valores se cortan (salvo vértices) si y solo si el punto de intersección está en un eje.

Demostración:

Dados $n = n_R + jn_I$ y $d = d_R + jd_I$ (numerador y denominador), la ecuación que define un intervalo de plantas viene dada por

$$P = \frac{n_R d_R + n_I d_I}{d_R^2 + d_I^2} + j \frac{n_I d_R - n_R d_I}{d_R^2 + d_I^2} = x + jy$$

Para analizar los casos en los que un punto de intersección (x_c, y_c) pertenece a la frontera, estudiaremos bajo qué condiciones existen plantas del intervalo de plantas con parte imaginaria menor que y_c , y parte imaginaria mayor que y_c para el mismo valor $x = x_c$.

En primer lugar, se analizarán las intersecciones con el eje imaginario ($x = 0$). (La demostración para el caso de cortes con el eje real ($y = 0$) es similar). Consideremos una planta de denominador $d = d_R + jd_I$ y cuyo numerador tiene de vértices n_1 y n_2 , y puede ser paralelo al eje real o al eje imaginario.

Cuando $n_{1I} = n_{2I}$ ($n_1 n_2$ paralelo al eje real), si $x = 0$ se verifica la relación $n_R = \frac{-n_{1I} d_I}{d_R}$, $n_R \in [n_{1R}, n_{2R}]$. La parte imaginaria será $y = \frac{n_{1I}}{d_R}$. Nótese que la variación de $\lambda \in [0, 1]$ está incluida en $n_R \in [n_{1R}, n_{2R}]$.

Cuando $n_{1R} = n_{2R}$ ($n_1 n_2$ paralelo al eje imaginario), si $x = 0$ se verifica la relación $n_I = \frac{-n_{1R} d_R}{d_I}$, $n_I \in [n_{1I}, n_{2I}]$. La parte imaginaria será $y = -\frac{n_{1R}}{d_I}$.

Sea S_1 un segmento de la frontera, con denominador d_1 y con numerador definido por

los vértices n_1 y n_2 , de modo que S_1 corta al eje en el punto $(0, y_1)$. Sea S_2 otro segmento de la frontera, con denominador d_2 y con numerador definido por los vértices n_3 y n_4 , de modo que S_2 corta al eje en el punto $(0, y_2)$. Si S_1 se corta a S_2 en $x = 0$ el punto de intersección es $(0, y_c)$, donde y_c puede ser:

1. Si $n_{1I} = n_{2I}$ y $n_{3I} = n_{4I}$ entonces $y_c = \frac{n_{1I}}{d_{1R}} = \frac{n_{3I}}{d_{2R}}$, ya que la intersección S_1 con el eje es $\left(0, y_1 = \frac{n_{1I}}{d_{1R}}\right)$ y la intersección de S_2 con el eje es $\left(0, y_2 = \frac{n_{3I}}{d_{2R}}\right)$.
2. Si $n_{1R} = n_{2R}$ y $n_{3R} = n_{4R}$ entonces $y_c = -\frac{n_{1R}}{d_{1I}} = -\frac{n_{3R}}{d_{2I}}$, ya que $y_1 = -\frac{n_{1R}}{d_{1I}}$ y $y_2 = -\frac{n_{3R}}{d_{2I}}$.
3. Si $n_{1I} = n_{2I}$ y $n_{3R} = n_{4R}$ entonces $y_c = \frac{n_{1I}}{d_{1R}} = -\frac{n_{3R}}{d_{2I}}$, ya que $y_1 = \frac{n_{1I}}{d_{1R}}$ y $y_2 = -\frac{n_{3R}}{d_{2I}}$.

Para el primer caso, la intersección en $x = 0$ no es posible, porque $y_1 = \frac{n_{1I}}{d_{1R}}$ es máximo (mínimo) cuando n_{1I} es máximo (mínimo) y d_{1R} es mínimo (máximo), e $y_2 = \frac{n_{3I}}{d_{2R}}$ es máximo (mínimo) cuando n_{3I} es máximo (mínimo) y d_{2R} es mínimo (máximo). Esto no es posible, por que si n_{1I} es máximo (mínimo) entonces n_{3I} debe ser mínimo (máximo). Por tanto y_1 y y_2 no se cortan.

El razonamiento es similar para el segundo caso.

Para el tercer caso, si n_{1I} es máximo (mínimo) y d_{1R} es mínimo (máximo), y si $-n_{3R}$ es máximo (mínimo) y d_{2I} es mínimo (máximo), entonces y_c es máximo (mínimo) y la intersección pertenece a la frontera.

La demostración es similar para intersecciones entre dos arcos y entre arco y segmento.

En segundo lugar, estudiaremos las intersecciones de los elementos del intervalo de plantas para puntos en los que $x \neq 0$.

Cuando

$$x \neq 0, x = Re(P) = \frac{n_R d_R + n_I d_I}{d_R^2 + d_I^2}, d_R^2 + d_I^2 = \frac{n_R d_R + n_I d_I}{x}$$

Por tanto, la parte imaginaria expresada en función de la parte real es

$$y = Im(P) = \frac{n_I d_R - n_R d_I}{n_R d_R + n_I d_I} x.$$

Para un valor $x = x_c \neq 0$ la variación de la familia y con respecto a los parámetros es

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial d_R} &= \frac{d_I (n_I^2 + n_R^2)}{(n_R d_R + n_I d_I)^2} x_c, & \frac{\partial y}{\partial d_I} &= \frac{-d_R (n_I^2 + n_R^2)}{(n_R d_R + n_I d_I)^2} x_c, \\ \frac{\partial y}{\partial n_R} &= \frac{-n_I (d_R^2 + d_I^2)}{(n_R d_R + n_I d_I)^2} x_c, & \frac{\partial y}{\partial n_I} &= \frac{n_R (d_R^2 + d_I^2)}{(n_R d_R + n_I d_I)^2} x_c. \end{aligned}$$

Atendiendo solamente al signo, se considerarán las expresiones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial d_R} &= d_I x_c, & \frac{\partial y}{\partial d_I} &= -d_R x_c, \\ \frac{\partial y}{\partial n_R} &= -n_I x_c, & \frac{\partial y}{\partial n_I} &= n_R x_c. \end{aligned}$$

Existirá una intersección entre dos elementos de la frontera, P_1 y P_2 , en $x \neq 0$ cuando $Re(P_1) = Re(P_2)$ y $Im(P_1) = Im(P_2)$.

Intersección entre dos segmentos. Sea $S_1(d_1)$ un segmento de la frontera, girado por d_1 , y sea $S_2(d_2)$ un segmento de la frontera girado por d_2 . Sean $y_{1c}(d_1)$ y $y_{2c}(d_2)$ sus partes imaginarias en el punto de intersección $y_1(d_1) = y_2(d_2)$. Analizaremos los valores de las partes imaginarias de la familia de plantas cuando el denominador varia desde d_1 hasta d_2 . El segmento $d_1 d_2$ puede ser paralelo al eje real o al imaginario.

1. Caso en el que el denominador de la frontera verifica $d_{1I} = d_{2I} = d_I$, $d_R \in [d_{1R}, d_{2R}]$.

- a) $S_1(d_1)$ tiene su segmento del numerador, de vértices n_1 y n_2 , paralelo al eje real, $n_I = n_{1I} = n_{2I}$, y $S_2(d_2)$ tiene su segmento del numerador, de vértices n_2 y n_3 , perpendicular al eje real $n_R = n_{2R} = n_{3R}$. La parte imaginaria en el punto de corte

$$y = Im(P) = \frac{n_I d_R - n_R d_I}{n_R d_R + n_I d_I} x_c$$

viene dada por

$$y_1(n_R, d_R) \equiv \frac{n_{1I} d_R - n_R d_{1I}}{n_R d_R + n_{1I} d_{1I}} x_c, \quad y_2(n_I, d_R) \equiv \frac{n_I d_R - n_{2R} d_{1I}}{n_{2R} d_R + n_I d_{1I}} x_c$$

donde $y_1(n_R, d_R)$ indica que la parte imaginaria de $S_1(d_R)$ es una función de dos variables, n_R y d_R . Igualmente, $y_2(n_I, d_R)$ indica que la parte imaginaria de $S_2(d_R)$ es una función de dos variables, n_I y d_R . Por otro

lado, la parte real es $x = \frac{n_R d_R + n_I d_I}{d_R^2 + d_I^2}$. Así, la parte real del segmento $S_1(d_1)$ viene dada por $x_1 = \frac{n_R d_{1R} + n_{1I} d_{1I}}{d_{1R}^2 + d_{1I}^2}$ y, para un x_1 dado, el valor de $n_R[x_1] \equiv n_R = \frac{x_1(d_{1R}^2 + d_{1I}^2) - n_{1I} d_{1I}}{d_{1R}}$ queda definido. De manera similar, la parte real del segmento $S_2(d_2)$ viene dada por $x_2 = \frac{n_{2R} d_{2R} + n_{2I} d_{2I}}{d_{2R}^2 + d_{2I}^2}$ y, para un x_2 dado, el valor de $n_I[x_2] \equiv n_I = \frac{x_2(d_{2R}^2 + d_{2I}^2) - n_{2R} d_{2R}}{d_{2I}}$ queda definido.

Por tanto, en el punto de intersección $x_c = x_1 = x_2$ las partes imaginarias son

$$y_1(d_R) \equiv \frac{n_{1I} d_R - n_R[x_1] d_{1I}}{n_R[x_1] d_R + n_{1I} d_{1I}} x_c, \quad y_2(d_R) \equiv \frac{n_{2I} d_R - n_{2R} d_{2I}}{n_{2R} d_R + n_{2I} d_{2I}} x_c$$

y la intersección es $y_1(d_1) = y_2(d_2)$. La figura 3.5 muestra este caso.

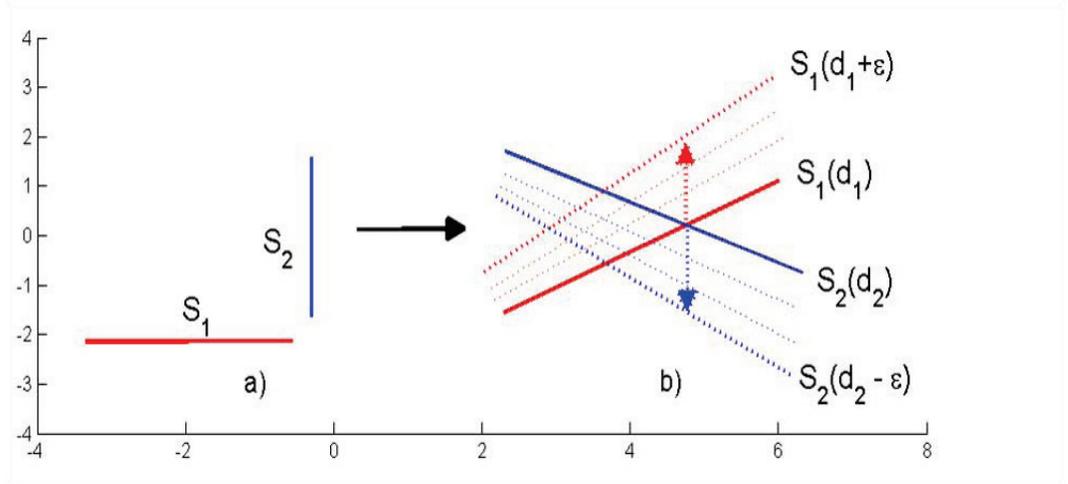


Figura 3.5: (a) Segmentos iniciales. (b) Intersección de los segmentos.

Como se puede observar

$$\text{sign} \left(\frac{\partial y_1}{\partial d_R} \right) = \text{sign} \left(\frac{\partial y_2}{\partial d_R} \right) = \text{sign}(d_I x_c),$$

donde $\text{sign}(\bullet)$ es la función signo.

Cuando $d_I x_c > 0$ entonces $\frac{\partial y_1}{\partial d_R} > 0$ y la función $y_1(d_R)$ es creciente con respecto a d_R , luego $y_1(d_R) > y_1(d_{1R})$ para $d_R > d_{1R}$. Además, $\frac{\partial y_2}{\partial d_R} > 0$ y la función $y_2(d_R)$ es creciente con respecto a d_R , luego $y_2(d_R) < y_2(d_{2R})$

para $d_R < d_{2R}$. Por tanto, la intersección $y_1(d_1) = y_2(d_2)$ está acotada por $y_1(d_R) > y_1(d_1) = y_2(d_2) > y_2(d_R)$. Entonces el punto de intersección $(x_c, y_1(d_1) = y_2(d_2))$ no pertenece a la frontera.

Cuando $d_I x_c < 0$, $\frac{\partial y_1}{\partial d_R} < 0$ y $\frac{\partial y_2}{\partial d_R} < 0$ y $y_1(d_R) < y_1(d_1) = y_2(d_2) < y_2(d_R)$, siguiendo el mismo razonamiento, el punto de intersección $(x_c, y_1(d_1) = y_2(d_2))$ no pertenece a la frontera.

- b) $S_1(d_1)$ tiene su numerador, de vértices n_1 y n_2 , paralelo al eje real, $n_I = n_{1I} = n_{2I}$, y $S_2(d_2)$ tiene su numerador, de vértices n_3 y n_4 paralelo al eje real, $n_I = n_{3I} = n_{4I}$. La parte imaginaria en el punto de corte viene dada por

$$y_1(n_R, d_R) = \frac{n_{1I}d_R - n_R d_{1I}}{n_R d_R + n_{1I} d_{1I}} x_c, \quad y_2(n_R, d_R) = \frac{n_{3I}d_R - n_R d_{1I}}{n_R d_R + n_{3I} d_{1I}} x_c$$

Así, la parte real del segmento $S_1(d_1)$ viene dada por $x_1 = \frac{n_R d_{1R} + n_{1I} d_{1I}}{d_{1R}^2 + d_{1I}^2}$ y para un valor dado x_1 , el valor de $n_R \equiv n_R[x_1]$ está determinado.

Igualmente, la parte real del segmento $S_2(d_2)$ viene dada por $x_2 = \frac{n_R d_{2R} + n_{3I} d_{1I}}{d_{2R}^2 + d_{1I}^2}$ y, para un valor dado x_2 , el valor de $n_R \equiv n_R[x_2]$ está determinado. En la intersección $x_c = x_1 = x_2$ las partes imaginarias son

$$y_1(d_R) = \frac{n_{1I}d_R - n_R[x_1] d_{1I}}{n_R[x_1] d_{1R} + n_{1I} d_{1I}} x_c, \quad y_2(d_R) = \frac{n_{3I}d_R - n_R[x_2] d_{1I}}{n_R[x_2] d_{1R} + n_{3I} d_{1I}} x_c.$$

En este caso

$$\text{sign} \left(\frac{\partial y_1}{\partial d_R} \right) = \text{sign} \left(\frac{\partial y_2}{\partial d_R} \right) = \text{sign}(d_i x_c)$$

y se obtienen las mismas desigualdades que en el caso a).

- c) $S_1(d_1)$ tiene su numerador, de vértices n_1 y n_2 , perpendicular al eje real, $n_R = n_{1R} = n_{2R}$, y $S_2(d_2)$ tiene su numerador, de vértices n_3 y n_4 , perpendicular al eje real, $n_R = n_{3R} = n_{4R}$. La parte imaginaria en el punto de corte viene dada por

$$y_1(n_I, d_R) = \frac{n_I d_R - n_{2R} d_{1I}}{n_{2R} d_R + n_I d_{1I}} x_c, \quad y_2(n_I, d_R) = \frac{n_I d_R - n_{4R} d_{1I}}{n_{4R} d_R + n_I d_{1I}} x_c.$$

Así, la parte real del segmento $S_1(d_1)$ viene dada por $x_1 = \frac{n_{1R} d_{1R} + n_I d_{1I}}{d_{1R}^2 + d_{1I}^2}$,

y para un valor dado x_1 , el valor de $n_I \equiv n_I[x_1]$ está determinado. Igualmente, la parte real del segmento $S_2(d_2)$ viene dada por $x_2 = \frac{n_{3R}d_{2R} + n_I d_{1I}}{d_{2R}^2 + d_{1I}^2}$ y, para un valor dado x_2 , el valor de $n_I \equiv n_I[x_2]$ está determinado. En la intersección $x_c = x_1 = x_2$ las partes imaginarias son:

$$y_1(d_R) = \frac{n_I[x_1]d_R - n_{2R}d_{1I}}{n_{2R}d_R + n_I[x_1]d_{1I}}x_c, \quad y_2(d_R) = \frac{n_I[x_2]d_R - n_{4R}d_{1I}}{n_{4R}d_R + n_I[x_2]d_{1I}}x_c$$

En este caso

$$\text{sign}\left(\frac{\partial y_1}{\partial d_R}\right) = \text{sign}\left(\frac{\partial y_2}{\partial d_R}\right) = \text{sign}(d_I x_c)$$

y se obtienen las mismas desigualdades que en el caso a).

2. Caso en el que el denominador de la frontera verifica que $d_{1R} = d_{2R} = d_R$, $d_I \in [d_{1I}, d_{2I}]$.

- a) $S_1(d_1)$ tiene su numerador, con vértices n_1 y n_2 , paralelo al eje real, $n_I = n_{1I} = n_{2I}$, y $S_2(d_2)$ tiene su numerador, con vértices n_2 y n_3 , perpendicular al eje real, $n_R = n_{2R} = n_{3R}$. Entonces la parte imaginaria en el punto de corte

$$y = \text{Im}(P) = \frac{n_I d_R - n_R d_I}{n_R d_R + n_I d_I} x_c$$

viene dada por

$$y_1(n_R, d_I) = \frac{n_{1I}d_{1R} - n_R d_I}{n_R d_{1R} + n_{1I}d_I} x_c, \quad y_2(n_I, d_I) = \frac{n_I d_{1R} - n_{2R}d_I}{n_{2R}d_{1R} + n_I d_I} x_c.$$

- b) $S_1(d_1)$ tiene su numerador, con vértices n_1 y n_2 , paralelo al eje real, $n_I = n_{1I} = n_{2I}$, y $S_2(d_2)$ tiene su numerador, con vértices n_2 y n_3 , paralelo al eje real, $n_I = n_{2I} = n_{3I}$. Entonces la parte imaginaria en el punto de corte viene dada por:

$$y_1(n_R, d_I) = \frac{n_{1I}d_{1R} - n_R d_I}{n_R d_{1R} + n_{1I}d_I} x_c, \quad y_2(n_R, d_I) = \frac{n_{3I}d_{1R} - n_R d_I}{n_R d_{1R} + n_{3I}d_I} x_c$$

- c) $S_1(d_1)$ tiene su numerador, con vértices n_1 y n_2 , perpendicular al eje real, $n_R = n_{1R} = n_{2R}$, y $S_2(d_2)$ tiene su numerador, con vértices n_2 y n_3 , perpendicular al eje real, $n_R = n_{2R} = n_{3R}$. Entonces la parte imaginaria

en el punto de corte viene dada por:

$$y_1(n_I, d_I) = \frac{n_I d_{1R} - n_{2R} d_I}{n_{2R} d_{1R} + n_I d_I} x_c, \quad y_2(n_I, d_I) = \frac{n_I d_{1R} - n_{4R} d_I}{n_{4R} d_{1R} + n_I d_I} x_c$$

De nuevo, estos tres casos tiene diferentes valores de su parte imaginaria, pero la variación de la parte imaginaria con respecto a d_I es la misma, porque en x_c

$$\text{sign} \left(\frac{\partial y_1}{\partial d_I} \right) = \text{sign} \left(\frac{\partial y_2}{\partial d_I} \right) = \text{sign}(-d_R x_c).$$

Cuando $-d_R x_c > 0$ entonces $\frac{\partial y_1}{\partial d_I} > 0$ y la función $y_1(d_I)$ es creciente con respecto a d_I luego $y_1(d_I) > y_1(d_{1I})$ para todo $d_I > d_{1I}$. Además, $\frac{\partial y_2}{\partial d_I} > 0$ y la función $y_2(d_I)$ es creciente con respecto a d_I , luego $y_2(d_I) < y_2(d_{2I})$ para todo $d_I < d_{2I}$. Por tanto, la intersección $y_1(d_1) = y_2(d_2)$ está acotada por $y_1(d_I) > y_1(d_1) = y_2(d_2) > y_2(d_I)$. Entonces, el punto de intersección $(x_c, y_1(d_1) = y_2(d_2))$ no pertenece a la frontera.

Cuando $-d_R x_c < 0$, $\frac{\partial y_1}{\partial d_I} < 0$, y $\frac{\partial y_2}{\partial d_I} < 0$, y $y_1(d_I) < y_1(d_1) = y_2(d_2) < y_2(d_I)$, siguiendo el mismo razonamiento, el punto de intersección $(x_c, y_1(d_1) = y_2(d_2))$ no pertenece a la frontera.

Intersección entre dos arcos, y entre segmento y arco. De modo similar, se estudian estos casos.

La demostración para el caso $y = y_c \neq 0$ es análoga. ■

Considerando los resultados anteriores, el siguiente teorema caracteriza la geometría de la parte de la frontera del conjunto de valores, que se encuentra en un mismo cuadrante.

Teorema 3.4

La frontera del conjunto de valores que se encuentra en un mismo cuadrante, está formada por una sucesión segmento-arco-segmento-arco-..., es decir, no existen dos arcos o dos segmentos consecutivos en esa parte de la frontera.

Demostración:

El lema 3.4 asegura que el conjunto de valores está formado por segmentos pertenecientes a rectángulos girados del numerador y a arcos entre ellos. Además, si el conjunto de valores de un intervalo de plantas está contenido en un único cuadrante, el teorema 3.3 garantiza que no existen intersecciones entre los arcos y los segmentos de la frontera (salvo vértices).

Sea v_1 un vértice de la frontera. Por construcción de la frontera del conjunto de valores, v_1 es el vértice de dos arcos perpendiculares (A_1 y A_2) y de dos segmentos perpendiculares (S_1 y S_2) pertenecientes al conjunto de posibles elementos de la frontera.

Considérense los ángulos que estos arcos (sus rectas tangentes) y estos segmentos forman con el eje u . Sea α el ángulo del segmento S_1 . Como las transformaciones que originan los arcos y los rectángulos girados son conformes, se conservan los ángulos. Por tanto, el ángulo del segmento S_2 es $90^\circ + \alpha$. Análogamente, si β el ángulo entre el arco A_1 , el ángulo del arco A_2 será $90^\circ + \beta$. La figura 3.6 ilustra esta situación.

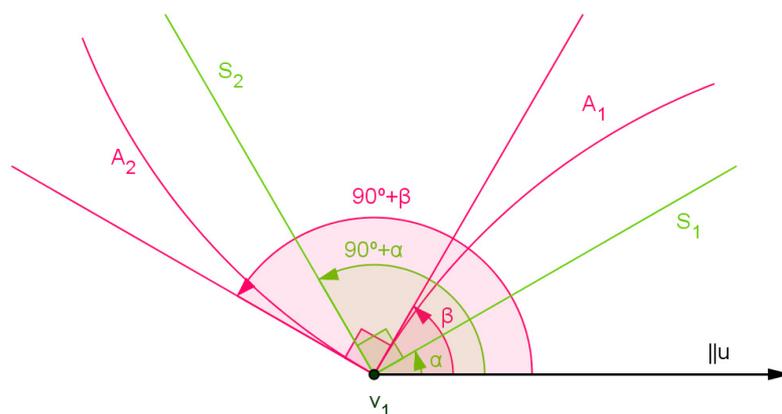


Figura 3.6: Ángulos para los elementos de un conjunto de valores situados en un cuadrante.

Si $\alpha < \beta$ entonces $90^\circ + \alpha < 90^\circ + \beta$, luego el arco A_2 no está entre los segmentos S_1 y S_2 . Si $\beta < \alpha$ la situación es similar. Las configuraciones de la figura 3.7, son, por tanto imposibles.

Supóngase que S_1 es un segmento de la frontera. Si A_1 es un arco de la frontera, el teorema queda demostrado. Si no lo es, el siguiente elemento de la frontera debe ser A_2 , puesto que si fuera S_2 , los arcos A_1 y A_2 serían uno interior y otro exterior a la frontera, lo que contradice la definición de frontera del conjunto de valores, en un mismo cuadrante.

■



Figura 3.7: Situaciones de arco y segmento no posibles en un mismo cuadrante.

Para caracterizar el conjunto de valores de un intervalo de plantas, se define el Conjunto Ordenado de Vértices (SSV, Sort Set of Vertices), como sigue.

Definición 3.3

Sea $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$ un vértice del conjunto de valores, donde n_1 y d_1 pertenecen al conjunto ordenado de vértices del rectángulo de Kharitonov del numerador (SSn) y del denominador (SSd), respectivamente. Sea $n(v_k)$ ($d(v_k)$) el numerador (denominador) asociado al vértice v_k , $n\left(\frac{n_i}{d_j}\right) \equiv n_i$, $d\left(\frac{n_i}{d_j}\right) \equiv d_j$. El *Conjunto Ordenado de Vértices (SSV)* viene dado por $v_{i+1} = \frac{\text{next}(n(v_i))}{d(v_i)}$ y $v_{i+2} = \frac{\text{next}(n(v_i))}{\text{next}(d(v_i))}$ tal que i es par si v_1 y v_2 pertenecen a un segmento del conjunto de valores, e i es impar si v_1 y v_2 pertenecen a un arco del conjunto de valores.

Si v_1 y v_2 pertenecen a un segmento, el *SSV* con 8 vértices es

$$\left\{ v_1 = \frac{n_1}{d_1}, v_2 = \frac{n_2}{d_1}, v_3 = \frac{n_2}{d_2}, v_4 = \frac{n_3}{d_2}, v_5 = \frac{n_3}{d_3}, v_6 = \frac{n_4}{d_3}, v_7 = \frac{n_4}{d_4}, v_8 = \frac{n_1}{d_4} \right\},$$

y si v_1 y v_2 pertenecen a un arco, el *SSV* con 8 vértices es

$$\left\{ v_1 = \frac{n_1}{d_1}, v_2 = \frac{n_1}{d_2}, v_3 = \frac{n_2}{d_2}, v_4 = \frac{n_2}{d_3}, v_5 = \frac{n_3}{d_3}, v_6 = \frac{n_3}{d_4}, v_7 = \frac{n_4}{d_4}, v_8 = \frac{n_4}{d_1} \right\}.$$

En base a esta definición, el siguiente teorema proporciona una caracterización de los vértices de un conjunto de valores, cuando dichos vértices están en el mismo cuadrante.

Teorema 3.5

Los vértices de la frontera de un conjunto de valores de un intervalo de plantas en el mismo cuadrante forman un *Conjunto Ordenado de Vértices*.

Demostración:

Si el conjunto de valores está en un cuadrante, entonces no existen intersecciones con

los ejes del plano complejo. De acuerdo al teorema 3.4, la frontera está formada por una sucesión segmento-arco-segmento-... Teniendo en cuenta el lema 3.4, la dirección del recorrido de los vértices de la frontera, es tal que tanto los polinomios del numerador como los del denominador se recorren en dirección contraria a las agujas del reloj. Por tanto, el teorema está demostrado. ■

La siguiente propiedad, permite establecer una condición suficiente para determinar los valores de los polinomios de Kharitonov.

Corolario 3.1

Dado un conjunto de valores de un intervalo de plantas, para calcular los valores de los polinomios de Kharitonov, es suficiente que 5 vértices estén en el mismo cuadrante.

Demostración:

Directamente utilizando el teorema 3.5 y el hecho de que es suficiente determinar los polinomios n_1 , n_3 , d_1 y d_3 . ■

3.3. Ejemplos.

Ejemplo 3.3

Sea G_p el siguiente intervalo de plantas:

$$G_p(s) = \frac{[4, 4.5]s^2 + [2.5, 3.5]s + [1.5, 2.5]}{[1.25, 1.75]s^3 + [2, 3]s^2 + [1.5, 2]s + [2, 3]} \quad (3.14)$$

La figura 3.8 muestra la frontera del conjunto de valores, para la frecuencia $\omega = 3.15$. Los vértices son los puntos

$$\begin{aligned} v_1 &= 0.2693 - 1.1784j, & v_2 &= 0.3453 - 1.1393j, \\ v_3 &= 0.5171 - 0.8630j, & v_4 &= 0.4269 - 0.7602j, \\ v_5 &= 0.2034 - 0.6272j, & v_6 &= 0.1560 - 0.6544j, \\ v_7 &= 0.0272 - 0.7351j, & v_8 &= 0.0633 - 0.8422j. \end{aligned}$$

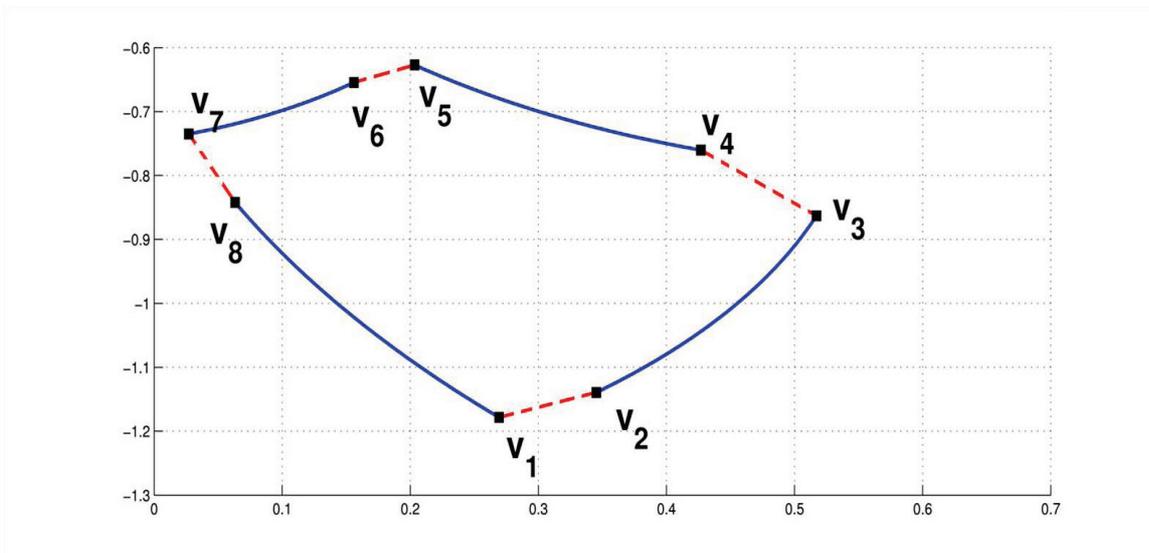


Figura 3.8: Frontera del conjunto de valores para $\omega = 3.15$.

Como se observa, el conjunto de valores está únicamente en el primer cuadrante. Los elementos de la frontera no se cortan entre sí y tampoco cortan a ninguno de los ejes. La frontera del conjunto de valores está formada por una sucesión segmento-arco-segmento-..., y no existen dos arcos o dos segmentos consecutivos en la frontera. Por otro lado, puede verificarse directamente que los vértices $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ son

$$\frac{K_{n4}(j\omega)}{K_{d3}(j\omega)}, \frac{K_{n1}(j\omega)}{K_{d3}(j\omega)}, \frac{K_{n1}(j\omega)}{K_{d4}(j\omega)}, \frac{K_{n2}(j\omega)}{K_{d4}(j\omega)}, \frac{K_{n2}(j\omega)}{K_{d1}(j\omega)}, \frac{K_{n3}(j\omega)}{K_{d1}(j\omega)}, \frac{K_{n3}(j\omega)}{K_{d2}(j\omega)}, \frac{K_{n4}(j\omega)}{K_{d2}(j\omega)}$$

y que determinan un SSV (Teorema 3.5).



Ejemplo 3.4

Sea G_p el intervalo de plantas definido por la ecuación 3.14. La figura 3.9 muestra la frontera del conjunto de valores en la frecuencia $\omega = 1.35$, y sus vértices son los puntos:

$$\begin{aligned} v_1 &= 4.5749 - 9.9887j, & v_2 &= 5.4849 - 8.4254j, \\ v_3 &= 1.7227 - 1.1019j, & v_4 &= 1.2045 - 1.0486j, \\ v_5 &= 0.5283 - 1.2548j, & v_6 &= 0.3621 - 1.5209j, \\ v_7 &= -0.8202 - 2.3322j, & v_8 &= -1.3683 - 2.4873j. \end{aligned}$$

Como se observa, el conjunto de valores está en el cuarto cuadrante, donde tiene 6 vértices, y en el tercer cuadrante, con 2 vértices. Los elementos de la frontera cortan al eje imaginario en los puntos $y_1 = -2.1004j$ y $y_2 = -7.3240j$.

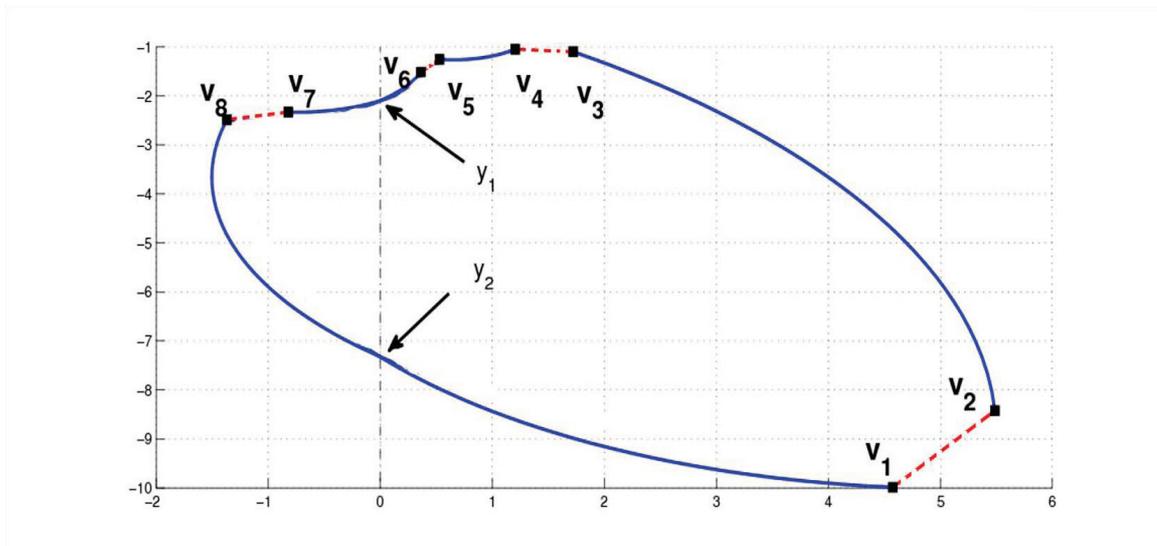


Figura 3.9: Frontera del conjunto de valores para $\omega = 1.35$.

La frontera del conjunto de valores situada en el cuarto cuadrante está formada por una sucesión segmento-arco-segmento-..., no hay dos arcos o dos segmentos consecutivos cuando la frontera está en un único cuadrante. Esto no se verifica cuando los elementos de la frontera cruzan el eje imaginario (Teorema 3.4):

$$v_6 = \frac{K_{n3}(j\omega)}{K_{d1}(j\omega)}, v_7 = \frac{K_{n2}(j\omega)}{K_{d2}(j\omega)}, v_8 = \frac{K_{n3}(j\omega)}{K_{d2}(j\omega)}, v_1 = \frac{K_{n4}(j\omega)}{K_{d3}(j\omega)}.$$

Finalmente, puede verificarse directamente que los vértices que están situados en el cuarto cuadrante son

$$v_1 = \frac{K_{n4}(j\omega)}{K_{d3}(j\omega)}, v_2 = \frac{K_{n1}(j\omega)}{K_{d3}(j\omega)}, v_3 = \frac{K_{n1}(j\omega)}{K_{d4}(j\omega)},$$

$$v_4 = \frac{K_{n2}(j\omega)}{K_{d4}(j\omega)}, v_5 = \frac{K_{n2}(j\omega)}{K_{d1}(j\omega)}, v_6 = \frac{K_{n3}(j\omega)}{K_{d1}(j\omega)}.$$

Así pues, los vértices situados *en el mismo cuadrante* forman un SSV (Teorema 3.5). ◆

Ejemplo 3.5

Sea G_p el intervalo de plantas:

$$G_p(s) = \frac{[2.5, 4]s^2 + [1.3, 2]s + [0.5, 1]}{[0.5, 2]s^3 + [2.5, 3]s^2 + [2, 4]s + [1, 2]}$$

La figura 3.10 muestra la frontera del conjunto de valores en la frecuencia $\omega = 1.2$, con

vértices:

$$v_1 = 0.5755 - 0.6529j, \quad v_2 = 0.5024 - 0.8827j$$

$$v_3 = 0.4423 - 1.7919j, \quad v_4 = 1.6004 - 2.5562j$$

$$v_5 = 0.8063 + 1.0086j, \quad v_6 = 0.5706 + 0.4286j$$

$$v_7 = 0.5571 + 0.1906j, \quad v_8 = 0.6818 + 0.0854j.$$

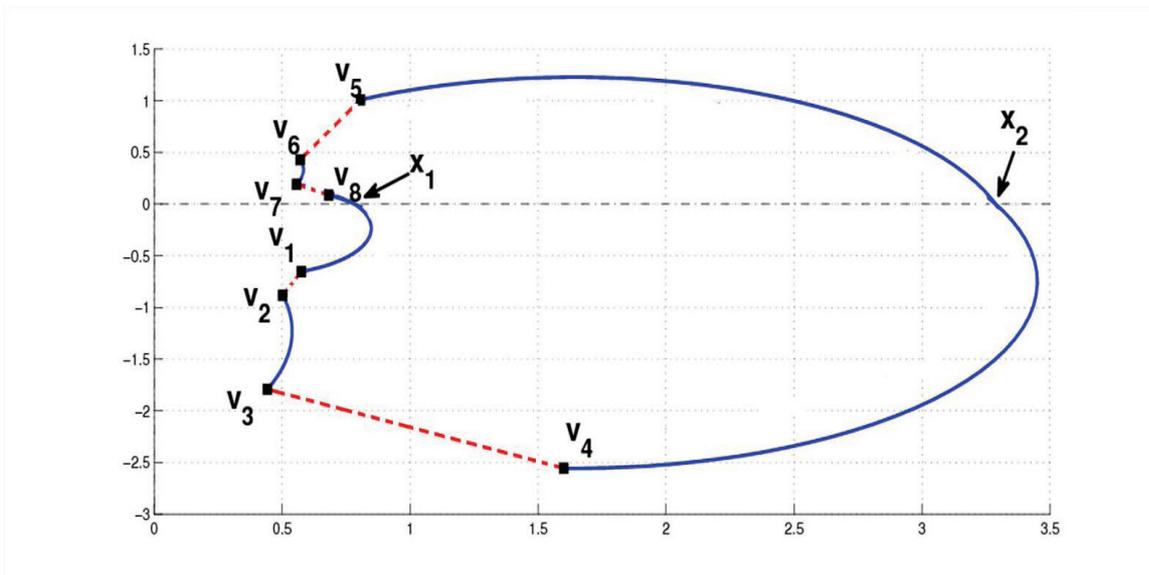


Figura 3.10: Frontera del conjunto de valores a frecuencia $\omega = 1.25$.

El conjunto de valores tiene elementos de su frontera en el primer y cuarto cuadrantes, con 4 vértices en cada uno de ellos. Los elementos de la frontera cortan al eje real en los puntos $x_1 = 0.7831$ y $x_2 = 3.2865$, la frontera del conjunto de valores situada en el primer cuadrante está formada por una sucesión segmento-arco, y no existen dos elementos consecutivos (dos arcos o dos segmentos) en la frontera (teorema 3.3), en el mismo cuadrante. Esto no se verifica cuando los elementos cortan al eje real (teorema 3.4):

$$v_8 = \frac{K_{n3}(j\omega)}{K_{d4}(j\omega)}; \quad v_1 = \frac{K_{n2}(j\omega)}{K_{d1}(j\omega)}; \quad v_4 = \frac{K_{n4}(j\omega)}{K_{d2}(j\omega)}; \quad v_5 = \frac{K_{n1}(j\omega)}{K_{d3}(j\omega)}.$$

Finalmente, puede verificarse de forma inmediata, que los vértices situados en el cuarto cuadrante son:

$$\frac{K_{n2}(j\omega)}{K_{d1}(j\omega)}, \quad \frac{K_{n3}(j\omega)}{K_{d1}(j\omega)}, \quad \frac{K_{n3}(j\omega)}{K_{d2}(j\omega)}, \quad \frac{K_{n4}(j\omega)}{K_{d2}(j\omega)},$$

y los situados en el primer cuadrante

$$\frac{K_{n1}(j\omega)}{K_{d3}(j\omega)}, \frac{K_{n2}(j\omega)}{K_{d3}(j\omega)}, \frac{K_{n2}(j\omega)}{K_{d4}(j\omega)}, \frac{K_{n3}(j\omega)}{K_{d4}(j\omega)}.$$

Y por tanto, los vértices situados *en el mismo cuadrante* determinan un *SSV* (teorema 3.5).



3.4. Valores de los polinomios de Kharitonov. Condiciones necesarias para la identificación.

Se ha demostrado que los vértices de la frontera del conjunto de valores de un intervalo de planta, en un mismo cuadrante, forman un *Conjunto Ordenado de Vértices (SSV)*. Dichos vértices pueden asignarse mediante las ecuaciones

$$v_i = \frac{n_j}{d_k}, \tag{3.15}$$

donde n_j , $j = 1, 2, 3, 4$ y d_k , $k = 1, 2, 3, 4$ son los polinomios asignados del numerador y del denominador, respectivamente.

Es bien conocido que los valores de los polinomios de Kharitonov pueden obtenerse a partir de las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} K_{n1}(j\omega) &= \text{mín} \{Re(n_1), Re(n_3)\} + j \text{mín} \{Im(n_1), Im(n_3)\} \\ K_{n2}(j\omega) &= \text{máx} \{Re(n_1), Re(n_3)\} + j \text{mín} \{Im(n_1), Im(n_3)\} \\ K_{n3}(j\omega) &= \text{máx} \{Re(n_1), Re(n_3)\} + j \text{máx} \{Im(n_1), Im(n_3)\} \\ K_{n4}(j\omega) &= \text{mín} \{Re(n_1), Re(n_3)\} + j \text{máx} \{Im(n_1), Im(n_3)\} \\ K_{d1}(j\omega) &= \text{mín} \{Re(d_1), Re(d_3)\} + j \text{mín} \{Im(d_1), Im(d_3)\} \\ K_{d2}(j\omega) &= \text{máx} \{Re(d_1), Re(d_3)\} + j \text{mín} \{Im(d_1), Im(d_3)\} \\ K_{d3}(j\omega) &= \text{máx} \{Re(d_1), Re(d_3)\} + j \text{máx} \{Im(d_1), Im(d_3)\} \\ K_{d4}(j\omega) &= \text{mín} \{Re(d_1), Re(d_3)\} + j \text{máx} \{Im(d_1), Im(d_3)\} \end{aligned} \tag{3.16}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones 3.16 es suficiente determinar los polinomios asignados n_1 , n_3 , d_1 y d_3 para calcular los valores de los polinomios de Kharitonov.

Para calcular los polinomios asignados, es necesario resolver el sistema de ecuaciones 3.15. En él, cada ecuación tiene dos incógnitas, y no hay dos ecuaciones con las mismas incógnitas, luego debe determinarse el valor de un polinomio asignado. Por ejemplo, supongamos que son conocidos los valores de los vértices v_i del siguiente conjunto SSV

$$\left\{ v_1 = \frac{n_1}{d_1}, v_2 = \frac{n_2}{d_1}, v_3 = \frac{n_2}{d_2}, v_4 = \frac{n_3}{d_2}, v_5 = \frac{n_3}{d_3}, v_6 = \frac{n_4}{d_3}, v_7 = \frac{n_4}{d_4}, v_8 = \frac{n_1}{d_4} \right\} \quad (3.17)$$

Entonces, si un polinomio asignado, por ejemplo n_1 , está determinado, todos los demás polinomios asignados de $SSn = \{n_1, n_2, n_3, n_4\}$ y de $SSd = \{d_1, d_2, d_3, d_4\}$ pueden obtenerse directamente. De hecho, existen infinitas soluciones del sistema formado por las ecuaciones 3.17, ya que para cualquier valor de $n_1 \in \mathbb{C}$ puede calcularse un conjunto SSV diferente. Sin embargo *solamente es válida una única solución, aquella en la que los valores de los polinomios asignados calculados $SSn = \{n_1, n_2, n_3, n_4\}$ y $SSd = \{d_1, d_2, d_3, d_4\}$ forman un rectángulo en el plano complejo, de lados paralelos a los ejes.*

Los siguientes resultados muestran cómo determinar un polinomio asignado para que esta condición se satisfaga.

Teorema 3.6

Sea $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$ un vértice de la frontera, y sea $v_{1\lambda} = \frac{n_{1\lambda}}{d_1}$ un punto cualquiera del segmento de la frontera con vértice v_1 , $n_{1\lambda} = \lambda n_1 + (1 - \lambda) n_4$, $\lambda \in [0, 1]$. Entonces el argumento de n_1 es $\varphi_1 = \frac{1}{2} \arg(\beta) + k \frac{\pi}{2}$, con $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, donde $\beta = \frac{\overline{(z_2 - 1)}}{(z_2 - 1)}$, y $z_2 = \frac{v_{1\lambda}}{v_1}$.

Demostración:

Sea $n_{1\lambda}$ un punto del segmento de vértices n_1 y n_4 . El segmento de vértices $n_{1\lambda}$ y n_1 , puede ser paralelo al eje real del plano complejo, o perpendicular a dicho eje.

Si el segmento $n_{1\lambda}n_1$ es paralelo al eje real, el argumento de $n_{1\lambda} - n_1$ es 0 o π , luego $Im(n_{1\lambda} - n_1) = 0$. Sustituyendo $n_{1\lambda} = z_2 n_1$ resulta que $Im(z_2 n_1 - n_1) = Im((z_2 - 1)n_1) = 0$.

Como $Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2j} \forall z \in \mathbb{C}$, entonces

$$Im((z_2 - 1)n_1) = \frac{(z_2 - 1)n_1 - \overline{(z_2 - 1)n_1}}{2j} = 0,$$

y despejando $\frac{n_1}{\bar{n}_1} = \frac{\overline{(z_2 - 1)}}{(z_2 - 1)} \equiv \beta$.

Expresando n_1 en su forma exponencial $\rho_1 e^{j\varphi_1}$, resulta $\frac{n_1}{\bar{n}_1} = e^{2j\varphi_1}$, luego $2\varphi_1 = \arg(\beta) + 2k\pi$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Por tanto el argumento del polinomio asociado n_1 es

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \arg(\beta) + k\pi = \frac{1}{2} \arg\left(\frac{\overline{(z_2 - 1)}}{(z_2 - 1)}\right) + k\pi$$

Si el segmento $n_1 \lambda n_1$ es perpendicular al eje real, el argumento de $n_1 \lambda - n_1$ es $\frac{\pi}{2}$ o $\frac{3\pi}{2}$, luego $Re(n_1 \lambda - n_1) = 0$. Sustituyendo $n_1 \lambda = z_2 n_1$ resulta que $Re(z_2 n_1 - n_1) = Re((z_2 - 1)n_1) = 0$.

Como $Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $\forall z \in \mathbb{C}$ entonces

$$Re((z_2 - 1)n_1) = \frac{(z_2 - 1)n_1 + \overline{(z_2 - 1)n_1}}{2} = 0;$$

y despejando $\frac{n_1}{\bar{n}_1} = -\frac{\overline{(z_2 - 1)}}{(z_2 - 1)} = -\beta$.

Expresando n_1 en su forma exponencial $\rho_1 e^{j\varphi_1}$, resulta $\frac{n_1}{\bar{n}_1} = e^{2j\varphi_1}$, luego $e^{2j\varphi_1} = -\beta$ y $2\varphi_1 = \arg(-\beta) + 2k\pi = \arg(\beta) + 2k\pi + \pi$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Por tanto el argumento del polinomio asociado n_1 es

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \arg(\beta) + k\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \arg\left(\frac{\overline{(z_2 - 1)}}{(z_2 - 1)}\right) + k\pi + \frac{\pi}{2}.$$

■

El teorema anterior calcula el valor del argumento de uno de los polinomios asignados. Nótese que cualquier valor real del módulo de n_1 es válido para determinar el valor del polinomio, ya que al multiplicar n_1 por un número real ρ , la solución del sistema de ecuaciones $v_i = \frac{n_j}{d_k}$ será tal, que todos los polinomios asignados estarán multiplicados por ρ , *obteniéndose el mismo conjunto de valores.*

Como el valor del módulo de n_1 , ρ_1 es indiferente, para determinar los polinomios asignados para un *único* conjunto de valores, el polinomio n_1 se puede normalizar

(dividiendo por su módulo), quedando de la forma $n_1 = \cos(\varphi_1) + j \sin(\varphi_1)$. La normalización es tal que $|n_1| = 1$.

Las condiciones bajo las que se ha determinado el polinomio asignado inicial, garantizan que los restantes vértices asignados calculados forman un rectángulo en el plano complejo. Obsérvese que cualquier otro valor del argumento φ_1 podría determinar el mismo SSV y el mismo conjunto de valores, pero el conjunto de valores del numerador y del denominador no serían rectángulos, sino paralelogramos.

El teorema 3.6 se aplica a un segmento. El siguiente teorema es análogo, pero aplicado a un arco:

Teorema 3.7

Sea $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$ un vértice de la frontera y sea $v_{1\lambda} = \frac{n_1}{d_{1\lambda}}$ un punto cualquiera del arco de la frontera con vértice v_1 , $d_{1\lambda} = \lambda d_1 + (1 - \lambda) d_4$, $\lambda \in [0, 1]$. Entonces el argumento de d_1 es $\varphi_1 = \frac{1}{2} \arg(\beta) + k\frac{\pi}{2}$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, donde $\beta = \frac{(z_2 - 1)}{(z_2 - 1)}$, $z_2 = \frac{v_1}{v_{1\lambda}}$.

Demostración:

Sean $d_{1\lambda}$ un punto del segmento de vértices d_1 y d_4 . El segmento de vértices $d_{1\lambda}$ y d_1 puede ser paralelo al eje real del plano complejo, o perpendicular a dicho eje.

Si el segmento $d_{1\lambda}d_1$ es paralelo al eje real, el argumento de $d_{1\lambda} - d_1$ es 0 o π , luego $Im(d_{1\lambda} - d_1) = 0$. Sustituyendo $d_{1\lambda} = z_2 d_1$ resulta que $Im(z_2 d_1 - d_1) = Im((z_2 - 1)d_1) = 0$.

Como $Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2j} \forall z \in \mathbb{C}$ entonces

$$Im((z_2 - 1)d_1) = \frac{(z_2 - 1)d_1 - \overline{(z_2 - 1)d_1}}{2j} = 0$$

y despejando $\frac{d_1}{d_1} = \frac{\overline{z_2 - 1}}{z_2 - 1} \equiv \beta$.

Expresando d_1 en su forma exponencial $\rho_1 e^{j\varphi_1}$ resulta $\frac{d_1}{d_1} = e^{2j\varphi_1}$ luego $2\varphi_1 = \arg(\beta) + 2k\pi$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Por tanto el argumento del polinomio asociado d_1 viene dado por

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \arg(\beta) + k\pi = \frac{1}{2} \arg\left(\frac{\overline{z_2 - 1}}{z_2 - 1}\right) + k\pi.$$

Si el segmento $d_{1\lambda}d_1$ es perpendicular al eje real, el argumento de $d_{1\lambda} - d_1$ es $\frac{\pi}{2}$ o $\frac{3\pi}{2}$, luego $Re(d_{1\lambda} - d_1) = 0$. Sustituyendo $d_{1\lambda} = z_2d_1$ resulta que $Re(z_2d_1 - d_1) = Re((z_2 - 1)d_1) = 0$.

Como $Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \forall z \in \mathbb{C}$ entonces

$$Re((z_2 - 1)d_1) = \frac{(z_2 - 1)d_1 + \overline{(z_2 - 1)d_1}}{2} = 0$$

y despejando $\frac{d_1}{d_1} = -\frac{\overline{z_2 - 1}}{z_2 - 1} = -\beta$.

Expresando d_1 en su forma exponencial $\rho_1 e^{j\varphi_1}$, resulta $\frac{d_1}{d_1} = e^{2j\varphi_1}$, luego $e^{2j\varphi_1} = -\beta$ y $2\varphi_1 = \arg(-\beta) + 2k\pi = \arg(\beta) + 2k\pi + \pi, k = 0, 1, 2, \dots$

Por tanto el argumento del polinomio asociado d_1 es

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \arg(\beta) + k\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \arg\left(\frac{\overline{(z_2 - 1)}}{(z_2 - 1)}\right) + k\pi + \frac{\pi}{2}.$$

■

Los comentarios sobre la normalización de d_1 son similares a los realizados para n_1 . Cualquier valor del módulo de d_1 es válido, ya que al multiplicar d_1 por un número real ρ la solución del sistema de ecuaciones $v_i = \frac{n_j}{d_k}$ determinará que los valores de los vértices del numerador y del denominador asignados vengán multiplicados por el mismo número real ρ , obteniéndose el mismo conjunto de valores. Por tanto podemos considerar $d_1 = \cos(\varphi_1) + j \sin(\varphi_1)$.

Sean $\varphi_i, i = 2, 3, 4$ y $\phi_j, j = 1, 2, 3, 4$ los argumentos de n_i y de d_j , respectivamente, determinados a partir del argumento $\varphi_1 = \frac{1}{2} \arg(\beta)$ del polinomio asignado n_1 . Nótese que si el argumento de n_1 es $\varphi_1 + \gamma$ entonces el argumento de los demás polinomios asignados n_i y d_j son $\varphi_i + \gamma$ y $\phi_j + \gamma$, respectivamente (ecuación 3.15). Por tanto, los cuatro valores $\varphi_1 = \frac{1}{2} \arg(\beta) + k\frac{\pi}{2}, k = 1, 2, 3$ son válidos como argumento del polinomio asignado inicial n_1 . Para cada uno de ellos se determinan cuatro posibles pares de polinomios del numerador y del denominador asignados, y por tanto, cuatro posibles pares de rectángulos de Kharitonov, a saber $(+\rho N, +\rho D), (-\rho N, -\rho D), (+\rho j N, +\rho j D), (-\rho j N, -\rho j D)$, donde $\rho \in \mathbb{R}^+$.

El razonamiento es similar cuando el argumento es obtenido a partir de un arco y el

polinomio asignado inicial es d_1 .

Concluyendo, para la identificación puede aplicarse el siguiente algoritmo:

Algoritmo: Se parte de un conjunto de valores, con al menos 5 vértices en el mismo cuadrante, y se pretende obtener los polinomios de Kharitonov. Los pasos a seguir son:

1. Seleccionar de la frontera del conjunto de valores, en sentido contrario a las agujas del reloj, un conjunto de 5 vértices consecutivos y situados en el mismo cuadrante: v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 siendo el primer elemento de la frontera un segmento (o un arco).
2. Calcular $z_2 = \frac{v_2}{v_1}$, $z_3 = \frac{v_4}{v_3}$ para el caso de segmento, y $z_{2d} = \frac{v_1}{v_2}$, $z_{3d} = \frac{v_3}{v_4}$ para el de arco.
3. Calcular $\varphi_1 = \frac{1}{2} \arg \left(\frac{\overline{(z_2 - 1)}}{(z_2 - 1)} \right)$, según el teorema 3.6 si el primer elemento de la frontera es un segmento y calcular $\varphi_1 = \frac{1}{2} \arg \left(\frac{\overline{(z_{2d} - 1)}}{(z_{2d} - 1)} \right)$, según el teorema 3.7 si es un arco.
4. Normalizar el polinomio asignado, obteniendo $n_1 = \cos(\varphi_1) + j \sin(\varphi_1)$ para un segmento, o $d_1 = \cos(\varphi_1) + j \sin(\varphi_1)$ para un arco.
5. Calcular $n_2 = z_2 n_1$, $n_3 = z_3 n_2$; $d_1 = \frac{n_1}{v_1}$, $d_2 = \frac{n_2}{v_3}$, $d_3 = \frac{n_3}{v_5}$ (continuidad arco-segmento) (de forma similar se determinan $d_2 = \frac{v_1}{v_2} d_1$, $d_3 = \frac{v_3}{v_4} d_2$, $n_1 = d_1 v_1$, $n_2 = d_2 v_3$, $n_3 = d_3 v_5$ para el caso de un arco).
6. Aplicando las relaciones 3.16, calcular los rectángulos del numerador y del denominador, dados por los valores $N = \{K_{n1}(j\omega), K_{n2}(j\omega), K_{n3}(j\omega), K_{n4}(j\omega)\}$ y $D = \{K_{d1}(j\omega), K_{d2}(j\omega), K_{d3}(j\omega), K_{d4}(j\omega)\}$.
7. Cualquier par de rectángulos de Kharitonov $(+\rho N, +\rho D)$, $(-\rho N, -\rho D)$, $(+\rho j N, +\rho j D)$, $(-\rho j N, -\rho j D)$, $\rho > 0$ es una solución del algoritmo.

Ejemplo 3.6

La tabla 3.1 muestra la información necesaria para el proceso de identificación, obtenida a partir de los elementos de la frontera de 5 conjuntos de valores de un intervalo de plantas. Los vértices son elegidos en sentido antihorario. Si el primer elemento es un segmento, en la fila «*elemento*» aparece "1", y aparece "0" si es un arco. Para cada conjunto de valores, la tabla

3.2 muestra el resultado de aplicar el algoritmo cuando el primer elemento es un segmento (o un arco).

Puede comprobarse de forma directa que los conjuntos de valores de este ejemplo pertenecen al intervalo de plantas definido por:

$$G_p(s) = \frac{[4, 4.5]s^2 + [2.5, 3.5]s + [1.5, 2.5]}{[1.25, 1.75]s^3 + [2, 3.1]s^2 + [1.5, 2]s + [2, 3]}.$$



3.5. Solución del sistema de ecuaciones.

Una vez determinados los posibles rectángulos de Kharitonov, (aplicando el algoritmo de la sección 3.4), queda por resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
 Re(K_{n1}(\omega)) &= p_{e\text{mín}}(j\omega) = a_0^- - a_2^+\omega^2 + a_4^-\omega^4 - \dots \\
 Im(K_{n1}(\omega)) &= p_{o\text{mín}}(j\omega) = a_1^-\omega - a_3^+\omega^3 + a_5^-\omega^5 - \dots \\
 Re(K_{n3}(\omega)) &= p_{e\text{máx}}(j\omega) = a_0^+ - a_2^-\omega^2 + a_4^+\omega^4 - \dots \\
 Im(K_{n3}(\omega)) &= p_{o\text{máx}}(j\omega) = a_1^+\omega - a_3^-\omega^3 + a_5^+\omega^5 - \dots \\
 Re(K_{d1}(\omega)) &= q_{e\text{mín}}(j\omega) = b_0^- - b_2^+\omega^2 + b_4^-\omega^4 - \dots \\
 Im(K_{d1}(\omega)) &= q_{o\text{mín}}(j\omega) = b_1^-\omega - b_3^+\omega^3 + b_5^-\omega^5 - \dots \\
 Re(K_{d3}(\omega)) &= q_{e\text{máx}}(j\omega) = b_0^+ - b_2^-\omega^2 + b_4^+\omega^4 - \dots \\
 Im(K_{d3}(\omega)) &= q_{o\text{máx}}(j\omega) = b_1^+\omega - b_3^-\omega^3 + b_5^+\omega^5 - \dots
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

cuyas incógnitas son los coeficientes de los polinomios $\{p_{e\text{mín}}, p_{e\text{máx}}, p_{o\text{mín}}, p_{o\text{máx}}\}$ y $\{q_{e\text{mín}}, q_{e\text{máx}}, q_{o\text{mín}}, q_{o\text{máx}}\}$, es decir los parámetros de los polinomios numerador y denominador de la familia de funciones de transferencia. Con esto concluye el proceso de identificación para el caso de disponer de al menos 5 vértices de la frontera en un cuadrante, para cada conjunto de valores.

El sistema de ecuaciones 3.18 tiene, para cada conjunto de valores, ocho ecuaciones y ocho valores conocidos $\{p_{e\text{mín}}(j\omega), p_{e\text{máx}}(j\omega), p_{o\text{mín}}(j\omega), p_{o\text{máx}}(j\omega)\}$, $\{q_{e\text{mín}}(j\omega), q_{e\text{máx}}(j\omega), q_{o\text{mín}}(j\omega), q_{o\text{máx}}(j\omega)\}$, obtenidos a partir de los valores de los polinomios de Kharitonov determinados.

<i>frecuencia</i>	$\omega = 0.125$	$\omega = 0.555$	$\omega = 1.35$	$\omega = 1.57$	$\omega = 1.86$
<i>elemento</i>	1	0	1	1	0
v_1	$1.2492 + 0.0017j$	$0.6577 + 0.3347j$	$4.5749 - 9.9887j$	$1.3904 - 4.0704j$	$1.0287 - 2.3213j$
v_2	$1.2572 + 0.0647j$	$1.3551 + 0.1655j$	$5.4849 - 8.4254j$	$1.7938 - 3.6117j$	$1.0825 - 1.0694j$
v_3	$1.2589 + 0.1054j$	$1.6175 + 0.4715j$	$1.7227 - 1.1019j$	$1.3672 - 1.1072j$	$0.8313 - 0.9449j$
v_4	$0.7471 + 0.1537j$	$1.7150 + 0.9835j$	$1.2045 - 1.0486j$	$1.0043 - 0.9980j$	$0.4026 - 0.9238j$
v_5	$0.4888 + 0.1171j$	$0.8390 + 1.4305j$	$0.5283 - 1.2548j$	$0.4710 - 1.0646j$	$0.2960 - 1.0336j$
v_6	$0.4862 + 0.0751j$	$0.2191 + 0.7658j$	$0.3621 - 1.5209j$	$0.3359 - 1.2371j$	$-0.1229 - 1.3954j$
v_7	$0.4870 + 0.0647j$	$0.1695 + 0.5441j$	$-0.8202 - 2.3322j$	$-0.1349 - 1.7250j$	$0.7926 - 2.5354j$
v_8	$0.8241 + 0.0365j$	$0.2336 + 0.4942j$	$-1.3683 - 2.4873j$	$-0.4334 - 1.8554j$	NaN

Tabla 3.1.: Información de la frontera del conjunto de valores.

	$\omega = 0.125$	$\omega = 0.555$	$\omega = 0.135$	$\omega = 1.57$	$\omega = 1.86$
$z_2 = \frac{v_2}{v_1} \left(z_{2d} = \frac{v_1}{v_2} \right)$	$1.0065 + 0.0505j$	$0.5080 + 0.1850j$	$0.9051 + 0.1346j$	$0.9294 + 0.1232j$	$1.5531 - 0.6101j$
$z_3 = \frac{v_4}{v_3} \left(z_{3d} = \frac{v_3}{v_4} \right)$	$0.5994 + 0.0719j$	$0.8284 - 0.2001j$	$0.7725 - 0.1146j$	$0.8006 - 0.0816j$	$1.1891 + 0.3816j$
$\varphi_1 = \frac{1}{2} \arg \left(\frac{(z_{2d} - 1)}{(z_{2d} - 1)} \right)$	277.3058	20.6050	54.8126	60.1929	47.8085
$n_1(d_1) = \cos(\varphi_1) + j \sin(\varphi_1)$	$0.1272 - 0.9919j$	$0.9360 + 0.3519j$	$0.5763 + 0.8173j$	$0.4971 + 0.8677j$	$0.6716 + 0.7409j$
$n_3 = z_3 z_2 n_1$ $(d_3 = z_3 d_2 z_1 d_1)$	$0.1780 - 0.5818j$	$0.4104 + 0.2094j$	$0.4116 + 0.5842j$	$0.3551 + 0.6658j$	$1.4951 + 1.4516j$
$d_1 = n_1/v_1$ ($n_1 = d_1 v_1$)	$0.1007 - 0.7941j$	$0.4978 + 0.5448j$	$-0.0458 + 0.0787j$	$-0.1535 + 0.1746j$	$2.4108 - 0.7968j$
$d_3 = n_3/v_5$ ($n_3 = d_3 v_5$)	$0.0749 - 1.2081j$	$0.0447 + 0.7627j$	$-0.2781 + 0.4451j$	$-0.3996 + 0.5103j$	$1.9430 - 1.1156j$
$K_{n1}(j\omega)$	$0.1272 - 0.9919j$	$0.0447 + 0.5448j$	$0.4116 + 0.5842j$	$0.3551 + 0.6658j$	$1.9430 - 1.1156j$
$K_{n3}(j\omega)$	$0.1780 - 0.5818j$	$0.4978 + 0.7627j$	$0.5763 + 0.8173j$	$0.4971 + 0.8677j$	$2.4108 - 0.7968j$
$K_{d1}(j\omega)$	$0.0749 - 1.2081j$	$0.4104 + 0.2094j$	$-0.2781 + 0.0787j$	$-0.3996 + 0.1746j$	$0.6716 + 0.7409j$
$K_{d3}(j\omega)$	$0.1007 - 0.7941j$	$0.9360 + 0.3519j$	$-0.0458 + 0.4451j$	$-0.1535 + 0.5103j$	$1.4951 + 1.4516j$

Tabla 3.2: Algoritmo. Resultados de su aplicación.

Para cada parámetro de los polinomios del numerador y del denominador existen dos incógnitas, que son el extremo superior y el extremo inferior del intervalo. Además, el algoritmo de identificación proporciona, para cada frecuencia, cuatro soluciones de los valores de los polinomios de Kharitonov, $(\pm\rho N, \pm\rho D)$, $(\pm\rho jN, \pm\rho jD)$ donde $\rho \in \mathbb{R}^+$.

Cuando se relacionen los conjuntos de valores para las diferentes frecuencias utilizando las ecuaciones del sistema 3.18, dado un conjunto de valores, el segundo conjunto de valores ha de ser único. En otras palabras, una vez obtenidos los valores de $\{K_{ni}(j\omega_1)\}_{i=1}^4$ y $\{K_{di}(j\omega_1)\}_{i=1}^4$, los valores que se obtengan de $\{\gamma K_{ni}(j\omega_2)\}_{i=1}^4$ y $\{\gamma K_{di}(j\omega_2)\}_{i=1}^4$ para la siguiente frecuencia, deben ser únicos, y debe haber una única solución. Esta solución será una de las cuatro posibles soluciones obtenidas al aplicar el algoritmo en la segunda frecuencia.

Por ejemplo, sean $\{K_{ni}(j\omega_1)\}_{i=1}^4$ y $\{K_{di}(j\omega_1)\}_{i=1}^4$ la solución $(+\rho N(\omega_1), +\rho D(\omega_1))$ para la frecuencia $\omega = \omega_1$ y supongamos que para un segundo conjunto de valores, la solución correspondiente es $(+\rho jN(\omega_2), +\rho jD(\omega_2))$. Si cualquiera de las otras tres soluciones obtenidas para el segundo conjunto de valores se elige para formar el sistema de ecuaciones, éste no será válido: *la posición del conjunto de valores, para la segunda frecuencia (es decir una de las cuatro soluciones obtenidas) debe considerarse con respecto a la posición elegida del conjunto de valores de la primera frecuencia.*

Así pues, para añadir la posición del conjunto de valores para la segunda frecuencia, el sistema de ecuaciones 3.18 debe reescribirse como sigue

$$\begin{aligned}
f_1(a, \omega_i) &= \alpha_1 p_{e\text{mín}}^{\text{sol } 1}(j\omega_i) + \alpha_2 p_{e\text{mín}}^{\text{sol } 2}(j\omega_i) + \alpha_3 p_{e\text{mín}}^{\text{sol } 3}(j\omega_i) + \alpha_4 p_{e\text{mín}}^{\text{sol } 4}(j\omega_i) \\
f_2(a, \omega_i) &= \alpha_1 p_{o\text{mín}}^{\text{sol } 1}(j\omega_i) + \alpha_2 p_{o\text{mín}}^{\text{sol } 2}(j\omega_i) + \alpha_3 p_{o\text{mín}}^{\text{sol } 3}(j\omega_i) + \alpha_4 p_{o\text{mín}}^{\text{sol } 4}(j\omega_i) \\
f_3(a, \omega_i) &= \alpha_1 p_{e\text{máx}}^{\text{sol } 1}(j\omega_i) + \alpha_2 p_{e\text{máx}}^{\text{sol } 2}(j\omega_i) + \alpha_3 p_{e\text{máx}}^{\text{sol } 3}(j\omega_i) + \alpha_4 p_{e\text{máx}}^{\text{sol } 4}(j\omega_i) \\
f_4(a, \omega_i) &= \alpha_1 p_{o\text{máx}}^{\text{sol } 1}(j\omega_i) + \alpha_2 p_{o\text{máx}}^{\text{sol } 2}(j\omega_i) + \alpha_3 p_{o\text{máx}}^{\text{sol } 3}(j\omega_i) + \alpha_4 p_{o\text{máx}}^{\text{sol } 4}(j\omega_i) \quad (3.19) \\
f_5(b, \omega_i) &= \alpha_1 q_{e\text{mín}}^{\text{sol } 1}(j\omega_i) + \alpha_2 q_{e\text{mín}}^{\text{sol } 2}(j\omega_i) + \alpha_3 q_{e\text{mín}}^{\text{sol } 3}(j\omega_i) + \alpha_4 q_{e\text{mín}}^{\text{sol } 4}(j\omega_i) \\
f_6(b, \omega_i) &= \alpha_1 q_{o\text{mín}}^{\text{sol } 1}(j\omega_i) + \alpha_2 q_{o\text{mín}}^{\text{sol } 2}(j\omega_i) + \alpha_3 q_{o\text{mín}}^{\text{sol } 3}(j\omega_i) + \alpha_4 q_{o\text{mín}}^{\text{sol } 4}(j\omega_i) \\
f_7(b, \omega_i) &= \alpha_1 q_{e\text{máx}}^{\text{sol } 1}(j\omega_i) + \alpha_2 q_{e\text{máx}}^{\text{sol } 2}(j\omega_i) + \alpha_3 q_{e\text{máx}}^{\text{sol } 3}(j\omega_i) + \alpha_4 q_{e\text{máx}}^{\text{sol } 4}(j\omega_i) \\
f_8(b, \omega_i) &= \alpha_1 q_{o\text{máx}}^{\text{sol } 1}(j\omega_i) + \alpha_2 q_{o\text{máx}}^{\text{sol } 2}(j\omega_i) + \alpha_3 q_{o\text{máx}}^{\text{sol } 3}(j\omega_i) + \alpha_4 q_{o\text{máx}}^{\text{sol } 4}(j\omega_i)
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} f_1(a, \omega_i) &= a_0^- - a_2^+ \omega_i^2 + a_4^- \omega_i^4 - \dots, & f_2(a, \omega_i) &= a_1^- \omega_i - a_3^+ \omega_i^3 + a_5^- \omega_i^5 - \dots, \\ f_3(a, \omega_i) &= a_0^+ - a_2^- \omega_i^2 + a_4^+ \omega_i^4 - \dots, & f_4(a, \omega_i) &= a_1^+ \omega_i - a_3^- \omega_i^3 + a_5^+ \omega_i^5 - \dots, \\ f_5(b, \omega_i) &= b_0^- - b_2^+ \omega_i^2 + b_4^- \omega_i^4 - \dots, & f_6(b, \omega_i) &= b_1^- \omega_i - b_3^+ \omega_i^3 + b_5^- \omega_i^5 - \dots, \\ f_7(b, \omega_i) &= b_0^+ - b_2^- \omega_i^2 + b_4^+ \omega_i^4 - \dots, & f_8(b, \omega_i) &= b_1^+ \omega_i - b_3^- \omega_i^3 + b_5^+ \omega_i^5 - \dots \end{aligned}$$

Los α_i , $i = 1, \dots, 4$ son incógnitas, de modo que para cada conjunto de valores tres de ellas deben ser cero, y la no nula indica la posición adecuada y la amplificación de la solución de los rectángulos de Kharitonov del segundo conjunto de valores con respecto al primer conjunto de valores obtenido.

Nótese que las cuatro posibles soluciones que se obtienen al aplicar el algoritmo de identificación están relacionadas entre sí. Sean $\{p_{e \text{ mín}}, p_{o \text{ mín}}, p_{e \text{ máx}}, p_{o \text{ máx}}\}$ y $\{q_{e \text{ mín}}, q_{o \text{ mín}}, q_{e \text{ máx}}, q_{o \text{ máx}}\}$ los rectángulos N y D calculados para un valor del argumento del polinomio asignado inicialmente. Las otras tres soluciones que se obtienen al aplicar el algoritmo, para los otros valores del argumento del polinomio asignado inicial, proporcionan rectángulos de Kharitonov rotados $+90^\circ$, $+180^\circ$ y $+270^\circ$ grados:

Solución 2 (jN, jD):

$$\{-p_{o \text{ máx}}, p_{e \text{ mín}}, -p_{o \text{ mín}}, p_{e \text{ máx}}\}, \{-q_{o \text{ máx}}, q_{e \text{ mín}}, -q_{o \text{ mín}}, q_{e \text{ máx}}\}$$

Solución 3 ($-N, -D$):

$$\{-p_{e \text{ máx}}, -p_{o \text{ máx}}, -p_{e \text{ mín}}, -p_{o \text{ mín}}\}, \{-q_{e \text{ máx}}, -q_{o \text{ máx}}, -q_{e \text{ mín}}, -q_{o \text{ mín}}\}$$

Solución 4 ($-jN, -jD$):

$$\{p_{o \text{ mín}}, -p_{e \text{ máx}}, p_{o \text{ máx}}, -p_{e \text{ mín}}\}, \{q_{o \text{ mín}}, -q_{e \text{ máx}}, q_{o \text{ máx}}, -q_{e \text{ mín}}\}$$

En conclusión, para identificar el intervalo de plantas, es suficiente calcular la solución $\{p_{e \text{ mín}}, p_{o \text{ mín}}, p_{e \text{ máx}}, p_{o \text{ máx}}\}$, y $\{q_{e \text{ mín}}, q_{o \text{ mín}}, q_{e \text{ máx}}, q_{o \text{ máx}}\}$ obteniendo los rectángulos N y D para el primer conjunto de valores (aplicando el algoritmo, y utilizando uno de los valores del argumento del polinomio asignado inicial) y posteriormente resolver el sistema de ecuaciones para cada una de las cuatro posibles soluciones (*sol* i , $i = 1, 2, 3, 4$)

del primer conjunto de valores. Para cada una de las cuatro soluciones, el sistema de ecuaciones final es el siguiente.

Para el primer conjunto de valores ($\omega = \omega_1$) del sistema las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} f_1(a, \omega_1) &= p_{e\text{mín}}^{\text{sol } i}(j\omega_1), & f_2(a, \omega_1) &= p_{e\text{máx}}^{\text{sol } i}(j\omega_1), \\ f_3(a, \omega_1) &= p_{o\text{mín}}^{\text{sol } i}(j\omega_1), & f_4(a, \omega_1) &= p_{o\text{máx}}^{\text{sol } i}(j\omega_1), \\ f_5(b, \omega_1) &= q_{e\text{mín}}^{\text{sol } i}(j\omega_1), & f_6(b, \omega_1) &= q_{e\text{máx}}^{\text{sol } i}(j\omega_1), \\ f_7(b, \omega_1) &= q_{o\text{mín}}^{\text{sol } i}(j\omega_1), & f_8(b, \omega_1) &= q_{o\text{máx}}^{\text{sol } i}(j\omega_1), \end{aligned}$$

y para el resto de conjunto de valores ($\omega = \omega_i, i \neq 1$)

$$\begin{aligned} f_1(a, \omega_i) - \alpha_1(\omega_i)p_{e\text{mín}}(j\omega_i) + \alpha_2(\omega_i)p_{o\text{máx}}(j\omega_i) + \alpha_3(\omega_i)p_{e\text{máx}}(j\omega_i) - \alpha_4(\omega_i)p_{o\text{mín}}(j\omega_i) &= 0 \\ f_2(a, \omega_i) - \alpha_1(\omega_i)p_{o\text{mín}}(j\omega_i) - \alpha_2(\omega_i)p_{e\text{mín}}(j\omega_i) + \alpha_3(\omega_i)p_{o\text{máx}}(j\omega_i) + \alpha_4(\omega_i)p_{e\text{máx}}(j\omega_i) &= 0 \\ f_3(a, \omega_i) - \alpha_1(\omega_i)p_{e\text{máx}}(j\omega_i) + \alpha_2(\omega_i)p_{o\text{mín}}(j\omega_i) + \alpha_3(\omega_i)p_{e\text{mín}}(j\omega_i) - \alpha_4(\omega_i)p_{o\text{máx}}(j\omega_i) &= 0 \\ f_4(a, \omega_i) - \alpha_1(\omega_i)p_{o\text{máx}}(j\omega_i) - \alpha_2(\omega_i)p_{e\text{máx}}(j\omega_i) + \alpha_3(\omega_i)p_{o\text{mín}}(j\omega_i) + \alpha_4(\omega_i)p_{e\text{mín}}(j\omega_i) &= 0 \\ f_5(b, \omega_i) - \alpha_1(\omega_i)q_{e\text{mín}}(j\omega_i) + \alpha_2(\omega_i)q_{o\text{máx}}(j\omega_i) + \alpha_3(\omega_i)q_{e\text{máx}}(j\omega_i) - \alpha_4(\omega_i)q_{o\text{mín}}(j\omega_i) &= 0 \\ f_6(b, \omega_i) - \alpha_1(\omega_i)q_{o\text{mín}}(j\omega_i) - \alpha_2(\omega_i)q_{e\text{mín}}(j\omega_i) + \alpha_3(\omega_i)q_{o\text{máx}}(j\omega_i) + \alpha_4(\omega_i)q_{e\text{máx}}(j\omega_i) &= 0 \\ f_7(b, \omega_i) - \alpha_1(\omega_i)q_{e\text{máx}}(j\omega_i) + \alpha_2(\omega_i)q_{o\text{mín}}(j\omega_i) + \alpha_3(\omega_i)q_{e\text{mín}}(j\omega_i) - \alpha_4(\omega_i)q_{o\text{máx}}(j\omega_i) &= 0 \\ f_8(b, \omega_i) - \alpha_1(\omega_i)q_{o\text{máx}}(j\omega_i) - \alpha_2(\omega_i)q_{e\text{máx}}(j\omega_i) + \alpha_3(\omega_i)q_{o\text{mín}}(j\omega_i) + \alpha_4(\omega_i)q_{e\text{mín}}(j\omega_i) &= 0 \end{aligned} \tag{3.20}$$

La solución del sistema de ecuaciones debe ser tal que $a_l^+ > a_l^-$, $\forall l = 0, \dots, n$ y $b_k^+ > b_k^-$, $\forall k = 0, \dots, m$. Una vez resueltos los cuatro sistemas de ecuaciones planteados, se obtienen los parámetros del intervalo de plantas.

3.5.1. Grados del polinomio numerador y denominador.

Para cada parámetro del polinomio numerador y del polinomio denominador a identificar, hay dos incógnitas, que son el valor superior y el valor inferior del intervalo. Además están las cuatro incógnitas α_i para cada conjunto de valores excepto el primero, y por último ocho ecuaciones para cada conjunto de valores. Así, la solución del sistema de ecuaciones 3.20 será única cuando $2(n+1) + 2(m+1) + 4(NVS-1) = 8NVS$, es

decir $n + m = 2NVS$, siendo n y m los grados del numerador y del denominador de la familia a identificar, y NVS el número de conjuntos de valores.

Por ejemplo, para un conjunto de valores obtenidos a frecuencia ω_1 , el sistema de ecuaciones 3.20 se reduce a ocho ecuaciones y a un intervalo de plantas de primer orden, con $n = 1$ y $m = 1$ (incógnitas $a_0^-, a_0^+, a_1^-, a_1^+, b_0^-, b_0^+, b_1^-, b_1^+$). Es posible identificar un segundo intervalo de plantas de órdenes $n = 0$ y $m = 2$. Para identificar un intervalo de plantas con órdenes $n = 3$ y $m = 3$ se necesitarían tres conjuntos de valores, y así sucesivamente.

El sistema de ecuaciones 3.20 es un sistema de ecuaciones lineal de la forma $Ax = B$. En el caso de plantear el sistema de ecuaciones con más conjuntos de valores (ecuaciones) que los necesarias (para unos grados del numerador y del denominador establecidos) se obtendría un sistema de ecuaciones sobre determinado (mayor número de ecuaciones que de incógnitas). Como es bien conocido, a partir del teorema de Rouché-Frobenius (véase [Mirsky, 1990]), la solución del sistema proporciona valores de las incógnitas no principales iguales a cero. Por tanto, al ser las soluciones del sistema de ecuaciones los coeficientes de la función de transferencia, si el número de conjuntos de valores utilizado es mayor que el mínimo necesario, los coeficientes obtenidos asociados a las incógnitas no principales serán cero. En otros términos, el intervalo de plantas obtenido posee coeficientes que son cero para los grados superiores de los polinomios.

Por ejemplo, supongamos que se tienen cuatro conjunto de valores, y que se plantea el sistema de ecuaciones 3.20 para los grados $m = n = 4$. Supongamos que en realidad el intervalo de plantas es de primer orden. Cuando el sistema 3.20 se resuelve, los coeficientes de los polinomios de grado 2 y superiores (tanto para el numerador como para el denominador) son iguales a 0. Por tanto, en la práctica es mejor considerar un intervalo de plantas con el mayor n y m posible.

Ejemplo 3.7

Consideremos el conjunto de valores definido por los vértices y frecuencias especificados en la tabla 3.1 del ejemplo 3.6. La tabla 3.2 muestra los cuatro posibles pares de rectángulos de Kharitonov obtenidos al aplicar el algoritmo.

Con cinco conjuntos de valores, para que el sistema tenga solución única debe verificarse que $n + m = 10$. Por tanto, se pueden proponer los valores de $n = m = 5$ para los grados de los polinomios numerador y denominador. El sistema de ecuaciones estará formado por 40

ecuaciones (8 ecuaciones por cada conjunto de valores) y 36 incógnitas (20 parámetros y 16 α_i , 4 por cada conjunto de valores, excepto el primero). El sistema de ecuaciones $Ax = f$ será

$$x = (a_0^- \ a_2^+ \ a_4^- \ a_1^- \ a_3^+ \ b_0^- \ b_2^+ \ b_4^- \ b_1^- \ b_3^+ \ a_0^+ \ a_2^- \ a_4^+ \ a_1^+ \ a_3^- \ b_0^+ \ b_2^- \ b_4^+ \ b_1^+ \ b_3^- \\ \alpha_1(\omega_2) \ \alpha_2(\omega_2) \ \alpha_3(\omega_2) \ \alpha_4(\omega_2) \ \alpha_1(\omega_3) \ \alpha_2(\omega_3) \ \alpha_3(\omega_3) \ \alpha_4(\omega_3) \\ \alpha_1(\omega_4) \ \alpha_2(\omega_4) \ \alpha_3(\omega_4) \ \alpha_4(\omega_4) \ \alpha_1(\omega_5) \ \alpha_2(\omega_5) \ \alpha_3(\omega_5) \ \alpha_4(\omega_5))^t$$

$$A(1, 1 : 3) = A(3, 11 : 13) = A(5, 6 : 8) = A(7, 16 : 18) = (1 \ -0.0156 \ 0.0002)$$

$$A(2, 4 : 5) = A(4, 14 : 14) = A(6, 9 : 10) = A(8, 19 : 20) = (0.125 \ -0.002)$$

$$A(9, 1 : 3) = A(11, 11 : 13) = A(13, 6 : 8) = A(15, 16; 18) = (1 \ -0.308 \ 0.0949)$$

$$A(10, 4 : 5) = A(12, 14 : 15) = A(14, 9 : 10) = A(16, 19 : 20) = (0.555 \ -0.171)$$

$$A(17, 1 : 3) = A(19, 11 : 13) = A(21, 6 : 8) = A(23, 16 : 18) = (1 \ -1.8225 \ 3.3215)$$

$$A(18, 4 : 5) = A(20, 14 : 15) = A(22, 9 : 10) = A(24, 19 : 20) = (1.35 \ -2.4604)$$

$$A(25, 1 : 3) = A(27, 11 : 13) = A(29, 6 : 8) = A(31, 16 : 18) = (1 \ -2.4649 \ 6.0757)$$

$$A(26, 4 : 5) = A(28, 14 : 15) = A(30, 9 : 10) = A(32, 19 : 20) = (1.57 \ -3.8699)$$

$$A(33, 1 : 3) = A(35, 11 : 13) = A(37, 6 : 8) = A(39, 16 : 18) = (1 \ -3.4596 \ 11.9688)$$

$$A(34, 4 : 5) = A(36, 14 : 15) = A(38, 9 : 10) = A(40, 19 : 20) = (1.86 \ -6.4349)$$

Nota: $A(1, 1 : 3)$ indica los elementos $A(1, 1)$, $A(1, 2)$, $A(1, 3)$ de la matriz A . La misma notación para el resto.

$$A(9 : 16, 21 : 24) = \begin{pmatrix} -0.5448 & -0.0447 & 0.7627 & 0.4978 \\ 0.4978 & -0.5448 & -0.0447 & 0.7627 \\ -0.7627 & -0.4978 & 0.5448 & 0.0447 \\ 0.0447 & -0.7627 & -0.4978 & 0.5448 \\ -0.2094 & -0.4104 & 0.3519 & 0.9360 \\ 0.9360 & -0.2094 & -0.4104 & 0.3519 \\ -0.3519 & -0.9360 & 0.2094 & 0.4104 \\ 0.4104 & -0.3519 & -0.9360 & 0.2094 \end{pmatrix}$$

$$A(17 : 24, 25 : 28) = \begin{pmatrix} -0.5842 & -0.4116 & 0.8173 & 0.5763 \\ 0.5763 & -0.5842 & -0.4116 & 0.8173 \\ -0.8173 & -0.5763 & 0.5842 & 0.4116 \\ 0.4116 & -0.8173 & -0.5763 & 0.5842 \\ -0.0787 & 0.2781 & 0.4451 & -0.0458 \\ -0.0458 & -0.0787 & 0.2781 & 0.4451 \\ -0.4451 & 0.0458 & 0.0787 & -0.2781 \\ -0.2781 & -0.4451 & 0.0458 & 0.0787 \end{pmatrix}$$

$$A(25 : 32, 29 : 32) = \begin{pmatrix} -0.6658 & -0.3551 & 0.8677 & 0.4971 \\ 0.4971 & -0.6658 & -0.3551 & 0.8677 \\ -0.8677 & -0.4971 & 0.6658 & 0.3551 \\ 0.3551 & -0.8677 & -0.4971 & 0.6658 \\ -0.1746 & 0.3996 & 0.5103 & -0.1535 \\ -0.1535 & -0.1746 & 0.3996 & 0.5103 \\ -0.5103 & 0.1535 & 0.1746 & -0.3996 \\ -0.3996 & -0.5103 & 0.1535 & 0.1746 \end{pmatrix}$$

$$A(33 : 40, 33 : 36) = \begin{pmatrix} 1.1156 & -1.9430 & -0.7968 & 2.4108 \\ 2.4108 & 1.1156 & -1.9430 & -0.7968 \\ 0.7968 & -2.4108 & -1.1156 & 1.9430 \\ 1.9430 & 0.7968 & -2.4108 & -1.1156 \\ -0.7409 & -0.6716 & 1.4516 & 1.4951 \\ 1.4951 & -0.7409 & -0.6716 & 1.4516 \\ -1.4516 & -1.4951 & 0.7409 & 0.6716 \\ 0.6716 & -1.4516 & -1.4951 & 0.7409 \end{pmatrix}$$

y en cualquier otro caso $A(i, j) = 0$.

Los cuatro sistemas de ecuaciones a plantear con la matriz A y el vector x proporcionan las siguientes cuatro soluciones:

1. Primer sistema:

$$f(1 : 8) = (0.1272 \ -0.9919 \ 0.1780 \ -0.5818 \ 0.0749 \ -1.2081 \ 0.1007 \ -0.7941)^t$$

$$f(9 : 40) = 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \begin{bmatrix} 4.2581, & 4.1524 \end{bmatrix}, a_1 = \begin{bmatrix} -2.4966, & -1.4979 \end{bmatrix} \times 10^{15}, \\
 a_2 &= \begin{bmatrix} -3.4952, & -2.4966 \end{bmatrix} \times 10^{15}, a_3 = \begin{bmatrix} -4.4938, & -3.9945 \end{bmatrix} \times 10^{15}, \\
 a_4 &= \begin{bmatrix} -6.3401, & -15.0761 \end{bmatrix}, \\
 b_0 &= \begin{bmatrix} 2, & 3.618 \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} -2.9959, & -1.9973 \end{bmatrix} \times 10^{15}, \\
 b_2 &= \begin{bmatrix} -1.9973, & -1.4979 \end{bmatrix} \times 10^{15}, b_3 = \begin{bmatrix} -3.0958, & -1.9973 \end{bmatrix} \times 10^{15}, \\
 b_4 &= \begin{bmatrix} -1.7476, & -1.2483 \end{bmatrix} \times 10^{15}, \\
 \alpha(\omega_2) &= \left\{ 6.8540, 0.3329, 4.5451, 3.3151 \times 10^{14} \right\}, \\
 \alpha(\omega_3) &= \left\{ 2.5960 \times 10^{15}, 46.4570, 14.2399, 9.5432 \right\}, \\
 \alpha(\omega_4) &= \left\{ 4.0703 \times 10^{15}, 48.3760, 42.3226, -3.3486 \right\}, \\
 \alpha(\omega_5) &= \left\{ -30.7368, 2.5456 \times 10^{15}, 1.5256, 51.5442 \right\}.
 \end{aligned}$$

Esta solución debe invalidarse, debido a la singularidad de la solución del sistema de ecuaciones.

2. Segundo sistema:

$$\begin{aligned}
 f(1 : 8) &= (-0.1780 \ 0.5818 \ -0.1272 \ 0.9919 \ -0.1007 \ 0.7941 \ -0.0749 \ 1.2081)^t \\
 f(9 : 40) &= 0.
 \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \begin{bmatrix} 0.7889, & 3.6361 \end{bmatrix}, a_1 = \begin{bmatrix} -1.4423, & -2.4038 \end{bmatrix} \times 10^{15}, \\
 a_2 &= \begin{bmatrix} -2.4038, & -3.3653 \end{bmatrix} \times 10^{15}, a_3 = \begin{bmatrix} -3.8461, & -4.3268 \end{bmatrix} \times 10^{15}, \\
 a_4 &= \begin{bmatrix} -14.8356, & 5.3120 \end{bmatrix}, \\
 b_0 &= \begin{bmatrix} 2, & 4.6497 \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} -1.923, & -2.8845 \end{bmatrix} \times 10^{15}, \\
 b_2 &= \begin{bmatrix} -1.4423, & -1.923 \end{bmatrix} \times 10^{15}, b_3 = \begin{bmatrix} -1.9230, & -2.9807 \end{bmatrix} \times 10^{15}, \\
 b_4 &= \begin{bmatrix} -1.2019, & -1.6827 \end{bmatrix} \times 10^{15}, \\
 \alpha(\omega_2) &= \left\{ 54.8133, -3.9829, 49.4813, 1.7229 \times 10^{15} \right\}, \\
 \alpha(\omega_3) &= \left\{ 1.349 \times 10^{16}, 415.15, 25.8977, 325.985 \right\}, \\
 \alpha(\omega_4) &= \left\{ 2.115 \times 10^{16}, 467.649, 160.43, 352.90 \right\}, \\
 \alpha(\omega_5) &= \left\{ -23.715, 1.323 \times 10^{16}, 53.232, 291.782 \right\}.
 \end{aligned}$$

Esta solución debe invalidarse, debido a la singularidad de la solución del sistema de ecuaciones.

3. Tercer sistema:

$$f(1 : 8) = (0.5818 \ 0.1272 \ 0.9919 \ 0.1780 \ 0.7941 \ 0.0749 \ 1.2081 \ 0.1007)^t$$

$$f(9 : 40) = 0.$$

Entonces

$$a_0 = [1.5, \ 2.5], \ a_1 = [2.5, \ 3.5], \ a_2 = [4, \ 4.5],$$

$$a_3 = [0, \ 0], \ a_4 = [0, \ 0],$$

$$b_0 = [2, \ 3], \ b_1 = [1.5, \ 2], \ b_2 = [2, \ 3.1],$$

$$b_3 = [1.25, \ 1.75], \ b_4 = [0, \ 0],$$

$$\alpha(\omega_2) = \{0, \ 0, \ 0, \ 1.6979\}, \ \alpha(\omega_3) = \{5.4664, \ 0, \ 0, \ 0\},$$

$$\alpha(\omega_4) = \{7.3697, \ 0, \ 0, \ 0\}, \ \alpha(\omega_5) = \{7.3697, \ 0, \ 0, \ 0\}.$$

Esta solución proporciona coeficientes de un intervalo de plantas, y por tanto es una solución válida.

4. Cuarto sistema.

$$f(1 : 8) = (-0.9919 \ -0.1780 \ -0.5818 \ -0.1272 \ -1.2081$$

$$\quad -0.1007 \ -0.7941 \ -0.0749)^t$$

$$f(9 : 40) = 0.$$

Entonces

$$a_0 = [1.6667, \ 1], \ a_1 = [2.3333, \ 1.6667], \ a_2 = [3, \ 2.6667],$$

$$a_3 = [0, \ 0], \ a_4 = [0, \ 0],$$

$$b_0 = [2, \ 1.3333], \ b_1 = [1.3333, \ 1], \ b_2 = [2.0667, \ 1.3333],$$

$$b_3 = [1.1665, \ 0.8333], \ b_4 = [0, \ 0],$$

$$\alpha(\omega_2) = \{0, \ 0, \ 0, \ 1.0188\}, \ \alpha(\omega_3) = \{3.2798, \ 0, \ 0, \ 0\},$$

$$\alpha(\omega_4) = \{4.4218, \ 0, \ 0, \ 0\}, \ \alpha(\omega_5) = \{0, \ 2.3342, \ 0, \ 0\}.$$

Esta solución no es una solución válida, ya que no se verifica la condición impuesta para los valores superior e inferior de los intervalos de los parámetros identificados.



3.5.2. Número de conjuntos de valores a considerar.

En el proceso de identificación propuesto, cada parámetro del numerador y del denominador introduce dos incógnitas, que son el valor inferior y el valor superior del intervalo. La solución del sistema de ecuaciones que se plantea para determinar estas incógnitas es única, cuando se verifica la ecuación $n + m = 2NVS$ siendo n el orden del numerador y m el del denominador de la familia de sistemas, y NVS el número de conjunto de valores utilizados para la identificación.

Cuando la identificación se aplica a familias de sistemas en las que los conjuntos de valores utilizados (solamente con el propósito de verificar el funcionamiento del algoritmo) se generan conociendo exactamente los valores de los elementos de la frontera del conjunto de valores (arcos, segmentos y vértices), el teorema de Rouché-Frobenius garantiza que las incógnitas no principales del sistema de ecuaciones planteado por el algoritmo, son cero. Esto es indicativo de que el número de conjunto de valores utilizado es excesivo para los ordenes del polinomio numerador y denominador, que en este caso particular, son conocidos.

En el caso real de aplicación del algoritmo, se trata con conjuntos de valores procedentes de la experimentación. La expresión matemática de su familia de funciones de transferencia no es conocida, ni tampoco los órdenes del numerador y del denominador. Por ello se trabaja siempre con el mayor número de conjunto de valores posibles, con el objetivo de obtener la mayor información del comportamiento de la familia de sistemas. Por tanto, el orden de los polinomios determinado por la ecuación $n + m = 2NVS$ puede ser muy elevado, aunque la planta a determinar tenga órdenes del numerador y del denominador bajos. Esto es debido, a que los elementos que intervienen en la formación del sistema de ecuaciones se determinan de forma aproximada, y por tanto las incógnitas no principales del sistema planteado no llegan a ser cero.

¿Cómo determinar el número mínimo de conjuntos de valores necesarios? Es decir, ¿cómo plantear el sistema de ecuaciones con una matriz de coeficientes más pequeña, para así calcular los polinomios numerador y denominador con un orden menor? Recuérdese que el número de conjuntos de valores determina el orden de la matriz de coeficientes del sistema lineal que se utiliza para determinar los intervalos de los polinomios, por lo que si se cuantifica la independencia lineal de las columnas de esa matriz de coeficientes, será posible disminuir el orden de la misma. Como consecuencia, disminuirá el número de

conjuntos de valores necesarios para la identificación, y con él, el orden de los polinomios numerador y denominador.

La **descomposición en valores singulares (SVD)** [Leach, 2010] de una matriz A , produce una factorización de la forma $A = U\Sigma V^t$ donde U y V son matrices ortogonales, y Σ es una matriz diagonal, donde sus elementos $s_{ii} = s_i \geq 0$. Además, U y V pueden determinarse de forma que $s_1 \geq s_2 \geq s_3 \geq \dots \geq s_n \geq 0$. Teniendo en cuenta que la SVD tiene esta propiedad, los valores s_i se denominan **valores singulares** de A , y las columnas de U y V se denominan **vectores singulares**.

De todas las propiedades de la descomposición en valores singulares de una matriz, existe una, que determina una medida, denominada **número de condición**, relacionada con la medida de la independencia lineal entre las columnas de la matriz. El número de condición de una matriz A es $cond(A) = \frac{s_{\text{máx}}}{s_{\text{mín}}} \geq 1$, donde $s_{\text{mín}}$ y $s_{\text{máx}}$ son el valor singular mayor y el menor de A . Si A es deficiente de rango, entonces algún $s_i = 0$ o próximo a cero, y por tanto $cond(A) = \infty$.

Utilizando el número de condición, se puede cuantificar la independencia de las columnas de una matriz A . Si $cond(A)$ está próximo a 1, entonces las columnas de A son muy independientes. Cuando el número de condición es muy alto, las columnas de A presentan dependencia muy elevada. Por tanto, el número de valores singulares que es distinto de cero, determina el rango de la matriz A .

Una forma de determinar la proximidad a cero de los valores singulares, consiste en utilizar la norma infinito de la matriz A , y considerar que un valor singular es cero, si es menor que $10^{-t} \|A\|_{\infty}$ con t el número de dígitos significativos.

Si se aplica la **descomposición en valores singulares** a la matriz del sistema de ecuaciones del algoritmo de identificación, mediante su número de condición se puede determinar el grado de dependencia lineal del sistema de ecuaciones, y por tanto disminuir el orden de la matriz en el caso de un número de condición muy alto, permitiendo reducir el orden del numerador y del denominador a determinar.

Capítulo 4

Identificación de sistemas de intervalos. Menos de cinco vértices.

El método de identificación propuesto en el capítulo 3 consiste en la determinación inicial de los valores asignados de los polinomios de Kharitonov del numerador y del denominador a partir de al menos cinco vértices de la frontera del conjunto de valores, situados en un mismo cuadrante. Una vez obtenidos los polinomios asignados, se determinan los valores reales de los polinomios de Kharitonov $\{K_{n1}(j\omega), K_{n2}(j\omega), K_{n3}(j\omega), K_{n4}(j\omega)\}$ y $\{K_{d1}(j\omega), K_{d2}(j\omega), K_{d3}(j\omega), K_{d4}(j\omega)\}$. Por último, se resuelve el sistema de ecuaciones 3.20.

Como se muestra en ese mismo capítulo, los vértices de la frontera del conjunto de valores de un intervalo de plantas, pueden asignarse mediante las ecuaciones $v_i = \frac{n_j}{d_k}$, donde n_j ($j = 1, 2, 3, 4$) y d_k ($k = 1, 2, 3, 4$) son, respectivamente, los polinomios asignados del numerador y del denominador. Cuando los vértices están en el mismo cuadrante, forman un *Conjunto Ordenado de Vértices (SSV)*.

En este capítulo se muestra que dado un conjunto de valores, pueden determinarse todos los polinomios asignados de los vértices de la frontera, si y sólo si existe al menos un arco o un segmento completo de la frontera en un cuadrante. Es decir, si existen dos vértices en un cuadrante. Esta condición no es restrictiva y prácticamente todos los conjuntos de valores la satisfacen.

La sección 4.1 trata el caso del segmento completo y la sección 4.2 el caso del arco completo. Finalmente en la sección 4.3 se construye el algoritmo necesario para

la identificación del intervalo de plantas, consistente en obtener los polinomios asignados y determinar los polinomios de Kharitonov. Posteriormente se resolvería el sistema de ecuaciones 3.20, como se indicó en el capítulo 3, para obtener los parámetros de la planta, y así finalizar el proceso de identificación.

4.1. Determinación de los polinomios asignados a partir de un segmento completo en un cuadrante.

Sea S_1 un segmento completo de la frontera del conjunto de valores, con vértices $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$ y $v_2 = \frac{n_2}{d_1}$. La continuidad segmento-arco en un cuadrante (teorema 3.4) asegura que existirá un arco (o parte de un arco) sucesor a ese segmento en la frontera, de vértices $v_2 = \frac{n_2}{d_1}$ y $v_{2suc} = \frac{n_2}{d_{2\lambda}}$, y existirá un arco predecesor (o parte de un arco) a ese segmento en la frontera, de vértices $v_{1pred} = \frac{n_1}{d_{4\lambda}}$ y $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$, con todos los vértices elegidos en sentido antihorario. Las figuras 4.1 y 4.2 muestran esta situación.

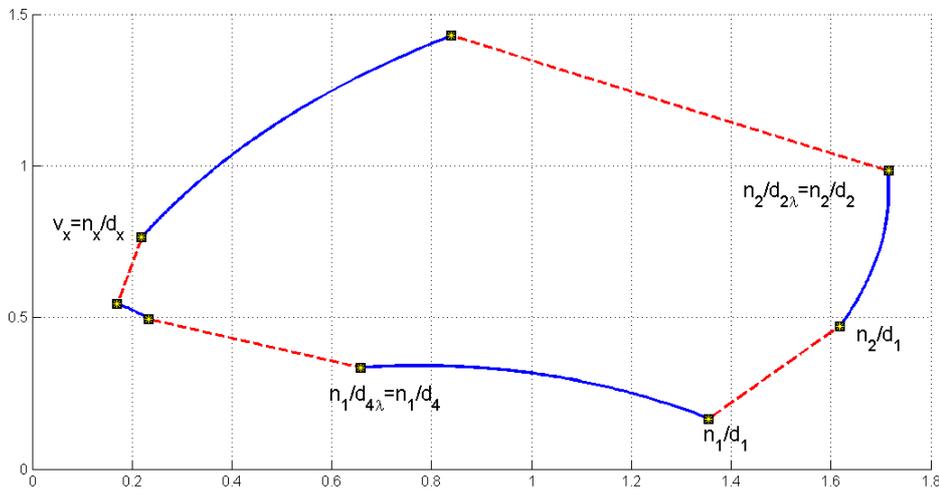


Figura 4.1: Segmento y arcos predecesor y sucesor completos.

Si los arcos predecesor y sucesor fueran completos, los denominadores de los vértices v_{1pred} y v_{2suc} serían vértices asignados del rectángulo de Kharitonov. A partir del segmento completo y según el teorema 3.6, basándose en una de las posibles normalizaciones, pueden determinarse los rectángulos asignados n_1 , n_2 y d_1 . La normalización utilizada se recoge en el siguiente lema:

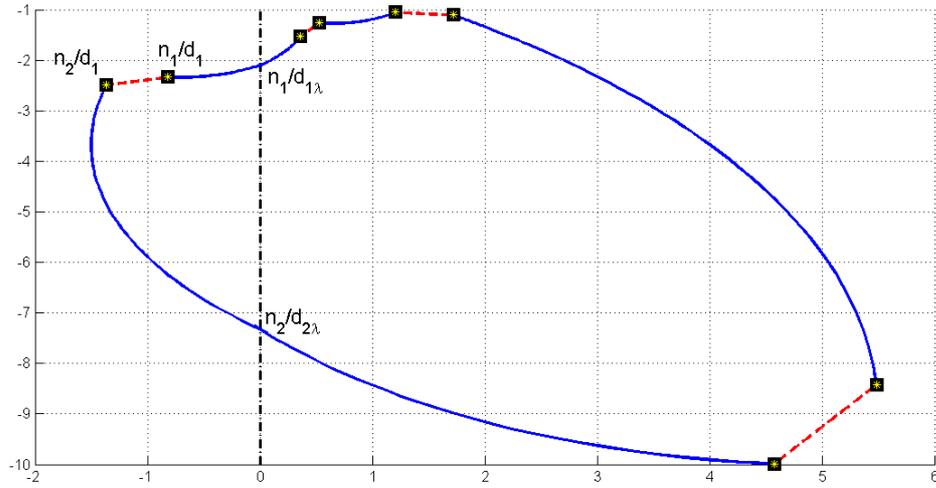


Figura 4.2: Segmento y arcos predecesor y sucesor no completos.

Lema 4.1

[Normalización de segmento.] Sea S_1 un segmento completo de la frontera del conjunto de valores, de vértices $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$ y $v_2 = \frac{n_2}{d_1}$ y la normalización $d_1 = \cos(\varphi(d_1)) + j \sin(\varphi(d_1))$, donde $\varphi(d_1) = 360^\circ - \arg(v_2 - v_1)$. Entonces:

$$n_1 = v_1 d_1, \quad n_2 = v_2 d_1, \quad d_{2\lambda} = \frac{n_2}{v_{2suc}}, \quad d_{4\lambda} = \frac{n_1}{v_{1pred}}$$

siendo v_{2suc} (v_{1pred}) cualquier punto del arco sucesor (predecesor) del segmento S_1 .

Demostración:

La normalización es una de las posibles soluciones (véase 3.6) para un conjunto de valores. Esta normalización implica elegir un valor para el polinomio asignado d_1 con módulo $|d_1| = 1$ y argumento $\varphi(d_1)$ de forma que el segmento formado por los polinomios asignados n_1 y n_2 sea paralelo al eje real, elegidos dichos polinomios en sentido antihorario. Así pues, a partir de la información obtenida de un segmento completo en un cuadrante, pueden calcularse los valores de los polinomios asignados d_1 , n_1 y n_2 , además de los valores de $d_{2\lambda}$ y $d_{4\lambda}$. ■

Para determinar los polinomios de Kharitonov a partir de los polinomios asignados, deben determinarse al menos los valores de los polinomios asignados n_1, n_3, d_1, d_3 (o bien n_2, n_4, d_2, d_4). Para ello, se estudiarán las relaciones que los demás vértices del conjunto

de valores (en cualquier cuadrante) mantienen con los vértices del segmento completo inicial. Este estudio se realiza para el caso general en el que $n_{2R} \neq 0$, $n_{2I} \neq 0$, $n_{1R} \neq 0$ y $n_{1I} \neq 0$, es decir cuando ninguno de los polinomios asignados determinados a partir del segmento completo inicial, está sobre los ejes. Estos casos particulares se tratarán mas adelante.

Dado un vértice de la frontera del conjunto de valores $v_x = \frac{n_x}{d_x}$ en un cuadrante, el objetivo es determinar los valores de los polinomios n_x y d_x , identificando su valor, y de qué polinomios asignados se trata. El vértice v_x pertenece a un segmento (o parte de un segmento) y a un arco (o a parte de un arco) de la frontera, gracias a la continuidad segmento-arco existente en un cuadrante. Luego v_x será el vértice de dos elementos, arco y segmento, (figura 4.3) o segmento y arco (figura 4.4).

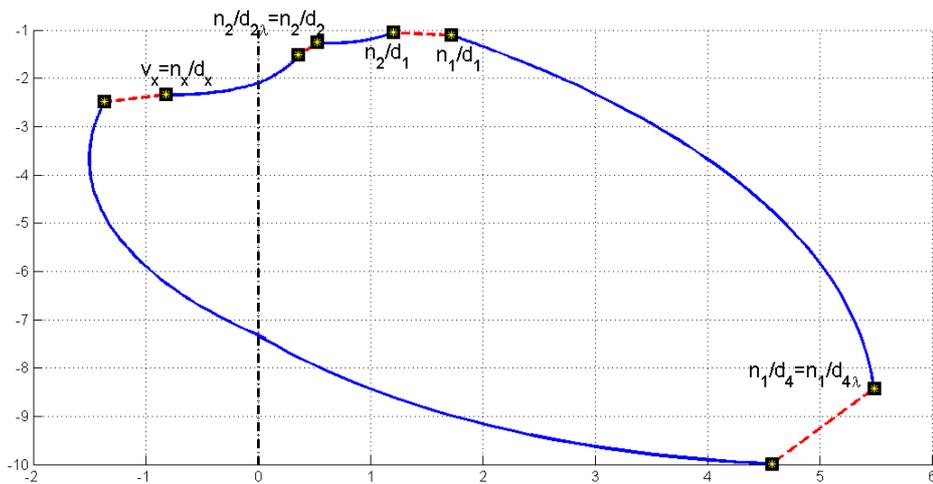


Figura 4.3: v_x vértice de los elementos arco-segmento.

El polinomio d_x puede ser uno de los cuatro polinomios asignados del denominador. El lema siguiente muestra la condición necesaria que debe verificar el valor de d_x para que sea una solución de $v_x = \frac{n_x}{d_x}$.

Lema 4.2

[Condición del denominador] Sea S_1 un segmento completo en un cuadrante, y sea d_x el denominador de un vértice $v_x = \frac{n_x}{d_x}$ de la frontera. Entonces, es condición necesaria que d_x satisfaga una de las siguientes condiciones:

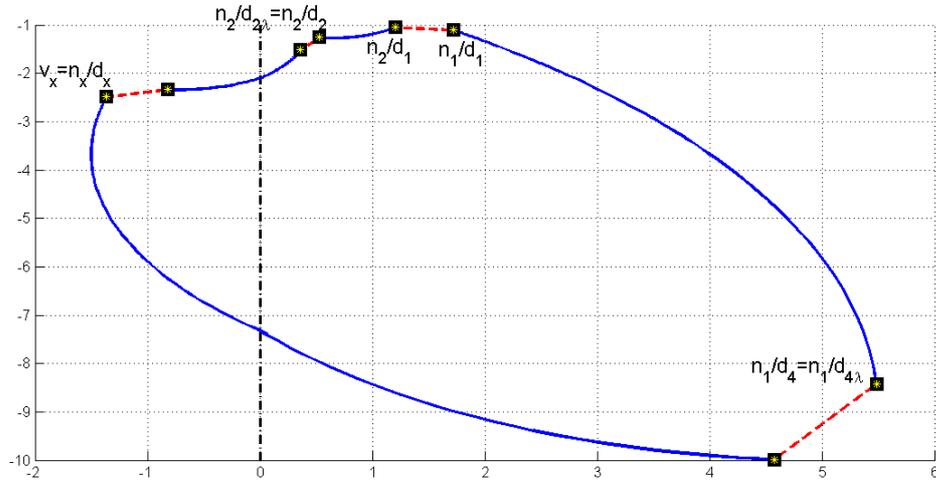


Figura 4.4: v_x vértice de los elementos segmento-arco.

$$1. (d_{1R} < d_{2\lambda R} \text{ y } d_{1I} < d_{4\lambda I}) \text{ y } \left\{ \begin{array}{l} d_{xR} = d_{1R} \text{ y } d_{xI} = d_{1iI} \quad (d_x = d_1) \\ \circ \\ d_{xR} = d_{1R} \text{ y } d_{xI} \geq d_{1I} \quad (d_x = d_4) \\ \circ \\ d_{xI} = d_{1I} \text{ y } d_{xR} \geq d_{1R} \quad (d_x = d_2) \\ \circ \\ d_{xR} > d_{1R} \text{ y } d_{xI} > d_{1I} \quad (d_x = d_3) \end{array} \right.$$

$$2. (d_{1R} > d_{4\lambda R} \text{ y } d_{1I} < d_{2\lambda I}) \text{ y } \left\{ \begin{array}{l} d_{xR} = d_{1R} \text{ y } d_{xI} = d_{1I} \quad (d_x = d_1) \\ \circ \\ d_{xR} = d_{1R} \text{ y } d_{xI} \geq d_{1I} \quad (d_x = d_2) \\ \circ \\ d_{xI} = d_{1I} \text{ y } d_{xR} \leq d_{1R} \quad (d_x = d_4) \\ \circ \\ d_{xR} < d_{1R} \text{ y } d_{xI} > d_{1I} \quad (d_x = d_3) \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l}
3. (d_{1R} > d_{2\lambda R} \text{ y } d_{1I} > d_{4\lambda I}) \text{ y} \\
4. (d_{1R} < d_{4\lambda R} \text{ y } d_{1I} > d_{2\lambda I}) \text{ y}
\end{array}
\left\{ \begin{array}{l}
d_{xR} = d_{1R} \text{ y } d_{xI} = d_{1I} \quad (d_x = d_1) \\
\circ \\
d_{xR} = d_{1R} \text{ y } d_{xI} \leq d_{1I} \quad (d_x = d_4) \\
\circ \\
d_{xI} = d_{1I} \text{ y } d_{xR} \leq d_{1R} \quad (d_x = d_2) \\
\circ \\
d_{xR} < d_{1R} \text{ y } d_{xI} < d_{1I} \quad (d_x = d_3)
\end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
d_{xR} = d_{1R} \text{ y } d_{xI} = d_{1I} \quad (d_x = d_1) \\
\circ \\
d_{xR} = d_{1R} \text{ y } d_{xI} \leq d_{1I} \quad (d_x = d_2) \\
\circ \\
d_{xI} = d_{1I} \text{ y } d_{xR} \geq d_{1R} \quad (d_x = d_4) \\
\circ \\
d_{xR} > d_{1R} \text{ y } d_{xI} < d_{1I} \quad (d_x = d_3)
\end{array} \right.$$

donde d_{iR} denota la parte real de d_i y d_{iI} la parte imaginaria de d_i . Entre paréntesis se indica, para cada caso, el polinomio asignado que debe ser d_x .

Demostración:

Se obtiene directamente de los datos obtenidos a partir del segmento completo en un cuadrante, y de las propiedades de los rectángulos de Kharitonov. A partir del segmento completo y de la normalización (lema 4.1) se conocen los valores de d_1 , $d_{2\lambda}$ y $d_{4\lambda}$. Por tanto, el valor de d_1 puede establecerse como el polinomio de Kharitonov asociado K_{d1} , K_{d2} , K_{d3} o K_{d4} .

1. Si $(d_{1R} < d_{2\lambda R} \text{ y } d_{1I} < d_{4\lambda I})$ entonces d_1 es K_{d1} . Dado d_x , este será un vértice del rectángulo de Kharitonov del denominador, solamente si $d_{xR} = d_{1R}$ y $d_{xI} = d_{1I}$ (entonces d_x es $d_1 = K_{d1}$), o si $d_{xR} = d_{1R}$ y $d_{xI} > d_{1I}$ (d_x es $d_4 = K_{d4}$), o si $d_{xI} = d_{1I}$ y $d_{xR} > d_{1R}$ (d_x es $d_2 = K_{d2}$), o si $d_{xR} > d_{1R}$ y $d_{xI} > d_{1I}$ (d_x es $d_3 = K_{d3}$). (Figura 4.5).

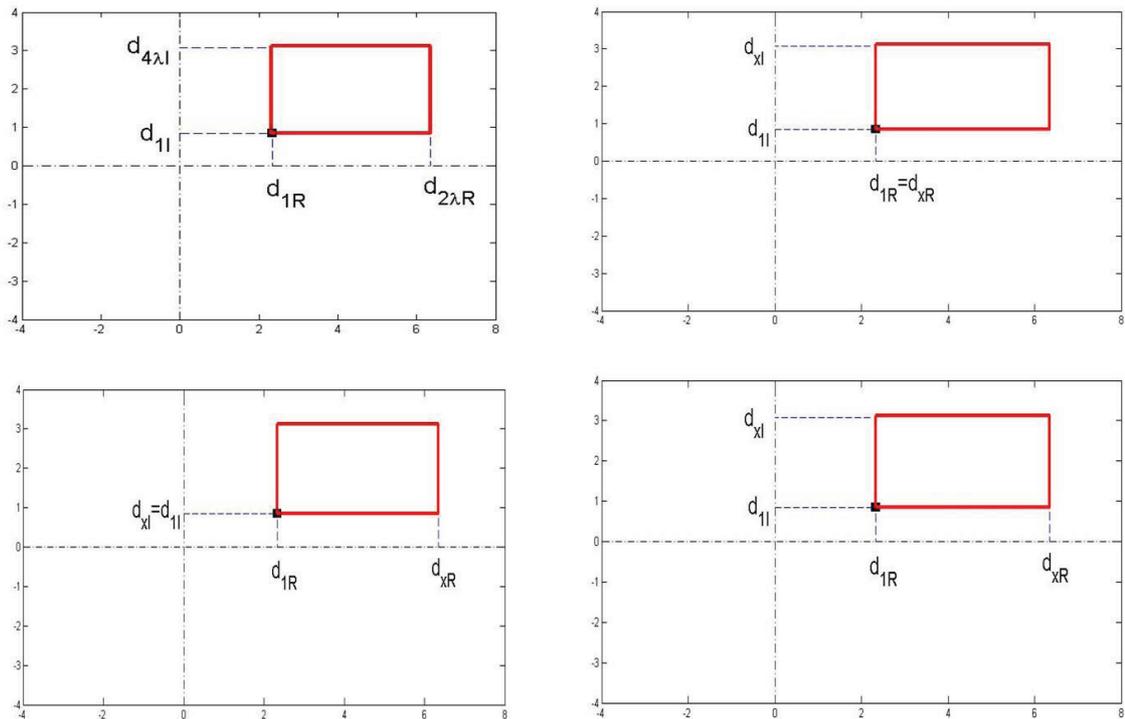


Figura 4.5: Casos donde d_x es un vértice de Kharitonov del denominador.

Nótese que si cualquiera de estas condiciones no se satisface, d_x no puede ser una solución. Por ejemplo, si $d_{xR} = d_{1R}$ y $d_{xI} < d_{1I}$, d_x no pertenece al rectángulo de vértices d_1 , $d_{2\lambda}$ y $d_{4\lambda}$. La figura 4.6 muestra este caso.

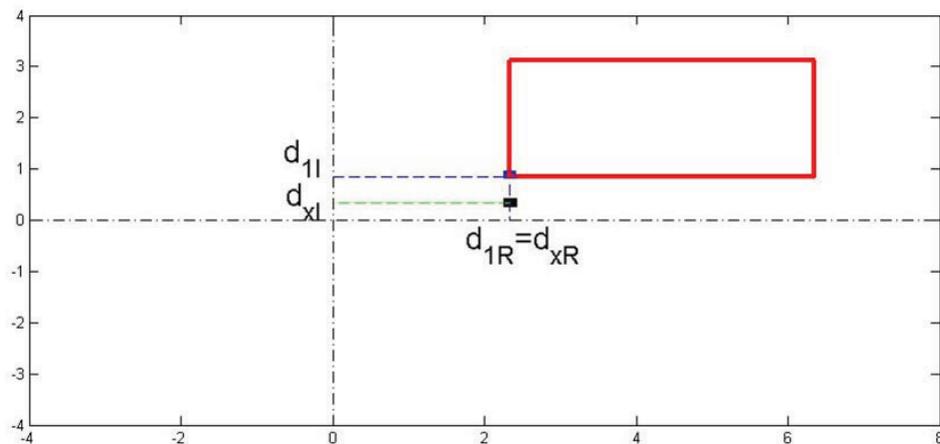


Figura 4.6: Casos donde d_x no es un vértice de Kharitonov del denominador.

2. Si $(d_{1R} > d_{4\lambda R}$ y $d_{1I} < d_{2\lambda I})$ entonces d_1 es K_{d2} . Dado d_x , este será un vértice del rectángulo de Kharitonov del denominador, solamente si $d_{xR} = d_{1R}$ y $d_{xI} = d_{1I}$ (entonces d_x es $d_1 = K_{d2}$), o si $d_{xR} = d_{1R}$ y $d_{xI} > d_{1I}$ (d_x es $d_2 = K_{d3}$), o si $d_{xI} = d_{1I}$ y $d_{xR} < d_{1R}$ (d_x es $d_4 = K_{d1}$), o si $d_{xR} < d_{1R}$ y $d_{xI} > d_{1I}$ (d_x es $d_3 = K_{d4}$).

3. Si $(d_{1R} > d_{2\lambda R}$ y $d_{1I} > d_{4\lambda I})$ entonces d_1 es K_{d3} . Dado d_x , este será un vértice del rectángulo de Kharitonov del denominador, solamente si $d_{xR} = d_{1R}$ y $d_{xI} = d_{1I}$ (entonces d_x es $d_1 = K_{d3}$), o si $d_{xR} = d_{1R}$ y $d_{xI} < d_{1I}$ (d_x es $d_4 = K_{d2}$) o $d_{xI} = d_{1I}$ y $d_{xR} < d_{1R}$ (d_x es $d_2 = K_{d4}$) o $d_{xR} < d_{1R}$ y $d_{xI} < d_{1I}$ (d_x es $d_3 = K_{d1}$).
4. Si $d_{1R} < d_{4\lambda R}$ y $d_{1I} > d_{2\lambda I}$ entonces d_1 es K_{d4} . Dado d_x , este será un vértice del rectángulo de Kharitonov del denominador, solamente si $d_{xR} = d_{1R}$ y $d_{xI} = d_{1I}$ (entonces d_x es $d_1 = K_{d4}$) o $d_{xR} = d_{1R}$ y $d_{xI} < d_{1I}$ (d_x es $d_2 = K_{d1}$) o $d_{xI} = d_{1I}$ y $d_{xR} > d_{1R}$ (d_x es $d_4 = K_{d3}$) o $d_{xR} > d_{1R}$ y $d_{xI} < d_{1I}$ (d_x es $d_3 = K_{d2}$).

■

Es bien conocido el comportamiento de un segmento en el plano, cuando se divide por un número complejo. La siguiente propiedad muestra este comportamiento.

Proposición 4.1

Sea $S_x = \frac{S}{d_x}$ un segmento en el plano complejo, de vértices v_{x1} y v_{x2} (elegidos en sentido antihorario), donde S es un segmento de vértices n_a y n_b (en sentido antihorario). Sea d_x un número complejo, con argumento $\arg(d_x)$. Si $\varphi(S_x) = \arg(v_{x2} - v_{x1})$, se verifican las siguientes relaciones:

1. $\arg(d_x) = -\varphi(S_x)$ si y sólo si $\arg(n_b - n_a) = 0^\circ$.
2. $\arg(d_x) = 90^\circ - \varphi(S_x)$ si y sólo si $\arg(n_b - n_a) = 90^\circ$.
3. $\arg(d_x) = 180^\circ - \varphi(S_x)$ si y sólo si $\arg(n_b - n_a) = 180^\circ$.
4. $\arg(d_x) = 270^\circ - \varphi(S_x)$ si y sólo si $\arg(n_b - n_a) = 270^\circ$.

El siguiente teorema muestra cómo caracterizar y calcular los polinomios n_x y d_x asociados al vértice $v_x = \frac{n_x}{d_x}$, a partir de la información obtenida de un segmento de la frontera S_x en un cuadrante. $v_x = \frac{n_x}{d_x}$ es un vértice perteneciente a la intersección de un segmento y un arco de la frontera, elegidos en sentido antihorario.

Teorema 4.1

[Predecesor] Sean S_1 un segmento completo de la frontera del conjunto de valores con vértices $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$ y $v_2 = \frac{n_2}{d_1}$, el arco de la frontera sucesor a S_1 , de vértices $v_2 = \frac{n_2}{d_1}$ y $v_{2suc} = \frac{n_2}{d_{2\lambda}}$, y el arco de la frontera predecesor a S_1 , con vértices $v_{1pred} = \frac{n_1}{d_{4\lambda}}$ y $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$, todos en sentido

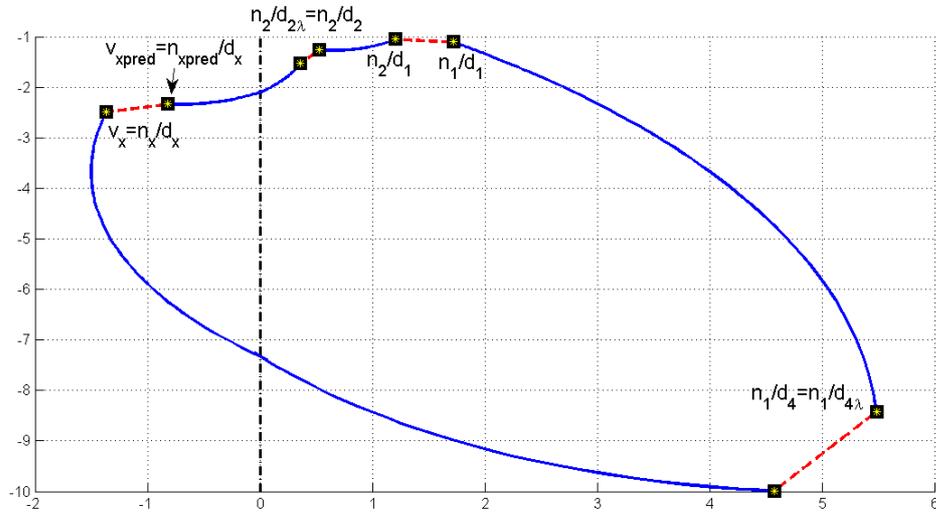


Figura 4.7: Vértices para las condiciones del teorema 4.1.

antihorario. Sea S_x un segmento de la frontera de vértices $v_{xpred} = \frac{n_{xpred}}{d_x}$ y $v_x = \frac{n_x}{d_x}$ en sentido antihorario, donde v_x es un vértice perteneciente a la intersección del segmento S_x con un arco de la frontera (figura 4.7). Entonces:

1. $\arg\left(\frac{v_x}{v_2}\right) = \arg(d_1) + \varphi(S_x)$ (condición C1.1) y el denominador d_x de v_x determinado como $\frac{n_2}{v_x}$ satisface la condición del denominador (lema 4.2), si y sólo si $n_x = n_2$ y no puede ser otro polinomio asignado.
2. Cuando $n_x \neq n_2$, $\arg\left(\frac{v_x}{v_1}\right) = \arg(d_1) + \varphi(S_x) + 90^\circ$ (condición C1.2) y el denominador d_x de v_x determinado como $\frac{n_1}{v_x}$ satisface la condición del denominador (lema 4.2), si y sólo si $n_x = n_1$ y no puede ser otro polinomio asignado.
3. Cuando $n_x \neq n_1$ y $n_x \neq n_2$, $\tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 90^\circ) n_{2R} > n_{2I}$ (condición C1.3) y el denominador d_x de v_x determinado como $\frac{v_x}{n_{2R}[1 + j \tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 90^\circ)]}$ satisface la condición del denominador (lema 4.2), si y sólo si $n_x = n_3 = n_{2R}[1 + j \tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 90^\circ)]$ y no puede ser otro polinomio asignado.
4. Cuando $n_x \neq n_1$, $n_x \neq n_2$, y $n_x \neq n_3$, $\tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 180^\circ) n_{1R} > n_{1I}$ (condición C1.4), y el denominador d_x de v_x determinado como $\frac{v_x}{n_{1R}[1 + j \tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 180^\circ)]}$ satisface la condición del denominador (lema 4.2), si y sólo si $n_x = n_4 = n_{1R}[1 + j \tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 180^\circ)]$.

Demostración:

A partir del segmento completo S_1 , aplicando la normalización (lema 4.1) se obtienen los valores de d_1 , $n_1 = v_1 d_1$, $n_2 = v_2 d_1$, $d_{2\lambda} = \frac{n_2}{v_{2suc}}$ y $d_{4\lambda} = \frac{n_1}{v_{1pred}}$. El valor de v_x es conocido.

1. \Leftarrow Si $n_x = n_2$ el valor de $d_x = \frac{n_2}{v_x}$ se puede calcular, y por tanto se satisface la condición del denominador (lema 4.2), ya que al ser v_x un vértice de la frontera, d_x será uno de los polinomios asignados del denominador, y por tanto debe verificar una de las cuatro condiciones del lema.

Dividiendo el valor de $v_x = \frac{n_2}{d_x}$ por el valor de $v_2 = \frac{n_2}{d_1}$ se obtiene $\frac{v_x}{v_2} = \frac{d_1}{d_x}$, y $\arg\left(\frac{v_x}{v_2}\right) = \arg(d_1) - \arg(d_x)$.

Además $S_x = \frac{S_2}{d_x}$, donde S_2 es parte del segmento de vértices n_1 y n_2 , verificándose que $\arg(n_2 - n_1) = 0$ (por la normalización, pues tienen la misma parte imaginaria, y su diferencia es un número real). Por la proposición 4.1, $\arg(d_x) = -\varphi(S_x)$ y entonces $\arg\left(\frac{v_x}{v_2}\right) = \arg(d_1) + \varphi(S_x)$, verificándose la condición C1.1.

\Rightarrow Para demostrar esta implicación, basta probar que si la condición C1.1 y la condición del denominador se satisfacen, entonces la solución $d_x = \frac{n_2}{v_x}$, $n_x = n_2$, es única. Nótese que la condición C1.1 se puede cumplir también cuando a) $n_x = n_3$, b) $n_x = n_4$ o c) $n_x = n_1$, y que en cada caso, el valor del denominador d_x determinado verifica la condición del denominador.

Sea d_x el denominador de v_x determinado como $\frac{n_2}{v_x}$, verificando la condición C1.1 y la condición del denominador. Además $S_x = \frac{S_2}{d_x}$, donde S_2 es parte del segmento de vértices n_1 y n_2 , y $\arg(n_2 - n_1) = 0^\circ$.

- a) Sea d_x^* el denominador de v_x determinado como $\frac{n_3}{v_x}$. Entonces $S_x = \frac{S_3}{d_x^*}$ donde S_3 es parte del segmento de vértices n_2 y n_3 , $\arg(n_3 - n_2) = 90^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.1 $\arg(d_x^*) = 90^\circ - \varphi(S_x)$. Como v_x es el mismo vértice, entonces $\arg\left(\frac{n_3}{d_x^*}\right) = \arg\left(\frac{n_2}{d_x}\right)$, de donde se deduce que $\arg(n_3) = \arg(n_2) + 90^\circ$. $n_x = n_3$ verifica la condición C1.1, puesto que

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{v_x}{v_2}\right) &= \arg(n_2) + 90^\circ - \arg(n_2) + \arg(d_1) - 90^\circ + \varphi(S_x) \\ &= \arg(d_1) + \varphi(S_x). \end{aligned}$$

Sea $\alpha = \arg(n_2)$, con $\tan(\alpha) = \frac{n_{2I}}{n_{2R}}$. Entonces $\arg(n_3) = \alpha + 90^\circ$ y $\tan(\alpha + 90^\circ) = \frac{n_{3I}}{n_{3R}} = \frac{n_{3I}}{n_{2R}}$ (por la normalización $n_{3R} = n_{2R}$). Por lo tanto $n_3 = n_{2R} + jn_{3I} = n_{2R} + j \tan(\alpha + 90^\circ) n_{2R} = n_{2R} - j \frac{n_{2R}^2}{n_{2I}}$. Además $\arg(d_x^*) = 90^\circ + \arg(d_x)$, luego si $d_x = d_{xR} + jd_{xI}$ entonces $d_x^* = \rho e^{j\frac{\pi}{2}} d_x = -\rho d_{xI} + j\rho d_{xR}$. Como $v_x = \frac{n_2}{d_x}$ y $v_x = \frac{n_3}{d_x^*}$, entonces $n_2 d_x^* = n_3 d_x$ y coinciden sus partes reales y sus partes imaginarias.

$Re(n_2 d_x^*) = Re(n_3 d_x)$, luego

$$\begin{aligned} -\rho d_{xI} n_{2R} - \rho d_{xR} n_{2I} &= n_{2R} d_{xR} + \frac{n_{2R}^2}{n_{2I}} d_{xI} \\ -\rho d_{xI} n_{2R} n_{2I} - \rho d_{xR} n_{2I}^2 &= n_{2R} n_{2I} d_{xR} + n_{2R}^2 d_{xI} \\ -(\rho n_{2I} + n_{2R}) d_{xR} n_{2I} &= (n_{2R} + \rho n_{2I}) d_{xI} n_{2R}. \end{aligned}$$

Así pues $\frac{d_{xI}}{d_{xR}} = -\frac{n_{2I}}{n_{2R}}$.

$Im(n_2 d_x^*) = Im(n_3 d_x)$, luego

$$\begin{aligned} \rho d_{xR} n_{2R} - \rho d_{xI} n_{2I} &= d_{xI} n_{2R} - d_{xR} \frac{n_{2R}^2}{n_{2I}} \\ \rho d_{xR} n_{2R} n_{2I} - \rho d_{xI} n_{2I}^2 &= d_{xI} n_{2R} n_{2I} - d_{xR} n_{2R}^2 \\ (n_{2I} \rho + n_{2R}) n_{2R} d_{xR} &= d_{xI} n_{2I} (n_{2R} + \rho n_{2I}). \end{aligned}$$

Por tanto $\frac{d_{xI}}{d_{xR}} = \frac{n_{2R}}{n_{2I}}$.

Igualando ambos resultados, $\frac{n_{2R}}{n_{2I}} = -\frac{n_{2I}}{n_{2R}} \Leftrightarrow n_{2R}^2 < 0$, lo cual no es posible.

Por tanto, d_x es una solución, d_x^* no lo es y $n_x = n_3$ no es una solución.

- b) Sea d_x^* el denominador de v_x determinado como $\frac{n_4}{v_x}$. Entonces $S_x = \frac{S_4}{d_x^*}$, donde S_4 es parte del segmento de vértices n_3 y n_4 , $\arg(n_4 - n_3) = 180^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.1 $\arg(d_x^*) = 180^\circ - \varphi(S_x)$. Como v_x es el mismo vértice, entonces $\arg\left(\frac{n_4}{d_x^*}\right) = \arg\left(\frac{n_2}{d_x}\right)$, de donde se deduce que $\arg(n_4) = \arg(n_2) + 180^\circ$. $n_x = n_4$ verifica la condición C1.1, puesto que

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{v_x}{v_2}\right) &= \arg(n_2) + 180^\circ - \arg(n_2) + \arg(d_1) - 180^\circ + \varphi(S_x) \\ &= \arg(d_1) + \varphi(S_x). \end{aligned}$$

En este caso la demostración es trivial, ya que $\arg(d_x^*) = 180^\circ + \arg(d_x)$. Esta

relación no es posible, ya que el polinomio de Kharitonov del denominador no contiene al cero.

- c) Sea d_x^* el denominador de v_x determinado como $\frac{n_1}{v_x}$. Entonces $S_x = \frac{S_1}{d_x^*}$, donde S_1 es parte del segmento de vértices n_4 y n_1 , $\arg(n_1 - n_4) = 270^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.1 $\arg(d_x^*) = 270^\circ - \varphi(S_x)$. Como v_x es el mismo vértice, entonces $\arg\left(\frac{n_1}{d_x^*}\right) = \arg\left(\frac{n_2}{d_x}\right)$, de donde se deduce que $\arg(n_1) = \arg(n_2) + 270^\circ$. $n_x = n_1$ verifica la condición C1.1, puesto que

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{v_x}{v_2}\right) &= \arg(n_2) + 270^\circ - \arg(n_2) + \arg(d_1) - 270^\circ + \varphi(S_x) \\ &= \arg(d_1) + \varphi(S_x). \end{aligned}$$

Sea $\alpha = \arg(n_2)$, con $\tan(\alpha) = \frac{n_{2I}}{n_{2R}}$. Entonces $\arg(n_1) = \alpha + 270^\circ$ y $\tan(\alpha + 270^\circ) = \frac{n_{1I}}{n_{1R}} = \frac{n_{2I}}{n_{1R}}$ (por la normalización $n_{1I} = n_{2I}$). Por lo tanto $n_1 = n_{1R} + jn_{2I} = \frac{n_{2I}}{\tan(\alpha + 270^\circ)} + jn_{2I} = -\frac{n_{2I}^2}{n_{2R}} + jn_{2I}$. Además, $\arg(d_x^*) = 270^\circ + \arg(d_x)$, luego si $d_x = d_{xR} + jd_{xI}$ entonces $d_x^* = \rho e^{j3\frac{\pi}{2}} d_x = \rho d_{xI} - j\rho d_{xR}$. Como $v_x = \frac{n_2}{d_x}$ y $v_x = \frac{n_1}{d_x^*}$, entonces $n_2 d_x^* = n_1 d_x$ y coinciden sus partes reales y sus partes imaginarias.

$Re(n_2 d_x^*) = Re(n_1 d_x)$, luego

$$\begin{aligned} +\rho d_{xI} n_{2R} + \rho d_{xR} n_{2I} &= -\frac{n_{2I}^2}{n_{2R}} d_{xR} - n_{2I} d_{xI} \\ (n_{2I} + n_{2R}\rho) d_{xI} n_{2R} &= -(n_{2R}\rho + n_{2I}) d_{xR} n_{2I}. \end{aligned}$$

Así pues $\frac{d_{xI}}{d_{xR}} = -\frac{n_{2I}}{n_{2R}}$.

$Im(n_2 d_x^*) = Im(n_1 d_x)$, luego

$$\begin{aligned} -\rho d_{xR} n_{2R} + \rho d_{xI} n_{2I} &= -d_{xI} \frac{n_{2I}^2}{n_{2R}} + d_{xR} n_{2I} \\ -\rho d_{xR} n_{2R} n_{2R} + \rho d_{xI} n_{2I} n_{2R} &= -d_{xI} n_{2I}^2 + d_{xR} n_{2I} n_{2R} \\ (n_{2I} + \rho n_{2R}) d_{xI} n_{2I} &= d_{xR} n_{2R} (\rho n_{2R} + n_{2I}). \end{aligned}$$

Por tanto $\frac{d_{xI}}{d_{xR}} = \frac{n_{2R}}{n_{2I}}$.

Igualando ambos resultados, $\frac{n_{2R}}{n_{2I}} = -\frac{n_{2I}}{n_{2R}} \Leftrightarrow n_{2R}^2 < 0$, lo cual no es posible.

Por tanto, d_x es una solución, d_x^* no lo es y $n_x = n_1$ no es una solución.

2. \Leftarrow Si $n_x = n_1$ el valor de $d_x = \frac{n_1}{v_x}$ se puede calcular, y por tanto se satisface la condición del denominador (lema 4.2), ya que al ser v_x un vértice de la frontera, d_x será uno de los polinomios asignados del denominador, y por tanto debe verificar una de las cuatro condiciones del lema.

Dividiendo el valor de $v_x = \frac{n_1}{d_x}$ por el valor de $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$ se obtiene $\frac{v_x}{v_1} = \frac{d_1}{d_x}$ y $\arg\left(\frac{v_x}{v_1}\right) = \arg(d_1) - \arg(d_x)$.

Además $S_x = \frac{S_1}{d_x}$, donde S_1 es parte del segmento de vértices n_4 y n_1 , verificándose que $\arg(n_1 - n_4) = 270^\circ$ (por la normalización). Por la proposición 4.1 $\arg(d_x) = 270^\circ - \varphi(S_x)$ y entonces $\arg\left(\frac{v_x}{v_1}\right) = \arg(d_1) + \varphi(S_x) + 90^\circ$, verificándose la condición C1.2.

\Rightarrow Para demostrar esta implicación, basta probar que si la condición C1.2 y la condición del denominador se satisfacen, entonces la solución $d_x = \frac{n_1}{v_x}$, $n_x = n_1$, es única. Nótese que si $n_x \neq n_2$, la condición C1.2 se puede cumplir también cuando a) $n_x = n_3$ o b) $n_x = n_4$, y que en cada caso, el valor del denominador d_x determinado verifica la condición del denominador.

Sea d_x el denominador de v_x determinado como $\frac{n_1}{v_x}$, verificando la condición C1.2 y la condición del denominador. Además $S_x = \frac{S_1}{d_x}$, donde S_1 es parte del segmento de vértices n_4 y n_1 , y $\arg(n_1 - n_4) = 270^\circ$.

- a) Sea d_x^* el denominador de v_x determinado como $\frac{n_3}{v_x}$. Entonces $S_x = \frac{S_3}{d_x^*}$, donde S_3 es parte del segmento de vértices n_2 y n_3 , $\arg(n_3 - n_2) = 90^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.1 $\arg(d_x^*) = 90^\circ - \varphi(S_x)$. Como v_x es el mismo vértice, entonces $\arg\left(\frac{n_1}{d_x}\right) = \arg\left(\frac{n_3}{d_x^*}\right)$, de donde se deduce que $\arg(n_3) = \arg(n_1) + 180^\circ$. $n_x = n_3$ verifica la condición C1.2, puesto que

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{v_x}{v_1}\right) &= \arg(n_1) + 180^\circ - \arg(n_1) + \arg(d_1) - 90^\circ + \varphi(S_x) \\ &= \arg(d_1) + \varphi(S_x) + 90^\circ. \end{aligned}$$

En este caso, la demostración es trivial, ya que $\arg(d_x^*) = -180^\circ + \arg(d_x)$ ($\arg(d_x) = 270^\circ - \varphi(S_x)$ y $\arg(d_x^*) = 90^\circ - \varphi(S_x)$). Esto no es posible, porque el polinomio de Kharitonov del denominador no puede contener el cero.

- b) Sea d_x^* el denominador de v_x determinado como $\frac{n_4}{v_x}$. Entonces $S_x = \frac{S_4}{d_x^*}$, donde

S_4 es parte del segmento de vértices n_3 y n_4 , $\arg(n_4 - n_3) = 180^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.1 $\arg(d_x^*) = 180^\circ - \varphi(S_x)$. Como v_x es el mismo vértice entonces $\arg\left(\frac{n_4}{d_x^*}\right) = \arg\left(\frac{n_1}{d_x}\right)$, de donde se deduce que $\arg(n_4) = \arg(n_1) + 270^\circ$. $n_x = n_4$ verifica la condición C1.2, puesto que

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{v_x}{v_1}\right) &= \arg(n_1) + 270^\circ - \arg(n_1) + \arg(d_1) - 180^\circ + \varphi(S_x) \\ &= \arg(d_1) + \varphi(S_x) + 90^\circ.\end{aligned}$$

Sea $\alpha = \arg(n_1)$, con $\tan(\alpha) = \frac{n_{1I}}{n_{1R}}$. Entonces $\arg(n_4) = \alpha + 270^\circ$ y $\tan(\alpha + 270^\circ) = \frac{n_{4I}}{n_{4R}} = -\frac{n_{1R}}{n_{1I}}$ (por la normalización $n_{1R} = n_{4R}$). Por lo tanto $n_4 = n_{4R} + jn_{4I} = n_{1R} + jn_{1R}\tan(\alpha + 270^\circ) = n_{1R} - j\frac{n_{1R}^2}{n_{1I}}$. Además $\arg(d_x^*) = -90^\circ + \arg(d_x)$, luego si $d_x = d_{xR} + jd_{xI}$ entonces $d_x^* = \rho e^{j3\frac{\pi}{2}} d_x = \rho d_{xI} - j\rho d_{xR}$.

Como $v_x = \frac{n_1}{d_x}$ y $v_x = \frac{n_4}{d_x^*}$, entonces $n_1 d_x^* = n_4 d_x$ y coinciden sus partes reales y sus partes imaginarias.

$Re(n_1 d_x^*) = Re(n_4 d_x)$, luego

$$\begin{aligned}\rho d_{xI} n_{1R} + \rho d_{xR} n_{1I} &= +\frac{n_{1R}^2}{n_{1I}} d_{xI} + n_{1R} d_{xR} \\ \rho d_{xI} n_{1R} n_{1I} + \rho d_{xR} n_{1I} n_{1I} &= +n_{1R}^2 d_{xI} + n_{1R} d_{xR} n_{1I} \\ (\rho n_{1I} - n_{1R}) d_{xI} n_{1R} &= (n_{1R} - \rho n_{1I}) d_{xR} n_{1I}.\end{aligned}$$

Así pues $\frac{d_{xI}}{d_{xR}} = -\frac{n_{1I}}{n_{1R}}$.

$Im(n_1 d_x^*) = Im(n_4 d_x)$, luego

$$\begin{aligned}-\rho d_{xR} n_{1R} + \rho d_{xI} n_{1I} &= -d_{xR} \frac{n_{1R}^2}{n_{1I}} + d_{xI} n_{1R} \\ -\rho d_{xR} n_{1R} n_{1I} + \rho d_{xI} n_{1I} n_{1I} &= -d_{xR} n_{1R}^2 + d_{xI} n_{1R} n_{1I} \\ (-\rho n_{1I} + n_{1R}) d_{xR} n_{1R} &= (n_{1R} - \rho n_{1I}) d_{xI} n_{1I}.\end{aligned}$$

Por tanto $\frac{d_{xI}}{d_{xR}} = \frac{n_{1R}}{n_{1I}}$.

Igualando ambos resultados, $-\frac{n_{1I}}{n_{1R}} = \frac{n_{1R}}{n_{1I}} \Leftrightarrow n_{1R}^2 < 0$, lo cual no es posible.

Por tanto, d_x es una solución, d_x^* no lo es, y $n_x = n_4$ no es una solución.

3. \Leftarrow Si $n_x = n_3$ entonces $d_x = \frac{n_3}{v_x}$ no se puede calcular directamente, porque no se

conoce el valor de n_3 . Veremos en primer lugar que la condición C1.3 se verifica.

Si $n_x = n_3$ entonces $S_x = \frac{S_3}{d_x}$, donde S_3 es parte del segmento de vértices n_2 y n_3 , verificándose que $\arg(n_3 - n_2) = 90^\circ$ (por la normalización). Por la proposición 4.1 $\arg(d_x) = 90^\circ - \varphi(S_x)$ y entonces $\arg(n_3) = \arg(v_x) + \arg(d_x) = \arg(v_x) + 90^\circ - \varphi(S_x)$. Como $n_{2R} = n_{3R}$ entonces $n_3 = n_{3R} + jn_{3I} = n_{2R} + jn_{2R} \tan(\arg(v_x) + 90^\circ - \varphi(S_x))$.

Por otro lado, $n_{3I} > n_{2I}$ porque los vértices asignados son elegidos en sentido antihorario. Por tanto se verifica que $\tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 90^\circ) n_{2R} > n_{2I}$, que es la condición C1.3.

Además puede calcularse d_x mediante la expresión

$$d_x = \frac{n_3}{v_x} = \frac{n_{2R} [1 + j \tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 90^\circ)]}{v_x}.$$

\Rightarrow Para demostrar esta implicación, basta probar que si la condición C1.3 y la condición del denominador se satisfacen, entonces la solución $d_x = \frac{n_3}{v_x}$, $n_x = n_3$, es única. Nótese que si $n_x \neq n_2$ y $n_x \neq n_1$, la condición C1.3 se puede cumplir cuando $n_x = n_4$.

Sea d_x el denominador de v_x determinado como $\frac{n_3}{v_x}$, verificando la condición C1.3 y la condición del denominador. Además $S_x = \frac{S_3}{d_x}$, donde S_3 es parte del segmento de vértices n_2 y n_3 , y $\arg(n_3 - n_2) = 90^\circ$.

Sea d_x^* el denominador de v_x determinado como $\frac{n_4}{v_x}$. Entonces $S_x = \frac{S_4}{d_x^*}$, donde S_4 es parte del segmento de vértices n_3 y n_4 , $\arg(n_4 - n_3) = 180^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.1 $\arg(d_x^*) = 180^\circ - \varphi(S_x) = \arg(d_x) + 90^\circ$. Por tanto $d_x^* = \rho j(d_{xR} + jd_{xI}) = -\rho d_{xI} + j\rho d_{xR}$.

Como v_x es el mismo vértice, $\arg\left(\frac{n_4}{d_x^*}\right) = \arg\left(\frac{n_3}{d_x}\right)$, de donde se deduce que $\arg(n_4) = \arg(n_3) + 90^\circ$. Sea $\alpha = \arg(n_3)$, entonces $\alpha + 90^\circ = \arg(n_4) = \arg(v_x) + \arg(d_x^*) = \arg(v_x) + 180^\circ - \varphi(S_x)$. Por tanto $\alpha = \arg(v_x) + 90^\circ - \varphi(S_x)$, y como es el argumento de n_3 verifica $n_3 = n_{2R} \tan(\alpha) > n_{2I}$ (por la normalización), es decir, la condición C1.3 se satisface.

Si $n_x = n_4$ entonces $n_4 = n_{4R} + jn_{4I} = n_{1R} + jn_{2R} \tan(\arg(v_x) + 90^\circ - \varphi(S_x))$, y

el denominador d_x^* puede calcularse mediante la expresión

$$d_x^* = \frac{n_4}{v_x} = \frac{n_{1R} + j \tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 90^\circ) n_{2R}}{v_x}.$$

Como $\tan(\alpha) = \frac{n_{3I}}{n_{3R}}$, entonces $n_3 = n_{3R} + j n_{3I} = n_{2R} + j n_{2R} \tan(\alpha) = n_{2R} + j n_{2R} \frac{n_{3I}}{n_{3R}}$, y $n_4 = n_{4R} + j n_{4I} = n_{1R} + j n_{1R} \tan(\alpha + 90) = n_{1R} - j n_{1R} \frac{n_{3R}}{n_{3I}}$.

Como $v_x = \frac{n_3}{d_x}$ y $v_x = \frac{n_4}{d_x^*}$, entonces $n_3 d_x^* = n_4 d_x$ y coinciden sus partes reales y sus partes imaginarias.

$Re(n_3 d_x^*) = Re(n_4 d_x)$, luego

$$\begin{aligned} -n_{2R} \rho d_{xI} - n_{3I} \rho d_{xR} &= n_{1R} d_{xR} + d_{xI} n_{1R} \frac{n_{3R}}{n_{3I}} \\ n_{2R} n_{3I} \rho d_{xI} - n_{3I} n_{3I} \rho d_{xR} &= n_{1R} n_{3I} d_{xR} + d_{xI} n_{1R} n_{3R} \\ -(n_{3I} \rho + n_{1R}) n_{2R} d_{xI} &= (n_{1R} + n_{3I} \rho) n_{3I} d_{xR}. \end{aligned}$$

Así pues $\frac{d_{xI}}{d_{xR}} = -\frac{n_{3I}}{n_{3R}}$.

$Im(n_3 d_x^*) = Im(n_4 d_x)$, luego

$$\begin{aligned} -n_{3I} \rho d_{xI} + n_{2R} \rho d_{xR} &= d_{xI} n_{1R} - d_{xR} n_{1R} \frac{n_{3R}}{n_{3I}} \\ -n_{3I} n_{3I} \rho d_{xI} + n_{3I} n_{2R} \rho d_{xR} &= d_{xI} n_{1R} n_{3I} - d_{xR} n_{1R} n_{3R} \\ -(n_{3I} \rho + n_{1R}) d_{xI} n_{3I} &= -(n_{3I} \rho + n_{1R}) d_{xR} n_{3R}. \end{aligned}$$

Por tanto $\frac{d_{xI}}{d_{xR}} = \frac{n_{3R}}{n_{3I}}$.

Igualando ambos resultados, $-\frac{n_{3I}}{n_{3R}} = \frac{n_{3R}}{n_{3I}} \Leftrightarrow n_{3R}^2 < 0$, lo cual no es posible. Por tanto d_x es una solución, d_x^* no lo es y $n_x = n_3$ no es una solución.

4. \Leftarrow Si $n_x = n_4$ entonces $d_x = \frac{n_4}{v_x}$ no se puede calcular directamente, puesto que no se conoce el valor de n_4 . Veremos en primer lugar que la condición C1.4 se verifica.

Si $n_x = n_4$ entonces $S_x = \frac{S_4}{d_x}$, donde S_4 es parte del segmento de vértices n_3 y n_4 , verificándose que $\arg(n_4 - n_3) = 180^\circ$ (por la normalización). Por la proposición 4.1 $\arg(d_x) = 180^\circ - \varphi(S_x)$ y entonces $\arg(n_4) = \arg(v_x) + \arg(d_x) = \arg(v_x) + 180^\circ - \varphi(S_x)$. Como $n_{1R} = n_{4R}$, entonces $n_4 = n_{4R} + j n_{4I} = n_{1R} + j n_{1R} \tan(\arg(v_x) + 180^\circ - \varphi(S_x))$.

Por otro lado, $n_{4I} > n_{1I}$ porque los vértices asignados son elegidos en sentido antihorario. Por tanto se verifica que $\tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 180^\circ) n_{1R} > n_{1I}$, que es la condición C1.4.

Además puede calcularse d_x mediante la expresión

$$d_x = \frac{n_4}{v_x} = \frac{n_{1R} [1 + j \tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 180^\circ)]}{v_x}.$$

\Rightarrow Si $n_x \neq n_2$, $n_x \neq n_1$ y $n_x \neq n_3$ entonces $n_x = n_4$. ■

El siguiente teorema es análogo al teorema 4.1 pero en este caso S_x es un segmento de vértices $v_x = \frac{n_x}{d_x}$ y $v_{xsuc} = \frac{n_{xsuc}}{d_x}$, en sentido antihorario. $v_x = \frac{n_x}{d_x}$ es un vértice perteneciente a la intersección de un arco y un segmento de la frontera.

Teorema 4.2

[Sucesor] Sean S_1 un segmento completo de la frontera del conjunto de valores, con vértices $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$ y $v_2 = \frac{n_2}{d_1}$, el arco de la frontera sucesor a S_1 , de vértices $v_2 = \frac{n_2}{d_1}$ y $v_{2suc} = \frac{n_2}{d_{2\lambda}}$, y el arco de la frontera predecesor a S_1 con vértices $v_{1pred} = \frac{n_1}{d_{4\lambda}}$ y $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$, todos en sentido antihorario. Sea S_x un segmento de la frontera de vértices $v_x = \frac{n_x}{d_x}$ y $v_{xsuc} = \frac{n_{xsuc}}{d_x}$ en sentido antihorario, donde v_x es un vértice perteneciente a la intersección de un arco de la frontera con el segmento S_x . Entonces:

1. $\arg\left(\frac{v_x}{v_2}\right) = \arg(d_1) + \varphi(S_x) - 90^\circ$ (condición C2.1) y el denominador d_x de v_x determinado como $\frac{n_2}{v_x}$ satisface la condición del denominador (lema 4.2), si y sólo si $n_x = n_2$ y no puede ser otro polinomio asignado.
2. Cuando $n_x \neq n_2$, $\arg\left(\frac{v_x}{v_1}\right) = \arg(d_1) + \varphi(S_x)$ (condición C2.2) y el denominador d_x de v_x determinado como $\frac{n_1}{v_x}$ satisface la condición del denominador (lema 4.2), si y sólo si $n_x = n_1$ y no puede ser otro polinomio asignado.
3. Cuando $n_x \neq n_1$ y $n_x \neq n_2$, $\tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 180^\circ) n_{2R} > n_{2I}$ (condición C2.3) y el denominador d_x de v_x determinado como $\frac{n_{2R} [1 + j \tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 180^\circ)]}{v_x}$ satisface la condición del denominador (lema 4.2), si y sólo si $n_x = n_3 = n_{2R} [1 + j \tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 180^\circ)]$, y no puede ser otro polinomio asignado.

4. Cuando $n_x \neq n_1$, $n_x \neq n_2$, y $n_x \neq n_3$, $\tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 270^\circ) n_{1R} > n_{1I}$ (condición C2.4) y el denominador d_x de v_x determinado como $\frac{n_{1R} [1 + j \tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 270^\circ)]}{v_x}$ satisface la condición del denominador (lema 4.2), si y sólo si $n_x = n_4 = n_{1R} [1 + j \tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 270^\circ)]$.

Demostración:

A partir del segmento completo S_1 , aplicando la normalización (lema 4.1) se obtienen los valores de d_1 , $n_1 = v_1 d_1$, $n_2 = v_2 d_1$, $d_{2\lambda} = \frac{n_2}{v_{2suc}}$ y $d_{4\lambda} = \frac{n_1}{v_{1pred}}$. El valor de v_x es conocido.

1. \Leftarrow Si $n_x = n_2$ el valor de $d_x = \frac{n_2}{v_x}$ se puede calcular, y por tanto se satisface la condición del denominador (lema 4.2), ya que al ser v_x un vértice de la frontera, d_x será uno de los polinomios asignados del denominador, y por tanto debe verificar una de las cuatro condiciones del lema.

Dividiendo el valor de $v_x = \frac{n_2}{d_x}$ por el valor de $v_2 = \frac{n_2}{d_1}$ se obtiene $\frac{v_x}{v_2} = \frac{d_1}{d_x}$, y $\arg\left(\frac{v_x}{v_2}\right) = \arg(d_1) - \arg(d_x)$.

Además $S_x = \frac{S_2}{d_x}$, donde S_2 es parte del segmento de vértices n_2 y n_3 , verificándose que $\arg(n_3 - n_2) = 90^\circ$ (por la normalización). Por la proposición 4.1, $\arg(d_x) = 90^\circ - \varphi(S_x)$ y entonces $\arg\left(\frac{v_x}{v_2}\right) = \arg(d_1) + \varphi(S_x) - 90^\circ$, verificándose la condición C2.1.

\Rightarrow Para demostrar esta implicación, basta probar que si la condición C2.1 y la condición del denominador se satisfacen, entonces la solución $d_x = \frac{n_2}{v_x}$, $n_x = n_2$, es única. Nótese que la condición C2.1 se puede cumplir también cuando a) $n_x = n_3$, b) $n_x = n_4$ o c) $n_x = n_1$, y que en cada caso, el valor del denominador d_x determinado verifica la condición del denominador.

Sea d_x el denominador de v_x determinado como $\frac{n_2}{v_x}$, verificando la condición C2.1 y la condición del denominador. Además $S_x = \frac{S_2}{d_x}$, donde S_2 es parte del segmento de vértices n_2 y n_3 , y $\arg(n_3 - n_2) = 90^\circ$.

- a) Sea d_x^* el denominador de v_x determinado como $\frac{n_3}{v_x}$. Entonces $S_x = \frac{S_3}{d_x^*}$, donde S_3 es parte del segmento de vértices n_3 y n_4 , $\arg(n_4 - n_3) = 180^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.1 $\arg(d_x^*) = 180^\circ - \varphi(S_x)$. Como v_x

es el mismo vértice, entonces $\arg\left(\frac{n_3}{d_x^*}\right) = \arg\left(\frac{n_2}{d_x}\right)$, de donde se deduce que $\arg(n_3) = \arg(n_2) + 90^\circ$. $n_x = n_3$ verifica la condición C2.1, puesto que

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{v_x}{v_2}\right) &= \arg(n_2) + 90^\circ - \arg(n_2) + \arg(d_1) - 180^\circ + \varphi(S_x) \\ &= \arg(d_1) + \varphi(S_x) - 90^\circ.\end{aligned}$$

Sea $\alpha = \arg(n_2)$, con $\tan(\alpha) = \frac{n_{2I}}{n_{2R}}$. Entonces $\arg(n_3) = \alpha + 90^\circ$ y $\tan(\alpha + 90^\circ) = \frac{n_{3I}}{n_{3R}} = \frac{n_{3I}}{n_{2R}}$ (por la normalización $n_{3R} = n_{2R}$). Por lo tanto $n_3 = n_{2R} + jn_{3I} = n_{2R} + j \tan(\alpha + 90^\circ) n_{2R} = n_{2R} - j \frac{n_{2R}^2}{n_{2I}}$. Además $\arg(d_x^*) = 90^\circ + \arg(d_x)$, luego si $d_x = d_{xR} + jd_{xI}$ entonces $d_x^* = \rho e^{j\frac{\pi}{2}} d_x = -\rho d_{xI} + j\rho d_{xR}$. Como $v_x = \frac{n_2}{d_x}$ y $v_x = \frac{n_3}{d_x^*}$, entonces $n_2 d_x^* = n_3 d_x$ y coinciden sus partes reales y sus partes imaginarias.

$Re(n_2 d_x^*) = Re(n_3 d_x)$, luego

$$\begin{aligned}-\rho d_{xI} n_{2R} - \rho d_{xR} n_{2I} &= n_{2R} d_{xR} + \frac{n_{2R}^2}{n_{2I}} d_{xI} \\ -\rho d_{xI} n_{2R} n_{2I} - \rho d_{xR} n_{2I}^2 &= n_{2R} n_{2I} d_{xR} + n_{2R}^2 d_{xI} \\ -(\rho n_{2I} + n_{2R}) d_{xR} n_{2I} &= (n_{2R} + \rho n_{2I}) d_{xI} n_{2R}.\end{aligned}$$

Así pues $\frac{d_{xI}}{d_{xR}} = -\frac{n_{2I}}{n_{2R}}$.

$Im(n_2 d_x^*) = Im(n_3 d_x)$, luego

$$\begin{aligned}\rho d_{xR} n_{2R} - \rho d_{xI} n_{2I} &= d_{xI} n_{2R} - d_{xR} \frac{n_{2R}^2}{n_{2I}} \\ \rho d_{xR} n_{2R} n_{2I} - \rho d_{xI} n_{2I}^2 &= d_{xI} n_{2R} n_{2I} - d_{xR} n_{2R}^2 \\ (n_{2I} \rho + n_{2R}) n_{2R} d_{xR} &= d_{xI} n_{2I} (n_{2R} + \rho n_{2I}).\end{aligned}$$

Por tanto $\frac{d_{xI}}{d_{xR}} = \frac{n_{2R}}{n_{2I}}$.

Igualando ambos resultados, $\frac{n_{2R}}{n_{2I}} = -\frac{n_{2I}}{n_{2R}} \Leftrightarrow n_{2R}^2 < 0$, lo cual no es posible.

Por tanto d_x es una solución, d_x^* no lo es y $n_x = n_3$ no es una solución.

- b) Sea d_x^* el denominador de v_x determinado como $\frac{n_4}{v_x}$. Entonces $S_x = \frac{S_4}{d_x^*}$, donde S_4 es parte del segmento de vértices n_1 y n_4 , $\arg(n_1 - n_4) = 270^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.1 $\arg(d_x^*) = 270^\circ - \varphi(S_x)$. Como v_x es el mismo vértice, entonces $\arg\left(\frac{n_4}{d_x^*}\right) = \arg\left(\frac{n_2}{d_x}\right)$, de donde se deduce que

$\arg(n_4) = \arg(n_2) + 180^\circ$. $n_x = n_4$ verifica la condición C2.1, puesto que

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{v_x}{v_2}\right) &= \arg(n_2) + 180^\circ - \arg(n_2) + \arg(d_1) - 270^\circ + \varphi(S_x) \\ &= \arg(d_1) + \varphi(S_x) - 90^\circ.\end{aligned}$$

En este caso la demostración es trivial, ya que $\arg(d_x^*) = 180^\circ + \arg(d_x)$. Esta relación no es posible, ya que el polinomio de Kharitonov del denominador no contiene al cero.

c) Sea d_x^* el denominador de v_x determinado como $\frac{n_1}{v_x}$. Entonces $S_x = \frac{S_1}{d_x^*}$, donde S_1 es parte del segmento de vértices n_2 y n_1 , $\arg(n_2 - n_1) = 0^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.1 $\arg(d_x^*) = -\varphi(S_x)$. Como v_x es el mismo vértice, entonces $\arg\left(\frac{n_1}{d_x^*}\right) = \arg\left(\frac{n_2}{d_x}\right)$, de donde se deduce que $\arg(n_1) = \arg(n_2) + 270^\circ$. $n_x = n_1$ verifica la condición C2.1, puesto que

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{v_x}{v_2}\right) &= \arg(n_1) - \arg(n_2) + \arg(d_1) - \arg(d_x^*) \\ &= 270^\circ + \arg(d_1) + \varphi(S_x) = \arg(d_1) + \varphi(S_x) - 90^\circ.\end{aligned}$$

Sea $\alpha = \arg(n_2)$, con $\tan(\alpha) = \frac{n_{2I}}{n_{2R}}$. Entonces $\arg(n_1) = \alpha + 270^\circ$ y $\tan(\alpha + 270^\circ) = \frac{n_{1I}}{n_{1R}} = \frac{n_{2I}}{n_{1R}}$ (por la normalización $n_{2I} = n_{1I}$). Por lo tanto $n_1 = n_{1R} + jn_{1I} = \frac{n_{2I}}{\tan(\alpha + 270^\circ)} + jn_{2I} = -\frac{n_{2I}^2}{n_{2R}} + jn_{2I}$. Además, $\arg(d_x^*) = 270^\circ + \arg(d_x)$, luego si $d_x = d_{xR} + jd_{xI}$ entonces $d_x^* = \rho e^{j3\frac{\pi}{2}} d_x = \rho d_{xI} - j\rho d_{xR}$. Como $v_x = \frac{n_2}{d_x}$ y $v_x = \frac{n_1}{d_x^*}$, entonces $n_2 d_x^* = n_1 d_x$ y coinciden sus partes reales y sus partes imaginarias.

$Re(n_2 d_x^*) = Re(n_1 d_x)$, luego

$$\begin{aligned}+\rho d_{xI} n_{2R} + \rho d_{xR} n_{2I} &= -\frac{n_{2I}^2}{n_{2R}} d_{xR} - n_{2I} d_{xI} \\ (n_{2I} + n_{2R}\rho) d_{xI} n_{2R} &= -(n_{2R}\rho + n_{2I}) d_{xR} n_{2I}.\end{aligned}$$

Así pues $\frac{d_{xI}}{d_{xR}} = -\frac{n_{2I}}{n_{2R}}$.

$Im(n_2 d_x^*) = Im(n_1 d_x)$, luego

$$\begin{aligned} -\rho d_{xR} n_{2R} + \rho d_{xI} n_{2I} &= -d_{xI} \frac{n_{2I}^2}{n_{2R}} + d_{xR} n_{2I} \\ -\rho d_{xR} n_{2R} n_{2R} + \rho d_{xI} n_{2I} n_{2R} &= -d_{xI} n_{2I}^2 + d_{xR} n_{2I} n_{2R} \\ (n_{2I} + \rho n_{2R}) d_{xI} n_{2I} &= d_{xR} n_{2R} (\rho n_{2R} + n_{2I}). \end{aligned}$$

Por tanto $\frac{d_{xI}}{d_{xR}} = \frac{n_{2R}}{n_{2I}}$.

Igualando ambos resultados, $\frac{n_{2R}}{n_{2I}} = -\frac{n_{2I}}{n_{2R}} \Leftrightarrow n_{2R}^2 < 0$, lo cual no es posible.

Por tanto d_x es una solución, d_x^* no lo es y $n_x = n_1$ no es una solución.

2. \Leftarrow Si $n_x = n_1$ el valor de $d_x = \frac{n_1}{v_x}$ se puede calcular, y por tanto se satisface la condición del denominador (lema 4.2), ya que al ser v_x un vértice de la frontera, d_x será uno de los polinomios asignados del denominador, y por tanto debe verificar una de las cuatro condiciones del lema.

Dividiendo el valor de $v_x = \frac{n_x}{d_x}$ por el valor de $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$ se obtiene $\frac{v_x}{v_1} = \frac{d_1}{d_x}$ y $\arg\left(\frac{v_x}{v_1}\right) = \arg(d_1) - \arg(d_x)$.

Además $S_x = \frac{S_1}{d_x}$, donde S_1 es parte del segmento de vértices n_2 y n_1 , verificándose que $\arg(n_2 - n_1) = 0^\circ$ (por la normalización). Por la proposición 4.1 $\arg(d_x) = -\varphi(S_x)$ y entonces $\arg\left(\frac{v_x}{v_1}\right) = \arg(d_1) + \varphi(S_x)$, verificándose la condición C2.2.

\Rightarrow Para demostrar esta implicación, basta probar que si la condición C2.2 y la condición del denominador se satisfacen, entonces la solución $d_x = \frac{n_1}{v_x}$, $n_x = n_1$, es única. Nótese que si $n_x \neq n_2$, la condición C2.2 se puede cumplir también cuando a) $n_x = n_3$ o b) $n_x = n_4$, y que en cada caso, el valor del denominador d_x determinado verifica la condición del denominador.

Sea d_x el denominador de v_x determinado como $\frac{n_1}{v_x}$, verificando la condición C2.2 y la condición del denominador. Además $S_x = \frac{S_1}{d_x}$, donde S_1 es parte del segmento de vértices n_1 y n_2 , y $\arg(n_2 - n_1) = 0^\circ$.

- a) Sea d_x^* el denominador de v_x determinado como $\frac{n_3}{v_x}$. Entonces $S_x = \frac{S_3}{d_x^*}$, donde S_3 es parte del segmento de vértices n_3 y n_4 , $\arg(n_4 - n_3) = 180^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.1 $\arg(d_x^*) = 180^\circ - \varphi(S_x)$. Como v_x es el mismo vértice, entonces $\arg\left(\frac{n_1}{d_x}\right) = \arg\left(\frac{n_3}{d_x^*}\right)$, de donde se deduce que

$\arg(n_3) = \arg(n_1) + 180^\circ$. $n_x = n_3$ verifica la condición C2.2, puesto que

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{v_x}{v_1}\right) &= \arg(n_3) + 180^\circ - \arg(n_1) + \arg(d_1) - 180^\circ + \varphi(S_x) \\ &= \arg(d_1) + \varphi(S_x).\end{aligned}$$

En este caso la demostración es trivial, ya que $\arg(d_x^*) = 180^\circ - \arg(d_x)$ ($\arg(d_x) = -\varphi(S_x)$ y $\arg(d_x^*) = 180^\circ - \varphi(S_x)$). Esto no es posible, porque el polinomio de Kharitonov del denominador no puede contener el cero.

b) Sea d_x^* el denominador de v_x determinado como $\frac{n_4}{v_x}$. Entonces $S_x = \frac{S_4}{d_x^*}$, donde S_4 es parte del segmento de vértices n_4 y n_1 , $\arg(n_1 - n_4) = 270^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.1 $\arg(d_x^*) = 270^\circ - \varphi(S_x)$. Como v_x es el mismo vértice, entonces $\arg\left(\frac{n_4}{d_x^*}\right) = \arg\left(\frac{n_1}{d_x}\right)$, de donde se deduce que $\arg(n_4) = \arg(n_1) + 270^\circ$. $n_x = n_4$ verifica la condición C2.2, puesto que

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{v_x}{v_1}\right) &= \arg(n_1) + 270^\circ - \arg(n_1) + \arg(d_1) - 270^\circ + \varphi(S_x) \\ &= \arg(d_1) + \varphi(S_x).\end{aligned}$$

Sea $\alpha = \arg(n_1)$, con $\tan(\alpha) = \frac{n_{1I}}{n_{1R}}$. Entonces $\arg(n_4) = \alpha + 270^\circ$ y $\tan(\alpha + 270^\circ) = \frac{n_{4I}}{n_{4R}} = -\frac{n_{1R}}{n_{1I}}$ (por la normalización). Por lo tanto $n_4 = n_{4R} + jn_{4I} = n_{1R} + jn_{1R}\tan(\alpha + 270^\circ) = n_{1R} - j\frac{n_{1R}^2}{n_{1I}}$. Además $\arg(d_x^*) = 270^\circ + \arg(d_x)$ ($\arg(d_x) = -\varphi(S_x)$, $\arg(d_x^*) = 270^\circ - \varphi(S_x)$), luego si $d_x = d_{xR} + jd_{xI}$ entonces $d_x^* = \rho e^{j3\frac{\pi}{2}} d_x = \rho d_{xI} - j\rho d_{xR}$.

Como $v_x = \frac{n_1}{d_x}$ y $v_x = \frac{n_4}{d_x^*}$, entonces $n_1 d_x^* = n_4 d_x$ y coinciden sus partes reales y sus partes imaginarias.

$Re(n_1 d_x^*) = Re(n_4 d_x)$, luego

$$\begin{aligned}\rho d_{xI} n_{1R} + \rho d_{xR} n_{1I} &= +\frac{n_{1R}^2}{n_{1I}} d_{xI} + n_{1R} d_{xR} \\ \rho d_{xI} n_{1R} n_{1I} + \rho d_{xR} n_{1I} n_{1I} &= +n_{1R}^2 d_{xI} + n_{1R} d_{xR} n_{1I} \\ (\rho n_{1I} - n_{1R}) d_{xI} n_{1R} &= (n_{1R} - \rho n_{1I}) d_{xR} n_{1I}.\end{aligned}$$

Así pues $\frac{d_{xI}}{d_{xR}} = -\frac{n_{1I}}{n_{1R}}$.

$Im(n_1 d_x^*) = Im(n_4 d_x)$, luego

$$\begin{aligned} -\rho d_{xR} n_{1R} + \rho d_{xI} n_{1I} &= -d_{xR} \frac{n_{1R}^2}{n_{1I}} + d_{xI} n_{1R} \\ -\rho d_{xR} n_{1R} n_{1I} + \rho d_{xI} n_{1I} n_{1I} &= -d_{xR} n_{1R}^2 + d_{xI} n_{1R} n_{1I} \\ (-\rho n_{1I} + n_{1R}) d_{xR} n_{1R} &= (n_{1R} - \rho n_{1I}) d_{xI} n_{1I}. \end{aligned}$$

Por tanto $\frac{d_{xI}}{d_{xR}} = \frac{n_{1R}}{n_{1I}}$.

Igualando ambos resultados $-\frac{n_{1I}}{n_{1R}} = \frac{n_{1R}}{n_{1I}} \Leftrightarrow n_{1R}^2 < 0$, lo cual no es posible.

Por tanto, d_x es una solución, d_x^* no lo es y $n_x = n_4$ no es una solución.

3. \Leftarrow Si $n_x = n_3$ entonces $d_x = \frac{n_3}{v_x}$ no se puede calcular directamente, porque no se conoce el valor de n_3 . Veremos en primer lugar que la condición C2.3 se verifica.

Si $n_x = n_3$ entonces $S_x = \frac{S_3}{d_x}$, donde S_3 es parte del segmento de vértices n_3 y n_4 , verificándose que $\arg(n_4 - n_3) = 180^\circ$ (por la normalización). Por la proposición 4.1 $\arg(d_x) = 180^\circ - \varphi(S_x)$ y entonces $\arg(n_3) = \arg(v_x) + \arg(d_x) = \arg(v_x) + 180^\circ - \varphi(S_x)$. Como $n_{2R} = n_{3R}$ entonces $n_3 = n_{3R} + j n_{3I} = n_{2R} + j n_{2R} \tan(\arg(v_x) + 180^\circ - \varphi(S_x))$.

Por otro lado, $n_{3I} > n_{2I}$ porque los vértices asignados son elegidos en sentido antihorario. Por tanto se verifica que $\tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 180) n_{2R} > n_{2I}$, que es la condición C2.3.

Además puede calcularse d_x mediante la expresión

$$d_x = \frac{n_3}{v_x} = \frac{n_{2R} [1 + j \tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 180)]}{v_x}.$$

\Rightarrow Para demostrar esta implicación, basta probar que si la condición C2.3 y la condición del denominador se satisfacen, entonces la solución $d_x = \frac{n_3}{v_x}$, $n_x = n_3$, es única. Nótese que si $n_x \neq n_2$ y $n_x \neq n_1$, la condición C2.3 se puede verificar cuando $n_x = n_4$.

Sea d_x el denominador de v_x determinado como $\frac{n_3}{v_x}$, verificando la condición C2.3 y la condición del denominador. Además $S_x = \frac{S_3}{d_x}$, donde S_3 es parte del segmento de vértices n_3 y n_4 , y $\arg(n_4 - n_3) = 180^\circ$.

Sea d_x^* el denominador de v_x determinado como $\frac{n_4}{v_x}$. Entonces $S_x = \frac{S_4}{d_x^*}$, donde S_4 es parte del segmento de vértices n_4 y n_1 , $\arg(n_1 - n_4) = 270^\circ$ (por la normalización),

y por la proposición 4.1 $\arg(d_x^*) = 270^\circ - \varphi(S_x) = 90^\circ + \arg(d_x)$. Por tanto $d_x^* = \rho j(d_{xR} + jd_{xI}) = -\rho d_{xI} + j\rho d_{xR}$.

Como v_x es el mismo vértice $\arg\left(\frac{n_4}{d_x^*}\right) = \arg\left(\frac{n_3}{d_x}\right)$, de donde se deduce que $\arg(n_4) = \arg(n_3) + 90^\circ$. Sea $\alpha = \arg(n_3)$, entonces $\alpha + 90^\circ = \arg(n_4) = \arg(v_x) + \arg(d_x^*) = \arg(v_x) + 270^\circ - \varphi(S_x)$. Por tanto $\alpha = \arg(v_x) - \varphi(S_x) + 180^\circ$, y como es el argumento de n_3 verifica $n_{3I} = n_{2R} \tan(\alpha) > n_{2I}$ (por la normalización), es decir, la condición C2.3 se satisface.

Si $n_x = n_4$ entonces $n_4 = n_{4R} + jn_{4I} = n_{1R} + jn_{2R} \tan(\arg(v_x) + 180^\circ - \varphi(S_x))$, y el denominador d_x^* puede calcularse mediante la expresión

$$d_x^* = \frac{n_4}{v_x} = \frac{n_{1R} + j \tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 180^\circ) n_{2R}}{v_x}.$$

Como $\tan(\alpha) = \frac{n_{3I}}{n_{3R}}$, entonces $n_3 = n_{3R} + jn_{3I} = n_{2R} + jn_{2R} \tan(\alpha) = n_{2R} + jn_{2R} \frac{n_{3I}}{n_{3R}}$, y $n_4 = n_{4R} + jn_{4I} = n_{1R} + jn_{1R} \tan(\alpha + 90^\circ) = n_{1R} - jn_{1R} \frac{n_{3R}}{n_{3I}}$.

Como $v_x = \frac{n_3}{d_x}$ y $v_x = \frac{n_4}{d_x^*}$ entonces $n_3 d_x^* = n_4 d_x$, y coinciden sus partes reales y sus partes imaginarias.

$Re(n_3 d_x^*) = Re(n_4 d_x)$, luego

$$\begin{aligned} -n_{2R} \rho d_{xI} - n_{3I} \rho d_{xR} &= n_{1R} d_{xR} + d_{xI} n_{1R} \frac{n_{2R}}{n_{3I}} \\ -n_{2R} n_{3I} \rho d_{xI} - n_{3I} n_{3I} \rho d_{xR} &= n_{1R} n_{3I} d_{xR} + d_{xI} n_{1R} n_{3R} \\ -(n_{3I} \rho + n_{1R}) n_{2R} d_{xI} &= (n_{1R} + n_{3I} \rho) n_{3I} d_{xR}. \end{aligned}$$

Así pues $\frac{d_{xI}}{d_{xR}} = -\frac{n_{3I}}{n_{3R}}$.

$Im(n_3 d_x^*) = Im(n_4 d_x)$, luego

$$\begin{aligned} -n_{3I} \rho d_{xI} + n_{2R} \rho d_{xR} &= d_{xI} n_{1R} - d_{xR} n_{1R} \frac{n_{2R}}{n_{3I}} \\ -n_{3I} n_{3I} \rho d_{xI} + n_{3I} n_{2R} \rho d_{xR} &= d_{xI} n_{1R} n_{3I} - d_{xR} n_{1R} n_{2R} \\ -(n_{3I} \rho + n_{1R}) d_{xI} n_{3I} &= -(n_{3I} \rho + n_{1R}) d_{xR} n_{2R}. \end{aligned}$$

Por tanto $\frac{d_{xI}}{d_{xR}} = \frac{n_{3R}}{n_{3I}}$.

Igualando ambos resultados, $-\frac{n_{3I}}{n_{3R}} = \frac{n_{3R}}{n_{3I}} \Leftrightarrow n_{3R}^2 < 0$, lo cual no es posible. Por tanto, d_x es una solución, d_x^* no lo es, y $n_x = n_3$ no es una solución.

4. \Leftarrow Si $n_x = n_4$ entonces $d_x = \frac{n_4}{v_x}$ no se puede calcular directamente, puesto que no se conoce el valor de n_4 . Veremos en primer lugar que la condición C2.4 se verifica.

Si $n_x = n_4$ entonces $S_x = \frac{S_4}{d_x}$, donde S_4 es parte del segmento de vértices n_4 y n_1 , verificándose que $\arg(n_1 - n_4) = 270^\circ$ (por la normalización). Por la proposición 4.1 $\arg(d_x) = 270^\circ - \varphi(S_x)$ y entonces $\arg(n_4) = \arg(v_x) + \arg(d_x) = \arg(v_x) + 270^\circ - \varphi(S_x)$. Como $n_{1R} = n_{4R}$, entonces $n_4 = n_{4R} + jn_{4I} = n_{1R} + jn_{1R} \tan(\arg(v_x) + 270 - \varphi(S_x))$.

Por otro lado, $n_{4I} > n_{1I}$, porque los vértices asignados son elegidos en sentido antihorario. Por tanto se verifica que $\tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 270) n_{1R} > n_{1I}$, que es la condición C2.4.

Además d_x puede calcularse mediante la expresión

$$d_x = \frac{n_4}{v_x} = \frac{n_{1R} [1 + j \tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 270)]}{v_x}.$$

\Rightarrow Si $n_x \neq n_2$, $n_x \neq n_1$ y $n_x \neq n_3$ entonces debe ser $n_x = n_4$. ■

4.2. Determinación de los polinomios asignados a partir de un arco completo en un cuadrante.

Continuando con el objetivo de determinar los polinomios numerador y denominador asociados a un vértice del conjunto de valores, con el menor número de elementos, se estudiará en esta sección el caso de un arco completo en un cuadrante.

Sea A_1 un arco completo de la frontera del conjunto de valores, con vértices $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$ y $v_2 = \frac{n_1}{d_2}$. La continuidad arco-segmento en un cuadrante (teorema 3.4) asegura que existirá un segmento (o parte de un segmento) sucesor a ese arco en la frontera, de vértices $v_2 = \frac{n_1}{d_2}$ y $v_{2suc} = \frac{n_{2\lambda}}{d_2}$, y existirá un segmento (o parte de un segmento) predecesor a ese arco en la frontera, de vértices $v_{1pred} = \frac{n_{4\lambda}}{d_1}$ y $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$, con todos los vértices elegidos en sentido antihorario.

Cuando los segmentos predecesor y sucesor son segmentos completos, los numeradores

de los vértices v_{2suc} y v_{1pred} son vértices asignados del rectángulo de Kharitonov. La figura 4.8 muestra esta situación.

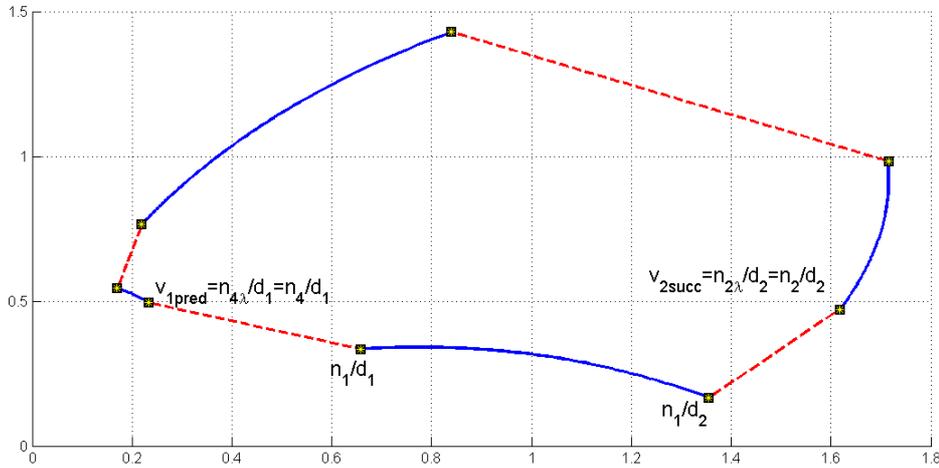


Figura 4.8: Arco y dos segmentos completos.

A partir del arco completo, y según el teorema 3.7, basándose en una de las posibles normalizaciones, pueden determinarse los rectángulos asignados d_1 , d_2 y n_1 . La normalización utilizada es la siguiente.

Lema 4.3

[Normalización de arco.] Sea A_1 un arco completo de la frontera del conjunto de valores, de vértices $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$ y $v_2 = \frac{n_1}{d_2}$ y la normalización $n_1 = \cos(\phi(n_1)) + j \sin(\phi(n_1))$, donde $\phi(n_1) = 360^\circ - \arg\left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1}\right)$. Entonces

$$d_1 = \frac{n_1}{v_1}, \quad d_2 = \frac{n_1}{v_2}, \quad n_{4\lambda} = d_1 v_{1pred} \text{ y } n_{2\lambda} = d_2 v_{2suc}$$

siendo v_{2suc} (v_{1pred}) cualquier punto del segmento sucesor (predecesor) del arco A_1 .

Demostración:

La normalización es una de las posibles soluciones (véase 3.7) para un conjunto de valores. Esta normalización implica elegir un valor para el polinomio asignado n_1 con módulo $|n_1| = 1$ y argumento $\phi(n_1)$ de modo que el segmento formado por los polinomios asignados d_1 y d_2 sea paralelo al eje real, elegidos dichos polinomios en sentido antihorario. Por tanto, a partir de la información obtenida de un arco completo en un cuadrante, pueden calcularse los valores de los polinomios asignados d_1 , d_2 , n_1 , además de los valores

$n_{2\lambda}$ y $n_{4\lambda}$.



Igual que en el caso de la normalización de segmento (4.1), este estudio se realiza para el caso general en el que $d_{2R} \neq 0$, $d_{2I} \neq 0$, $d_{1R} \neq 0$ y $d_{1I} \neq 0$.

Dado un vértice de la frontera del conjunto de valores, $v_x = \frac{n_x}{d_x}$, en un cuadrante, el objetivo es determinar los valores de los polinomios n_x y d_x , identificando su valor y de qué polinomios asignados se trata. El vértice v_x pertenece a un arco (o parte de un arco) y un segmento (o parte de un segmento) de la frontera, gracias a la continuidad arco-segmento existente en un cuadrante. Luego v_x será el vértice de dos elementos, segmento y arco, (figura 4.9), o arco y segmento, (figura 4.10).

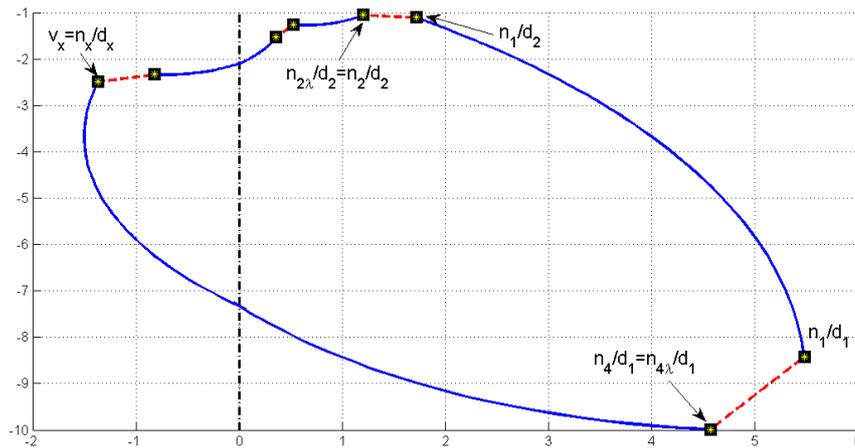


Figura 4.9: v_x vértice de dos elementos, segmento-arco.

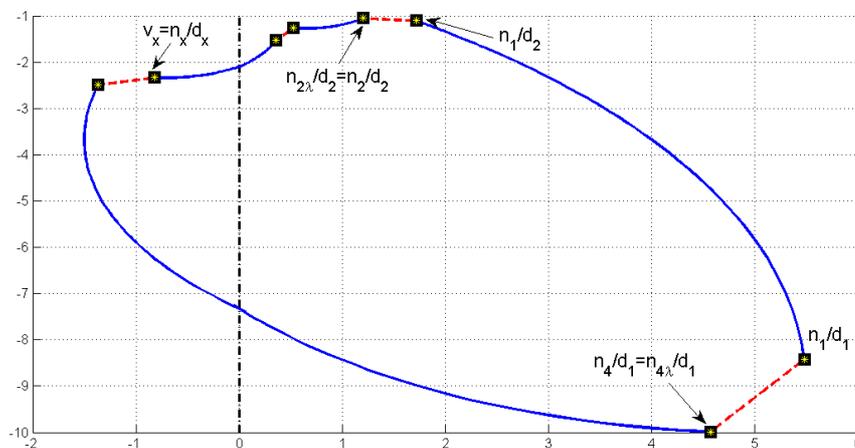


Figura 4.10: v_x vértice de dos elementos, arco-segmento.

El polinomio n_x puede ser uno de los cuatro polinomios asignados del numerador. El siguiente lema muestra la condición necesaria que debe verificar el valor del numerador n_x para que sea una solución de $v_x = \frac{n_x}{d_x}$.

Lema 4.4

[Condición del numerador.] Sea A_1 un arco completo en un cuadrante, y sea n_x el numerador de un vértice $v_x = \frac{n_x}{d_x}$ de la frontera. Entonces, es condición necesaria que n_x satisfaga una de las siguientes condiciones

$$1. (n_{1R} < n_{2\lambda R} \text{ y } n_{1I} < n_{4\lambda I}) \text{ y } \left\{ \begin{array}{l} n_{xR} = n_{1R} \text{ y } n_{xI} = n_{1I} \quad (n_x = n_1) \\ \circ \\ n_{xR} = n_{1R} \text{ y } n_{xI} \geq n_{1I} \quad (n_x = n_4) \\ \circ \\ n_{xI} = n_{1I} \text{ y } n_{xR} \geq n_{1R} \quad (n_x = n_2) \\ \circ \\ n_{xR} > n_{1R} \text{ y } n_{xI} > n_{1I} \quad (n_x = n_3) \end{array} \right.$$

$$2. (n_{1R} > n_{4\lambda R} \text{ y } n_{1I} < n_{2\lambda I}) \text{ y } \left\{ \begin{array}{l} n_{xR} = n_{1R} \text{ y } n_{xI} = n_{1I} \quad (n_x = n_1) \\ \circ \\ n_{xR} = n_{1R} \text{ y } n_{xI} \geq n_{1I} \quad (n_x = n_2) \\ \circ \\ n_{xI} = n_{1I} \text{ y } n_{xR} \leq n_{1R} \quad (n_x = n_4) \\ \circ \\ n_{xR} < n_{1R} \text{ y } n_{xI} > n_{1I} \quad (n_x = n_3) \end{array} \right.$$

$$3. (n_{1R} > n_{2\lambda R} \text{ y } n_{1I} > n_{4\lambda I}) \text{ y } \left\{ \begin{array}{l} n_{xR} = n_{1R} \text{ y } n_{xI} = n_{1I} \quad (n_x = n_1) \\ \circ \\ n_{xR} = n_{1R} \text{ y } n_{xI} \leq n_{1I} \quad (n_x = n_4) \\ \circ \\ n_{xI} = n_{1I} \text{ y } n_{xR} \leq n_{1R} \quad (n_x = n_2) \\ \circ \\ n_{xR} < n_{1R} \text{ y } n_{xI} < n_{1I} \quad (n_x = n_3) \end{array} \right.$$

$$4. (n_{1R} < n_{4\lambda R} \text{ y } n_{1I} > n_{2\lambda I}) \text{ y } \left\{ \begin{array}{l} n_{xR} = n_{1R} \text{ y } n_{xI} = n_{1I} \quad (n_x = n_1) \\ \circ \\ n_{xR} = n_{1R} \text{ y } n_{xI} \leq n_{1I} \quad (n_x = n_2) \\ \circ \\ n_{xI} = n_{1I} \text{ y } n_{xR} \geq n_{1R} \quad (n_x = n_4) \\ \circ \\ n_{xR} > n_{1R} \text{ y } n_{xI} < n_{1I} \quad (n_x = n_3) \end{array} \right.$$

donde n_{iR} denota la parte real de n_i y n_{iI} la parte imaginaria de n_i . Entre paréntesis se indica, para cada caso, el polinomio asignado que debe ser n_x .

Demostración:

Se obtiene directamente de los datos obtenidos a partir del arco completo en un cuadrante y de las propiedades de los rectángulos de Kharitonov. A partir del arco completo y de la normalización (lema 4.3), se conocen los valores de n_1 , $n_{2\lambda}$ y $n_{4\lambda}$. Por tanto, el valor de n_1 puede establecerse como el polinomio de Kharitonov asociado K_{n1} , K_{n2} , K_{n3} o K_{n4} .

1. $(n_{1R} < n_{2\lambda R} \text{ y } n_{1I} < n_{4\lambda I})$ entonces n_1 es K_{n1} . Dado n_x , será un vértice del rectángulo de Kharitonov del numerador, solamente si $n_{xR} = n_{1R}$ y $n_{xI} = n_{1I}$ (entonces n_x es $n_1 = K_{n1}$), o si $n_{xR} = n_{1R}$ y $n_{xI} > n_{1I}$ (n_x es $n_4 = K_{n4}$), o si $n_{xI} = n_{1I}$ y $n_{xR} > n_{1R}$ (n_x es $n_2 = K_{n2}$), o si $n_{xR} > n_{1R}$ y $n_{xI} > n_{1I}$ (n_x es $n_3 = K_{n3}$).

Nótese que si cualquiera de estas condiciones no se satisface, n_x no puede ser una solución. Por ejemplo si $n_{xR} = n_{1R}$ y $n_{xI} < n_{1I}$, n_x no pertenece al rectángulo de vértices n_1 , $n_{2\lambda}$ y $n_{4\lambda}$.

2. Si $(n_{1R} > n_{4\lambda R} \text{ y } n_{1I} < n_{2\lambda I})$ entonces n_1 es K_{n2} . Dado n_x , será un vértice del rectángulo de Kharitonov del numerador, solamente si $n_{xR} = n_{1R}$ y $n_{xI} = n_{1I}$ (entonces n_x es $n_1 = K_{n2}$), o si $n_{xR} = n_{1R}$ y $n_{xI} > n_{1I}$ (n_x es $n_2 = K_{n3}$), o si $n_{xI} = n_{1I}$ y $n_{xR} < n_{1R}$ (n_x es $n_4 = K_{n1}$), o si $n_{xR} < n_{1R}$ y $n_{xI} > n_{1I}$ (n_x es $n_3 = K_{n4}$).

3. Si $n_{1R} > n_{2\lambda R}$ y $n_{1I} > n_{4\lambda I}$ entonces n_1 es K_{n3} . Dado n_x , será un vértice del

rectángulo de Kharitonov del numerador, solamente si $n_{xR} = n_{1R}$ y $n_{xI} = n_{1I}$ (entonces n_x es $n_1 = K_{n3}$), o si $n_{xR} = n_{1R}$ y $n_{xI} < n_{1I}$ (n_x es $n_4 = K_{n2}$), o si $n_{xI} = n_{1I}$ y $n_{xR} < n_{1R}$ (n_x es $n_2 = K_{n4}$), o si $n_{xR} < n_{1R}$ y $n_{xI} < n_{1I}$ (n_x es $n_3 = K_{n1}$).

4. Si $n_{1R} < n_{4\lambda R}$ y $n_{1I} > n_{2\lambda I}$ entonces n_1 es K_{n4} . Dado n_x , será un vértice del rectángulo de Kharitonov del numerador, solamente si $n_{xR} = n_{1R}$ y $n_{xI} = n_{1I}$ (entonces n_x es $n_1 = K_{n4}$), o si $n_{xR} = n_{1R}$ y $n_{xI} < n_{1I}$ (n_x es $n_2 = K_{n1}$), o si $n_{xI} = n_{1I}$ y $n_{xR} > n_{1R}$ (n_x es $n_4 = K_{n3}$), o si $n_{xR} > n_{1R}$ y $n_{xI} < n_{1I}$ (n_x es $n_3 = K_{n2}$).

■

Es bien conocido el comportamiento de un arco en el plano, cuando se multiplica por un número complejo. La siguiente propiedad muestra este comportamiento.

Proposición 4.2

Sea $A_x = \frac{n_x}{S}$ un arco en el plano complejo, de vértices v_{x1} y v_{x2} (elegidos en sentido antihorario), donde S es un segmento de vértices d_a y d_b (en sentido antihorario). Sea n_x un número complejo, con argumento $\arg(n_x)$. Si $\phi(A_x) = \arg\left(\frac{1}{v_{x2}} - \frac{1}{v_{x1}}\right)$ se verifican las siguientes relaciones

1. $\arg(n_x) = -\phi(A_x)$ si y sólo si $\arg(d_b - d_a) = 0^\circ$.
2. $\arg(n_x) = 90^\circ - \phi(A_x)$ si y sólo si $\arg(d_b - d_a) = 90^\circ$.
3. $\arg(n_x) = 180^\circ - \phi(A_x)$ si y sólo si $\arg(d_b - d_a) = 180^\circ$.
4. $\arg(n_x) = 270^\circ - \phi(A_x)$ si y sólo si $\arg(d_b - d_a) = 270^\circ$.

El siguiente teorema muestra como caracterizar y calcular los polinomios n_x y d_x asociados al vértice $v_x = \frac{n_x}{d_x}$, a partir de la información obtenida de un arco A_x de la frontera en un cuadrante. $v_x = \frac{n_x}{d_x}$ es un vértice perteneciente a la intersección de un arco y un segmento de la frontera, elegidos en sentido antihorario.

Teorema 4.3

[Predecesor.] Sean A_1 un arco completo de la frontera del conjunto de valores con vértices $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$ y $v_2 = \frac{n_1}{d_2}$, el segmento de la frontera sucesor a A_1 , de vértices $v_2 = \frac{n_1}{d_2}$ y $v_{2suc} = \frac{n_{2\lambda}}{d_2}$,

y el segmento de la frontera predecesor a A_1 , con vértices $v_{1pred} = \frac{n_{4\lambda}}{d_1}$ y $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$, todos en sentido antihorario. Sea A_x un arco de la frontera de vértices $v_{xpred} = \frac{n_x}{d_{xpred}}$ y $v_x = \frac{n_x}{d_x}$ en sentido antihorario, donde $v_x = \frac{n_x}{d_x}$ es un vértice perteneciente a la intersección del arco A_x con un segmento de la frontera. Entonces:

1. $\arg\left(\frac{v_2}{v_x}\right) = \arg(n_1) + \phi(A_x)$ (condición C3.1) y el numerador n_x de v_x determinado como $d_2 v_x$ satisface la condición del numerador (lema 4.4), si y solo si $d_x = d_2$ y no puede ser otro polinomio asignado.
2. Cuando $d_x \neq d_2$, $\arg\left(\frac{v_1}{v_x}\right) = \arg(n_1) + \phi(A_x) + 90^\circ$ (condición C3.2) y el numerador n_x de v_x determinado como $d_1 v_x$ satisface la condición del numerador (lema 4.4), si y solo si $d_x = d_1$ y no puede ser otro polinomio asignado.
3. Cuando $d_x \neq d_1$ y $d_x \neq d_2$, $\tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 90^\circ\right) d_{2R} > d_{2I}$ (condición C3.3), y el numerador n_x de v_x determinado como $d_{2R} \left[1 + j \tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 90^\circ\right)\right] v_x$ satisface la condición del numerador (lema 4.4), si y solo si $d_x = d_3 = d_{2R} \left(1 + j \tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 90^\circ\right)\right)$ y no puede ser otro polinomio asignado.
4. Cuando $d_x \neq d_1$, $d_x \neq d_2$, y $d_x \neq d_3$, $\tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 180^\circ\right) d_{1R} > d_{1I}$ (condición C3.4), y el numerador n_x de v_x determinado como $d_{1R} \left[1 + j \tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 180^\circ\right)\right] v_x$ satisface la condición del numerador (lema 4.4), si y solo si $d_x = d_4 = d_{1R} \left(1 + j \tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 180^\circ\right)\right)$.

Demostración:

A partir del arco completo A_1 , aplicando la normalización (lema 4.3) se obtienen los valores de n_1 , $d_1 = \frac{n_1}{v_1}$, $d_2 = \frac{n_1}{v_2}$, $n_{4\lambda} = d_1 v_{1pred}$ y $n_{2\lambda} = d_2 v_{2suc}$. El valor de v_x es conocido.

1. \Leftarrow Si $d_x = d_2$ el valor de $n_x = d_2 v_x$ se puede calcular, y por tanto se satisface la condición del numerador (lema 4.4), ya que al ser v_x un vértice de la frontera, n_x será uno de los polinomios asignados del numerador, y por tanto debe verificar una de las cuatro condiciones del lema.

Dividiendo el valor de $v_2 = \frac{n_1}{d_2}$ por el valor de $v_x = \frac{n_x}{d_x}$ se obtiene que $\frac{v_2}{v_x} = \frac{n_1}{n_x}$, y $\arg\left(\frac{v_2}{v_x}\right) = \arg(n_1) - \arg(n_x)$.

Además, $A_x = \frac{n_x}{S_2}$, donde S_2 es parte del segmento de vértices d_1 y d_2 , verificándose que $\arg(d_2 - d_1) = 0^\circ$ (por la normalización, pues tienen la misma parte imaginaria y su diferencia es un número real). Por la proposición 4.2 $\arg(n_x) = -\phi(A_x)$, y entonces $\arg\left(\frac{v_2}{v_x}\right) = \arg(n_1) + \phi(A_x)$, verificándose la condición C3.1.

\Rightarrow Para demostrar esta implicación, basta probar que si la condición C3.1 y la condición del numerador se satisfacen, entonces la solución $n_x = d_2 v_x$, $d_x = d_2$, es única. Nótese que la condición C3.1 se puede cumplir también cuando a) $d_x = d_3$, b) $d_x = d_4$ o c) $d_x = d_1$, y que en cada caso, el valor del numerador n_x determinado verifica la condición del numerador.

Sea n_x el numerador de v_x determinado como $d_2 v_x$, verificando la condición C3.1 y la condición del numerador. Además $A_x = \frac{n_x}{S_2}$, donde S_2 es parte del segmento de vértices d_1 y d_2 , y $\arg(d_2 - d_1) = 0^\circ$.

a) Sea n_x^* el numerador de v_x determinado como $d_3 v_x$. Entonces $A_x = \frac{n_x^*}{S_3}$, donde S_3 es parte del segmento de vértices d_2 y d_3 , $\arg(d_3 - d_2) = 90^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.2 $\arg(n_x^*) = 90^\circ - \phi(A_x)$. Como v_x es el mismo vértice, entonces $\arg\left(\frac{n_x^*}{d_3}\right) = \arg\left(\frac{n_x}{d_2}\right)$, de donde se deduce que $\arg(d_3) = \arg(d_2) + 90^\circ$. $d_x = d_3$ verifica la condición C3.1, puesto que

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{v_2}{v_x}\right) &= \arg(n_1) + \phi(A_x) - 90^\circ + \arg(d_2) + 90^\circ - \arg(d_2) \\ &= \arg(n_1) + \phi(A_x). \end{aligned}$$

Sea $\alpha = \arg(d_2)$, con $\tan(\alpha) = \frac{d_{2I}}{d_{2R}}$. Entonces $\arg(d_3) = \alpha + 90^\circ$ y $\tan(\alpha + 90^\circ) = \frac{d_{3I}}{d_{3R}} = \frac{d_{3I}}{d_{2R}}$ (por la normalización $d_{3R} = d_{2R}$). Por lo tanto $d_3 = d_{2R} + j d_{3I} = d_{2R} + j \tan(\alpha + 90^\circ) d_{2R} = d_{2R} - j \frac{d_{2I}^2}{d_{2R}}$. Además $\arg(n_x^*) = 90^\circ + \arg(n_x)$, luego si $n_x = n_{xR} + j n_{xI}$ entonces $n_x^* = \rho e^{j\frac{\pi}{2}} n_x = -\rho n_{xI} + j \rho n_{xR}$.

Como $v_x = \frac{n_x}{d_2}$ y $v_x = \frac{n_x^*}{d_3}$, entonces $d_2 n_x^* = d_3 n_x$ y coinciden sus partes reales y sus partes imaginarias.

$Re(d_2 n_x^*) = Re(d_3 n_x)$, luego

$$\begin{aligned} -\rho n_{xI} d_{2R} - \rho n_{xR} d_{2I} &= d_{2R} n_{xR} + \frac{d_{2R}^2}{d_{2I}} n_{xI} \\ -\rho n_{xI} d_{2R} d_{2I} - \rho n_{xR} d_{2I}^2 &= d_{2R} d_{2I} n_{xR} + d_{2R}^2 n_{xI} \\ -(\rho d_{2I} + d_{2R}) n_{xR} d_{2I} &= (d_{2R} + \rho d_{2I}) n_{xI} d_{2R}. \end{aligned}$$

Así pues $\frac{n_{xI}}{n_{xR}} = -\frac{d_{2I}}{d_{2R}}$.

$Im(d_2 n_x^*) = Im(d_3 n_x)$, luego

$$\begin{aligned} \rho n_{xR} d_{2R} - \rho n_{xI} d_{2I} &= n_{xI} d_{2R} - n_{xR} \frac{d_{2R}^2}{d_{2I}} \\ \rho n_{xR} d_{2R} d_{2I} - \rho n_{xI} d_{2I}^2 &= n_{xI} d_{2R} d_{2I} - n_{xR} d_{2R}^2 \\ (d_{2I} \rho + d_{2R}) d_{2R} n_{xR} &= n_{xI} d_{2I} (d_{2R} + \rho d_{2I}). \end{aligned}$$

Por tanto $\frac{n_{xI}}{n_{xR}} = \frac{d_{2R}}{d_{2I}}$.

Igualando ambos resultados, $\frac{d_{2R}}{d_{2I}} = -\frac{d_{2I}}{d_{2R}} \Leftrightarrow d_{2R}^2 < 0$, lo cual no es posible.

Por tanto, n_x es una solución, n_x^* no lo es y $d_x = d_3$ no es una solución.

- b) Sea n_x^* el denominador de v_x determinado como $d_4 v_x$. Entonces $A_x = \frac{n_x^*}{S_4}$, donde S_4 es parte del segmento de vértices d_3 y d_4 , $\arg(d_4 - d_3) = 180^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.1 $\arg(n_x^*) = 180^\circ - \phi(A_x)$. Como v_x es el mismo vértice, entonces $\arg\left(\frac{n_x^*}{d_4}\right) = \arg\left(\frac{n_x}{d_2}\right)$, de donde se deduce que $\arg(d_4) = \arg(d_2) + 180^\circ$. $d_x = d_4$ verifica la condición C3.1, puesto que

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{v_2}{v_x}\right) &= \arg(d_2) + 180^\circ - \arg(d_2) + \arg(n_1) - 180^\circ + \phi(A_x) \\ &= \arg(n_1) + \phi(A_x). \end{aligned}$$

En este caso la demostración es trivial, ya que $\arg(n_x^*) = 180^\circ + \arg(n_x)$. Esta relación no es posible, ya que el polinomio de Kharitonov del numerador no contiene al cero.

- c) Sea n_x^* el numerador de v_x determinado como $d_1 v_x$. Entonces $A_x = \frac{n_x^*}{S_1}$, donde S_1 es parte del segmento de vértices d_4 y d_1 , $\arg(d_4 - d_1) = 270^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.2 $\arg(n_x^*) = 270^\circ - \phi(A_x)$. Como v_x es el mismo vértice, entonces $\arg\left(\frac{n_x^*}{d_1}\right) = \arg\left(\frac{n_x}{d_2}\right)$, de donde se deduce que

$\arg(d_1) = \arg(d_2) + 270^\circ$. $d_x = d_1$ verifica la condición C3.1, puesto que

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{v_2}{v_x}\right) &= \arg(n_1) - 270^\circ + \phi(A_x) + \arg(d_2) + 270^\circ - \arg(d_2) \\ &= \arg(n_1) + \phi(A_x).\end{aligned}$$

Sea $\alpha = \arg(d_2)$, con $\tan(\alpha) = \frac{d_{2I}}{d_{2R}}$. Entonces $\arg(d_1) = \alpha + 270^\circ$ y

$$\tan(\alpha + 270^\circ) = \frac{d_{1I}}{d_{1R}} = \frac{d_{2I}}{d_{1R}} \quad (\text{por la normalización } d_{1I} = d_{2I}).$$

$$d_1 = d_{1R} + jd_{1I} = \frac{d_{2I}}{\tan(\alpha + 270^\circ)} + jd_{2I} = -\frac{d_{2I}^2}{d_{2R}} + jd_{2I}.$$

Además, $\arg(n_x^*) = 270^\circ + \arg(n_x)$, luego si $n_x = n_{xR} + jn_{xI}$ entonces $n_x^* = \rho e^{j3\frac{\pi}{2}} n_x = \rho n_{xI} - j\rho n_{xR}$.

Como $v_x = \frac{n_x}{d_2}$ y $v_x = \frac{n_x^*}{d_1}$, entonces $d_2 n_x^* = d_1 n_x$ y coinciden sus partes reales y sus partes imaginarias.

$Re(d_2 n_x^*) = Re(d_1 n_x)$, luego

$$\begin{aligned}+\rho n_{xI} d_{2R} + \rho n_{xR} d_{2I} &= -\frac{d_{2I}^2}{d_{2R}} n_{xR} - d_{2I} n_{xI} \\ (d_{2I} + d_{2R}\rho) n_{xI} d_{2R} &= -(d_{2R}\rho + d_{2I}) n_{xR} d_{2I}.\end{aligned}$$

Así pues $\frac{n_{xI}}{n_{xR}} = -\frac{d_{2I}}{d_{2R}}$.

$Im(d_2 n_x^*) = Im(d_1 n_x)$, luego

$$\begin{aligned}-\rho n_{xR} d_{2R} + \rho n_{xI} d_{2I} &= -n_{xI} \frac{d_{2I}^2}{d_{2R}} + n_{xR} d_{2I} \\ -\rho n_{xR} d_{2R} d_{2R} + \rho n_{xI} d_{2I} d_{2R} &= -n_{xI} d_{2I}^2 + n_{xR} d_{2I} d_{2R} \\ (d_{2I} + \rho d_{2R}) n_{xI} d_{2I} &= n_{xR} d_{2R} (\rho d_{2R} + d_{2I}).\end{aligned}$$

Por tanto $\frac{n_{xI}}{n_{xR}} = \frac{d_{2R}}{d_{2I}}$.

Igualando ambos resultados, $\frac{d_{2R}}{d_{2I}} = -\frac{d_{2I}}{d_{2R}} \Leftrightarrow d_{2R}^2 < 0$, lo cual no es posible.

Por tanto, n_x es una solución, n_x^* no lo es y $d_x = d_1$ no es una solución.

2. \Leftarrow Si $d_x = d_1$ el valor de $n_x = d_1 v_x$ se puede calcular, y por tanto se satisface la condición del numerador (lema4.4), ya que al ser v_x un vértice de la frontera, n_x será uno de los polinomios asignados del numerador, y por tanto debe verificar una de las cuatro condiciones del lema.

Dividiendo el valor de $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$ por el valor de $v_x = \frac{n_x}{d_x}$ se obtiene $\frac{v_1}{v_x} = \frac{n_1}{n_x}$ y

$$\arg\left(\frac{v_1}{v_x}\right) = \arg(n_1) - \arg(n_x).$$

Además $A_x = \frac{n_x}{S_1}$, donde S_1 es parte del segmento de vértices d_4 y d_1 , verificándose que $\arg(d_1 - d_4) = 270^\circ$ (por la normalización). Por la proposición 4.2 $\arg(n_x) = 270 - \phi(A_x)$, y entonces $\arg\left(\frac{v_1}{v_x}\right) = \phi(A_x) + 90^\circ + \arg(n_1)$, verificándose la condición C3.2.

\Rightarrow Para demostrar esta implicación, basta probar que si la condición C3.2 y la condición del numerador se satisfacen, entonces la solución $n_x = d_1 v_x$, $d_x = d_1$, es única. Nótese que si $d_x \neq d_2$, la condición C3.2 se puede cumplir también cuando a) $d_x = d_3$ o b) $d_x = d_4$, y que en cada caso, el valor del numerador n_x determinado verifica la condición del numerador.

Sea n_x el numerador de v_x determinado como $d_1 v_x$, verificando la condición C3.2 y la condición del numerador. Además $A_x = \frac{n_x}{S_1}$, donde S_1 es parte del segmento de vértices d_1 y d_4 , y $\arg(d_4) = \arg(d_1) + 270^\circ$.

a) Sea n_x^* el numerador de v_x determinado como $d_3 v_x$. Entonces $A_x = \frac{n_x^*}{S_3}$, donde S_3 es parte del segmento de vértices d_2 y d_3 , $\arg(d_3 - d_2) = 90^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.2 $\arg(n_x^*) = 90^\circ - \phi(A_x)$. Como v_x es el mismo vértice, entonces $\arg\left(\frac{n_x^*}{d_3}\right) = \arg\left(\frac{n_x}{d_1}\right)$, de donde se deduce que $\arg(d_3) = \arg(d_1) + 180^\circ$. $d_x = d_3$ verifica la condición C3.2, puesto que

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{v_1}{v_x}\right) &= \arg(d_1) + 180^\circ - \arg(d_1) + \arg(n_1) - 90^\circ + \phi(A_x) \\ &= \arg(n_1) + \phi(A_x) + 90^\circ. \end{aligned}$$

En este caso, la demostración es trivial, ya que $\arg(n_x^*) = -180^\circ + \arg(n_x)$ ($\arg(n_x) = 270^\circ - \phi(A_x)$ y $\arg(n_x^*) = 90^\circ - \phi(A_x)$). Esto no es posible, porque el polinomio de Kharitonov del numerador no puede contener el cero.

b) Sea n_x^* el denominador de v_x determinado como $d_4 v_x$. Entonces $A_x = \frac{n_x^*}{S_4}$, donde S_4 es parte del segmento de vértices d_3 y d_4 , $\arg(d_4 - d_3) = 180^\circ$ por la normalización, y por la proposición 4.2, $\arg(n_x^*) = 180^\circ - \phi(A_x)$. Como v_x es el mismo vértice, entonces $\arg\left(\frac{n_x^*}{d_4}\right) = \arg\left(\frac{n_x}{d_1}\right)$, de donde se deduce que

$\arg(d_4) = \arg(d_1) + 270^\circ$. $d_x = d_4$ verifica la condición C3.2, puesto que

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{v_1}{v_x}\right) &= \arg(n_1) - 180^\circ + \phi(A_x) + \arg(d_1) + 270^\circ - \arg(d_1) \\ &= \phi(A_x) + 90 + \arg(n_1).\end{aligned}$$

Sea $\alpha = \arg(d_1)$, con $\tan(\alpha) = \frac{d_{1I}}{d_{1R}}$. Entonces $\arg(d_4) = \alpha + 270^\circ$ y $\tan(\alpha + 270^\circ) = \frac{d_{4I}}{d_{4R}} = \frac{d_{4I}}{d_{1R}}$ (por la normalización). Por lo tanto $d_4 = d_{4R} + jd_{4I} = d_{1R} + jd_{1R}\tan(\alpha + 270) = d_{1R} - j\frac{d_{1R}^2}{d_{1I}}$. Además $\arg(n_x^*) = 270^\circ + \arg(n_x)$, luego si $n_x = n_{xR} + jn_{xI}$ entonces $n_x^* = \rho e^{j3\frac{\pi}{2}}n_x = \rho n_{xI} - j\rho n_{xR}$. Como $v_x = \frac{n_x}{d_1}$ y $v_x = \frac{n_x^*}{d_4}$, entonces $d_1 n_x^* = d_4 n_x$ y coinciden sus partes reales y sus partes imaginarias.

$Re(d_1 n_x^*) = Re(d_4 n_x)$, luego

$$\begin{aligned}\rho n_{xI} d_{1R} + \rho n_{xR} d_{1I} &= +\frac{d_{1R}^2}{d_{1I}} n_{xI} + d_{1R} n_{xR} \\ \rho n_{xI} d_{1R} d_{1I} + \rho n_{xR} d_{1I} d_{1I} &= +d_{1R}^2 n_{xI} + d_{1R} n_{xR} d_{1I} \\ (\rho d_{1I} - d_{1R}) n_{xI} d_{1R} &= (d_{1R} - \rho d_{1I}) n_{xR} d_{1I}.\end{aligned}$$

Así pues $\frac{n_{xI}}{n_{xR}} = -\frac{d_{1I}}{d_{1R}}$.

$Im(d_1 n_x^*) = Im(d_4 n_x)$, luego

$$\begin{aligned}-\rho n_{xR} d_{1R} + \rho n_{xI} d_{1I} &= -n_{xR} \frac{d_{1R}^2}{d_{1I}} + n_{xI} d_{1R} \\ -\rho n_{xR} d_{1R} d_{1I} + \rho n_{xI} d_{1I} d_{1I} &= -n_{xR} d_{1R}^2 + n_{xI} d_{1R} d_{1I} \\ (-\rho d_{1I} + d_{1R}) n_{xR} d_{1R} &= (d_{1R} - \rho d_{1I}) n_{xI} d_{1I}.\end{aligned}$$

Por tanto $\frac{n_{xI}}{n_{xR}} = \frac{d_{1R}}{d_{1I}}$.

Igualando ambos resultados, $-\frac{d_{1I}}{d_{1R}} = \frac{d_{1R}}{d_{1I}} \Leftrightarrow d_{1R}^2 < 0$, lo cual no es posible.

Por tanto, n_x es una solución, n_x^* no lo es y $d_x = d_4$ no es una solución.

3. \Leftarrow Si $d_x = d_3$ entonces $n_x = d_3 v_x$ no se puede calcular directamente, porque no se conoce el valor de d_3 . Veremos en primer lugar que la condición C3.3 se verifica. Si $d_x = d_3$ entonces $A_x = \frac{n_x}{S_3}$, donde S_3 es parte del segmento de vértices d_2 y d_3 , verificándose que $\arg(d_3 - d_2) = 90^\circ$ (por la normalización.). Por la proposición 4.2 $\arg(n_x) = 90^\circ - \phi(A_x)$ y entonces $\arg(d_3) = \arg(n_x) - \arg(v_x) =$

$90^\circ - \phi(A_x) + \arg\left(\frac{1}{v_x}\right)$. Como $d_{2R} = d_{3R}$ entonces $d_3 = d_{3R} + jd_{3I} = d_{2R} + jd_{2R} \tan\left(90^\circ - \phi(A_x) + \arg\left(\frac{1}{v_x}\right)\right)$.

Por otro lado $d_{3I} > d_{2I}$ porque los vértices asignados son elegidos en sentido antihorario. Por tanto se verifica que $\tan\left(90^\circ - \phi(A_x) + \arg\left(\frac{1}{v_x}\right)\right) n_{2R} > n_{2I}$, que es la condición C3.3.

Además puede calcularse n_x mediante la expresión

$$n_x = d_3 v_x = d_{2R} \left[1 + j \tan\left(90^\circ - \phi(A_x) + \arg\left(\frac{1}{v_x}\right)\right) \right] v_x.$$

\Rightarrow Para demostrar esta implicación, basta probar que si la condición C3.3 y la condición del numerador se satisfacen, entonces la solución $n_x = d_3 v_x$, $d_x = d_3$, es única. Nótese que si $d_x \neq d_2$ y $d_x \neq d_1$, la condición C3.3 se puede cumplir cuando $d_x = d_4$.

Sea n_x el numerador de v_x determinado como $d_3 v_x$, verificando la condición C3.3 y la condición del numerador. Además $A_x = \frac{n_x}{S_3}$, donde S_3 es parte del segmento de vértices d_2 y d_3 y $\arg(d_3 - d_2) = 90^\circ$.

Sea n_x^* el numerador de v_x determinado como $d_4 v_x$. Entonces $A_x = \frac{n_x^*}{S_4}$, donde S_4 es parte del segmento de vértices d_3 y d_4 , $\arg(d_4 - d_3) = 180^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.2 $\arg(n_x^*) = 180^\circ - \phi(A_x) = \arg(n_x) + 90^\circ$. Por tanto $n_x^* = \rho j (n_{xR} + j n_{xI}) = -\rho n_{xI} + j \rho n_{xR}$.

Como v_x es el mismo vértice, $\arg\left(\frac{n_x}{d_3}\right) = \arg\left(\frac{n_x^*}{d_4}\right)$, de donde se deduce que $\arg(d_4) = \arg(d_3) + 90^\circ$. Sea $\alpha = \arg(d_3)$, entonces $\alpha + 90^\circ = \arg(d_4) = \arg(n_x^*) + \arg\left(\frac{1}{v_x}\right) = 180^\circ - \phi(A_x) + \arg\left(\frac{1}{v_x}\right)$. Por tanto $\alpha = 90^\circ - \phi(A_x) + \arg\left(\frac{1}{v_x}\right)$ y como es el argumento de d_3 verifica $d_{3R} = d_{2R} \tan(\alpha) > d_{2I}$ (por la normalización), es decir, la condición C3.3 se satisface.

Si $d_x = d_4$ entonces $d_4 = d_{4R} + jd_{4I} = d_{1R} + jd_{2R} \tan\left(90^\circ - \phi(A_x) + \arg\left(\frac{1}{v_x}\right)\right)$ y el numerador n_x^* puede calcularse mediante la expresión

$$n_x^* = v_x d_4 = v_x \left(d_{1R} + jd_{2R} \tan\left(90^\circ - \phi(A_x) + \arg\left(\frac{1}{v_x}\right)\right) \right).$$

Como $\tan(\alpha) = \frac{d_{3I}}{d_{3R}}$, entonces $d_3 = d_{3R} + jd_{3I} = d_{2R} + jd_{2R} \tan(\alpha) = d_{2R} + jd_{2R} \frac{d_{3I}}{d_{3R}}$,

$$\text{y } d_4 = d_{4R} + jd_{4I} = d_{1R} + jd_{1R} \tan(\alpha + 90) = d_{1R} - jd_{1R} \frac{d_{3R}}{d_{3I}}.$$

Como $v_x = \frac{n_x}{d_3}$ y $v_x = \frac{n_x^*}{d_4}$, entonces $d_3 n_x^* = d_4 n_x$ y coinciden sus partes reales y sus partes imaginarias.

$Re(d_3 n_x^*) = Re(d_4 n_x)$, luego

$$\begin{aligned} -d_{2R} \rho n_{xI} - d_{3I} \rho n_{xR} &= d_{1R} n_{xR} + n_{xI} d_{1R} \frac{d_{2R}}{d_{3I}} \\ -d_{2R} d_{3I} \rho n_{xI} - d_{3I} d_{3I} \rho n_{xR} &= d_{1R} d_{3I} n_{xR} + n_{xI} d_{1R} d_{3I} \\ -(d_{3I} \rho + d_{1R}) d_{2R} n_{xI} &= (d_{1R} + d_{3I} \rho) d_{3I} n_{xR}. \end{aligned}$$

Así pues $\frac{n_{xI}}{n_{xR}} = -\frac{d_{3I}}{d_{3R}}$.

$Im(d_3 n_x^*) = Im(d_4 n_x)$, luego

$$\begin{aligned} -d_{3I} \rho n_{xI} + d_{2R} \rho n_{xR} &= n_{xI} d_{1R} - n_{xR} d_{1R} \frac{d_{2R}}{d_{3I}} \\ -d_{3I} d_{3I} \rho n_{xI} + d_{3I} d_{2R} \rho n_{xR} &= n_{xI} d_{1R} d_{3I} - n_{xR} d_{1R} d_{2R} \\ -(d_{3I} \rho + d_{1R}) n_{xI} d_{3I} &= -(d_{3I} \rho + d_{1R}) n_{xR} d_{2R}. \end{aligned}$$

Por tanto $\frac{n_{xI}}{n_{xR}} = \frac{d_{3R}}{d_{3I}}$.

Igualando ambos resultados, $-\frac{d_{3I}}{d_{3R}} = \frac{d_{3R}}{d_{3I}} \Leftrightarrow d_{3R}^2 < 0$, lo cual no es posible. Por tanto n_x es una solución, n_x^* no lo es y $d_x = d_3$ no es una solución.

4. \Leftarrow Si $d_x = d_4$ entonces $n_x = d_4 v_x$ no se puede calcular directamente, puesto que no se conoce el valor de d_4 . Veremos en primer lugar que la condición C3.4 se verifica.

Si $d_x = d_4$ entonces $A_x = \frac{n_x}{S_4}$, donde S_4 es parte del segmento de vértices d_3 y d_4 , verificándose que $\arg(d_4 - d_3) = 180^\circ$ (por la normalización). Por la proposición 4.2 $\arg(n_x) = 180^\circ - \phi(A_x)$ y entonces $\arg(d_4) = \arg(n_x) + \arg\left(\frac{1}{v_x}\right) = 180^\circ - \phi(A_x) + \arg\left(\frac{1}{v_x}\right)$. Como $d_{1R} = d_{4R}$, entonces $d_4 = d_{4R} + jd_{4I} = d_{1R} + jd_{1R} \tan\left(180^\circ - \phi(A_x) + \arg\left(\frac{1}{v_x}\right)\right)$.

Por otro lado $d_{4I} > d_{1I}$ porque los vértices asignados son elegidos en sentido antihorario. Por tanto se verifica que $\tan\left(180^\circ - \phi(A_x) + \arg\left(\frac{1}{v_x}\right)\right) d_{1R} > d_{1I}$, que es la condición C3.4.

Además puede calcularse n_x mediante la expresión

$$n_x = d_4 v_x = d_{1R} \left[1 + j \tan \left(180^\circ - \phi(A_x) + \arg \left(\frac{1}{v_x} \right) \right) \right] v_x.$$

\Rightarrow Si $d_x \neq d_2$, $d_x \neq d_1$ y $d_x \neq d_3$ entonces $d_x = d_4$. ■

El siguiente teorema es análogo al teorema 4.3, pero en este caso A_x es un arco de vértices $v_x = \frac{n_x}{d_x}$ y $v_{xsuc} = \frac{n_x}{d_{xsuc}}$, en sentido antihorario. $v_x = \frac{n_x}{d_x}$ es un vértice perteneciente a la intersección de un segmento y un arco de la frontera.

Teorema 4.4

[Sucesor.] Sean A_1 un arco completo de la frontera del conjunto de valores, con vértices $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$ y $v_2 = \frac{n_1}{d_2}$, el segmento de la frontera sucesor a A_1 , de vértices $v_2 = \frac{n_1}{d_2}$ y $v_{2suc} = \frac{n_{2\lambda}}{d_2}$, y el segmento de la frontera predecesor a A_1 , con vértices $v_{1pred} = \frac{n_{4\lambda}}{d_1}$ y $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$, todos en sentido antihorario. Sea A_x un arco de la frontera de vértices $v_{xsuc} = \frac{n_x}{d_{xsuc}}$ y $v_x = \frac{n_x}{d_x}$, en sentido antihorario, donde v_x es un vértice perteneciente a la intersección de un segmento de la frontera y el arco A_x . Entonces:

1. $\arg \left(\frac{v_2}{v_x} \right) = \phi(A_x) + \arg(n_1) - 90^\circ$ (condición C4.1) y el numerador n_x de v_x determinado como $d_2 v_x$ satisface la condición del numerador (lema 4.4), si y solo si $d_x = d_2$, y no puede ser otro polinomio asignado.
2. Cuando $d_x \neq d_2$, $\arg \left(\frac{v_1}{v_x} \right) = \phi(A_x) + \arg(n_1)$ (condición C4.2) y el numerador n_x de v_x determinado como $d_1 v_x$ satisface la condición del numerador (lema 4.4), si y solo si $d_x = d_1$, y no puede ser otro polinomio asignado.
3. Cuando $d_x \neq d_1$ y $d_x \neq d_2$, $\tan \left(\arg \left(\frac{1}{v_x} \right) - \phi(A_x) + 180^\circ \right) d_{2R} > d_{2I}$ (condición C4.3), y el numerador n_x de v_x determinado como $n_x = d_{2R} \left[1 + j \tan \left(\arg \left(\frac{1}{v_x} \right) - \phi(A_x) + 180^\circ \right) \right] v_x$ satisface la condición del numerador (lema 4.4), si y solo si $d_x = d_3 = d_{2R} \left[1 + j \tan \left(\arg \left(\frac{1}{v_x} \right) - \phi(A_x) + 180^\circ \right) \right]$, y no puede ser otro polinomio asignado.
4. Cuando $d_x \neq d_1$, $d_x \neq d_2$ y $d_x \neq d_3$, $\tan \left(\arg \left(\frac{1}{v_x} \right) - \phi(A_x) + 270^\circ \right) d_{1R} > d_{1I}$ (condición C4.4), y el numerador n_x de v_x determinado como $n_x =$

$d_{1R} \left[1 + j \tan \left(\arg \left(\frac{1}{v_x} \right) - \phi(A_x) + 270^\circ \right) \right] v_x$ satisface la condición del numerador (lema 4.4), si y solo si $d_x = d_4 = d_{1R} \left[1 + j \tan \left(\arg \left(\frac{1}{v_x} \right) - \phi(A_x) + 270^\circ \right) \right]$.

Demostración:

A partir del arco completo A_1 , aplicando la normalización (lema 4.3) se obtienen los valores de n_1 , $d_1 = \frac{n_1}{v_1}$, $d_2 = \frac{n_1}{v_2}$, $n_{4\lambda} = d_1 v_{1pred}$ y $n_{2\lambda} = d_2 v_{2suc}$. El valor de v_x es conocido.

1. \Leftarrow Si $d_x = d_2$ el valor de $n_x = d_2 v_x$ se puede calcular, y por tanto se satisface la condición del numerador (lema 4.4), ya que al ser v_x un vértice de la frontera, n_x será uno de los polinomios asignados del numerador y por tanto debe verificar una de las cuatro condiciones del lema.

Dividiendo el valor de $v_2 = \frac{n_1}{d_2}$ y $v_x = \frac{n_x}{d_x}$ se obtiene que $\frac{v_2}{v_x} = \frac{n_1}{n_x}$, y $\arg \left(\frac{v_2}{v_x} \right) = \arg(n_1) - \arg(n_x)$.

Además $A_x = \frac{n_x}{S_2}$, donde S_2 es parte del segmento de vértices d_2 y d_3 , verificándose que $\arg(d_3 - d_2) = 90^\circ$ (por la normalización). Por la proposición 4.2, $\arg(n_x) = 90^\circ - \phi(A_x)$ y entonces $\arg \left(\frac{v_2}{v_x} \right) = \arg(n_1) + \phi(A_x) - 90^\circ$, verificándose la condición C4.1.

\Rightarrow Para demostrar esta implicación, basta probar que si la condición C4.1 y la condición del numerador se satisfacen, entonces la solución $n_x = d_2 v_x$, $d_x = d_2$, es única. Nótese que la condición C4.1 se puede cumplir cuando a) $d_x = d_3$, b) $d_x = d_4$ o c) $d_x = d_1$, y que en cada caso, el valor del numerador n_x determinado, verifica la condición del numerador.

Sea n_x el numerador de v_x determinado como $d_2 v_x$, verificando la condición C4.1 y la condición del numerador. Además $A_x = \frac{n_x}{S_2}$, donde S_2 es parte del segmento de vértices d_2 y d_3 , y $\arg(d_3 - d_2) = 90^\circ$.

- a) Sea n_x^* el numerador de v_x determinado como $d_3 v_x$. Entonces $A_x = \frac{n_x^*}{S_3}$, donde S_3 es parte del segmento de vértices d_4 y d_3 , $\arg(d_4 - d_3) = 180^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.2 $\arg(n_x^*) = 180^\circ - \phi(A_x)$. Como v_x es el mismo vértice, entonces $\arg \left(\frac{n_x^*}{d_3} \right) = \arg \left(\frac{n_x}{d_2} \right)$, de donde se deduce que

$\arg(d_3) = \arg(d_2) + 90^\circ$. $d_x = d_3$ verifica la condición C4.1, puesto que

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{v_2}{v_x}\right) &= \arg(d_2) + 90^\circ - \arg(d_2) + \arg(n_1) - 180^\circ + \phi(A_x) \\ &= \arg(n_1) + \phi(A_x) - 90^\circ. \end{aligned}$$

Sea $\alpha = \arg(d_2)$, con $\tan(\alpha) = \frac{d_{2I}}{d_{2R}}$. Entonces $\arg(d_3) = \alpha + 90^\circ$ y $\tan(\alpha + 90^\circ) = \frac{d_{3I}}{d_{3R}} = \frac{d_{3I}}{d_{2R}}$ (por la normalización $d_{3R} = d_{2R}$). Por lo tanto $d_3 = d_{2R} + jd_{3I} = d_{2R} + j \tan(\alpha + 90^\circ) d_{2R} = d_{2R} - j \frac{d_{2R}^2}{d_{2I}}$. Además $\arg(n_x^*) = 90^\circ + \arg(n_x)$, luego si $n_x = n_{xR} + jn_{xI}$ entonces $n_x^* = \rho e^{j\frac{\pi}{2}} n_x = -\rho n_{xI} + j\rho n_{xR}$. Como $v_x = \frac{n_x^*}{d_3}$ y $v_x = \frac{n_x}{d_2}$, entonces $d_2 n_x^* = d_3 n_x$ y coinciden sus partes reales y sus partes imaginarias.

$Re(d_2 n_x^*) = Re(d_3 n_x)$, luego

$$\begin{aligned} -\rho n_{xI} d_{2R} - \rho n_{xR} d_{2I} &= d_{2R} n_{xR} + \frac{d_{2R}^2}{d_{2I}} n_{xI} \\ -\rho n_{xI} d_{2R} d_{2I} - \rho n_{xR} d_{2I}^2 &= d_{2R} d_{2I} n_{xR} + d_{2R}^2 n_{xI} \\ -(\rho d_{2I} + d_{2R}) n_{xR} d_{2I} &= (d_{2R} + \rho d_{2I}) n_{xI} d_{2R}. \end{aligned}$$

Así pues $\frac{n_{xI}}{n_{xR}} = -\frac{d_{2I}}{d_{2R}}$.

$Im[d_2 n_x^*] = Im[d_3 n_x]$, luego

$$\begin{aligned} \rho n_{xR} d_{2R} - \rho n_{xI} d_{2I} &= n_{xI} d_{2R} - n_{xR} \frac{d_{2R}^2}{d_{2I}} \\ \rho n_{xR} d_{2R} d_{2I} - \rho n_{xI} d_{2I}^2 &= n_{xI} d_{2R} d_{2I} - n_{xR} d_{2R}^2 \\ (d_{2I} \rho + d_{2R}) d_{2R} n_{xR} &= n_{xI} d_{2I} (d_{2R} + \rho d_{2I}). \end{aligned}$$

Por tanto $\frac{n_{xI}}{n_{xR}} = \frac{d_{2R}}{d_{2I}}$.

Igualando ambos resultados, $\frac{d_{2R}}{d_{2I}} = -\frac{d_{2I}}{d_{2R}} \Leftrightarrow d_{2R}^2 < 0$, lo cual no es posible. Por tanto n_x es una solución, n_x^* no lo es y $d_x = d_3$ no es una solución.

- b) Sea n_x^* el numerador de v_x determinado como $d_4 v_x$. Entonces $A_x = \frac{n_x^*}{S_4}$, donde S_4 es parte del segmento de vértices d_1 y d_4 , $\arg(d_1 - d_4) = 270^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.2 $\arg(n_x^*) = 270^\circ - \phi(S_x)$. Como v_x es el mismo vértice, entonces $\arg\left(\frac{n_x^*}{d_4}\right) = \arg\left(\frac{n_x}{d_2}\right)$, de donde se deduce que

$\arg(d_4) = \arg(d_2) + 180^\circ$. $d_x = d_4$ verifica la condición C4.1, puesto que

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{v_2}{v_x}\right) &= \arg(d_2) + 180^\circ - \arg(d_2) + \arg(n_1) - 270^\circ + \phi(S_x) \\ &= \arg(n_1) + \phi(S_x) - 90^\circ.\end{aligned}$$

En este caso la demostración es trivial, ya que $\arg(n_x^*) = 180^\circ + \arg(n_x)$. Esta relación no es posible, ya que el polinomio de Kharitonov del numerador no contiene al cero.

- c) Sea n_x^* el numerador de v_x determinado como $d_1 v_x$. Entonces $A_x = \frac{n_x^*}{S_1}$, donde S_1 es parte del segmento de vértices d_2 y d_1 , $\arg(d_2 - d_1) = 0^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.2 $\arg(n_x^*) = -\phi(A_x)$. Como v_x es el mismo vértice, entonces $\arg\left(\frac{n_x^*}{d_1}\right) = \arg\left(\frac{n_x}{d_2}\right)$, de donde se deduce que $\arg(d_1) = \arg(d_2) + 270^\circ$. $d_x = d_1$ verifica la condición C4.1, puesto que

$$\arg\left(\frac{v_2}{v_x}\right) = 270^\circ + \phi(A_x) + \arg(n_1) = \phi(A_x) + \arg(n_1) - 90^\circ.$$

Sea $\alpha = \arg(d_2)$, con $\tan(\alpha) = \frac{d_{2I}}{d_{2R}}$. Entonces $\arg(d_1) = \alpha + 270^\circ$ y $\tan(\alpha + 270^\circ) = \frac{d_{1I}}{d_{1R}} = \frac{d_{2I}}{d_{1R}}$ (por la normalización $d_{1I} = d_{2I}$). Por lo tanto $d_1 = d_{1R} + jd_{1I} = \frac{d_{2I}}{\tan(\alpha + 270^\circ)} + jd_{2I} = -\frac{d_{2I}^2}{d_{2R}} + jd_{2I}$. Además, $\arg(n_x^*) = 270^\circ + \arg(n_x)$, luego si $n_x = n_{xR} + jn_{xI}$ entonces $n_x^* = \rho e^{j3\frac{\pi}{2}} n_x = \rho n_{xI} - j\rho n_{xR}$.

Como $v_x = \frac{n_x}{d_2}$ y $v_x = \frac{n_x^*}{d_1}$, entonces $d_2 n_x^* = d_1 n_x$ y coinciden sus partes reales y sus partes imaginarias.

$Re(d_2 n_x^*) = Re(d_1 n_x)$, luego

$$\begin{aligned}+\rho n_{xI} d_{2R} + \rho n_{xR} d_{2I} &= -\frac{d_{2I}^2}{d_{2R}} n_{xR} - d_{2I} n_{xI} \\ (d_{2I} + d_{2R}\rho) n_{xI} d_{2R} &= -(d_{2R}\rho + d_{2I}) n_{xR} d_{2I}.\end{aligned}$$

Así pues $\frac{n_{xI}}{n_{xR}} = -\frac{d_{2I}}{d_{2R}}$.

$Im(d_2 n_x^*) = Im(d_1 n_x)$, luego

$$\begin{aligned} -\rho n_{xR} d_{2R} + \rho n_{xI} d_{2I} &= -n_{xI} \frac{d_{2I}^2}{d_{2R}} + n_{xR} d_{2I} \\ -\rho n_{xR} d_{2R} d_{2R} + \rho n_{xI} d_{2I} d_{2R} &= -n_{xI} d_{2I}^2 + n_{xR} d_{2I} d_{2R} \\ (d_{2I} + \rho d_{2R}) n_{xI} d_{2I} &= n_{xR} d_{2R} (\rho d_{2R} + d_{2I}). \end{aligned}$$

Por tanto $\frac{n_{xI}}{n_{xR}} = \frac{d_{2R}}{d_{2I}}$.

Igualando ambos resultados, $\frac{d_{2R}}{d_{2I}} = -\frac{d_{2I}}{d_{2R}} \Leftrightarrow d_{2R}^2 < 0$, lo cual no es posible. Por tanto n_x es una solución, n_x^* no lo es y $d_x = d_1$ no es una solución.

2. \Leftarrow Si $d_x = d_1$ el valor de $n_x = d_1 v_x$ se puede calcular, y por tanto se satisface la condición del denominador (lema 4.4), ya que al ser v_x un vértice de la frontera, n_x será uno de los polinomios asignados del numerador, y por tanto debe verificar una de las cuatro condiciones del lema.

Dividiendo el valor de $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$ por el valor de $v_x = \frac{n_x}{d_x}$ se obtiene $\frac{v_1}{v_x} = \frac{n_1}{n_x}$, y $\arg\left(\frac{v_1}{v_x}\right) = \arg(n_1) - \arg(n_x)$.

Además $A_x = \frac{n_x}{S_1}$, donde S_1 es parte del segmento de vértices d_1 y d_2 , verificándose que $\arg(d_2 - d_1) = 0^\circ$ (por la normalización). Por la proposición 4.2 $\arg(n_x) = -\phi(A_x)$ y entonces $\arg\left(\frac{v_1}{v_x}\right) = \arg(n_1) + \phi(A_x)$, verificándose la condición C4.2.

\Rightarrow Para demostrar esta implicación, basta probar que si la condición C4.2 y la condición del numerador se satisfacen, entonces la solución $n_x = d_1 v_x$, $d_x = d_1$, es única. Nótese que si $d_x \neq d_2$, la condición C4.2 se puede cumplir también cuando a) $d_x = d_3$ o b) $d_x = d_4$, y en cada caso, el valor del numerador n_x determinado verifica la condición del numerador.

Sea n_x el numerador de v_x determinado como $d_1 v_x$, verificando la condición C4.2 y la condición del numerador. Además $A_x = \frac{n_x}{S_1}$, donde S_1 es parte del segmento de vértices d_1 y d_2 , y $\arg(d_2 - d_1) = 0^\circ$.

- a) Sea n_x^* el numerador de v_x determinado como $d_x v_x$. Entonces $A_x = \frac{n_x^*}{S_3}$, donde S_3 es parte del segmento de vértices d_3 y d_4 , $\arg(d_4 - d_3) = 180^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.2 $\arg(n_x^*) = 180^\circ - \phi(S_x)$. Como v_x es el mismo vértice, entonces $\arg\left(\frac{n_x}{d_1}\right) = \arg\left(\frac{n_x^*}{d_3}\right)$, de donde se deduce que

$\arg(d_3) = \arg(d_1) + 180^\circ$. $d_x = d_3$ verifica la condición C4.2, puesto que

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{v_1}{v_x}\right) &= \arg(d_3) + 180^\circ - \arg(d_1) + \arg(n_1) - 180^\circ + \phi(S_x) \\ &= \arg(n_1) + \phi(S_x). \end{aligned}$$

En este caso la demostración es trivial, ya que $\arg(n_x^*) = 180^\circ - \arg(n_x)$ ($\arg(n_x) = -\phi(S_x)$ y $\arg(n_x^*) = 180^\circ - \phi(S_x)$). Esto no es posible, porque el polinomio de Kharitonov del numerador no puede contener el cero.

- b) Sea n_x^* el numerador de v_x determinado como $d_4 v_x$. Entonces $A_x = \frac{n_x^*}{S_4}$, donde S_4 es parte del segmento de vértices d_4 y d_1 , $\arg(d_1 - d_4) = 270^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.2 $\arg(n_x^*) = 270^\circ - \phi(A_x)$. Como v_x es el mismo vértice, entonces $\arg\left(\frac{n_x}{d_1}\right) = \arg\left(\frac{n_x^*}{d_4}\right)$, de donde se deduce que $\arg(d_4) = \arg(d_1) + 270^\circ$. $d_x = d_4$ verifica la condición C4.2, puesto que

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{v_1}{v_x}\right) &= \arg(d_4) + 270^\circ - \arg(d_1) + \arg(n_1) - 270^\circ + \phi(A_x) \\ &= \arg(n_1) + \phi(A_x). \end{aligned}$$

Sea $\alpha = \arg(d_1)$, con $\tan(\alpha) = \frac{d_{1I}}{d_{1R}}$. Entonces $\arg(d_4) = \alpha + 270^\circ$ y $\tan(\alpha + 270^\circ) = \frac{d_{4I}}{d_{4R}} = -\frac{d_{1R}}{d_{1I}}$ (por la normalización). Por lo tanto $d_4 = d_{4R} + jd_{4I} = d_{1R} + jd_{1R} \tan(\alpha + 270^\circ) = d_{1R} - j\frac{d_{1R}^2}{d_{1I}}$. Además $\arg(n_x^*) = 270^\circ + \arg(n_x)$, luego si $n_x = n_{xR} + jn_{xI}$ entonces $n_x^* = \rho e^{j3\frac{\pi}{2}} n_x = \rho n_{xI} - j\rho n_{xR}$.

Como $v_x = \frac{n_x}{d_1}$ y $v_x = \frac{n_x^*}{d_4}$, entonces $d_1 n_x^* = d_4 n_x$ y coinciden sus partes reales y sus partes imaginarias.

$Re(d_1 n_x^*) = Re(d_4 n_x)$, luego

$$\begin{aligned} \rho n_{xI} d_{1R} + \rho n_{xR} d_{1I} &= +\frac{d_{1R}^2}{d_{1I}} n_{xI} + d_{1R} n_{xR} \\ \rho n_{xI} d_{1R} d_{1I} + \rho n_{xR} d_{1I} d_{1I} &= +d_{1R}^2 n_{xI} + d_{1R} n_{xR} d_{1I} \\ (\rho d_{1I} - d_{1R}) n_{xI} d_{1R} &= (d_{1R} - \rho d_{1I}) n_{xR} d_{1I}. \end{aligned}$$

Así pues $\frac{n_{xI}}{n_{xR}} = -\frac{d_{1I}}{d_{1R}}$.

$Im(d_1 n_x^*) = Im(d_4 n_x)$, luego

$$\begin{aligned} -\rho n_{xR} d_{1R} + \rho n_{xI} d_{1I} &= -n_{xR} \frac{d_{1R}^2}{d_{1I}} + n_{xI} d_{1R} \\ -\rho n_{xR} d_{1R} d_{1I} + \rho n_{xI} d_{1I} d_{1I} &= -n_{xR} d_{1R}^2 + n_{xI} d_{1R} d_{1I} \\ (-\rho d_{1I} + d_{1R}) n_{xR} d_{1R} &= (d_{1R} - \rho d_{1I}) n_{xI} d_{1I}. \end{aligned}$$

Por tanto $\frac{n_{xI}}{n_{xR}} = \frac{d_{1R}}{d_{1I}}$.

Igualando ambos resultados, $-\frac{d_{1I}}{d_{1R}} = \frac{d_{1R}}{d_{1I}} \Leftrightarrow d_{1R}^2 < 0$, lo cual no es posible.

Por tanto, n_x es una solución, n_x^* no lo es y $d_x = d_4$ no es una solución.

3. \Leftarrow Si $d_x = d_3$ entonces $n_x = d_3 v_x$ no se puede calcular directamente, porque no se conoce el valor de d_3 . Veremos en primer lugar que la condición C4.3 se verifica. Si $d_x = d_3$ entonces $A_x = \frac{n_x}{S_3}$, donde S_3 es parte del segmento de vértices d_3 y d_4 , verificándose que $\arg(d_4 - d_3) = 180^\circ$ (por la normalización). Por la proposición 4.2 $\arg(n_x) = 180^\circ - \phi(A_x)$ y entonces $\arg(d_3) = \arg(n_x) + \arg\left(\frac{1}{v_x}\right) = 180^\circ - \phi(A_x) + \arg\left(\frac{1}{v_x}\right)$. Como $d_{2R} = d_{3R}$ entonces $d_3 = d_{3R} + j d_{3I} = d_{2R} + j d_{2R} \tan\left(180^\circ - \phi(A_x) + \arg\left(\frac{1}{v_x}\right)\right)$.

Por otro lado, $d_{3I} > d_{2I}$ porque los vértices asignados son elegidos en sentido antihorario. Por tanto se verifica que $\tan\left(180^\circ - \phi(A_x) + \arg\left(\frac{1}{v_x}\right)\right) n_{2R} > n_{2I}$, que es la condición C4.3.

Además puede calcularse n_x mediante la expresión

$$n_x = d_3 v_x = d_{2R} \left[1 + j \tan\left(180^\circ - \phi(A_x) + \arg\left(\frac{1}{v_x}\right)\right) \right] v_x.$$

\Rightarrow Para demostrar esta implicación, basta probar que si la condición C4.3 y la condición del numerador se satisfacen, entonces la solución $n_x = d_3 v_x$, $d_x = d_3$, es única. Nótese que si $d_x \neq d_2$ y $d_x \neq d_1$, la condición C4.3 se puede verificar cuando $d_x = d_4$.

Sea n_x el numerador de v_x determinado como $d_3 v_x$, verificando la condición C4.3 y la condición del numerador. Además $A_x = \frac{n_x}{S_3}$, donde S_3 es parte del segmento de vértices d_3 y d_4 , y $\arg(d_4 - d_3) = 180^\circ$.

Sea n_x^* el numerador de v_x determinado como $d_4 v_x$. Entonces $A_x = \frac{n_x^*}{S_4}$, donde S_4 es

parte del segmento de vértices d_4 y d_1 , $\arg(d_1 - d_4) = 270^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.2 $\arg(n_x^*) = 270^\circ - \phi(A_x) = 90^\circ + \arg(n_x)$. Por tanto $n_x^* = \rho j(n_{xR} + jn_{xI}) = -\rho n_{xI} + j\rho n_{xR}$.

Como v_x es el mismo vértice, $\arg\left(\frac{n_x^*}{d_4}\right) = \arg\left(\frac{n_2}{d_3}\right)$, de donde se deduce que $\arg(d_4) = \arg(d_3) + 90^\circ$. Sea $\alpha = \arg(d_3)$, entonces $\alpha + 90^\circ = \arg(d_4) = 270^\circ - \phi(A_x) + \arg\left(\frac{1}{v_x}\right)$. Por tanto $\alpha = \arg(d_4) = 180^\circ - \phi(A_x) + \arg\left(\frac{1}{v_x}\right)$, y como es el $\arg(d_3)$ verifica $d_{3I} = d_{2R} \tan(\alpha) > d_{2I}$ (por la normalización), es decir, la condición C4.3 se satisface.

Si $d_x = d_4$ entonces $d_4 = d_{4R} + jd_{4I} = d_{1R} + jd_{2R} \tan\left(180^\circ - \phi(A_x) + \arg\left(\frac{1}{v_x}\right)\right)$, y el numerador es

$$n_x^* = d_4 v_x = \left(d_{1R} + j \tan\left(180^\circ - \phi(A_x) + \arg\left(\frac{1}{v_x}\right)\right) d_{2R}\right) v_x.$$

Como $\tan(\alpha) = \frac{d_{3I}}{d_{3R}}$, entonces $d_3 = d_{3R} + jd_{3I} = d_{2R} + jd_{2R} \tan(\alpha) = d_{2R} + jd_{2R} \frac{d_{3I}}{d_{3R}}$, y $d_4 = d_{4R} + jd_{4I} = d_{1R} + jd_{1R} \tan(\alpha + 90) = d_{1R} - jd_{1R} \frac{d_{3R}}{d_{3I}}$.

Como $v_x = \frac{n_x}{d_3}$ y $v_x = \frac{n_x^*}{d_4}$, entonces $d_3 n_x^* = d_4 n_x$ y coinciden sus partes reales y sus partes imaginarias.

$Re(d_3 n_x^*) = Re(d_4 n_x)$, luego

$$\begin{aligned} -d_{2R}\rho n_{xI} - d_{3I}\rho n_{xR} &= d_{1R}n_{xR} + n_{xI}d_{1R}\frac{d_{2R}}{d_{3I}} \\ -d_{2R}d_{3I}\rho n_{xI} - d_{3I}d_{3I}\rho n_{xR} &= d_{1R}d_{3I}n_{xR} + n_{xI}d_{1R}d_{3R} \\ -(d_{3I}\rho + d_{1R})d_{2R}n_{xI} &= (d_{1R} + d_{3I}\rho)d_{3I}n_{xR}. \end{aligned}$$

Así pues $\frac{n_{xI}}{n_{xR}} = -\frac{d_{3I}}{d_{3R}}$.

$Im(d_3 n_x^*) = Im(d_4 n_x)$, luego

$$\begin{aligned} -d_{3I}\rho n_{xI} + d_{2R}\rho n_{xR} &= n_{xI}d_{1R} - n_{xR}d_{1R}\frac{d_{2R}}{d_{3I}} \\ -d_{3I}d_{3I}\rho n_{xI} + d_{3I}d_{2R}\rho n_{xR} &= n_{xI}d_{1R}d_{3I} - n_{xR}d_{1R}d_{2R} \\ -(d_{3I}\rho + d_{1R})n_{xI}d_{3I} &= -(d_{3I}\rho + d_{1R})n_{xR}d_{2R}. \end{aligned}$$

Por tanto $\frac{n_{xI}}{n_{xR}} = \frac{d_{3R}}{d_{3I}}$.

Igualando ambos resultados, $-\frac{d_{3I}}{d_{3R}} = \frac{d_{3R}}{d_{3I}} \Leftrightarrow d_{3R}^2 < 0$, lo cual no es posible. Por tanto, n_x es una solución, n_x^* no lo es y $d_x = d_3$ no es una solución.

4. \Leftarrow Si $d_x = d_4$ entonces $n_x = d_4 v_x$ no se puede calcular directamente, puesto que no se conoce el valor de d_4 . Veremos en primer lugar que la condición C4.4 se verifica.

Si $d_x = d_4$ entonces $A_x = \frac{n_x}{S_4}$, donde S_4 es parte del segmento de vértices d_4 y d_1 , verificándose que $\arg(d_1 - d_4) = 270^\circ$ (por la normalización). Por la proposición 4.2 $\arg(n_x) = 270^\circ - \phi(A_x)$ y entonces $\arg(d_4) = \arg(n_x) + \arg\left(\frac{1}{v_x}\right) = \arg\left(\frac{1}{v_x}\right) + 270^\circ - \phi(A_x)$. Como $d_{1R} = d_{4R}$, entonces $d_4 = d_{4R} + j d_{4I} = d_{1R} + j d_{1R} \tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) + 270^\circ - \phi(A_x)\right)$.

Por otro lado $d_{4I} > d_{1I}$, porque los vértices asignados son elegidos en sentido antihorario. Por tanto se verifica que $\tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) + 270^\circ - \phi(A_x)\right) d_{1R} > d_{1I}$, que es la condición C4.4.

Además n_x puede calcularse mediante la expresión

$$n_x = d_4 v_x = d_{1R} \left[1 + j \tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) + 270^\circ - \phi(A_x)\right) \right] v_x.$$

\Rightarrow Si $d_x \neq d_2$, $d_x \neq d_1$ y $d_x \neq d_3$ entonces debe ser $d_x = d_4$. ■

Finalmente, el siguiente teorema establece las condiciones necesarias y suficientes para la identificación:

Teorema 4.5

Dado un conjunto de valores, todos los polinomios asignados de los vértices pueden determinarse, si y solo si existe un segmento completo o un arco completo de la frontera en un cuadrante, cuando el segmento normalizado verifica que $n_{2R} \neq 0$, $n_{2I} \neq 0$, $n_{1R} \neq 0$ y $n_{1I} \neq 0$, o cuando el arco normalizado verifica $d_{2R} \neq 0$, $d_{2I} \neq 0$, $d_{1R} \neq 0$ y $d_{1I} \neq 0$.

Demostración:

La demostración es evidente, a partir de los teoremas 4.1 a 4.4. ■

4.3. Algoritmo para la identificación.

Dado un conjunto de valores con al menos un segmento o un arco de la frontera, en un cuadrante, para obtener los polinomios de Kharitonov se procede según el siguiente esquema:

1. Si existe un segmento de la frontera completo en un cuadrante, con vértices $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$ y $v_2 = \frac{n_2}{d_1}$. Se considera el arco sucesor de vértices $v_2 = \frac{n_2}{d_1}$ y $v_{2suc} = \frac{n_2}{d_{2\lambda}}$, y el arco predecesor de vértices $v_{1pred} = \frac{n_1}{d_{4\lambda}}$ y $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$, todos en sentido antihorario. Para los restantes vértices $v_x = \frac{n_x}{d_x}$ de la frontera del conjunto de valores:
 - a) Si $v_x = \frac{n_x}{d_x}$ es un vértice intersección de un segmento y un arco, en sentido antihorario, entonces los polinomios asignados del numerador y del denominador, n_x y d_x , se determinan aplicando el teorema 4.1.
 - b) Si $v_x = \frac{n_x}{d_x}$ es un vértice intersección de un arco y un segmento, en sentido antihorario, entonces los polinomios asignados del numerador y del denominador, n_x y d_x , se determinan aplicando el teorema 4.2.
2. Si existe un arco de la frontera completo en un cuadrante, con vértices $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$ y $v_2 = \frac{n_1}{d_2}$. Se considera el segmento sucesor de vértices $v_2 = \frac{n_1}{d_2}$ y $v_{2suc} = \frac{n_{2\lambda}}{d_2}$, y el segmento predecesor de vértices $v_{1pred} = \frac{n_{4\lambda}}{d_1}$, $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$, todos en sentido antihorario. Para los restantes vértices $v_x = \frac{n_x}{d_x}$ de la frontera del conjunto de valores:
 - a) Si $v_x = \frac{n_x}{d_x}$ es un vértice intersección de un arco y un segmento, en sentido antihorario, entonces los polinomios asignados del numerador y del denominador, n_x y d_x , se determinan aplicando el teorema 4.3.
 - b) Si $v_x = \frac{n_x}{d_x}$ es un vértice intersección de un segmento y un arco, en sentido antihorario, entonces los polinomios asignados del numerador y del denominador, n_x y d_x , se determinan aplicando el teorema 4.4.
3. A partir de los polinomios asignados, aplicando las ecuaciones 3.10 y 3.11, se calculan los valores de los rectángulos del numerador y del denominador

$$N = \{K_{n1}(j\omega), K_{n2}(j\omega), K_{n3}(j\omega), K_{n4}(j\omega)\}$$

$$D = \{K_{d1}(j\omega), K_{d2}(j\omega), K_{d3}(j\omega), K_{d4}(j\omega)\}$$

Ejemplo 4.1

La figura 4.11 muestra tres conjuntos de valores de un intervalo de plantas, a diferentes frecuencias.

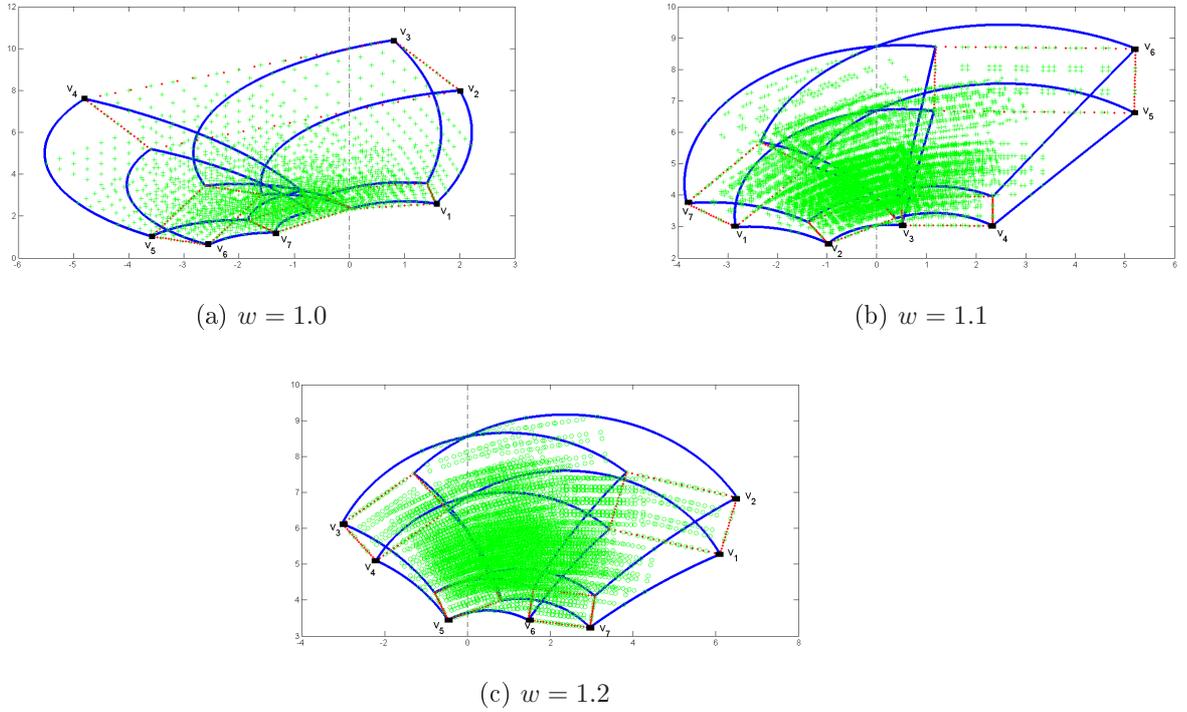


Figura 4.11: Tres conjuntos de valores de un intervalo de plantas.

$w = 1.0$			$w = 1.1$			$w = 1.2$		
(a)	(b)	(c)	(a)	(b)	(c)	(a)	(b)	(c)
v_1	$1.5676 + 2.5946j$	0	v_1	$-2.8422 + 2.9830j$	0	v_1	$6.1015 + 5.2779j$	1
v_2	$2.0000 + 8.0000j$	1	v_2	$-0.9808 + 2.4599j$	1	v_2	$6.5135 + 6.8573j$	0
v_3	$0.8000 + 10.4000j$	0		$0 + 3.0420j$	0		$0 + 8.5560j$	0
	$0 + 10.0000j$	1	v_3	$0.4996 + 3.0386j$	1	v_3	$-3.0339 + 6.1294j$	1
v_4	$-4.8000 + 7.6000j$	0	v_4	$2.3317 + 3.0261j$	0	v_4	$-2.2110 + 5.1007j$	0
v_5	$-3.5862 + 1.0345j$	1	v_5	$5.1859 + 6.6181j$	1	v_5	$-0.4710 + 3.4462j$	1
v_6	$-2.5517 + 0.6207j$	0	v_6	$5.2164 + 8.6623j$	0		$0 + 3.6463j$	0
v_7	$-1.3443 + 1.2131j$	1		$0 + 8.7484j$	0	v_6	$1.4690 + 3.4428j$	1
	$0 + 2.3336j$	1	v_7	$-3.8291 + 3.7385j$	1	v_7	$2.9559 + 3.2369j$	0

Tabla 4.1: Datos iniciales para el ejemplo.

De ellos se extrae la información necesaria para aplicar el algoritmo de identificación, reflejada en la tabla 4.1:

- Columna (a): el orden del vértice v_i (en blanco si es un punto de intersección con los ejes).

- Columna (b): el valor numérico de los puntos anteriores.
- Columna (c): El elemento de la frontera que sigue al vértice, o al punto de corte: arco (0) o segmento (1).

Aplicando el algoritmo se obtendrán los polinomios asignados y los rectángulos del numerador y del denominador para cada conjunto de valores.

Conjunto de valores a frecuencia $\omega = 1.0$.

Como elemento inicial se considera el arco completo de vértices $v_1 = \frac{n_1}{d_1} = 1.5676 + 2.5946j$ y $v_2 = \frac{n_1}{d_2} = 2.0000 + 8.0000j$, y pueden aplicarse los teoremas 4.3 y 4.4. Para ello, se eligen los puntos $v_{2suc} = \frac{n_{2\lambda}}{d_2} = v_3 = 0.8000 + 10.4000j$; $v_{1pred} = \frac{n_{4\lambda}}{d_1} = 2.3336j$. Aplicando la normalización para un arco (lema 4.3), se obtienen los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}\phi(n_1) &= 360^\circ - \arg\left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1}\right) = 229.40^\circ \\ n_1 &= \cos(\phi(n_1)) + j \sin(\phi(n_1)) = -0.6508 - 0.7592j \\ d_1 &= \frac{n_1}{v_1} = -0.3254 + 0.0542j; \quad d_2 = \frac{n_1}{v_2} = -0.1085 + 0.0542j \\ n_{4\lambda} &= d_1 v_{1pred} = -0.1266 - 0.7594j; \quad n_{2\lambda} = d_2 v_{2suc} = -0.6508 - 1.0846j\end{aligned}$$

A partir de estos valores todos los demás vértices son asignables:

1. Vértice $v_x = \frac{n_x}{d_x} = v_3 = 0.8000 + 10.4000j$. Entonces $v_{xpred} = \frac{n_x}{d_{xpred}} = v_2 = 2.0000 + 8.0000j$ siendo los vértices de un segmento, y puede aplicarse el teorema 4.4, con los valores de $v_{xsuc} = 10.0000j$, $\phi(A_x) = \arg\left(\frac{1}{v_{xsuc}} - \frac{1}{v_x}\right) = 210.97^\circ$:

Caso 1:

La condición C4.1 se satisface puesto que $\arg\left(\frac{v_2}{v_x}\right) = \phi(A_x) + \arg(n_1) - 90^\circ = 350.36^\circ$. $n_x = d_2 v_x = -0.6508 - 1.0846j$ satisface la condición del numerador (Lema 4.4, caso 4, $n_x = n_2$):

$$(n_{1R} = -0.6508 < n_{4\lambda R} = -0.1266 \text{ y } n_{1I} = -0.7592 > n_{2\lambda I} = -1.0846)$$

$$(n_{xR} = n_{1R} = -0.6508 \text{ y } n_{xI} = -1.0846 \leq n_{1I} = -0.7592)$$

Entonces $d_x = d_2 = -0.1085 + 0.0542j$ y $v_3 = v_x = \frac{n_2}{d_2}$.

2. Vértice $v_4 = v_x = \frac{n_x}{d_x} = -4.8000 + 7.6000j$. Entonces $v_{xpred} = \frac{n_x}{d_{xpred}} = 10j$ siendo los vértices de un segmento, y puede aplicarse el teorema 4.4, con los valores de $v_{xsucc} = -3.5862 + 1.0345j$, $\phi(A_x) = \arg\left(\frac{1}{v_{xsucc}} - \frac{1}{v_x}\right) = 174.29^\circ$:

Caso 1:

La condición C4.1 se satisface: $\arg\left(\frac{v_2}{v_x}\right) = \phi(A_x) + \arg(n_1) - 90^\circ = 313.69^\circ$ y $n_x = d_2 v_x = 0.1084 - 1.0847j$ satisface la condición del numerador (Lema 4.4, caso 4, $n_x = n_3$):

$$(n_{1R} = -0.6508 < n_{4\lambda R} = -0.1266 \text{ y } n_{1I} = -0.7592 > n_{2\lambda I} = -1.0850)$$

$$(n_{xR} = 0.1084 > n_{1R} = -0.6508 \text{ y } n_{xI} = -1.0847 < n_{1I} = -0.7592)$$

Entonces $d_x = d_2 = -0.1085 + 0.0542j$ y $v_4 = v_x = \frac{n_3}{d_2}$.

3. Vértice $v_5 = v_x = \frac{n_x}{d_x} = -3.5862 + 1.0345j$. Entonces $v_{xpred} = \frac{n_x}{d_{xpred}} = -4.8000 + 7.6000j$ siendo los vértices de un arco, y puede aplicarse el teorema 4.3, con los valores de v_{xpred} y $\phi(A_x) = \arg\left(\frac{1}{v_x} - \frac{1}{v_{xpred}}\right) = 174.29^\circ$.

Caso 1:

La condición C3.1 no se satisface: $\arg\left(\frac{v_2}{v_x}\right) = 272.06 \neq \arg(n_1) + \phi(A_x) = 43.69^\circ$.

Caso 2:

La condición C3.2 no se satisface: $\arg\left(\frac{v_1}{v_x}\right) = 254.95 \neq \arg(n_1) + \phi(A_x) + 90 = 133.69^\circ$.

Caso 3:

La condición C3.3 se satisface: $\tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 90^\circ\right) d_{2R} = 0.2712 > d_{2I} = 0.0542$, y además $n_x = d_{2R} \left[1 + j \tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 90^\circ\right)\right]$, $v_x = 0.1085 - 1.0846j$ satisface la condición del numerador (lema 4.4, caso 4, $n_x = n_3$):

$$(n_{1R} = -0.6508 < n_{4\lambda R} = -0.1266 \text{ y } n_{1I} = -0.7592 > n_{2\lambda I} = -1.0846)$$

$$(n_{xR} = 0.1084 > n_{1R} = -0.6508 \text{ y } n_{xI} = -1.0847 < n_{1I} = -0.7592)$$

Entonces $d_x = d_3 = d_{2R} \left(1 + j \tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 90^\circ\right)\right) = -0.1085 + 0.2712j$ y $v_5 = v_x = \frac{n_3}{d_3}$.

4. Vértices $v_6 = v_x = \frac{n_x}{d_x} = -2.5517 + 0.6207j$. Entonces $v_{xpred} = \frac{n_x}{d_{xpred}} = -3.5862 + 1.0345j$. Estos son los vértices de un segmento, y se aplica el teorema 4.4, con los valores de $v_{xsucc} = -1.3443 + 1.2131j$, $\phi(A_x) = \arg\left(\frac{1}{v_{xsucc}} - \frac{1}{v_x}\right) = 261.87^\circ$.

Caso 1:

La condición C4.1 no se satisface: $\arg\left(\frac{v_2}{v_x}\right) = 269.64^\circ \neq \phi(A_x) + \arg(n_1) - 90^\circ = 41.27^\circ$

Caso 2:

La condición C4.2 no se satisface: $\arg\left(\frac{v_1}{v_x}\right) = 252.53^\circ \neq \phi(A_x) + \arg(n_1) = 131.27^\circ$

Caso 3:

La condición C4.3 se satisface: $\tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 180^\circ\right) d_{2R} = 0.2712 > d_{2I} = 0.0542$ y además $n_x = d_{2R} \left[1 + j \tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 180^\circ\right)\right]$, $v_x = 0.1085 - 0.7592j$ satisface la condición del numerador (lema 4.4, caso 3, $n_x = n_4$):

$$(n_{1R} = -0.6508 < n_{4\lambda R} = -0.1266 \text{ y } n_{1I} = -0.7592 > n_{2\lambda I} = -1.0846)$$

$$(n_{xI} = n_{1I} = -0.7592 \text{ y } n_{xR} = 0.1085 \geq n_{1R} = -0.6508)$$

Entonces $d_x = d_3 = d_{2R} \left(1 + j \tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 180^\circ\right)\right) = -0.1085 + 0.2712j$ y $v_6 = v_x = \frac{n_4}{d_3}$.

5. Vértice $v_7 = v_x = \frac{n_x}{d_x} = -1.3443 + 1.2131j$. Entonces $v_{xpred} = \frac{n_x}{d_{xpred}} = -2.5517 + 0.6207j$. Estos son los vértices de un arco, y por tanto puede aplicarse el teorema 4.3, con los valores de $\phi(A_x) = \arg\left(\frac{1}{v_x} - \frac{1}{v_{xpred}}\right) = 261.87^\circ$.

Caso 1:

La condición C3.1 no se satisface: $\arg\left(\frac{v_2}{v_x}\right) = 298.03^\circ \neq \arg(n_1) + \phi(A_x) = 131.27^\circ$.

Caso 2:

La condición C3.2 no se satisface: $\arg\left(\frac{v_1}{v_x}\right) = 280.93^\circ \neq \arg(n_1) + \phi(A_x) + 90^\circ = 221.27^\circ$.

Caso 3:

La condición C3.3 no se satisface: $\tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 90^\circ\right) d_{2R} = -0.1302 < d_{2I} = 0.0542$.

Caso 4:

La condición C3.4 se satisface: $\tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 180^\circ\right) d_{1R} = 0.2712 >$
 $d_{1I} = 0.0542$ y además $n_x = d_{1R} \left[1 + j \tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 180^\circ\right)\right] v_x =$
 $0.1085 - 0.7592j$ satisface la condición del numerador (lema 4.4, caso 4, $n_x = n_4$):

$$(n_{1R} = -0.6508 < n_{4\lambda R} = -0.1266 \text{ y } n_{1I} = -0.7592 > n_{2\lambda I} = -1.0846)$$

$$(n_{xI} = n_{1I} = -0.7592 \text{ y } n_{xR} = 0.1085 \geq n_{1R} = -0.6508)$$

Entonces $d_x = d_4 = d_{1R} \left(1 + j \tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 180^\circ\right)\right) = -0.3254 +$
 $0.2712j$ y $v_7 = v_x = \frac{n_4}{d_4}$

En resumen, los polinomios asignados son:

$$v_1 = \frac{n_1}{d_1}; v_2 = \frac{n_1}{d_2}; v_3 = \frac{n_2}{d_2}; v_4 = \frac{n_3}{d_2}; v_5 = \frac{n_3}{d_3}; v_6 = \frac{n_4}{d_3}; v_7 = \frac{n_4}{d_4}.$$

Los valores obtenidos a partir de la normalización son:

$$n_1 = -0.6508 - 0.7592j; d_1 = -0.3254 + 0.0542j; d_2 = -0.1085 + 0.0542j$$

Y a partir de los vértices, aplicando el algoritmo.

$$v_3 : n_2 = -0.6508 - 1.0846j; d_2 = -0.1085 + 0.0542j$$

$$v_4 : n_3 = 0.1084 - 1.0847j; d_2 = -0.1085 + 0.0542j$$

$$v_5 : n_3 = 0.1085 - 1.0846j; d_3 = -0.8464 + 2.0152j$$

$$v_6 : n_4 = 0.1085 - 0.7592j; d_3 = -0.1085 + 0.2712j$$

$$v_7 : n_4 = 0.1085 - 0.7593j; d_4 = -0.3254 + 0.2712j$$

Entonces:

$$K_{n1}(j\omega) = -0.6508 - 1.0847j; K_{n2}(j\omega) = 0.1085 - 1.0847j$$

$$K_{n3}(j\omega) = 0.1085 - 0.7592j; K_{n4}(j\omega) = -0.6508 - 0.7592j$$

$$K_{d1}(j\omega) = -0.3254 + 0.0542j; K_{d2}(j\omega) = -0.1085 + 0.0542j$$

$$K_{d3}(j\omega) = -0.1085 + 0.2712j; K_{d4}(j\omega) = -0.3254 + 0.2712j$$

A partir de estos rectángulos de Kharitonov se obtienen directamente los 32 sistemas asociados de la figura 4.12(b), que se pueden comparar con los obtenidos a partir de los rectángulos de Kharitonov originales (figura 4.12(a)). Como se observa, ambas figuras son iguales, lo que asegura la bondad del algoritmo.

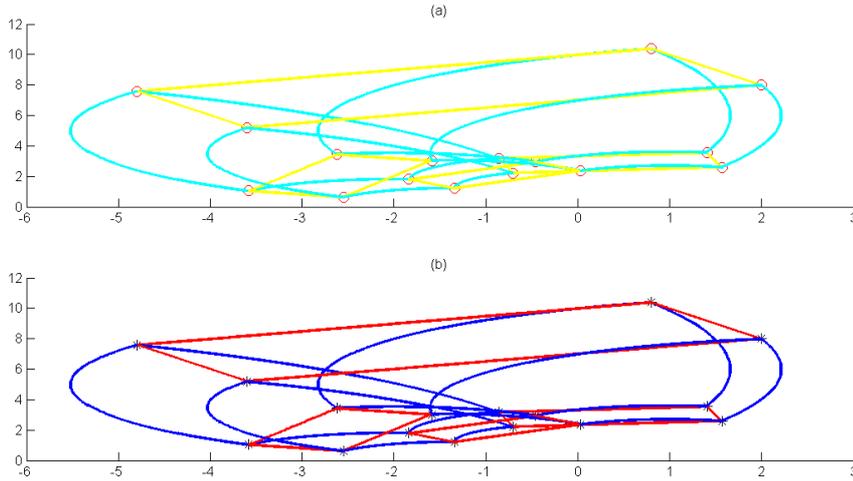


Figura 4.12: Comparación de los 32 sistemas para $\omega = 1.0$.

Las tablas 4.2 muestran los resultados del algoritmo para los valores de la frecuencia $\omega = 1.0$.

	$v_1 - v_2$ arco	Rectángulos Kharitonov calculados
v_1	$1.5676 + 2.5946j$	$K_{n1}(jw) = -0.6508 - 1.0847j$
v_2	$2.0000 + 8.0000j$	$K_{n2}(jw) = 0.1085 - 1.0847j$
v_{2succ}	$0.8000 + 10.4000j$	$K_{n3}(jw) = 0.1085 - 0.7592j$
v_{1pred}	$2.3336j$	$K_{n4}(jw) = -0.6508 - 0.7592j$
$\phi(n_1)$	229.40	$K_{d1}(jw) = -0.3254 + 0.0542j$
n_1	$-0.6508 - 0.7592j$	$K_{d2}(jw) = -0.1085 + 0.0542j$
d_1	$-0.3254 + 0.0542j$	$K_{d3}(jw) = -0.1085 + 0.2712j$
d_2	$-0.1085 + 0.0542j$	$K_{d4}(jw) = -0.3254 + 0.2712j$
$n_{4\lambda}$	$-0.1266 - 0.7594j$	
$n_{2\lambda}$	$-0.6508 - 1.0846j$	

	v_3 $0.8000 + 10.4000j$	v_4 $-4.8000 + 7.6000j$	v_5 $-3.5862 + 1.0345j$	v_6 $-2.5517 + 0.6207j$	v_7 $-1.3443 + 1.2131j$
Th.	4	4	3	4	3
v_{xpred}	$2.0000 + 8.0000j$	$10.0000j$	$-4.8000 + 7.6000j$	$-3.5862 + 1.0345j$	$-2.5517 + 0.6207j$
v_{xsucc}	$10.0000j$	$-3.5862 + 1.0345j$	$-2.5517 + 0.6207j$	$-1.3443 + 1.2131j$	$2.3336j$
$\phi(A_x)$	210.97	174.29	174.29	261.87	261.87
C. ver.	C4.1	C4.1	C3.3	C4.3	C3.4
n_x	$-0.6508 - 1.0846j$	$0.1084 - 1.0847j$	$0.1085 - 1.0846j$	$0.1085 - 0.7592j$	$0.1085 - 0.7592j$
d_x	$-0.1085 + 0.0542j$	$-0.1085 + 0.0542j$	$-0.1085 + 0.2712j$	$-0.1085 + 0.2712j$	$-0.3254 + 0.2712j$
v_x	$\frac{n_2}{d_2}$	$\frac{n_3}{d_2}$	$\frac{n_3}{d_3}$	$\frac{n_4}{d_3}$	$\frac{n_4}{d_4}$

Tabla 4.2: Resultados del algoritmo para conjunto de valores a frecuencia $w = 1.0$.

Conjunto de valores a frecuencia $\omega = 1.1$.

El arco completo de vértices $v_1 = \frac{n_1}{d_1} = -2.8422 + 2.9830j$ y $v_2 = \frac{n_1}{d_2} = -0.9808 + 2.4599j$ se considera como elemento inicial. Entonces, se pueden aplicar los teoremas 4.3 y 4.4. Por tanto se eligen los puntos $v_{2suc} = \frac{n_{2\lambda}}{d_2} = 3.0420j$; $v_{1pred} = \frac{n_{4\lambda}}{d_1} = -3.8291 + 3.7385j$;

Aplicando la normalización para un arco, (lema 4.3) se obtienen los siguientes datos:

$$\begin{aligned}\phi(n_1) &= 360^\circ - \arg\left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1}\right) = 81.05^\circ \\ n_1 &= \cos(\phi(n_1)) + j \sin(\phi(n_1)) = 0.1556 + 0.9878j \\ d_1 &= \frac{n_1}{v_1} = 0.1475 - 0.1927j; \quad d_2 = \frac{n_1}{v_2} = 0.3247 - 0.1927j \\ n_{4\lambda} &= d_1 v_{1pred} = 0.1556 + 1.2895j; \quad n_{2\lambda} = d_2 v_{2suc} = 0.5862 + 0.9878j\end{aligned}$$

Entonces, todos los demás vértices son asignables:

1. Vértice $v_3 = v_x = \frac{n_x}{d_x} = 0.4996 + 3.0386j$. Entonces $v_{xpred} = \frac{n_x}{d_{xpred}} = 3.0420j$, siendo los vértices de un arco, y puede aplicarse el teorema 4.3, con los valores de v_{xpred} y $\phi(A_x) = \arg\left(\frac{1}{v_x} - \frac{1}{v_{xpred}}\right) = 8.95$.

Caso 1:

La condición C3.1 no se satisface: $\arg\left(\frac{v_2}{v_x}\right) = 31.08^\circ \neq \arg(n_1) + \phi(A_x) = 301.08^\circ$

Caso 2:

La condición C3.2 no se verifica: $\arg\left(\frac{v_1}{v_x}\right) = 232.95^\circ \neq \arg(n_1) + \phi(A_x) + 90^\circ = 52.95^\circ$

Caso 3:

La condición C3.3 se verifica: $\tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 90^\circ\right) d_{2R} = 0.0022 > d_{2I} = -0.1927$ y además $n_x = d_{2R} \left[1 + j \tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 90^\circ\right)\right]$, $v_x = 0.1555 + 0.9878j$ satisface la condición del numerador (lema 4.4, caso 1, $n_x = n_1$):

$$(n_{1R} = 0.1556 < n_{2\lambda R} = 0.5862 \text{ y } n_{1I} = 0.9878 < n_{4\lambda I} = 1.2895)$$

$$(n_{xR} = n_{1R} = 0.1556 \text{ y } n_{xI} = n_{1I} = 0.9878)$$

Entonces $d_x = d_3 = d_{2R} \left(1 + j \tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 90^\circ\right)\right) = 0.3247 + 0.0022j$ y $v_3 = v_x = \frac{n_1}{d_3}$.

2. Vértice $v_4 = v_x = \frac{n_x}{d_x} = 2.3317 + 3.0261j$. Entonces $v_{xpred} = \frac{n_x}{d_{xpred}} = 0.4996 +$

3.0386j. Estos son los vértices de un segmento, y se aplica el teorema 4.4 con los valores de $v_{xsuc} = 5.1859 + 6.6181j$, $\phi(A_x) = \arg\left(\frac{1}{v_{xsuc}} - \frac{1}{v_x}\right) = 127.23^\circ$.

Caso 1:

La condición C4.1 no se satisface: $\arg\left(\frac{v_2}{v_x}\right) = 59.35^\circ \neq \phi(A_x) + \arg(n_1) - 90^\circ = 118.28^\circ$.

Caso 2:

La condición C4.2 no se verifica: $\arg\left(\frac{v_1}{v_x}\right) = 81.23^\circ \neq \phi(A_x) + \arg(n_1) = 208.28^\circ$.

Caso 3:

La condición C4.3 se satisface: $\tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 180^\circ\right) d_{2R} = 0.0022 > d_{2I} = -0.1927$, y además $n_x = d_{2R} \left[1 + j \tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 180^\circ\right)\right]$, $v_x = 0.7505 + 0.9878j$ satisface la condición del numerador (lema 4.4, caso 1, $n_x = n_2$):

$$(n_{1R} = 0.1556 < n_{2\lambda R} = 0.5862 \text{ y } n_{1I} = 0.9878 < n_{4\lambda I} = 1.2895)$$

$$(n_{xI} = n_{1I} = 0.9878 \text{ y } n_{xR} = 0.7505 \geq n_{1R} = 0.1556)$$

Entonces $d_x = d_3 = d_{2R} \left(1 + j \tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 180^\circ\right)\right) = 0.3247 + 0.0022j$ y $v_4 = v_x = \frac{n_2}{d_3}$.

3. Vértice $v_5 = v_x = \frac{n_x}{d_x} = 5.1859 + 6.6181j$. Entonces $v_{xpred} = \frac{n_x}{d_{xpred}} = 2.3317 + 3.0261j$. Estos son los vértices de un arco, y se aplica el teorema 4.3 con los valores de $\phi(A_x) = \arg\left(\frac{1}{v_x} - \frac{1}{v_{xpred}}\right) = 127.23^\circ$.

Caso 1:

La condición C3.1 no se satisface: $\arg\left(\frac{v_2}{v_x}\right) = 59.82^\circ \neq \arg(n_1) + \phi(A_x) = 208.28^\circ$

Caso 2:

La condición C3.2 no se satisface: $\arg\left(\frac{v_1}{v_x}\right) = 81.70^\circ \neq \arg(n_1) + \phi(A_x) + 90^\circ = 298.28^\circ$.

Caso 3:

La condición C3.3 no se satisface: $\tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 90^\circ\right) d_{2R} = -21.75 < d_{2I} = -0.20$.

Caso 4:

La condición C3.4 se satisface: $\tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 180^\circ\right) d_{1R} = 0.0022 >$
 $d_{1I} = -0.1927$ y además $n_x = d_{1R} \left[1 + j \tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 180^\circ\right)\right]$, $v_x =$
 $0.7505 + 0.9878j$ satisface la condición del numerador (lema 4.4, caso 1, $n_x = n_2$):

$$(n_{1R} = 0.1556 < n_{2\lambda R} = 0.5862 \text{ y } n_{1I} = 0.9878 < n_{4\lambda I} = 1.2895)$$

$$(n_{xI} = n_{1I} = 0.9878 \text{ y } n_{xR} = 0.7505 \geq n_{1R} = 0.1556)$$

Entonces $d_x = d_4 = d_{1R} \left(1 + j \tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 180^\circ\right)\right) = 0.1475 +$
 $0.0022j$ y $v_5 = v_x = \frac{n_2}{d_4}$.

4. Vértice $v_6 = v_x = \frac{n_x}{d_x} = 5.2164 + 8.6623j$. Entonces $v_{xpred} = \frac{n_x}{d_{xpred}} = 5.1859 +$
 $6.6181j$. Estos son los vértices de un segmento, y se aplica el teorema 4.4, con los
valores de $v_{xsucc} = 8.7404j$ y $\phi(A_x) = \arg\left(\frac{1}{v_{xsucc}} - \frac{1}{v_x}\right) = 210.20^\circ$.

Caso 1:

La condición C4.1 no se satisface: $\arg\left(\frac{v_2}{v_x}\right) = 52.80^\circ \neq \phi(A_x) + \arg(n_1) - 90^\circ =$
 201.25° .

Caso 2:

La condición C4.2 no se satisface: $\arg\left(\frac{v_1}{v_x}\right) = 74.68^\circ \neq \phi(A_x) + \arg(n_1) = 291.25^\circ$.

Caso 3:

La condición C4.3 no se satisface: $\tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 180^\circ\right) d_{2R} =$
 $-21.6892 < d_{2I} = -0.1927$.

Caso 4:

La condición C4.4 se satisface: $\tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 270^\circ\right) d_{1R} = 0.0022 >$
 $d_{1I} = -0.1927$ y además $n_x = d_{1R} \left[1 + j \tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 270^\circ\right)\right]$, $v_x =$
 $0.7505 + 1.2895j$ satisface la condición del numerador (lema 4.4, caso 1, $n_x = n_3$):

$$(n_{1R} = 0.1556 < n_{2\lambda R} = 0.5862 \text{ y } n_{1I} = 0.9878 < n_{4\lambda I} = 1.2895)$$

$$(n_{xR} = 0.7505 > n_{1R} = 0.1556 \text{ y } n_{xI} = 1.2895 > n_{1I} = 0.9878)$$

Entonces $d_x = d_4 = d_{1R} \left(1 + j \tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 270^\circ\right)\right) = 0.1475 +$
 $0.0022j$ y $v_6 = v_x = \frac{n_3}{d_4}$.

5. Vértice $v_7 = v_x = \frac{n_x}{d_x} = -3.8291 + 3.7385j$. Entonces $v_{xpred} = \frac{n_x}{d_{xpred}} = 8.7404j$.
 estos son los vértices de un arco, y se aplica el teorema 4.3, con los valores de v_{xpred} y
 $\phi(A_x) = \arg\left(\frac{1}{v_x} - \frac{1}{v_{xpred}}\right) = 186.88^\circ$.

Caso 1:

La condición C3.1 no se satisface: $\arg\left(\frac{v_2}{v_x}\right) = 336.05^\circ \neq \arg(n_1) + \phi(A_x) = 267.93^\circ$.

Caso 2:

La condición C3.2 es satisface: $\arg\left(\frac{v_1}{v_x}\right) = \arg(n_1) + \phi(A_x) + 90^\circ = 357.93^\circ$ y además
 $n_x = d_1 v_x = 0.1556 + 1.2895j$ satisface la condición del numerador (lema 4.4, caso 1,
 $n_x = n_4$):

$$(n_{1R} = 0.1556 < n_{2\lambda R} = 0.5862 \text{ y } n_{1I} = 0.9878 < n_{4\lambda I} = 1.2895)$$

$$(n_{xR} = n_{1R} = 0.1556 \text{ y } n_{xI} = 1.2895 \geq n_{1I} = 0.9878)$$

Entonces $d_x = d_1 = 0.1475 - 0.1927j$ y $v_7 = v_x = \frac{n_4}{d_1}$.

En resumen, los polinomios asignados son:

$$v_1 = \frac{n_1}{d_1}; v_2 = \frac{n_1}{d_2}; v_3 = \frac{n_1}{d_3}; v_4 = \frac{n_2}{d_3}; v_5 = \frac{n_2}{d_4}; v_6 = \frac{n_3}{d_4}; v_7 = \frac{n_4}{d_1}$$

Los valores obtenidos a partir de la normalización son:

$$n_1 = 0.1556 + 0.9878j; d_1 = 0.1475 - 0.1927j; d_2 = 0.3247 - 0.1927j$$

Y a partir de los vértices, aplicando el algoritmo:

$$v_3 : n_1 = 0.1555 + 0.9878j; d_3 = 0.3247 + 0.0022j$$

$$v_4 : n_2 = 0.7505 + 0.9878j; d_3 = 0.3247 + 0.0022j$$

$$v_5 : n_2 = 0.7505 + 0.9878j; d_4 = 0.1475 + 0.0022j$$

$$v_6 : n_3 = 0.7505 + 1.2895j; d_4 = 0.1475 + 0.0022j$$

$$v_7 : n_4 = 0.1556 + 1.2895j; d_1 = 0.1475 - 0.1927j$$

Entonces:

$$K_{n1}(j\omega) = 0.1555 + 0.9878j; K_{n2}(j\omega) = 0.7505 + 0.9878j$$

$$K_{n3}(j\omega) = 0.7505 + 1.2895j; K_{n4}(j\omega) = 0.1556 + 1.2895j$$

$$K_{d1}(j\omega) = 0.1475 - 0.1927j; K_{d2}(j\omega) = 0.3247 - 0.1927j$$

$$K_{d3}(j\omega) = 0.3247 + 0.0022j; K_{d4}(j\omega) = 0.1475 + 0.0022j$$

A partir de éstos rectángulos de Kharitonov, se obtienen directamente los 32 sistemas de la figura 4.13(b), iguales a los obtenidos a partir de los rectángulos de Kharitonov originales (figura 4.13(a)).

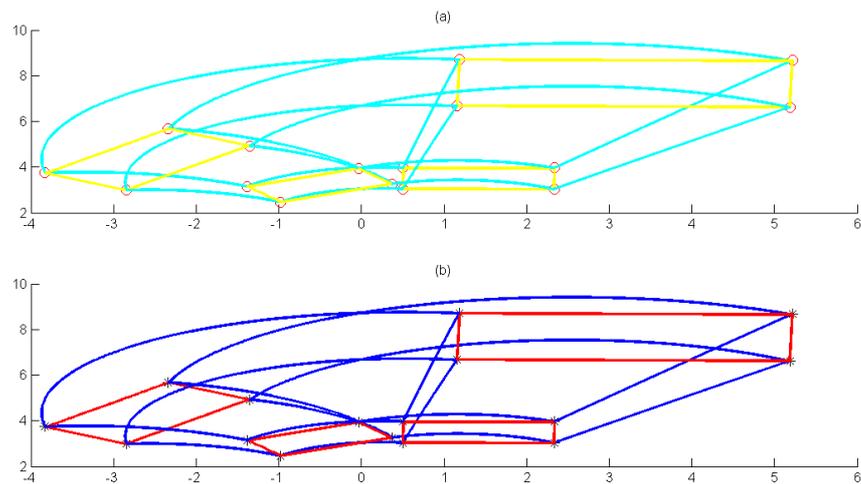


Figura 4.13: Comparación de los 32 sistemas para $\omega = 1.1$.

Las tablas 4.3 muestran los resultados del algoritmo para los valores de la frecuencia $\omega = 1.1$.

Conjunto de valores a frecuencia $\omega = 1.2$.

El segmento completo de vértices $v_1 = \frac{n_1}{d_1} = 6.1015 + 5.2779j$ y $v_2 = \frac{n_2}{d_1} = 6.5135 + 6.8573j$ se considera como el elemento inicial. Por tanto los teoremas 4.1 y 4.2 puede aplicarse. Por tanto, se eligen los puntos $v_{2suc} = \frac{n_2}{d_{2\lambda}} = 8.5560j$; $v_{1pred} = \frac{n_1}{d_{4\lambda}} = 2.9559 + 3.2369j$.

	$v_1 - v_2$ arco	Rectángulos Kharitonov calculados
v_1	$-2.8422 + 2.9830j$	$K_{n1}(jw) = 0.1555 + 0.9878j$
v_2	$-0.9808 + 2.4599j$	$K_{n2}(jw) = 0.7505 + 0.9878j$
v_{2succ}	$3.0420j$	$K_{n3}(jw) = 0.7505 + 1.2895j$
v_{1pred}	$-3.8291 + 3.7385j$	$K_{n4}(jw) = 0.1556 + 1.2895j$
$\phi(n_1)$	81.05	$K_{d1}(jw) = 0.1475 - 0.1927j$
n_1	$0.1556 + 0.9878j$	$K_{d2}(jw) = 0.3247 - 0.1927j$
d_1	$0.1475 - 0.1927j$	$K_{d3}(jw) = 0.3247 + 0.0022j$
d_2	$0.3247 - 0.1927j$	$K_{d4}(jw) = 0.1475 + 0.0022j$
$n_{4\lambda}$	$0.1556 + 1.2895j$	
$n_{2\lambda}$	$0.5862 + 0.9878j$	

	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
Th.	3	4	3	4	3
v_{xpred}	$3.0420j$	$0.4996 + 3.0386j$	$2.3317 + 3.0261j$	$5.1859 + 6.6181j$	$8.7404j$
v_{xsucc}	$2.3317 + 3.0261j$	$5.1859 + 6.6181j$	$5.2164 + 8.6623j$	$8.7404j$	$-2.8422 + 2.9830j$
$\phi(A_x)$	8.95	127.23	127.23	210.20	186.88
C. ver.	C3.3	C4.3	C3.4	C4.4	C3.2
n_x	$-0.1555 + 0.9878j$	$0.7505 + 0.9878j$	$0.7505 + 0.9878j$	$0.7505 + 1.2895j$	$0.1556 + 1.2895j$
d_x	$0.3247 + 0.0022j$	$0.3247 + 0.0022j$	$0.1475 + 0.0022j$	$0.1475 + 0.0022j$	$0.1475 - 0.1927j$
v_x	$\frac{n_1}{d_3}$	$\frac{n_2}{d_3}$	$\frac{n_2}{d_4}$	$\frac{n_3}{d_4}$	$\frac{n_4}{d_4}$

Tabla 4.3: Resultados del algoritmo para conjunto de valores a frecuencia $w = 1.1$.

Aplicando la normalización para un segmento (lema 4.1) se obtienen los siguientes datos:

$$\begin{aligned} \varphi(d_1) &= 360 - \arg(v_2 - v_1) = 284.62^\circ \\ d_1 &= \cos(\varphi(d_1)) + j \sin(\varphi(d_1)) = 0.2524 - 0.9676j \\ n_1 &= v_1 d_1 = 6.6471 - 4.5717j; \quad n_2 = v_2 d_1 = 8.2793 - 4.5717j; \\ d_{2\lambda} &= \frac{n_2}{v_{2succ}} = -0.5343 - 0.9677j; \quad d_{4\lambda} = \frac{n_1}{v_{1pred}} = 0.2524 - 1.8230j \end{aligned}$$

Entonces, todos los demás vértices son asignables:

1. Vértice $v_3 = v_x = \frac{n_x}{d_x} = -3.0339 + 6.1294j$. Entonces $v_{xpred} = \frac{n_x}{d_{xpred}} = 8.5560j$. Estos son los vértices de un arco, y puede aplicarse el teorema 4.2 con los valores de $v_{xsucc} = -2.2110 + 5.1007j$ y $\varphi(S_x) = \arg(v_{xsucc} - v_x) = 308.66^\circ$.

Caso 1:

La condición C2.1 no se satisface: $\arg\left(\frac{v_x}{v_2}\right) = 69.86^\circ \neq \arg(d_1) + \varphi(S_x) - 90^\circ = 143.28^\circ$.

Caso 2:

La condición C2.2 no se satisface: $\arg\left(\frac{v_x}{v_1}\right) = 75.47^\circ \neq \arg(d_1) + \varphi(S_x) = 233.28^\circ$

Caso 3:

La condición C2.3 se satisface $\tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 180^\circ) n_{2R} = -1.8087 > n_{2I} = -4.5717$ y además $d_x = \frac{n_{2R} [1 + j \tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 180^\circ)]}{v_x} = -0.7740 - 0.9676j$ satisface la condición del denominador (lema 4.2, caso 3, $d_x = d_2$):

$$(d_{1R} = 0.2524 > d_{2\lambda R} = -0.5343 \text{ y } d_{1I} = -0.9676 > d_{4\lambda I} = -1.8230)$$

$$(d_{xI} = d_{1I} = -0.9676 \text{ y } d_{xR} = -0.7740 \leq d_{1R} = 0.2524)$$

Entonces $n_x = n_3 = n_{2R} [1 + j \tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 180^\circ)] = 8.2793 - 1.8087j$ y $v_3 = v_x = \frac{n_3}{d_2}$.

2. Vértice $v_4 = v_x = \frac{n_x}{d_x} = -2.211 + 5.1007j$. Entonces $v_{xpred} = \frac{n_x}{d_{xpred}} = -3.0339 + 6.1294j$. Estos son los vértices de un segmento, y se aplica el teorema 4.1 con los valores de v_{xpred} y $\varphi(S_x) = \arg(v_x - v_{xpred}) = 308.66^\circ$

Caso 1:

La condición C1.1 no se satisface: $\arg\left(\frac{v_x}{v_2}\right) = 66.96^\circ \neq \arg(d_1) + \varphi(S_x) = 233.28^\circ$.

Caso 2:

La condición C1.2 no se satisface: $\arg\left(\frac{v_x}{v_1}\right) = 72.57^\circ \neq \arg(d_1) + \varphi(S_x) + 90^\circ = 323.28^\circ$.

Caso 3:

La condición C1.3 se satisface: $\tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 90^\circ) n_{2R} = 30.4258^\circ > n_{2I} = -4.5717$ pero el valor de $d_x = \frac{n_{2R} [1 + j \tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 90^\circ)]}{v_x} = 4.4292 - 3.5431j$ no satisface la condición del denominador (lema 4.2, caso 3):

$$(d_{1R} = 0.2524 > d_{2\lambda R} = -0.5343 \text{ y } d_{1I} = -0.9676 > d_{4\lambda I} = -1.8230)$$

pero:

$$(d_{xR} = 4.4292 \neq d_{1R} = 0.2524) \Rightarrow d_x \neq d_1 \text{ y } d_x \neq d_4$$

$$(d_{xI} = -3.5431 \neq d_{1I} - 0.9676) \Rightarrow d_x \neq d_2$$

$$(d_{xR} = 4.4292 > d_{1R} = 0.2524 \text{ y } d_{xI} = -3.5431 < d_{1I} = -0.9676) d_x \neq d_3$$

Caso 4:

La condición C1.4 se satisface $\tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 180^\circ) n_{1R} = -1.8088 > n_{1I} = -4.5717$ y $d_x = \frac{n_{1R} [1 + j \tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 180^\circ)]}{v_x} = -0.7741 - 0.9676j$ satisface la condición del denominador (lema 4.2, caso 3. $d_x = d_2$):

$$(d_{1R} = 0.2524 > d_{2\lambda R} = -0.5343 \text{ y } d_{1I} = -0.9676 > d_{4\lambda I} = -1.8230)$$

$$(d_{xI} = d_{1I} = -0.9676 \text{ y } d_{xR} = -0.7740 \leq d_{1R} = 0.2524)$$

Entonces $n_x = n_4 = n_{1R} [1 + j \tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 180^\circ)] = 6.6471 - 1.8088j$ y $v_4 = v_x = \frac{n_4}{d_2}$.

3. Vértice $v_5 = v_x = \frac{n_x}{d_x} = -0.47099 + 3.4462j$. Entonces $v_{xpred} = \frac{n_x}{d_{xpred}} = -2.2110 + 5.1007j$. Estos son los vértices de un arco, y por tanto puede aplicarse el teorema 4.2, con los valores de $v_{xsucc} = 3.6463j$ y $\varphi(S_x) = \arg(v_{xsucc} - v_x) = 23.01^\circ$.

Caso 1:

La condición C2.1 no se satisface: $\arg\left(\frac{v_x}{v_2}\right) = 51.31^\circ \neq \arg(d_1) + \varphi(S_x) - 90^\circ = 217.63^\circ$.

Caso 2:

La condición C2.2 no se satisface: $\arg\left(\frac{v_x}{v_1}\right) = 56.92^\circ \neq \arg(d_1) + \varphi(S_x) = 307.63^\circ$

Caso 3:

La condición C2.3 se satisface, $\tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 180^\circ) n_{2R} = 30.4087 > n_{2I} = -4.5717$ pero $d_x = \frac{n_{2R} [1 + j \tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 180^\circ)]}{v_x} = 8.3397 - 3.5422j$ no satisface la condición del denominador (lema 4.2, caso 3):

$$(d_{1R} = 0.2524 > d_{2\lambda R} = -0.5343 \text{ y } d_{1I} = -0.9676 > d_{4\lambda I} = -1.8230)$$

pero:

$$(d_{xR} = 8.3397 \neq d_{1R} = 0.2524) \Rightarrow d_x \neq d_1 \text{ y } d_x \neq d_4$$

$$(d_{xI} = -3.5422 \neq d_{1I} = -0.9676) \Rightarrow d_x \neq d_2$$

$$(d_{xR} = 8.3397 > d_{1R} = 0.2524 \text{ y } d_{xI} = -3.5422 < d_{1I} = -0.9676) \Rightarrow d_x \neq d_3$$

Caso 4:

La condición C2.4 se satisface: $\tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 270^\circ) n_{1R} = -1.8098 > n_{1I} = -4.5717$ y $d_x = \frac{n_{1R} [1 + j \tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 270^\circ)]}{v_x} = -0.7743 - 1.8230j$ satisface la condición del denominador (lema 4.2, caso 3, $d_x = d_3$):

$$(d_{1R} = 0.2524 > d_{2\lambda R} = -0.5343 \text{ y } d_{1I} = -0.9676 > d_{4\lambda I} = -1.8230)$$

$$(d_{xR} = -0.7743 < d_{1R} = 0.2524 \text{ y } d_{xI} = -1.8230 < d_{1I} = -0.9676)$$

Entonces $n_x = n_4 = n_{1R} [1 + j \tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 270^\circ)] = 6.6471 - 1.8098j$ y $v_5 = v_x = \frac{n_4}{d_3}$.

4. Vértice $v_6 = v_x = \frac{n_x}{d_x} = 1.469 + 3.4428j$. Entonces $v_{xpred} = \frac{n_x}{d_{xpred}} = 3.6463j$. Estos son los vértices de un arco, y por tanto puede aplicarse el teorema 4.2, con los valores de $v_{xsucc} = 2.9559 + 3.2369j$, $\varphi(S_x) = \arg(v_{xsucc} - v_x) = 352.12^\circ$.

Caso 1:

La condición C2.1 no se satisface: $\arg\left(\frac{v_x}{v_2}\right) = 20.42^\circ \neq \arg(d_1) + \varphi(S_x) - 90^\circ = 186.74^\circ$

Caso 2:

La condición C2.2 no se satisface: $\arg\left(\frac{v_x}{v_1}\right) = 26.03^\circ \neq \arg(d_1) + \varphi(S_x) = 276.74^\circ$

Caso 3:

La condición C2.3 se satisface: $\tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 180^\circ) n_{2R} = 30.4240 > n_{2I} = -4.5717$ pero $d_x = \frac{n_{2R} [1 + j \tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 180^\circ)]}{v_x} = 8.3440 + 1.1554j$ no satisface la condición del denominador (lema 4.2, caso 3):

$$(d_{1R} = 0.2524 > d_{2\lambda R} = -0.5343 \text{ y } d_{1I} = -0.9676 > d_{4\lambda I} = -1.8230)$$

pero:

$$(d_{xR} = 8.3440 \neq d_{1R} = 0.2524) \Rightarrow d_x \neq d_1 \text{ y } d_x \neq d_4$$

$$(d_{xI} = -3.5422 \neq d_{1I} = 1.1554) \Rightarrow d_x \neq d_2$$

$$(d_{xR} = 8.3440 > d_{1R} = 0.2524 \text{ y } d_{xI} = 1.1554 > d_{1I} = -0.9676) \Rightarrow d_x \neq d_3.$$

Caso 4:

La condición C2.4 se satisface: $\tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 270^\circ) n_{1R} = -1.8089 > n_{1I} = -4.5717$ y $d_x = \frac{n_{1R} [1 + j \tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 270^\circ)]}{v_x} = 0.2524 - 1.8230j$ satisface la condición del denominador (lema 4.2, caso 3, $d_x = d_4$):

$$(d_{1R} = 0.2524 > d_{2\lambda R} = -0.5343 \text{ y } d_{1I} = -0.9676 > d_{4\lambda I} = -1.8230)$$

$$(d_{xR} = d_{1R} = 0.2524 \text{ y } d_{xI} = -1.8230 < d_{1I} = -0.9676) [d_x = d_4]$$

Entonces $n_x = n_4 = n_{1R} [1 + j \tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 270^\circ)] = 6.6471 - 1.8089j$ y $v_6 = v_x = \frac{n_4}{d_4}$

5. Vértice $v_7 = v_x = \frac{n_x}{d_x} = 2.9559 + 3.2369j$. Entonces $v_{xpred} = \frac{n_x}{d_{xpred}} = 1.4690 + 3.4428j$. Estos son los vértices de un segmento, y puede aplicarse el teorema 4.1, con los valores de v_{xpred} y $\varphi(S_x) = \arg(v_x - v_{xpred}) = 352.12$

Caso 1:

La condición C1.1 no se satisface: $\arg\left(\frac{v_x}{v_2}\right) = 1.13 \neq \arg(d_1) + \varphi(S_x) = 276.74$

Caso 2:

La condición C1.2 se satisface: $\arg\left(\frac{v_x}{v_1}\right) = \arg(d_1) + \varphi(S_x) + 90 = 6.74$ y $d_x = \frac{n_1}{v_x} = 0.2524 - 1.8230j$ satisface la condición del denominador (lema 4.2, caso 3, $d_x = d_4$):

$$(d_{1R} = 0.2524 > d_{2\lambda R} = -0.5343 \text{ y } d_{1I} = -0.9676 > d_{4\lambda I} = -1.8230)$$

$$(d_{xR} = d_{1R} = 0.2524 \text{ y } d_{xI} = -1.8230 < d_{1I} = -0.9676) [d_x = d_4]$$

Entonces $n_x = n_1 = 6.6471 - 4.5717j$; $v_7 = v_x = \frac{n_1}{d_4}$

En resumen, los polinomios asignados son:

$$v_1 = \frac{n_1}{d_1}; v_2 = \frac{n_2}{d_1}; v_3 = \frac{n_3}{d_2}; v_4 = \frac{n_4}{d_2}; v_5 = \frac{n_4}{d_3}; v_6 = \frac{n_4}{d_4}; v_7 = \frac{n_1}{d_4}$$

Los valores obtenidos a partir de la normalización son:

$$d_1 = 0.2524 - 0.9676j; n_1 = 6.6471 - 4.5717j; n_2 = 8.2793 - 4.5717j$$

Y a partir de los vértices, aplicando el algoritmo

$$v_3 : n_3 = 8.2793 - 1.8087j; d_2 = -0.7741 - 0.9676j$$

$$v_4 : n_4 = 6.6471 - 1.8087j; d_2 = -0.7741 - 0.9676j$$

$$v_5 : n_4 = 6.6471 - 1.8087j; d_3 = -0.7743 - 1.8230j$$

$$v_6 : n_4 = 6.6471 - 1.8087j; d_4 = 0.2524 - 1.8230j$$

$$v_7 : n_1 = 6.6471 - 4.5717j; d_4 = 0.2524 - 1.8230j$$

Entonces

$$K_{n1}(j\omega) = 6.6471 - 4.5717j; K_{n2}(j\omega) = 8.2793 - 4.5717j$$

$$K_{n3}(j\omega) = 8.2793 - 1.8087j; K_{n4}(j\omega) = 6.6471 - 1.8087j$$

$$K_{d1}(j\omega) = -0.7743 - 1.8230j; K_{d2}(j\omega) = 0.2524 - 1.8230j$$

$$K_{d3}(j\omega) = 0.2524 - 0.9676j; K_{d4}(j\omega) = -0.7743 - 0.9676j$$

A partir de estos rectángulos de Kharitonov se obtienen directamente los 32 sistemas de la figura 4.14(b), iguales a los obtenidos a partir de los rectángulos de Kharitonov originales (figura 4.14(a)).

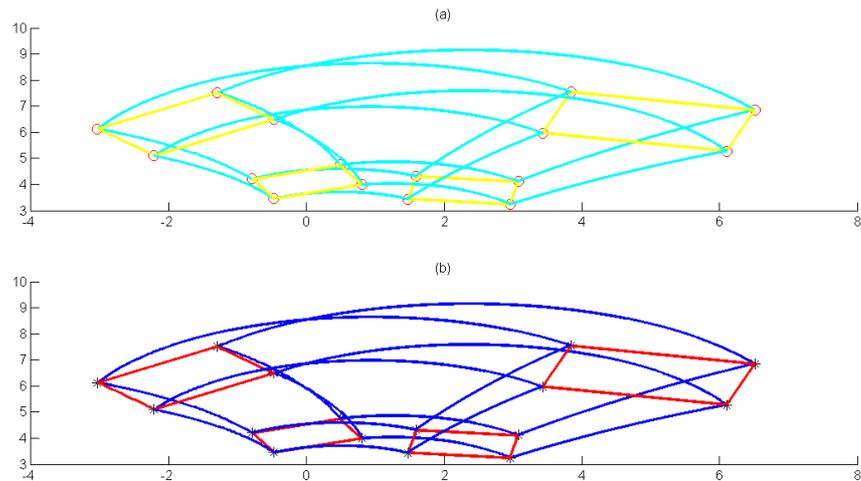


Figura 4.14: Comparación de los 32 sistemas para $\omega = 1.2$.

Las tablas 4.4 muestran los resultados del algoritmo para los valores de la frecuencia $\omega = 1.2$.

	$v_1 - v_2$ segmento	Rectángulos Kharitonov calculados
v_1	$6.1015 + 5.2779j$	$K_{n1}(jw) = 6.6471 - 4.5717j$
v_2	$6.5135 + 6.8573j$	$K_{n2}(jw) = 8.2793 - 4.5717j$
v_{2succ}	$8.5560j$	$K_{n3}(jw) = 8.2793 - 1.8087j$
v_{1pred}	$2.9559 + 3.2369j$	$K_{n4}(jw) = 6.6471 - 1.8087j$
$\varphi(d_1)$	284.62	$K_{d1}(jw) = -0.7743 - 1.8230j$
d_1	$0.2524 - 0.9676j$	$K_{d2}(jw) = 0.2524 - 1.8230j$
n_1	$6.6471 - 4.5717j$	$K_{d3}(jw) = 0.2524 - 0.9676j$
n_2	$8.2793 - 4.5717j$	$K_{d4}(jw) = -0.7743 - 0.9676j$
$d_{4\lambda}$	$0.2524 - 1.8230j$	
$d_{2\lambda}$	$-0.5343 - 0.9677j$	

	v_3 $-3.0339 + 6.1294j$	v_4 $-2.211 + 5.1007j$	v_5 $-0.4710 + 3.4462j$	v_6 $-1.469 + 3.4428j$	v_7 $2.9559 + 3.2369j$
Th.	2	1	2	2	1
v_{xpred}	$8.5560j$	$-3.0339 + 6.1294j$	$-2.211 + 5.1007j$	$-3.6463j$	$1.4690 + 3.4428j$
v_{xsucc}	$-2.211 + 5.1007j$	$-0.4710 + 3.4462j$	$3.6463j$	$2.9559 + 3.2369j$	$6.1015 + 5.2779j$
$\varphi(S_x)$	308.66	308.66	23.01	352.12	352.12
C. ver.	C2.3	C1.4	C2.4	C2.4	C1.2
d_x	$-0.7741 - 0.9676j$	$-0.7741 - 0.9676j$	$-0.7743 - 1.8230j$	$0.2524 - 1.8230j$	$0.2524 - 1.8230j$
n_x	$8.2793 - 1.8088j$	$6.6471 - 1.8088j$	$6.6471 - 1.8098j$	$6.6471 - 1.8089j$	$6.6471 - 4.5717j$
v_x	$\frac{n_3}{d_2}$	$\frac{n_4}{d_2}$	$\frac{n_4}{d_3}$	$\frac{n_4}{d_4}$	$\frac{n_1}{d_4}$

Tabla 4.4: Resultados del algoritmo para conjunto de valores a frecuencia $w = 1.2$.

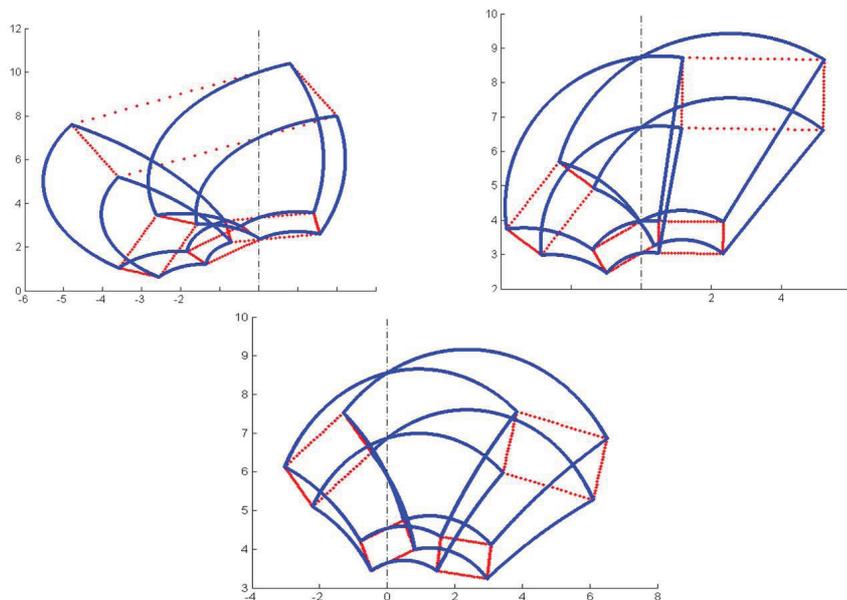


Figura 4.15: Conjunto de valores con los parámetros solución del sistema de ecuaciones.

Finalmente, resolviendo el sistema de ecuaciones 3.20, se determinan los parámetros del

intervalo de plantas:

$$G_p(s) = \frac{[10, 11]s^3 + [7, 8]s^2 + [6, 6.5]s + [5, 7.5]}{[0.75, 1.25]s^3 + [2, 2.5]s^2 + [1.5, 2]s + [1, 1.5]}$$

Aplicando $G_p(s = j\omega)$ en $\omega = 1.0$, $\omega = 1.1$ y $\omega = 1.2$ se obtienen los conjuntos de valores de la figura 4.15.



Para la resolución del ejemplo, se ha implementado el algoritmo con diferentes programas de Matlab (MathWorks ©). En la figura 4.16 se muestra la dependencia entre ellos, así como la secuencia de ejecución.

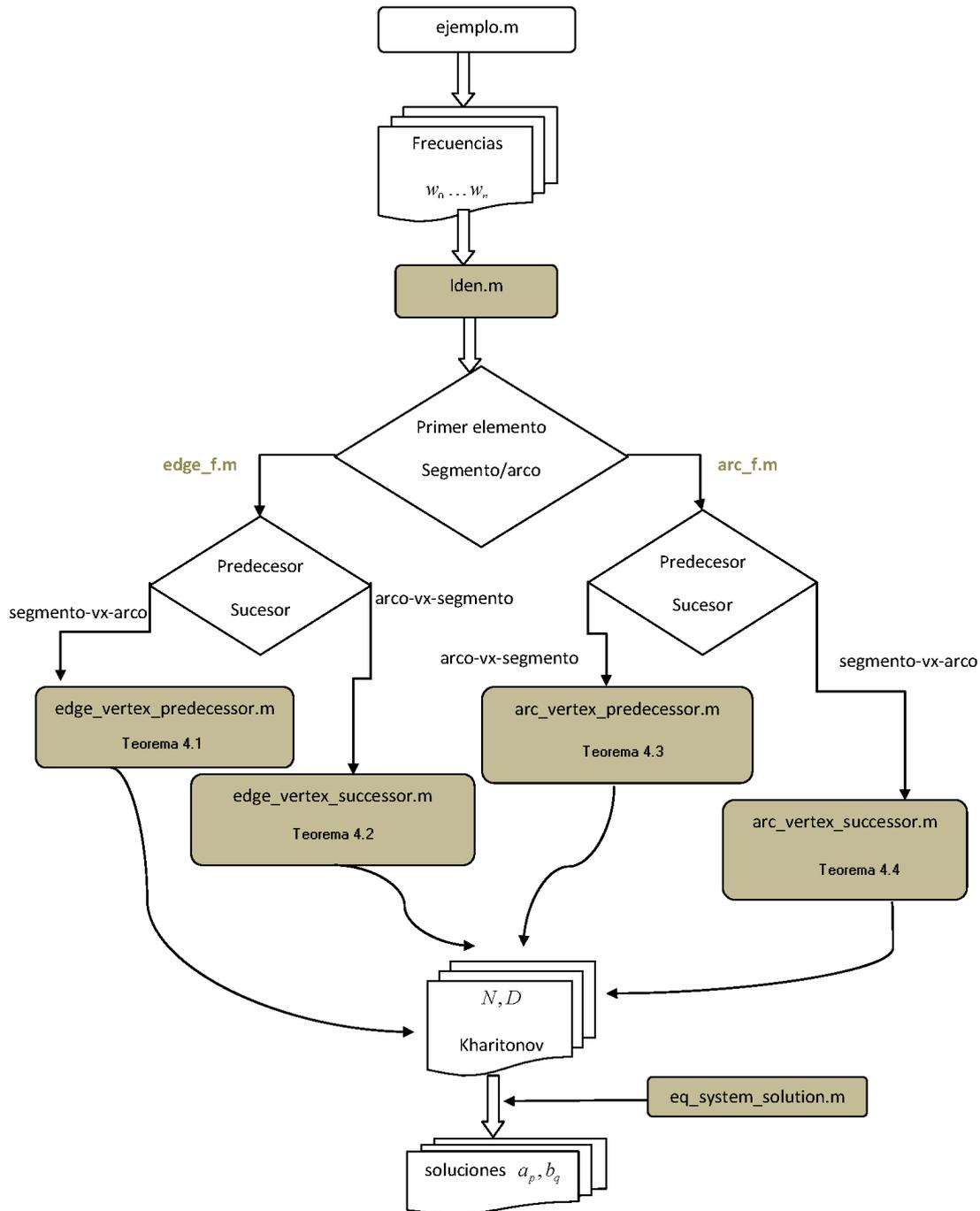


Figura 4.16: Diagrama resumen del proceso seguido en el ejemplo 4.1.

Capítulo 5

Casos particulares.

En el capítulo 4, para determinar los polinomios asignados a partir de un segmento o de un arco completo de la frontera del conjunto de valores, y calcular los polinomios de Kharitonov a partir éstos, se realizaba el proceso para el caso general en el que $n_{2R} \neq 0$, $n_{2I} \neq 0$, $n_{1R} \neq 0$ y $n_{1I} \neq 0$, para los teoremas obtenidos a partir de un segmento completo. Para el caso de disponer de un arco completo, se realizaba el proceso suponiendo que $d_{2R} \neq 0$, $d_{2I} \neq 0$, $d_{1R} \neq 0$ y $d_{1I} \neq 0$.

En este capítulo se enuncian y demuestran los teoremas Predecesor y Sucesor (para segmento y para arco), contemplando la posibilidad de que, o bien la parte real, o bien la parte imaginaria del polinomio asignado obtenido mediante la normalización, sea igual a cero.

En primer lugar, se demostrarán los teoremas que, a partir de un segmento completo de la frontera del conjunto de valores, permiten obtener los valores de los polinomios asignados del numerador y del denominador, a una frecuencia dada, en los casos en los que la normalización determine el polinomio asignado del numerador con alguna de las condiciones siguientes:

A) $n_{2R} = 0$, $n_{2I} \neq 0$.

B) $n_{2I} = 0$, $n_{2R} \neq 0$.

C) $n_{1R} = 0$, $n_{1I} \neq 0$.

Esta demostración se realizará en los casos «predecesor», segmento S_x de la frontera precedido de un arco, y «sucesor» segmento S_x de la frontera seguido de un arco.

Después se realizará el mismo estudio, partiendo de un arco A_x , y en los dos supuestos, «Predecesor», arco A_x de la frontera precedido de un segmento, y «Sucesor», arco A_x de la frontera seguido de un segmento..

5.1. A. $n_{2R} = 0$, $n_{2I} \neq 0$.

La situación se muestra en la figura 5.1.

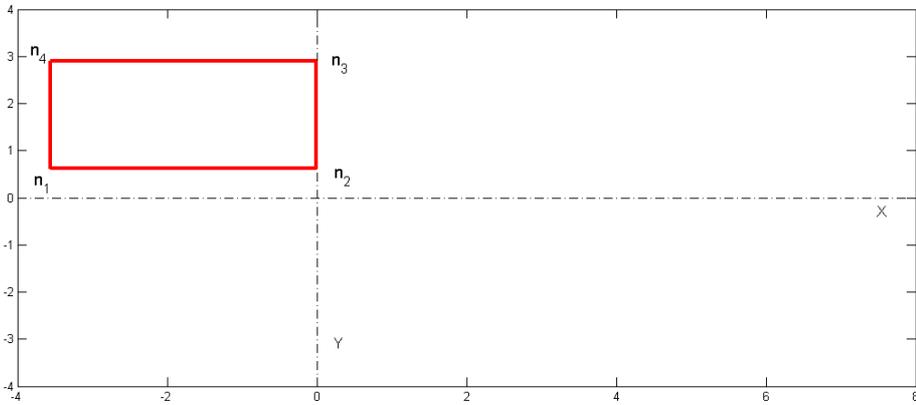


Figura 5.1: Rectángulo con $n_{2R} = 0$, $n_{2I} \neq 0$.

Teorema 5.1

[Predecesor.] Sean S_1 un segmento completo de la frontera del conjunto con vértices $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$ y $v_2 = \frac{n_2}{d_1}$, el arco de la frontera sucesor a S_1 , de vértices $v_2 = \frac{n_2}{d_1}$, $v_{2suc} = \frac{n_2}{d_{2\lambda}}$, y el arco de la frontera predecesor a S_1 , con vértices $v_{1pred} = \frac{n_1}{d_{4\lambda}}$ y $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$, todos en sentido antihorario. Sea S_x un segmento de la frontera de vértices $v_{xpred} = \frac{n_{xpred}}{d_x}$ y $v_x = \frac{n_x}{d_x}$, en sentido antihorario, donde v_x es un vértice perteneciente a la intersección del segmento S_x con un arco de la frontera. Entonces

1. $\arg\left(\frac{v_x}{v_2}\right) = \arg(d_1) + \varphi(S_x)$ (condición C1.1) y el denominador d_x de v_x determinado como $\frac{n_2}{v_x}$ satisface la condición del denominador (lema 4.2), si y solo si $n_x = n_2$, y no puede ser otro polinomio asignado.
2. Cuando $n_x \neq n_2$, $\arg\left(\frac{v_x}{v_1}\right) = \arg(d_1) + \varphi(S_x) + 90^\circ$ (condición C1.2) y el denominador d_x de v_x determinado como $\frac{n_1}{v_x}$ satisface la condición del denominador (lema 4.2), si y sólo si $n_x = n_1$ y no puede ser otro polinomio asignado.

3. Cuando $n_x \neq n_1$ y $n_x \neq n_2$, el denominador d_x de v_x determinado como $\frac{n_2}{v_{xpred}}$ satisface la condición del denominador (lema 4.2), si y sólo si $n_x = n_3 = n_2 \frac{v_x}{v_{xpred}}$, y no puede ser otro polinomio asignado.
4. Cuando $n_x \neq n_1$, $n_x \neq n_2$, y $n_x \neq n_3$, $\tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 180^\circ) n_{1R} > n_{1I}$ (condición C1.4), y el denominador d_x de v_x determinado como $\frac{n_{1R} [1 + j \tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 180^\circ)]}{v_x}$ satisface la condición del denominador (lema 4.2), si y sólo si $n_x = n_4 = n_{1R} [1 + j \tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 180^\circ)]$.

Demostración:

A partir del segmento completo S_1 , aplicando la normalización (lema 4.1) se obtienen los valores de d_1 , $n_1 = v_1 d_1$, $n_2 = v_2 d_1$, $d_{2\lambda} = \frac{n_2}{v_{2suc}}$ y $d_{4\lambda} = \frac{n_1}{v_{1pred}}$. El valor de v_x es conocido.

1. \Leftarrow Véase el mismo caso en el teorema 4.1.

\Rightarrow Para demostrar esta implicación, basta probar que si la condición C1.1 y la condición del denominador se satisfacen, entonces la solución $d_x = \frac{n_2}{v_x}$, $n_x = n_2$, es única. Nótese que la condición C1.1 se puede cumplir también cuando a) $n_x = n_3$, b) $n_x = n_4$ o c) $n_x = n_1$, y que en cada caso, el valor del denominador d_x determinado verifica la condición del denominador.

Sea d_x el denominador de v_x determinado como $\frac{n_2}{v_x}$, verificando la condición C1.1 y la condición del denominador. Además $S_x = \frac{S_2}{d_x}$, donde S_2 es parte del segmento de vértices n_1 y n_2 , y $\arg(n_2 - n_1) = 0^\circ$.

a) Sea d_x^* el denominador de v_x determinado como $\frac{n_3}{v_x}$. Entonces $S_x = \frac{S_3}{d_x^*}$ donde S_3 es parte del segmento de vértices n_2 y n_3 , $\arg(n_3 - n_2) = 90^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.1 $\arg(d_x^*) = 90^\circ - \varphi(S_x)$. Como v_x es el mismo vértice, entonces $\arg\left(\frac{n_3}{d_x^*}\right) = \arg\left(\frac{n_2}{d_x}\right)$, de donde se deduce que $\arg(n_3) = \arg(n_2) + 90^\circ$. $n_x = n_3$ verifica la condición C1.1, puesto que

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{v_x}{v_2}\right) &= \arg(n_2) + 90^\circ - \arg(n_2) + \arg(d_1) - 90^\circ + \varphi(S_x) \\ &= \arg(d_1) + \varphi(S_x). \end{aligned}$$

Como $\arg(n_3) = \pm \arg(n_2)$, d_x es una solución, d_x^* no lo es y $n_x = n_3$ no es una solución.

b) Véase el mismo caso en el teorema 4.1.

c) Sea d_x^* el denominador de v_x determinado como $\frac{n_1}{v_x}$. Entonces $S_x = \frac{S_1}{d_x^*}$, donde S_1 es parte del segmento de vértices n_4 y n_1 , $\arg(n_1 - n_4) = 270^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.1 $\arg(d_x^*) = 270^\circ - \varphi(S_x)$. Como v_x es el mismo vértice, entonces $\arg\left(\frac{n_1}{d_x^*}\right) = \arg\left(\frac{n_2}{d_x}\right)$, de donde se deduce que $\arg(n_1) = \arg(n_2) + 270^\circ$. $n_x = n_1$ verifica la condición C1.1, puesto que

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{v_x}{v_2}\right) &= \arg(n_2) + 270^\circ - \arg(n_2) + \arg(d_1) - 270^\circ + \varphi(S_x) \\ &= \arg(d_1) + \varphi(S_x). \end{aligned}$$

Como $\arg(n_2) = \pm 90^\circ$, según lo anterior $\arg(n_1) = 0^\circ$ o $\arg(n_1) = 180^\circ$, lo cual no es posible. Por tanto, d_x es una solución, d_x^* no lo es y $n_x = n_1$ no es una solución.

2. Véase el mismo caso en el teorema 4.1.

3. \Leftarrow Si $n_x = n_3$ entonces $S_x = \frac{S_3}{d_x}$, donde S_3 es parte del segmento de vértices n_2 y n_3 , verificándose que $\arg(n_3 - n_2) = 90^\circ$ (por la normalización). Como $n_3 = n_2 \frac{v_x}{v_{xpred}}$ y $d_x = \frac{n_3}{v_x}$, sustituyendo se tiene que $d_x = \frac{n_2}{v_{xpred}}$.

\Rightarrow Para demostrar esta implicación, basta probar que si $d_x = \frac{n_2}{v_{xpred}}$ y verifica la condición del denominador, entonces la solución $d_x = \frac{n_x}{v_x}$, $n_x = n_3 = n_2 \frac{v_x}{v_{xpred}}$, es única. Nótese que si $n_x \neq n_2$ y $n_x \neq n_1$, la solución se podría cumplir cuando $n_x = n_4$.

Sea d_x^* el denominador de v_x determinado como $\frac{n_4}{v_x}$. Entonces $S_x = \frac{S_4}{d_x^*}$, donde S_4 es parte del segmento de vértices n_3 y n_4 , $\arg(n_4 - n_3) = 180^\circ$, y por la proposición 4.1 $\arg(d_x^*) = 180^\circ - \varphi(S_x) = \arg(d_x) + 90^\circ$.

Como v_x es el mismo vértice, $\arg\left(\frac{n_4}{d_x^*}\right) = \arg\left(\frac{n_3}{d_x}\right)$, de donde se deduce que $\arg(n_4) = \arg(n_3) + 90^\circ$. Por la normalización, cuando $n_{2R} = 0$ entonces $n_{3R} = 0$. Por tanto, el segmento de vértices n_2 y n_3 está en el eje imaginario, verificándose que $\arg(n_2) = \pm \arg(n_3) = \pm 90^\circ$, y según lo anterior $\arg(n_4) = 0^\circ$ o $\arg(n_4) = 180^\circ$, lo cual no es posible pues $n_{3I} = n_{4I}$ lo que implicaría que $n_3 = (0, 0)$ y el denominador asociado también, pero $(0, 0) \notin D_p(s, \mathbf{b})$ según el planteamiento realizado en la sección 3.1. Por tanto, d_x es una solución, d_x^* no lo es y $n_x = n_1$ no es una solución.

4. Véase el mismo caso en el teorema 4.1.

■

5.2. B. $n_{2I} = 0, n_{2R} \neq 0$.

La situación se muestra en la figura 5.2.

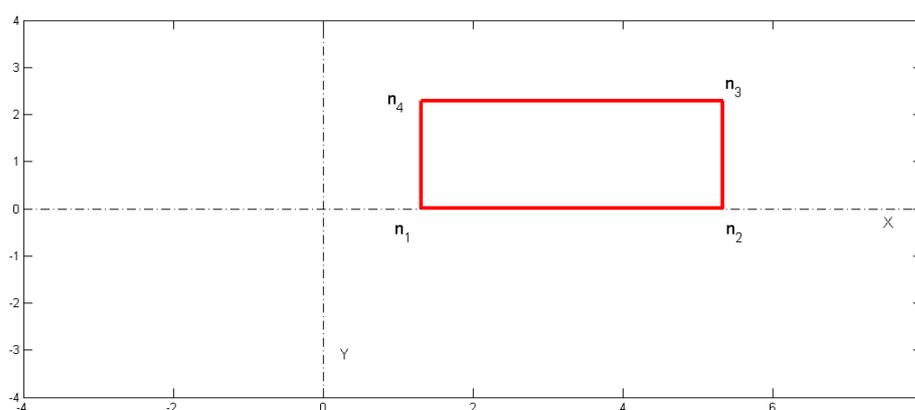


Figura 5.2: Rectángulo con $n_{2I} = 0, n_{2R} \neq 0$.

Teorema 5.2

[Predecesor.] Sean S_1 un segmento completo de la frontera del conjunto de valores con vértices $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$ y $v_2 = \frac{n_2}{d_1}$, el arco de la frontera sucesor a S_1 , de vértices $v_2 = \frac{n_2}{d_1}$ y $v_{2suc} = \frac{n_2}{d_{2\lambda}}$, y el arco de la frontera predecesor a S_1 , con vértices $v_{1pred} = \frac{n_1}{d_{4\lambda}}$ y $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$, todos en sentido antihorario. Sea S_x un segmento de la frontera de vértices $v_{xpred} = \frac{n_{xpred}}{d_x}$ y $v_x = \frac{n_x}{d_x}$ en sentido antihorario, donde v_x es un vértice perteneciente a la intersección del segmento S_x con un arco de la frontera (figura 4.7). Entonces:

1. $\arg\left(\frac{v_x}{v_2}\right) = \arg(d_1) + \varphi(S_x)$ (condición C1.1) y el denominador d_x de v_x determinado como $\frac{n_2}{v_x}$ satisface la condición del denominador (lema 4.2), si y sólo si $n_x = n_2$ y no puede ser otro polinomio asignado.
2. Cuando $n_x \neq n_2$, $\arg\left(\frac{v_x}{v_1}\right) = \arg(d_1) + \varphi(S_x) + 90^\circ$ (condición C1.2) y el denominador d_x de v_x determinado como $\frac{n_1}{v_x}$ satisface la condición del denominador (lema 4.2), si y sólo si $n_x = n_1$ y no puede ser otro polinomio asignado.

3. Cuando $n_x \neq n_1$ y $n_x \neq n_2$, $\tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 90^\circ) n_{2R} > n_{2I}$ (condición C1.3) y el denominador d_x de v_x determinado como $\frac{n_{2R} [1 + j \tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 90^\circ)]}{v_x}$ satisface la condición del denominador (lema 4.2), si y sólo si $n_x = n_3 = n_{2R} [1 + j \tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 90^\circ)]$ y no puede ser otro polinomio asignado.
4. Cuando $n_x \neq n_1$, $n_x \neq n_2$, y $n_x \neq n_3$, $\tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 180^\circ) n_{1R} > n_{1I}$ (condición C1.4), y el denominador d_x de v_x determinado como $\frac{n_{1R} [1 + j \tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 180^\circ)]}{v_x}$ satisface la condición del denominador (lema 4.2), si y sólo si $n_x = n_4 = n_{1R} [1 + j \tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 180^\circ)]$.

Demostración:

A partir del segmento completo S_1 , aplicando la normalización (lema 4.1) se obtienen los valores de d_1 , $n_1 = v_1 d_1$, $n_2 = v_2 d_1$, $d_{2\lambda} = \frac{n_2}{v_{2suc}}$ y $d_{4\lambda} = \frac{n_1}{v_{1pred}}$. El valor de v_x es conocido.

1. \Leftarrow Véase el mismo caso en el teorema 4.1.

\Rightarrow Para demostrar esta implicación, basta probar que si la condición C1.1 y la condición del denominador se satisfacen, entonces la solución $d_x = \frac{n_2}{v_x}$, $n_x = n_2$, es única. Nótese que la condición C1.1 se puede cumplir también cuando a) $n_x = n_3$, b) $n_x = n_4$ o c) $n_x = n_1$, y que en cada caso, el valor del denominador d_x determinado verifica la condición del denominador.

Sea d_x el denominador de v_x determinado como $\frac{n_2}{v_x}$, verificando la condición C1.1 y la condición del denominador. Además $S_x = \frac{S_2}{d_x}$, donde S_2 es parte del segmento de vértices n_1 y n_2 , y $\arg(n_2 - n_1) = 0^\circ$.

- a) Sea d_x^* el denominador de v_x determinado como $\frac{n_3}{v_x}$. Entonces $S_x = \frac{S_3}{d_x^*}$ donde S_3 es parte del segmento de vértices n_2 y n_3 , $\arg(n_3 - n_2) = 90^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.1 $\arg(d_x^*) = 90^\circ - \varphi(S_x)$. Como v_x es el mismo vértice, entonces $\arg\left(\frac{n_3}{d_x^*}\right) = \arg\left(\frac{n_2}{d_x}\right)$, de donde se deduce que $\arg(n_3) = \arg(n_2) + 90^\circ$. $n_x = n_3$ verifica la condición C1.1, puesto que

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{v_x}{v_2}\right) &= \arg(n_2) + 90^\circ - \arg(n_2) + \arg(d_1) - 90^\circ + \varphi(S_x) \\ &= \arg(d_1) + \varphi(S_x). \end{aligned}$$

Sea $\alpha = \arg(n_2)$, $\alpha = 0^\circ$ o $\alpha = 180^\circ$. Entonces $\arg(n_3) = 90^\circ$ o $\arg(n_3) = 270^\circ$, lo que no es posible porque $n_{3R} = n_{2R} \neq 0$. Por tanto, d_x es una solución, d_x^* no lo es y $n_x = n_3$ no es una solución.

b) Véase el mismo caso en el teorema 4.1.

c) Sea d_x^* el denominador de v_x determinado como $\frac{n_1}{v_x}$. Entonces $S_x = \frac{S_1}{d_x^*}$, donde S_1 es parte del segmento de vértices n_4 y n_1 , $\arg(n_1 - n_4) = 270^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.1 $\arg(d_x^*) = 270^\circ - \varphi(S_x)$. Como v_x es el mismo vértice, entonces $\arg\left(\frac{n_1}{d_x^*}\right) = \arg\left(\frac{n_2}{d_x}\right)$, de donde se deduce que $\arg(n_1) = \arg(n_2) + 270^\circ$. $n_x = n_1$ verifica la condición C1.1, puesto que

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{v_x}{v_2}\right) &= \arg(n_2) + 270^\circ - \arg(n_2) + \arg(d_1) - 270^\circ + \varphi(S_x) \\ &= \arg(d_1) + \varphi(S_x). \end{aligned}$$

Sea $\alpha = \arg(n_2)$, $\alpha = 0^\circ$ o $\alpha = 180^\circ$. Entonces $\arg(n_1) = 270^\circ$ o $\arg(n_1) = 90^\circ$, lo que no es posible porque $n_{1I} = n_{2I} = 0$. Por tanto, d_x es una solución, d_x^* no lo es y $n_x = n_1$ no es una solución.

2. \Leftarrow Véase el mismo caso en el teorema 4.1.

\Rightarrow Para demostrar esta implicación, basta probar que si la condición C1.2 y la condición del denominador se satisfacen, entonces la solución $d_x = \frac{n_1}{v_x}$, $n_x = n_1$, es única. Nótese que si $n_x \neq n_2$, la condición C1.2 se puede cumplir también cuando a) $n_x = n_3$ o b) $n_x = n_4$, y que en cada caso, el valor del denominador d_x determinado verifica la condición del denominador.

Sea d_x el denominador de v_x determinado como $\frac{n_1}{v_x}$, verificando la condición C1.2 y la condición del denominador. Además $S_x = \frac{S_1}{d_x}$, donde S_1 es parte del segmento de vértices n_4 y n_1 , y $\arg(n_1 - n_4) = 270^\circ$.

a) Véase el mismo caso en el teorema 4.1.

b) Sea d_x^* el denominador de v_x determinado como $\frac{n_4}{d_x^*}$. Entonces $S_x = \frac{S_4}{d_x^*}$, donde S_4 es parte del segmento de vértices n_3 y n_4 , $\arg(n_4 - n_3) = 180^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.1 $\arg(d_x^*) = 180^\circ - \varphi(S_x)$. Como v_x es el mismo vértice entonces $\arg\left(\frac{n_4}{d_x^*}\right) = \arg\left(\frac{n_1}{d_x}\right)$, de donde se deduce que

$\arg(n_4) = \arg(n_1) + 270^\circ$. $n_x = n_4$ verifica la condición C1.2, puesto que

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{v_x}{v_1}\right) &= \arg(n_1) + 270^\circ - \arg(n_1) + \arg(d_1) - 180^\circ + \varphi(S_x) \\ &= \arg(d_1) + \varphi(S_x) + 90^\circ. \end{aligned}$$

Sea $\alpha = \arg(n_1)$, $\alpha = 0^\circ$ o $\alpha = 180^\circ$. Entonces $\arg(n_4) = 270^\circ$ o $\arg(n_4) = 90^\circ$. Esto no es posible, porque $n_{4I} \neq 0$ puesto que $n_{1I} = 0$. Por tanto, d_x es una solución, d_x^* no lo es y $n_x = n_4$ no es una solución.

3. Véase el mismo caso en el teorema 4.1.

4. Véase el mismo caso en el teorema 4.1.

■

5.3. C. $n_{1R} = 0$, $n_{1I} \neq 0$.

La situación se muestra en la figura 5.3.

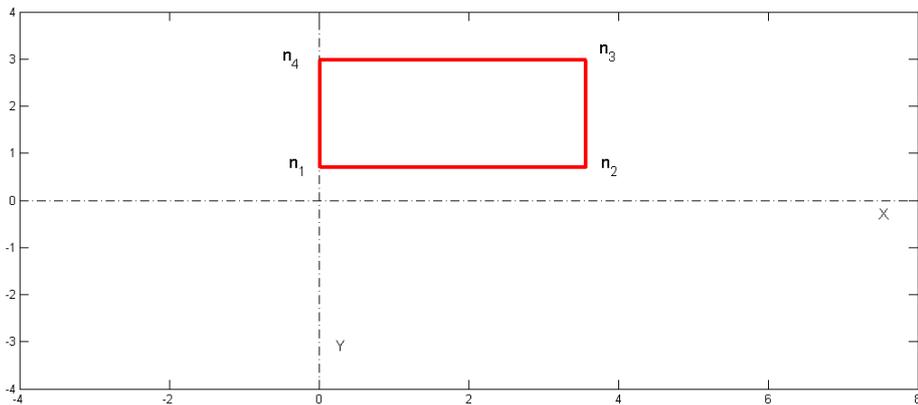


Figura 5.3: Rectángulo con $n_{1R} = 0$, $n_{1I} \neq 0$.

Teorema 5.3

[Predecesor] Sean S_1 un segmento completo de la frontera del conjunto de valores con vértices $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$ y $v_2 = \frac{n_2}{d_1}$, el arco de la frontera sucesor a S_1 , de vértices $v_2 = \frac{n_2}{d_1}$ y $v_{2suc} = \frac{n_2}{d_{2\lambda}}$, y el arco de la frontera predecesor a S_1 , con vértices $v_{1pred} = \frac{n_1}{d_{4\lambda}}$ y $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$, todos en sentido antihorario. Sea S_x un segmento de la frontera de vértices $v_{xpred} = \frac{n_{xpred}}{d_x}$ y $v_x = \frac{n_x}{d_x}$ en

sentido antihorario, donde v_x es un vértice perteneciente a la intersección del segmento S_x con un arco de la frontera (figura 4.7). Entonces:

1. $\arg\left(\frac{v_x}{v_2}\right) = \arg(d_1) + \varphi(S_x)$ (condición C1.1) y el denominador d_x de v_x determinado como $\frac{n_2}{v_x}$ satisface la condición del denominador (lema 4.2), si y sólo si $n_x = n_2$ y no puede ser otro polinomio asignado.
2. Cuando $n_x \neq n_2$, $\arg\left(\frac{v_x}{v_1}\right) = \arg(d_1) + \varphi(S_x) + 90^\circ$ (condición C1.2) y el denominador d_x de v_x determinado como $\frac{n_1}{v_x}$ satisface la condición del denominador (lema 4.2), si y sólo si $n_x = n_1$ y no puede ser otro polinomio asignado.
3. Cuando $n_x \neq n_1$ y $n_x \neq n_2$, $\tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 90^\circ) n_{2R} > n_{2I}$ (condición C1.3) y el denominador d_x de v_x determinado como $\frac{v_x}{n_{2R} [1 + j \tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 90^\circ)]}$ satisface la condición del denominador (lema 4.2), si y sólo si $n_x = n_3 = n_{2R} [1 + j \tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 90^\circ)]$ y no puede ser otro polinomio asignado.
4. Si $n_x \neq n_2$, $n_x \neq n_1$ y $n_x \neq n_3$ entonces $n_x = n_4$.

Demostración:

A partir del segmento completo S_1 , aplicando la normalización (lema 4.1) se obtienen los valores de d_1 , $n_1 = v_1 d_1$, $n_2 = v_2 d_1$, $d_{2\lambda} = \frac{n_2}{v_{2suc}}$ y $d_{4\lambda} = \frac{n_1}{v_{1pred}}$. El valor de v_x es conocido.

1. \Leftarrow Véase el mismo caso en el teorema 4.1.

\Rightarrow Para demostrar esta implicación, basta probar que si la condición C1.1 y la condición del denominador se satisfacen, entonces la solución $d_x = \frac{n_2}{v_x}$, $n_x = n_2$, es única. Nótese que la condición C1.1 se puede cumplir también cuando a) $n_x = n_3$, b) $n_x = n_4$ o c) $n_x = n_1$, y que en cada caso, el valor del denominador d_x determinado verifica la condición del denominador.

Sea d_x el denominador de v_x determinado como $\frac{n_2}{v_x}$, verificando la condición C1.1 y la condición del denominador. Además $S_x = \frac{S_2}{d_x}$, donde S_2 es parte del segmento de vértices n_1 y n_2 , y $\arg(n_2 - n_1) = 0^\circ$.

- a) Véase el mismo caso en el teorema 4.1.
- b) Véase el mismo caso en el teorema 4.1.

c) Sea d_x^* el denominador de v_x determinado como $\frac{n_1}{v_x}$. Entonces $S_x = \frac{S_1}{d_x^*}$, donde S_1 es parte del segmento de vértices n_4 y n_1 , $\arg(n_1 - n_4) = 270^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.1 $\arg(d_x^*) = 270^\circ - \varphi(S_x)$. Como v_x es el mismo vértice, entonces $\arg\left(\frac{n_1}{d_x^*}\right) = \arg\left(\frac{n_2}{d_x}\right)$, de donde se deduce que $\arg(n_1) = \arg(n_2) + 270^\circ$. $n_x = n_1$ verifica la condición C1.1, puesto que

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{v_x}{v_2}\right) &= \arg(n_2) + 270^\circ - \arg(n_2) + \arg(d_1) - 270^\circ + \varphi(S_x) \\ &= \arg(d_1) + \varphi(S_x). \end{aligned}$$

Sea $\alpha = \arg(n_1)$, $\alpha = 90^\circ$ o $\alpha = 270^\circ$. Entonces $\arg(n_2) = 180^\circ$ o $\arg(n_2) = 0^\circ$, lo que no es posible porque $n_{2I} = n_{1I} \neq 0$. Por tanto d_x es una solución, d_x^* no lo es, y $n_x = n_1$ no es una solución.

2. \Leftarrow Véase el mismo caso en el teorema 4.1.

\Rightarrow Para demostrar esta implicación, basta probar que si la condición C1.2 y la condición del denominador se satisfacen, entonces la solución $d_x = \frac{n_1}{v_x}$, $n_x = n_1$, es única. Nótese que si $n_x \neq n_2$, la condición C1.2 se puede cumplir también cuando a) $n_x = n_3$ o b) $n_x = n_4$, y que en cada caso, el valor del denominador d_x determinado verifica la condición del denominador.

Sea d_x el denominador de v_x determinado como $\frac{n_1}{v_x}$, verificando la condición C1.2 y la condición del denominador. Además $S_x = \frac{S_1}{d_x}$, donde S_1 es parte del segmento de vértices n_4 y n_1 , y $\arg(n_1 - n_4) = 270^\circ$.

a) Véase el mismo caso en el teorema 4.1.

b) Sea d_x^* el denominador de v_x determinado como $\frac{n_4}{d_x^*}$. Entonces $S_x = \frac{S_4}{d_x^*}$, donde S_4 es parte del segmento de vértices n_3 y n_4 , $\arg(n_4 - n_3) = 180^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.1 $\arg(d_x^*) = 180^\circ - \varphi(S_x)$. Como v_x es el mismo vértice entonces $\arg\left(\frac{n_4}{d_x^*}\right) = \arg\left(\frac{n_1}{d_x}\right)$, de donde se deduce que $\arg(n_4) = \arg(n_1) + 270^\circ$. $n_x = n_4$ verifica la condición C1.2, puesto que

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{v_x}{v_1}\right) &= \arg(n_1) + 270^\circ - \arg(n_1) + \arg(d_1) - 180^\circ + \varphi(S_x) \\ &= \arg(d_1) + \varphi(S_x) + 90^\circ. \end{aligned}$$

Sea $\alpha = \arg(n_1)$, $\alpha = 90^\circ$ o $\alpha = 270^\circ$. Entonces $\arg(n_4) = 0$ o $\arg(n_4) = 180^\circ$.

Por tanto $n_4 = (0, 0)$ no puede ser una solución, pues el vértice v_x no es cero.

3. Véase el mismo caso en el teorema 4.1.
4. Si $n_x \neq n_2, n_x \neq n_1$ y $n_x \neq n_3$ entonces $n_x = n_4$.

■

Los teoremas siguientes son análogos al teorema 4.2 donde S_x es un segmento de vértices $v_x = \frac{n_x}{d_x}$ y $v_{xsuc} = \frac{n_{xsuc}}{d_x}$, en sentido antihorario, y v_x perteneciente a un arco-segmento.

5.4. A. $n_{2R} = 0, n_{2I} \neq 0$.

Teorema 5.4

[Sucesor] Sean S_1 un segmento completo de la frontera del conjunto de valores, con vértices $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$ y $v_2 = \frac{n_2}{d_1}$, el arco de la frontera sucesor a S_1 , de vértices $v_2 = \frac{n_2}{d_1}$ y $v_{2suc} = \frac{n_2}{d_{2\lambda}}$, y el arco de la frontera predecesor a S_1 con vértices $v_{1pred} = \frac{n_1}{d_{4\lambda}}$ y $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$, todos en sentido antihorario. Sea S_x un segmento de la frontera de vértices $v_x = \frac{n_x}{d_x}$ y $v_{xsuc} = \frac{n_{xsuc}}{d_x}$ en sentido antihorario, donde v_x es un vértice perteneciente a la intersección de un arco de la frontera con el segmento S_x . Entonces:

1. $\arg\left(\frac{v_x}{v_2}\right) = \arg(d_1) + \varphi(S_x) - 90^\circ$ (condición C2.1) y el denominador d_x de v_x determinado como $\frac{n_2}{v_x}$ satisface la condición del denominador (lema 4.2), si y sólo si $n_x = n_2$ y no puede ser otro polinomio asignado.
2. Cuando $n_x \neq n_2$, $\arg\left(\frac{v_x}{v_1}\right) = \arg(d_1) + \varphi(S_x)$ (condición C2.2) y el denominador d_x de v_x determinado como $\frac{n_1}{v_x}$ satisface la condición del denominador (lema 4.2), si y sólo si $n_x = n_1$ y no puede ser otro polinomio asignado.
3. Cuando $n_x \neq n_1, n_x \neq n_2$, y $\tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 270^\circ) n_{1R} > n_{1I}$ (condición C2.4) y el denominador d_x de v_x determinado como $\frac{n_{1R} [1 + j \tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 270^\circ)]}{v_x}$ satisface la condición del denominador (lema 4.2), si y sólo si $n_x = n_4 = n_{1R} [1 + j \tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 270^\circ)]$ y no puede ser otro polinomio asignado.
4. Si $n_x \neq n_2, n_x \neq n_1$ y $n_x \neq n_4$ entonces $n_x = n_3$.

Demostración:

A partir del segmento completo S_1 , aplicando la normalización (lema 4.1) se obtienen los valores de d_1 , $n_1 = v_1 d_1$, $n_2 = v_2 d_1$, $d_{2\lambda} = \frac{n_2}{v_{2suc}}$ y $d_{4\lambda} = \frac{n_1}{v_{1pred}}$. El valor de v_x es conocido.

1. \Leftarrow Véase el mismo caso en el teorema 4.2.

\Rightarrow Para demostrar esta implicación, basta probar que si la condición C2.1 y la condición del denominador se satisfacen, entonces la solución $d_x = \frac{n_2}{v_x}$, $n_x = n_2$, es única. Nótese que la condición C2.1 se puede cumplir también cuando a) $n_x = n_3$, b) $n_x = n_4$ o c) $n_x = n_1$, y que en cada caso, el valor del denominador d_x determinado verifica la condición del denominador.

Sea d_x el denominador de v_x determinado como $\frac{n_2}{v_x}$, verificando la condición C2.1 y la condición del denominador. Además $S_x = \frac{S_2}{d_x}$, donde S_2 es parte del segmento de vértices n_2 y n_3 , y $\arg(n_3 - n_2) = 90^\circ$.

a) Sea d_x^* el denominador de v_x determinado como $\frac{n_3}{v_x}$. Entonces $S_x = \frac{S_3}{d_x^*}$, donde S_3 es parte del segmento de vértices n_3 y n_4 , $\arg(n_4 - n_3) = 180^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.1 $\arg(d_x^*) = 180^\circ - \varphi(S_x)$. Como v_x es el mismo vértice, entonces $\arg\left(\frac{n_3}{d_x^*}\right) = \arg\left(\frac{n_2}{d_x}\right)$, de donde se deduce que $\arg(n_3) = \arg(n_2) + 90^\circ$. $n_x = n_3$ verifica la condición C2.1, puesto que

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{v_x}{v_2}\right) &= \arg(n_2) + 90^\circ - \arg(n_2) + \arg(d_1) - 180^\circ + \varphi(S_x) \\ &= \arg(d_1) + \varphi(S_x) - 90^\circ. \end{aligned}$$

Sea $\alpha = \arg(n_2)$, $\alpha = 90^\circ$ o $\alpha = 270^\circ$. Entonces $\arg(n_3) = 180^\circ$ o $\arg(n_3) = 0^\circ$, lo que no es posible porque $n_{3R} = n_{2R}$. Por tanto, d_x es una solución, d_x^* no lo es y $n_x = n_3$ no es una solución.

b) Véase el mismo caso en el teorema 4.2.

c) Sea d_x^* el denominador de v_x determinado como $\frac{n_1}{v_x}$. Entonces $S_x = \frac{S_1}{d_x^*}$, donde S_1 es parte del segmento de vértices n_2 y n_1 , $\arg(n_2 - n_1) = 0^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.1 $\arg(d_x^*) = -\varphi(S_x)$. Como v_x es el mismo vértice, entonces $\arg\left(\frac{n_1}{d_x^*}\right) = \arg\left(\frac{n_2}{d_x}\right)$, de donde se deduce que

$\arg(n_1) = \arg(n_2) + 270^\circ$. $n_x = n_1$ verifica la condición C2.1, puesto que

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{v_x}{v_2}\right) &= \arg(n_1) - \arg(n_2) + \arg(d_1) - \arg(d_x^*) \\ &= 270^\circ + \arg(d_1) + \varphi(S_x) = \arg(d_1) + \varphi(S_x) - 90^\circ. \end{aligned}$$

Sea $\alpha = \arg(n_2)$, $\alpha = 90^\circ$ o $\alpha = 270^\circ$. Entonces $\arg(n_1) = 0$ o $\arg(n_1) = 180^\circ$, lo que no es posible porque $n_{1I} = n_{2I} \neq 0$. Por tanto, d_x es una solución, d_x^* no lo es y $n_x = n_1$ no es una solución.

2. Véase el mismo caso en el teorema 4.2.

3. \Leftarrow Véase la misma implicación del caso 4 en el teorema 4.2.

\Rightarrow Para demostrar esta implicación, basta probar que si la condición C2.4 y la condición del denominador se satisfacen, entonces la solución $d_x = \frac{n_4}{v_x}$, $n_x = n_4$, es única. Nótese que si $n_x \neq n_2$ y $n_x \neq n_1$, la condición C2.4 se puede verificar cuando $n_x = n_3$.

Sea d_x el denominador de v_x determinado como $\frac{n_4}{v_x}$, verificando la condición C2.4 y la condición del denominador. Además $S_x = \frac{S_4}{d_x}$, donde S_4 es parte del segmento de vértices n_1 y n_4 , y $\arg(n_1 - n_4) = 270^\circ$.

Sea d_x^* el denominador de v_x determinado como $\frac{n_3}{v_x}$. Entonces $S_x = \frac{S_3}{d_x^*}$, donde S_3 es parte del segmento de vértices n_3 y n_4 , $\arg(n_4 - n_3) = 180^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.1 $\arg(d_x^*) = 270^\circ + \arg(d_x)$. Por tanto $d_x^* = \rho e^{j3\frac{\pi}{2}} d_x = \rho d_{xI} - j\rho d_{xR}$.

Como v_x es el mismo vértice $\arg\left(\frac{n_3}{d_x^*}\right) = \arg\left(\frac{n_4}{d_x}\right)$, de donde se deduce que $\arg(n_3) = \arg(n_4) + 270^\circ$. Sea $\alpha = \arg(n_4)$, entonces $\alpha + 270^\circ = \arg(n_3) = \arg(v_x) + \arg(d_x^*) = \arg(v_x) + 180^\circ - \varphi(S_x)$. Por tanto $\alpha = \arg(v_x) - \varphi(S_x) + 270^\circ$, y como el argumento de n_4 verifica $n_{4I} = n_{1R} \tan(\alpha) > n_{1I}$ (por la normalización), es decir, la condición C2.3 se satisface.

Si $n_x = n_3$ entonces $n_3 = n_{3R} + jn_{3I} = jn_{1R} \tan(\arg(v_x) + 180^\circ - \varphi(S_x))$, y el denominador d_x^* puede calcularse mediante la expresión

$$d_x^* = \frac{n_3}{v_x} = \frac{jn_{1R} \tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 180^\circ)}{v_x}.$$

Si $n_x = n_3$, entonces $\arg(n_3) = \arg(n_4) + 270^\circ$. En este caso $\arg(n_3) = 90^\circ$ o

$\arg(n_3) = 270^\circ$, entonces $\arg(n_4) = 0^\circ$ o $\arg(n_4) = 180^\circ$, lo que no es posible porque $n_{3I} = n_{4I} \neq 0$. Por tanto, d_x es una solución, d_x^* no lo es y $n_x = n_3$ no es una solución.

4. Si $n_x \neq n_2$, $n_x \neq n_1$ y $n_x \neq n_4$ entonces $n_x = n_3$.

■

5.5. B. $n_{2I} = 0$, $n_{2R} \neq 0$.

Teorema 5.5

[Sucesor] Sean S_1 un segmento completo de la frontera del conjunto de valores, con vértices $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$ y $v_2 = \frac{n_2}{d_1}$, el arco de la frontera sucesor a S_1 , de vértices $v_2 = \frac{n_2}{d_1}$ y $v_{2suc} = \frac{n_2}{d_{2\lambda}}$, y el arco de la frontera predecesor a S_1 con vértices $v_{1pred} = \frac{n_1}{d_{4\lambda}}$ y $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$, todos en sentido antihorario. Sea S_x un segmento de la frontera de vértices $v_x = \frac{n_x}{d_x}$ y $v_{xsuc} = \frac{n_{xsuc}}{d_x}$ en sentido antihorario, donde v_x es un vértice perteneciente a la intersección de un arco de la frontera con el segmento S_x . Entonces:

1. $\arg\left(\frac{v_x}{v_2}\right) = \arg(d_1) + \varphi(S_x) - 90^\circ$ (condición C2.1) y el denominador d_x de v_x determinado como $\frac{n_2}{v_x}$ satisface la condición del denominador (lema 4.2), si y sólo si $n_x = n_2$ y no puede ser otro polinomio asignado.
2. Cuando $n_x \neq n_2$, $\arg\left(\frac{v_x}{v_1}\right) = \arg(d_1) + \varphi(S_x)$ (condición C2.2) y el denominador d_x de v_x determinado como $\frac{n_1}{v_x}$ satisface la condición del denominador (lema 4.2), si y sólo si $n_x = n_1$ y no puede ser otro polinomio asignado.
3. Cuando $n_x \neq n_1$ y $n_x \neq n_2$, $\tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 180^\circ) n_{2R} > n_{2I}$ (condición C2.3) y el denominador d_x de v_x determinado como $\frac{n_{2R} [1 + j \tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 180^\circ)]}{v_x}$ satisface la condición del denominador (lema 4.2), si y sólo si $n_x = n_3 = n_{2R} [1 + j \tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 180^\circ)]$, y no puede ser otro polinomio asignado.
4. Cuando $n_x \neq n_1$, $n_x \neq n_2$, y $n_x \neq n_3$, $\tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 270^\circ) n_{1R} > n_{1I}$ (condición C2.4) y el denominador d_x de v_x determinado como $\frac{n_{1R} [1 + j \tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 270^\circ)]}{v_x}$ satisface la condición del denominador (lema 4.2), si y sólo si $n_x = n_4 = n_{1R} [1 + j \tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 270^\circ)]$.

Demostración:

A partir del segmento completo S_1 , aplicando la normalización (lema 4.1) se obtienen los valores de d_1 , $n_1 = v_1 d_1$, $n_2 = v_2 d_1$, $d_{2\lambda} = \frac{n_2}{v_{2suc}}$ y $d_{4\lambda} = \frac{n_1}{v_{1pred}}$. El valor de v_x es conocido.

1. \Leftarrow Véase el mismo caso en el teorema 4.2.

\Rightarrow Para demostrar esta implicación, basta probar que si la condición C2.1 y la condición del denominador se satisfacen, entonces la solución $d_x = \frac{n_2}{v_x}$, $n_x = n_2$, es única. Nótese que la condición C2.1 se puede cumplir también cuando a) $n_x = n_3$, b) $n_x = n_4$ o c) $n_x = n_1$, y que en cada caso, el valor del denominador d_x determinado verifica la condición del denominador.

Sea d_x el denominador de v_x determinado como $\frac{n_2}{v_x}$, verificando la condición C2.1 y la condición del denominador. Además $S_x = \frac{S_2}{d_x}$, donde S_2 es parte del segmento de vértices n_2 y n_3 , y $\arg(n_3 - n_2) = 90^\circ$.

a) Sea d_x^* el denominador de v_x determinado como $\frac{n_3}{v_x}$. Entonces $S_x = \frac{S_3}{d_x^*}$, donde S_3 es parte del segmento de vértices n_3 y n_4 , $\arg(n_4 - n_3) = 180^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.1 $\arg(d_x^*) = 180^\circ - \varphi(S_x)$. Como v_x es el mismo vértice, entonces $\arg\left(\frac{n_3}{d_x^*}\right) = \arg\left(\frac{n_2}{d_x}\right)$, de donde se deduce que $\arg(n_3) = \arg(n_2) + 90^\circ$. $n_x = n_3$ verifica la condición C2.1, puesto que

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{v_x}{v_2}\right) &= \arg(n_2) + 90^\circ - \arg(n_2) + \arg(d_1) - 180^\circ + \varphi(S_x) \\ &= \arg(d_1) + \varphi(S_x) - 90^\circ. \end{aligned}$$

Sea $\alpha = \arg(n_2)$, $\alpha = 0^\circ$ o $\alpha = 180^\circ$. Entonces $\arg(n_3) = 90^\circ$ o $\arg(n_3) = 270^\circ$, lo que no es posible porque $n_{3R} = n_{2R} \neq 0$. Por tanto, d_x es una solución, d_x^* no lo es y $n_x = n_3$ no es una solución.

b) Véase el mismo caso en el teorema 4.2.

c) Sea d_x^* el denominador de v_x determinado como $\frac{n_1}{v_x}$. Entonces $S_x = \frac{S_1}{d_x^*}$, donde S_1 es parte del segmento de vértices n_2 y n_1 , $\arg(n_2 - n_1) = 0^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.1 $\arg(d_x^*) = -\varphi(S_x)$. Como v_x es el mismo vértice, entonces $\arg\left(\frac{n_1}{d_x^*}\right) = \arg\left(\frac{n_2}{d_x}\right)$, de donde se deduce que

$\arg(n_1) = \arg(n_2) + 270^\circ$. $n_x = n_1$ verifica la condición C2.1, puesto que

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{v_x}{v_2}\right) &= \arg(n_1) - \arg(n_2) + \arg(d_1) - \arg(d_x^*) \\ &= 270^\circ + \arg(d_1) + \varphi(S_x) = \arg(d_1) + \varphi(S_x) - 90^\circ.\end{aligned}$$

Sea $\alpha = \arg(n_2)$, $\alpha = 0^\circ$ o $\alpha = 180^\circ$. Entonces $\arg(n_1) = 270^\circ$ o $\arg(n_1) = 90^\circ$, lo que no es posible porque $n_{1I} = n_{2I} = 0$. Por tanto, d_x es una solución, d_x^* no lo es y $n_x = n_1$ no es una solución.

2. \Leftarrow Véase el mismo caso en el teorema 4.2.

\Rightarrow Para demostrar esta implicación, basta probar que si la condición C2.2 y la condición del denominador se satisfacen, entonces la solución $d_x = \frac{n_1}{v_x}$, $n_x = n_1$, es única. Nótese que si $n_x \neq n_2$, la condición C2.2 se puede cumplir también cuando a) $n_x = n_3$ o b) $n_x = n_4$, y que en cada caso, el valor del denominador d_x determinado verifica la condición del denominador.

Sea d_x el denominador de v_x determinado como $\frac{n_1}{v_x}$, verificando la condición C2.2 y la condición del denominador. Además $S_x = \frac{S_1}{d_x}$, donde S_1 es parte del segmento de vértices n_1 y n_2 , y $\arg(n_2 - n_1) = 0^\circ$.

a) Véase el mismo caso en el teorema 4.2.

b) Sea d_x^* el denominador de v_x determinado como $\frac{n_4}{d_x^*}$. Entonces $S_x = \frac{S_4}{d_x^*}$, donde S_4 es parte del segmento de vértices n_4 y n_1 , $\arg(n_1 - n_4) = 270^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.1 $\arg(d_x^*) = 270^\circ - \varphi(S_x)$. Como v_x es el mismo vértice, entonces $\arg\left(\frac{n_4}{d_x^*}\right) = \arg\left(\frac{n_1}{d_x}\right)$, de donde se deduce que $\arg(n_4) = \arg(n_1) + 270^\circ$. $n_x = n_4$ verifica la condición C2.2, puesto que

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{v_x}{v_1}\right) &= \arg(n_1) + 270^\circ - \arg(n_1) + \arg(d_1) - 270^\circ + \varphi(S_x) \\ &= \arg(d_1) + \varphi(S_x).\end{aligned}$$

Sea $\alpha = \arg(n_1)$, $\alpha = 0^\circ$ o $\alpha = 180^\circ$. Entonces $\arg(n_4) = 270^\circ$ o $\arg(n_4) = 90^\circ$, lo que no es posible porque $n_{4R} = n_{1R} \neq 0$. Por tanto, d_x es una solución, d_x^* no lo es y $n_x = n_4$ no es una solución.

3. Véase el mismo caso en el teorema 4.2.

4. Véase el mismo caso en el teorema 4.2. ■

5.6. C. $n_{1R} = 0, n_{1I} \neq 0$.**Teorema 5.6**

[Sucesor] Sean S_1 un segmento completo de la frontera del conjunto de valores, con vértices $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$ y $v_2 = \frac{n_2}{d_1}$, el arco de la frontera sucesor a S_1 , de vértices $v_2 = \frac{n_2}{d_1}$ y $v_{2suc} = \frac{n_2}{d_{2\lambda}}$, y el arco de la frontera predecesor a S_1 con vértices $v_{1pred} = \frac{n_1}{d_{4\lambda}}$ y $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$, todos en sentido antihorario. Sea S_x un segmento de la frontera de vértices $v_x = \frac{n_x}{d_x}$ y $v_{xsuc} = \frac{n_{xsuc}}{d_x}$ en sentido antihorario, donde v_x es un vértice perteneciente a la intersección de un arco de la frontera con el segmento S_x . Entonces:

1. $\arg\left(\frac{v_x}{v_2}\right) = \arg(d_1) + \varphi(S_x) - 90^\circ$ (condición C2.1) y el denominador d_x de v_x determinado como $\frac{n_2}{v_x}$ satisface la condición del denominador (lema 4.2), si y sólo si $n_x = n_2$ y no puede ser otro polinomio asignado.
2. Cuando $n_x \neq n_2$, $\arg\left(\frac{v_x}{v_1}\right) = \arg(d_1) + \varphi(S_x)$ (condición C2.2) y el denominador d_x de v_x determinado como $\frac{n_1}{v_x}$ satisface la condición del denominador (lema 4.2), si y sólo si $n_x = n_1$ y no puede ser otro polinomio asignado.
3. Cuando $n_x \neq n_1$ y $n_x \neq n_2$, $\tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 180^\circ) n_{2R} > n_{2I}$ (condición C2.3) y el denominador d_x de v_x determinado como $\frac{n_{2R} [1 + j \tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 180^\circ)]}{v_x}$ satisface la condición del denominador (lema 4.2), si y sólo si $n_x = n_3 = n_{2R} [1 + j \tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 180^\circ)]$, y no puede ser otro polinomio asignado.
4. Cuando $n_x \neq n_1$, $n_x \neq n_2$ y $n_x \neq n_3$, el denominador d_x de v_x determinado como $\frac{n_1}{v_{xsuc}}$ satisface la condición del denominador (lema 4.2), si y sólo si $n_x = n_4 = n_1 \frac{v_x}{v_{xsuc}}$.

Demostración:

A partir del segmento completo S_1 , aplicando la normalización (lema 4.1) se obtienen los valores de d_1 , $n_1 = v_1 d_1$, $n_2 = v_2 d_1$, $d_{2\lambda} = \frac{n_2}{v_{2suc}}$ y $d_{4\lambda} = \frac{n_1}{v_{1pred}}$. El valor de v_x es conocido.

1. \Leftarrow Véase el mismo caso en el teorema 4.2.

\Rightarrow Para demostrar esta implicación, basta probar que si la condición C2.1 y la condición del denominador se satisfacen, entonces la solución $d_x = \frac{n_2}{v_x}$, $n_x = n_2$, es única. Nótese que la condición C2.1 se puede cumplir también cuando a) $n_x = n_3$, b)

$n_x = n_4$ o c) $n_x = n_1$, y que en cada caso, el valor del denominador d_x determinado verifica la condición del denominador.

Sea d_x el denominador de v_x determinado como $\frac{n_2}{v_x}$, verificando la condición C2.1 y la condición del denominador. Además $S_x = \frac{S_2}{d_x}$, donde S_2 es parte del segmento de vértices n_2 y n_3 , y $\arg(n_3 - n_2) = 90^\circ$.

a) Véase el mismo caso en el teorema 4.2.

b) Véase el mismo caso en el teorema 4.2.

c) Sea d_x^* el denominador de v_x determinado como $\frac{n_1}{v_x}$. Entonces $S_x = \frac{S_1}{d_x^*}$, donde S_1 es parte del segmento de vértices n_2 y n_1 , $\arg(n_2 - n_1) = 0^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.1 $\arg(d_x^*) = -\varphi(S_x)$. Como v_x es el mismo vértice, entonces $\arg\left(\frac{n_1}{d_x^*}\right) = \arg\left(\frac{n_2}{d_x}\right)$, de donde se deduce que $\arg(n_1) = \arg(n_2) + 270^\circ$. $n_x = n_1$ verifica la condición C2.1, puesto que

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{v_x}{v_2}\right) &= \arg(n_1) - \arg(n_2) + \arg(d_1) - \arg(d_x^*) \\ &= 270^\circ + \arg(d_1) + \varphi(S_x) = \arg(d_1) + \varphi(S_x) - 90^\circ. \end{aligned}$$

Sea $\alpha = \arg(n_1)$, $\alpha = 90^\circ$ o $\alpha = 270^\circ$. Entonces $\arg(n_2) = 180^\circ$ o $\arg(n_2) = 0^\circ$, lo que no es posible porque $n_{2I} = n_{1I} \neq 0$. Por tanto d_x es una solución, d_x^* no lo es, y $n_x = n_1$ no es una solución.

2. \Leftarrow Véase el mismo caso en el teorema 4.2.

\Rightarrow Para demostrar esta implicación, basta probar que si la condición C2.2 y la condición del denominador se satisfacen, entonces la solución $d_x = \frac{n_1}{v_x}$, $n_x = n_1$, es única. Nótese que si $n_x \neq n_2$, la condición C2.2 se puede cumplir también cuando a) $n_x = n_3$ o b) $n_x = n_4$, y que en cada caso, el valor del denominador d_x determinado verifica la condición del denominador.

Sea d_x el denominador de v_x determinado como $\frac{n_1}{v_x}$, verificando la condición C2.2 y la condición del denominador. Además $S_x = \frac{S_1}{d_x}$, donde S_1 es parte del segmento de vértices n_1 y n_2 , y $\arg(n_2 - n_1) = 0^\circ$.

a) Véase el mismo caso en el teorema 4.2.

b) Sea d_x^* el denominador de v_x determinado como $\frac{n_4}{d_x^*}$. Entonces $S_x = \frac{S_4}{d_x^*}$, donde S_4 es parte del segmento de vértices n_4 y n_1 , $\arg(n_1 - n_4) = 270^\circ$ (por la

normalización), y por la proposición 4.1 $\arg(d_x^*) = 270^\circ - \varphi(S_x)$. Como v_x es el mismo vértice, entonces $\arg\left(\frac{n_4}{d_x^*}\right) = \arg\left(\frac{n_1}{d_x}\right)$, de donde se deduce que $\arg(n_4) = \arg(n_1) + 270^\circ$. $n_x = n_4$ verifica la condición C2.2, puesto que

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{v_x}{v_1}\right) &= \arg(n_1) + 270^\circ - \arg(n_1) + \arg(d_1) - 270^\circ + \varphi(S_x) \\ &= \arg(d_1) + \varphi(S_x). \end{aligned}$$

Sea $\alpha = \arg(n_1)$, $\alpha = 90^\circ$ o $\alpha = 270^\circ$. Entonces $\arg(n_4) = 0^\circ$ o $\arg(n_3) = 180^\circ$, lo que no es posible porque $n_{4R} = n_{1R} = 0$. Por tanto, d_x es una solución, d_x^* no lo es y $n_x = n_4$ no es una solución.

3. Véase el mismo caso en el teorema 4.2.

4. \Leftarrow Si $n_x = n_4$ entonces $S_x = \frac{S_4}{d_x}$, donde S_4 es parte del segmento de vértices n_4 y n_1 , verificándose que $\arg(n_1 - n_4) = 270^\circ$ (por la normalización). Como $n_4 = n_1 \frac{v_x}{v_{xsuc}}$ y $d_x = \frac{n_4}{v_x}$, sustituyendo se tiene que $d_x = \frac{n_1}{v_{xsuc}}$.

\Rightarrow Para demostrar esta implicación, basta probar que si $d_x = \frac{n_1}{v_{xsuc}}$ verifica la condición del denominador, entonces $n_x = n_4 = n_1 \frac{v_x}{v_{xsuc}}$, lo cual es evidente.

■

Los teoremas hasta aquí demostrados tratan el caso de un segmento completo en un cuadrante. En adelante, se considerará la situación de un arco completo en un cuadrante, y los casos en los que la normalización aplicada sea tal que:

A) $d_{2R} = 0, d_{2I} \neq 0$.

B) $d_{2I} = 0, d_{2R} \neq 0$.

C) $d_{1R} = 0, d_{1I} \neq 0$.

5.7. A. $d_{2R} = 0, d_{2I} \neq 0$.

La situación se muestra en la figura 5.4.

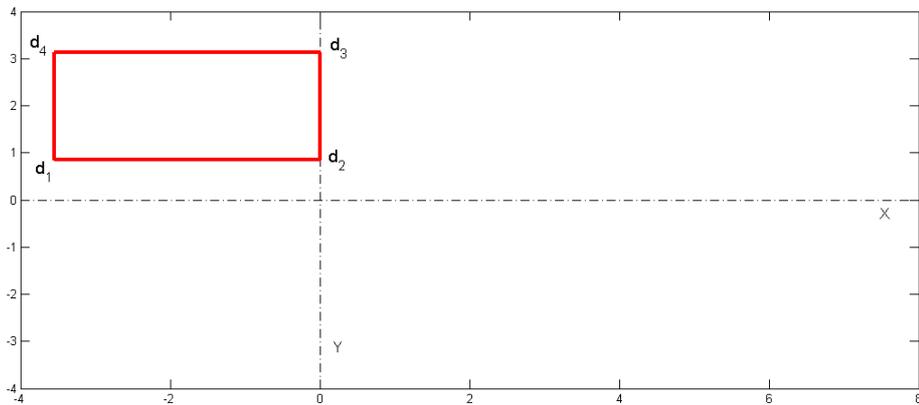


Figura 5.4: Rectángulo con $d_{2R} = 0$, $d_{2I} \neq 0$.

Teorema 5.7

[Predecesor] Sean A_1 un arco completo de la frontera del conjunto de valores con vértices $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$ y $v_2 = \frac{n_1}{d_2}$, el segmento de la frontera sucesor a A_1 , de vértices $v_2 = \frac{n_1}{d_2}$ y $v_{2suc} = \frac{n_{2\lambda}}{d_2}$, y el segmento de la frontera predecesor a A_1 , con vértices $v_{1pred} = \frac{n_{4\lambda}}{d_1}$ y $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$, todos en sentido antihorario. Sea A_x un arco de la frontera de vértices $v_{xpred} = \frac{n_x}{d_{xpred}}$ y $v_x = \frac{n_x}{d_x}$ en sentido antihorario, donde $v_x = \frac{n_x}{d_x}$ es un vértice perteneciente a la intersección del arco A_x con un segmento de la frontera. Entonces:

1. $\arg\left(\frac{v_2}{v_x}\right) = \arg(n_1) + \phi(A_x)$ (condición C3.1) y el numerador n_x de v_x determinado como $d_2 v_x$ satisface la condición del numerador (lema 4.4), si y solo si $d_x = d_2$ y no puede ser otro polinomio asignado.
2. Cuando $d_x \neq d_2$, $\arg\left(\frac{v_1}{v_x}\right) = \arg(n_1) + \phi(A_x) + 90^\circ$ (condición C3.2) y el numerador n_x de v_x determinado como $d_1 v_x$ satisface la condición del numerador (lema 4.4), si y solo si $d_x = d_1$ y no puede ser otro polinomio asignado.
3. Cuando $d_x \neq d_1$ y $d_x \neq d_2$, el numerador n_x de v_x determinado como $d_2 v_{xpred}$ satisface la condición del numerador (lema 4.4), si y sólo si $d_x = d_3 = d_2 \frac{v_{xpred}}{v_x}$, y no puede ser otro polinomio asignado.
4. Cuando $d_x \neq d_1$, $d_x \neq d_2$, y $d_x \neq d_3$, $\tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 180^\circ\right) d_{1R} > d_{1I}$ (condición C3.4), y el numerador n_x de v_x determinado como $d_{1R} \left[1 + j \tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 180^\circ\right)\right] v_x$ satisface la condición del numerador (lema 4.4), si y solo si $d_x = d_4 = d_{1R} \left(1 + j \tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 180^\circ\right)\right)$.

Demostración:

A partir del arco completo A_1 , aplicando la normalización (lema 4.3) se obtienen los valores de n_1 , $d_1 = \frac{n_1}{v_1}$, $d_2 = \frac{n_1}{v_2}$, $n_{4\lambda} = d_1 v_{1pred}$ y $n_{2\lambda} = d_2 v_{2suc}$. El valor de v_x es conocido.

1. \Leftarrow Véase el mismo caso en el teorema 4.3.

\Rightarrow Para demostrar esta implicación, basta probar que si la condición C3.1 y la condición del numerador se satisfacen, entonces la solución $n_x = d_2 v_x$, $d_x = d_2$, es única. Nótese que la condición C3.1 se puede cumplir también cuando a) $d_x = d_3$, b) $d_x = d_4$ o c) $d_x = d_1$, y que en cada caso, el valor del numerador n_x determinado verifica la condición del numerador.

Sea n_x el numerador de v_x determinado como $d_2 v_x$, verificando la condición C3.1 y la condición del numerador. Además $A_x = \frac{n_x}{S_2}$, donde S_2 es parte del segmento de vértices d_1 y d_2 , y $\arg(d_2 - d_1) = 0^\circ$.

a) Sea n_x^* el numerador de v_x determinado como $d_3 v_x$. Entonces $A_x = \frac{n_x^*}{S_3}$, donde S_3 es parte del segmento de vértices d_2 y d_3 , $\arg(d_3 - d_2) = 90^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.2 $\arg(n_x^*) = 90^\circ - \phi(A_x)$. Como v_x es el mismo vértice, entonces $\arg\left(\frac{n_x^*}{d_3}\right) = \arg\left(\frac{n_x}{d_2}\right)$, de donde se deduce que $\arg(d_3) = \arg(d_2) + 90^\circ$. $d_x = d_3$ verifica la condición C3.1, puesto que

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{v_2}{v_x}\right) &= \arg(n_1) + \phi(A_x) - 90^\circ + \arg(d_2) + 90^\circ - \arg(d_2) \\ &= \arg(n_1) + \phi(A_x). \end{aligned}$$

Como $\arg(d_3) = \pm \arg(d_2)$, n_x es una solución, n_x^* no lo es y $d_x = d_3$ no es una solución.

b) Véase el mismo caso en el teorema 4.3.

c) Sea n_x^* el numerador de v_x determinado como $d_1 v_x$. Entonces $A_x = \frac{n_x^*}{S_1}$, donde S_1 es parte del segmento de vértices d_4 y d_1 , $\arg(d_4 - d_1) = 270^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.2 $\arg(n_x^*) = 270^\circ - \phi(A_x)$. Como v_x es el mismo vértice, entonces $\arg\left(\frac{n_x^*}{d_1}\right) = \arg\left(\frac{n_x}{d_2}\right)$, de donde se deduce que $\arg(d_1) = \arg(d_2) + 270^\circ$. $d_x = d_1$ verifica la condición C3.1, puesto que

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{v_2}{v_x}\right) &= \arg(n_1) - 270^\circ + \phi(A_x) + \arg(d_2) + 270^\circ - \arg(d_2) \\ &= \arg(n_1) + \phi(A_x). \end{aligned}$$

Como $\arg(d_2) = \pm 90^\circ$, según lo anterior $\arg(d_1) = 0^\circ$ o $\arg(d_1) = 180^\circ$, lo cual no es posible. Por tanto, n_x es una solución, n_x^* no lo es y $d_x = d_1$ no es una solución.

2. Véase el mismo caso en el teorema 4.3.

3. \Leftarrow Si $d_x = d_3$ entonces $A_x = \frac{n_x}{S_3}$, donde S_3 es parte del segmento de vértices d_2 y d_3 , verificándose que $\arg(d_3 - d_2) = 90^\circ$ (por la normalización). Como $d_3 = d_2 \frac{v_{xpred}}{v_x}$ y $n_x = n_3 = d_3 v_x$, sustituyendo se tiene que $n_x = d_2 v_{xpred}$.

\Rightarrow Para demostrar esta implicación, basta probar que si $n_x = d_2 v_{xpred}$ y verifica la condición del numerador, entonces la solución $n_x = d_x v_x$, $d_x = d_3 = d_2 \frac{v_{xpred}}{v_x}$, es única. Nótese que si $d_x \neq d_2$ y $d_x \neq d_1$, la solución se podría cumplir cuando $d_x = d_4$.

Sea n_x^* el numerador de v_x determinado como $d_4 v_x$. Entonces $A_x = \frac{n_x^*}{S_4}$, donde S_4 es parte del segmento de vértices d_3 y d_4 , $\arg(d_4 - d_3) = 180^\circ$, y por la proposición 4.2 $\arg(n_x^*) = 180^\circ - \phi(A_x) = \arg(n_x) + 90^\circ$.

Como v_x es el mismo vértice, $\arg\left(\frac{n_x}{d_3}\right) = \arg\left(\frac{n_x^*}{d_4}\right)$, de donde se deduce que $\arg(d_4) = \arg(d_3) + 90^\circ$. Por la normalización, cuando $d_{2R} = 0$ entonces $d_{3R} = 0$. Por tanto, el segmento de vértices d_2 y d_3 está en el eje imaginario, verificándose que $\arg(d_2) = \pm \arg(d_3) = \pm 90^\circ$, y según lo anterior $\arg(d_4) = 0^\circ$ o $\arg(d_4) = 180^\circ$, lo cual no es posible pues $d_{3I} = d_{4I}$, lo que implicaría que $d_3 = (0, 0)$, pero $(0, 0) \notin D_p(s, \mathbf{b})$ según el planteamiento realizado en la sección 3.1. Por tanto, n_x es una solución, n_x^* no lo es y $d_x = d_1$ no es una solución.

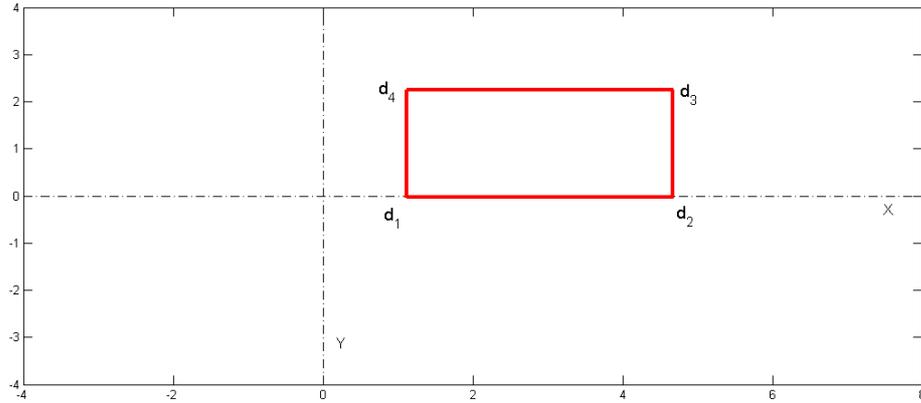
4. Véase el mismo caso en el teorema 4.3. ■

5.8. B. $d_{2I} = 0$, $d_{2R} \neq 0$.

La situación se muestra en la figura 5.5.

Teorema 5.8

[Predecesor] Sean A_1 un arco completo de la frontera del conjunto de valores con vértices $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$ y $v_2 = \frac{n_1}{d_2}$, el segmento de la frontera sucesor a A_1 , de vértices $v_2 = \frac{n_1}{d_2}$ y $v_{2suc} = \frac{n_{2\lambda}}{d_2}$,

Figura 5.5: Rectángulo con $d_{2I} = 0, d_{2R} \neq 0$.

y el segmento de la frontera predecesor a A_1 , con vértices $v_{1pred} = \frac{n_{4\lambda}}{d_1}$ y $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$, todos en sentido antihorario. Sea A_x un arco de la frontera de vértices $v_{xpred} = \frac{n_x}{d_{xpred}}$ y $v_x = \frac{n_x}{d_x}$ en sentido antihorario, donde $v_x = \frac{n_x}{d_x}$ es un vértice perteneciente a la intersección del arco A_x con un segmento de la frontera. Entonces:

1. $\arg\left(\frac{v_2}{v_x}\right) = \arg(n_1) + \phi(A_x)$ (condición C3.1) y el numerador n_x de v_x determinado como $d_2 v_x$ satisface la condición del numerador (lema 4.4), si y solo si $d_x = d_2$ y no puede ser otro polinomio asignado.
2. Cuando $d_x \neq d_2$, $\arg\left(\frac{v_1}{v_x}\right) = \arg(n_1) + \phi(A_x) + 90^\circ$ (condición C3.2) y el numerador n_x de v_x determinado como $d_1 v_x$ satisface la condición del numerador (lema 4.4), si y solo si $d_x = d_1$ y no puede ser otro polinomio asignado.
3. Cuando $d_x \neq d_1$ y $d_x \neq d_2$, $\tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 90^\circ\right) d_{2R} > d_{2I}$ (condición C3.3), y el numerador n_x de v_x determinado como $d_{2R} \left[1 + j \tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 90^\circ\right)\right] v_x$ satisface la condición del numerador (lema 4.4), si y solo si $d_x = d_3 = d_{2R} \left(1 + j \tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 90^\circ\right)\right)$ y no puede ser otro polinomio asignado.
4. Cuando $d_x \neq d_1$, $d_x \neq d_2$, y $d_x \neq d_3$, $\tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 180^\circ\right) d_{1R} > d_{1I}$ (condición C3.4), y el numerador n_x de v_x determinado como $d_{1R} \left[1 + j \tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 180^\circ\right)\right] v_x$ satisface la condición del numerador (lema 4.4), si y solo si $d_x = d_4 = d_{1R} \left(1 + j \tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 180^\circ\right)\right)$.

Demostración:

A partir del arco completo A_1 , aplicando la normalización (lema 4.3) se obtienen los valores de n_1 , $d_1 = \frac{n_1}{v_1}$, $d_2 = \frac{n_1}{v_2}$, $n_{4\lambda} = d_1 v_{1pred}$ y $n_{2\lambda} = d_2 v_{2suc}$. El valor de v_x es conocido.

1. \Leftarrow Véase el mismo caso en el teorema 4.3.

\Rightarrow Para demostrar esta implicación, basta probar que si la condición C3.1 y la condición del numerador se satisfacen, entonces la solución $n_x = d_2 v_x$, $d_x = d_2$, es única. Nótese que la condición C3.1 se puede cumplir también cuando a) $d_x = d_3$, b) $d_x = d_4$ o c) $d_x = d_1$, y que en cada caso, el valor del numerador n_x determinado verifica la condición del numerador.

Sea n_x el numerador de v_x determinado como $d_2 v_x$, verificando la condición C3.1 y la condición del numerador. Además $A_x = \frac{n_x}{S_2}$, donde S_2 es parte del segmento de vértices d_1 y d_2 , y $\arg(d_2 - d_1) = 0^\circ$.

a) Sea n_x^* el numerador de v_x determinado como $d_3 v_x$. Entonces $A_x = \frac{n_x^*}{S_3}$, donde S_3 es parte del segmento de vértices d_2 y d_3 , $\arg(d_3 - d_2) = 90^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.2 $\arg(n_x^*) = 90^\circ - \phi(A_x)$. Como v_x es el mismo vértice, entonces $\arg\left(\frac{n_x^*}{d_3}\right) = \arg\left(\frac{n_x}{d_2}\right)$, de donde se deduce que $\arg(d_3) = \arg(d_2) + 90^\circ$. $d_x = d_3$ verifica la condición C3.1, puesto que

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{v_2}{v_x}\right) &= \arg(n_1) + \phi(A_x) - 90^\circ + \arg(d_2) + 90^\circ - \arg(d_2) \\ &= \arg(n_1) + \phi(A_x). \end{aligned}$$

Sea $\alpha = \arg(d_2)$, $\alpha = 0^\circ$ o $\alpha = 180^\circ$. Entonces $\arg(d_3) = 90^\circ$ o $\arg(d_3) = 270^\circ$, lo que no es posible porque $d_{3R} = d_{2R} \neq 0$. Por tanto, n_x es una solución, n_x^* no lo es y $d_x = d_3$ no es una solución.

b) Véase el mismo caso en el teorema 4.3.

c) Sea n_x^* el numerador de v_x determinado como $d_1 v_x$. Entonces $A_x = \frac{n_x^*}{S_1}$, donde S_1 es parte del segmento de vértices d_4 y d_1 , $\arg(d_4 - d_1) = 270^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.2 $\arg(n_x^*) = 270^\circ - \phi(A_x)$. Como v_x es el mismo vértice, entonces $\arg\left(\frac{n_x^*}{d_1}\right) = \arg\left(\frac{n_x}{d_2}\right)$, de donde se deduce que

$\arg(d_1) = \arg(d_2) + 270^\circ$. $d_x = d_1$ verifica la condición C3.1, puesto que

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{v_2}{v_x}\right) &= \arg(n_1) - 270^\circ + \phi(A_x) + \arg(d_2) + 270^\circ - \arg(d_2) \\ &= \arg(n_1) + \phi(A_x). \end{aligned}$$

Sea $\alpha = \arg(d_2)$, $\alpha = 0^\circ$ o $\alpha = 180^\circ$. Entonces $\arg(d_1) = 270^\circ$ o $\arg(d_1) = 90^\circ$, lo que no es posible porque $d_{1I} = d_{2I} = 0$. Por tanto, n_x es una solución, n_x^* no lo es y $d_x = d_1$ no es una solución.

2. \Leftarrow Véase el mismo caso en el teorema 4.3.

\Rightarrow Para demostrar esta implicación, basta probar que si la condición C3.2 y la condición del numerador se satisfacen, entonces la solución $n_x = d_1 v_x$, $d_x = d_1$, es única. Nótese que si $d_x \neq d_2$, la condición C3.2 se puede cumplir también cuando a) $d_x = d_3$ o b) $d_x = d_4$, y que en cada caso, el valor del numerador n_x determinado verifica la condición del numerador.

Sea n_x el numerador de v_x determinado como $d_1 v_x$, verificando la condición C3.2 y la condición del numerador. Además $A_x = \frac{n_x}{S_1}$, donde S_1 es parte del segmento de vértices d_1 y d_4 , y $\arg(d_4) = \arg(d_1) + 270^\circ$.

a) Véase el mismo caso en el teorema 4.3.

b) Sea n_x^* el denominador de v_x determinado como $d_4 v_x$. Entonces $A_x = \frac{n_x^*}{S_4}$, donde S_4 es parte del segmento de vértices d_3 y d_4 , $\arg(d_4 - d_3) = 180^\circ$ por la normalización, y por la proposición 4.2, $\arg(n_x^*) = 180^\circ - \varphi(A_x)$. Como v_x es el mismo vértice, entonces $\arg\left(\frac{n_x^*}{d_4}\right) = \arg\left(\frac{n_x}{d_1}\right)$, de donde se deduce que $\arg(d_4) = \arg(d_1) + 270^\circ$. $d_x = d_4$ verifica la condición C3.2, puesto que

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{v_1}{v_x}\right) &= \arg(n_1) - 180^\circ + \phi(A_x) + \arg(d_1) + 270^\circ - \arg(d_1) \\ &= \phi(A_x) + 90 + \arg(n_1). \end{aligned}$$

Sea $\alpha = \arg(d_1)$, $\alpha = 0^\circ$ o $\alpha = 180^\circ$. Entonces $\arg(d_4) = 270^\circ$ o $\arg(d_4) = 90^\circ$. Esto no es posible porque $d_{4I} \neq 0$ puesto que $d_{1I} = 0$. Por tanto, n_x es una solución, n_x^* no lo es y $d_x = d_4$ no es una solución.

3. Véase el mismo caso en el teorema 4.3.

4. Véase el mismo caso en el teorema 4.3. ■

5.9. C. $d_{1R} = 0$, $d_{1I} \neq 0$.

La situación se muestra en la figura 5.6.

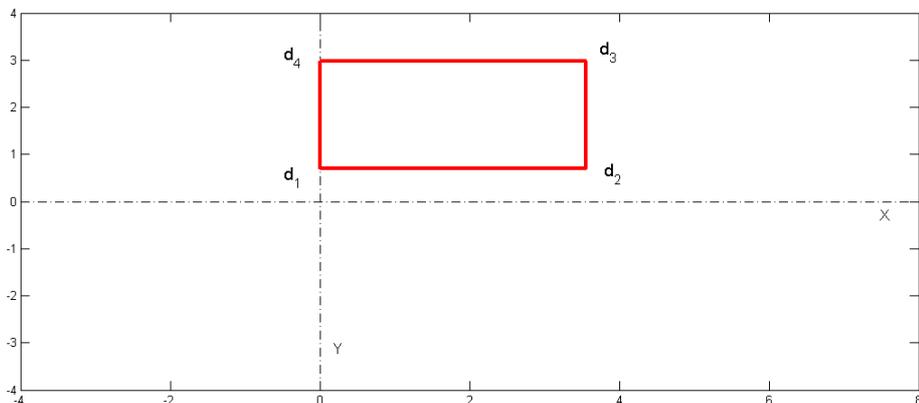


Figura 5.6: Rectángulo con $d_{1R} = 0$, $d_{1I} \neq 0$.

Teorema 5.9

[Predecesor] Sean A_1 un arco completo de la frontera del conjunto de valores con vértices $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$ y $v_2 = \frac{n_1}{d_2}$, el segmento de la frontera sucesor a A_1 , de vértices $v_2 = \frac{n_1}{d_2}$ y $v_{2suc} = \frac{n_{2\lambda}}{d_2}$, y el segmento de la frontera predecesor a A_1 , con vértices $v_{1pred} = \frac{n_{4\lambda}}{d_1}$ y $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$, todos en sentido antihorario. Sea A_x un arco de la frontera de vértices $v_{xpred} = \frac{n_x}{d_{xpred}}$ y $v_x = \frac{n_x}{d_x}$ en sentido antihorario, donde $v_x = \frac{n_x}{d_x}$ es un vértice perteneciente a la intersección del arco A_x con un segmento de la frontera. Entonces:

1. $\arg\left(\frac{v_2}{v_x}\right) = \arg(n_1) + \phi(A_x)$ (condición C3.1) y el numerador n_x de v_x determinado como $d_2 v_x$ satisface la condición del numerador (lema 4.4), si y solo si $d_x = d_2$ y no puede ser otro polinomio asignado.
2. Cuando $d_x \neq d_2$, $\arg\left(\frac{v_1}{v_x}\right) = \arg(n_1) + \phi(A_x) + 90^\circ$ (condición C3.2) y el numerador n_x de v_x determinado como $d_1 v_x$ satisface la condición del numerador (lema 4.4), si y solo si $d_x = d_1$ y no puede ser otro polinomio asignado.
3. Cuando $d_x \neq d_1$ y $d_x \neq d_2$, $\tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 90^\circ\right) d_{2R} > d_{2I}$ (condición C3.3), y el numerador n_x de v_x determinado como $d_{2R} \left[1 + j \tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 90^\circ\right)\right] v_x$ satisface la condición del numerador (lema 4.4), si y solo si $d_x = d_3 = d_{2R} \left(1 + j \tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 90^\circ\right)\right)$ y no puede ser otro polinomio asignado.

4. Si $d_x \neq d_1$, $d_x \neq d_2$ y $d_x \neq d_3$, entonces $d_x = d_4$.

Demostración:

A partir del arco completo A_1 , aplicando la normalización (lema 4.3) se obtienen los valores de n_1 , $d_1 = \frac{n_1}{v_1}$, $d_2 = \frac{n_1}{v_2}$, $n_{4\lambda} = d_1 v_{1pred}$ y $n_{2\lambda} = d_2 v_{2suc}$. El valor de v_x es conocido.

1. \Leftarrow Véase el mismo caso en el teorema 4.3.

\Rightarrow Para demostrar esta implicación, basta probar que si la condición C3.1 y la condición del numerador se satisfacen, entonces la solución $n_x = d_2 v_x$, $d_x = d_2$, es única. Nótese que la condición C3.1 se puede cumplir también cuando a) $d_x = d_3$, b) $d_x = d_4$ o c) $d_x = d_1$, y que en cada caso, el valor del numerador n_x determinado verifica la condición del numerador.

Sea n_x el numerador de v_x determinado como $d_2 v_x$, verificando la condición C3.1 y la condición del numerador. Además $A_x = \frac{n_x}{S_2}$, donde S_2 es parte del segmento de vértices d_1 y d_2 , y $\arg(d_2 - d_1) = 0^\circ$

a) Véase el mismo caso en el teorema 4.3.

b) Véase el mismo caso en el teorema 4.3.

c) Sea n_x^* el numerador de v_x determinado como $d_1 v_x$. Entonces $A_x = \frac{n_x^*}{S_1}$, donde S_1 es parte del segmento de vértices d_4 y d_1 , $\arg(d_4 - d_1) = 270^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.2 $\arg(n_x^*) = 270^\circ - \phi(A_x)$. Como v_x es el mismo vértice, entonces $\arg\left(\frac{n_x^*}{d_1}\right) = \arg\left(\frac{n_x}{d_2}\right)$, de donde se deduce que $\arg(d_1) = \arg(d_2) + 270^\circ$. $d_x = d_1$ verifica la condición C3.1, puesto que

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{v_2}{v_x}\right) &= \arg(n_1) - 270^\circ + \phi(A_x) + \arg(d_2) + 270^\circ - \arg(d_2) \\ &= \arg(n_1) + \phi(A_x). \end{aligned}$$

Sea $\alpha = \arg(d_1)$, $\alpha = 90^\circ$ o $\alpha = 270^\circ$. Entonces $\arg(d_2) = 180^\circ$ o $\arg(d_2) = 0^\circ$, lo que no es posible porque $d_{2I} = d_{1I} \neq 0$. Por tanto n_x es una solución, n_x^* no lo es, y $d_x = d_1$ no es una solución.

2. \Leftarrow Véase el mismo caso en el teorema 4.3.

\Rightarrow Para demostrar esta implicación, basta probar que si la condición C3.2 y la condición del numerador se satisfacen, entonces la solución $n_x = d_1 v_x$, $d_x = d_1$, es

única. Nótese que si $d_x \neq d_2$, la condición C3.2 se puede cumplir también cuando a) $d_x = d_3$ o b) $d_x = d_4$, y que en cada caso, el valor del numerador n_x determinado verifica la condición del numerador.

Sea n_x el numerador de v_x determinado como $d_1 v_x$, verificando la condición C3.2 y la condición del numerador. Además $A_x = \frac{n_x}{S_1}$, donde S_1 es parte del segmento de vértices d_1 y d_4 , y $\arg(d_4) = \arg(d_1) + 270^\circ$.

a) Véase el mismo caso en el teorema 4.3.

b) Sea n_x^* el denominador de v_x determinado como $d_4 v_x$. Entonces $A_x = \frac{n_x^*}{S_4}$, donde S_4 es parte del segmento de vértices d_3 y d_4 , $\arg(d_4 - d_3) = 180^\circ$ por la normalización, y por la proposición 4.2, $\arg(n_x^*) = 180^\circ - \varphi(A_x)$. Como v_x es el mismo vértice, entonces $\arg\left(\frac{n_x^*}{d_4}\right) = \arg\left(\frac{n_x}{d_1}\right)$, de donde se deduce que $\arg(d_4) = \arg(d_1) + 270^\circ$. $d_x = d_4$ verifica la condición C3.2, puesto que

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{v_1}{v_x}\right) &= \arg(n_1) - 180^\circ + \phi(A_x) + \arg(d_1) + 270^\circ - \arg(d_1) \\ &= \phi(A_x) + 90 + \arg(n_1). \end{aligned}$$

Sea $\alpha = \arg(d_1)$, $\alpha = 90^\circ$ o $\alpha = 270^\circ$. Entonces $\arg(d_4) = 0^\circ$ o $\arg(d_4) = 180^\circ$.

Por tanto $d_4 = (0, 0)$ no puede ser una solución, pues el vértice v_x no es cero.

3. Véase el mismo caso en el teorema 4.3.

4. Si $d_x \neq d_2$, $d_x \neq d_1$ y $d_x \neq d_3$ debe ser $d_x = d_4$.

■

Los siguientes teoremas son análogos al teorema 4.3, donde A_x es un arco de la frontera de vértices $v_x = \frac{n_x}{d_x}$ y $v_{xsucc} = \frac{n_x}{d_{xsucc}}$, elegidos en sentido antihorario, y pertenecientes a un segmento-arco.

5.10. A. $d_{2R} = 0$, $d_{2I} \neq 0$.

Teorema 5.10

[Sucesor] Sean A_1 un arco completo de la frontera del conjunto de valores, con vértices $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$ y $v_2 = \frac{n_1}{d_2}$, el segmento de la frontera sucesor a A_1 , de vértices $v_2 = \frac{n_1}{d_2}$ y $v_{2suc} = \frac{n_{2\lambda}}{d_2}$, y

el segmento de la frontera predecesor a A_1 , con vértices $v_{1pred} = \frac{n_{4\lambda}}{d_1}$ y $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$, todos en sentido antihorario. Sea A_x un arco de la frontera de vértices $v_{xsuc} = \frac{n_x}{d_{xsuc}}$ y $v_x = \frac{n_x}{d_x}$, en sentido antihorario, donde v_x es un vértice perteneciente a la intersección de un segmento de la frontera y el arco A_x . Entonces:

1. $\arg\left(\frac{v_2}{v_x}\right) = \phi(A_x) + \arg(n_1) - 90^\circ$ (condición C4.1) y el numerador n_x de v_x determinado como d_2v_x satisface la condición del numerador (lema 4.4), si y solo si $d_x = d_2$, y no puede ser otro polinomio asignado.
2. Cuando $d_x \neq d_2$, $\arg\left(\frac{v_1}{v_x}\right) = \phi(A_x) + \arg(n_1)$ (condición C4.2) y el numerador n_x de v_x determinado como d_1v_x satisface la condición del numerador (lema 4.4), si y solo si $d_x = d_1$, y no puede ser otro polinomio asignado.
3. Cuando $d_x \neq d_1$, $d_x \neq d_2$ y $\tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 270\right) d_{1R} > d_{1I}$ (condición C4.4) y el numerador n_x de v_x determinado como $d_{1R} \left[1 + j \tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 270\right)\right] v_x$ satisface la condición del numerador (lema 4.4), si y sólo si $d_x = d_4 = d_{1R} \left[1 + j \tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 270\right)\right]$, y no puede ser otro polinomio asignado.
4. Si $d_x \neq d_2$, $d_x \neq d_1$ y $d_x \neq d_4$ debe ser $d_x = d_3$.

Demostración:

A partir del arco completo A_1 , aplicando la normalización (lema 4.3) se obtienen los valores de n_1 , $d_1 = \frac{n_1}{v_1}$, $d_2 = \frac{n_1}{v_2}$, $n_{4\lambda} = d_1v_{1pred}$ y $n_{2\lambda} = d_2v_{2suc}$. El valor de v_x es conocido.

1. \Leftarrow Véase el mismo caso en el teorema 4.4.

\Rightarrow Para demostrar esta implicación, basta probar que si la condición C4.1 y la condición del numerador se satisfacen, entonces la solución $n_x = d_2v_x$, $d_x = d_2$, es única. Nótese que la condición C4.1 se puede cumplir cuando a) $d_x = d_3$, b) $d_x = d_4$ o c) $d_x = d_1$, y que en cada caso, el valor del numerador n_x determinado, verifica la condición del numerador.

Sea n_x el numerador de v_x determinado como d_2v_x , verificando la condición C4.1 y la condición del numerador. Además $A_x = \frac{n_x}{S_2}$, donde S_2 es parte del segmento de vértices d_2 y d_3 , y $\arg(d_3 - d_2) = 90^\circ$.

- a) Sea n_x^* el numerador de v_x determinado como $d_3 v_x$. Entonces $A_x = \frac{n_x^*}{S_3}$, donde S_3 es parte del segmento de vértices d_4 y d_3 , $\arg(d_4 - d_3) = 180^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.2 $\arg(n_x^*) = 180^\circ - \phi(A_x)$. Como v_x es el mismo vértice, entonces $\arg\left(\frac{n_x^*}{d_3}\right) = \arg\left(\frac{n_x}{d_2}\right)$, de donde se deduce que $\arg(d_3) = \arg(d_2) + 90^\circ$. $d_x = d_3$ verifica la condición C4.1, puesto que

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{v_2}{v_x}\right) &= \arg(d_2) + 90^\circ - \arg(d_2) + \arg(n_1) - 180^\circ + \phi(A_x) \\ &= \arg(n_1) + \phi(A_x) - 90^\circ. \end{aligned}$$

Como $\arg(d_3) = \pm \arg(d_2)$, n_x es una solución, n_x^* no lo es y $d_x = d_3$ no es una solución.

- b) Véase el mismo caso en el teorema 4.4.

- c) Sea n_x^* el numerador de v_x determinado como $d_1 v_x$. Entonces $A_x = \frac{n_x^*}{S_1}$, donde S_1 es parte del segmento de vértices d_2 y d_1 , $\arg(d_2 - d_1) = 0^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.2 $\arg(n_x^*) = -\phi(A_x)$. Como v_x es el mismo vértice, entonces $\arg\left(\frac{n_x^*}{d_1}\right) = \arg\left(\frac{n_x}{d_2}\right)$, de donde se deduce que $\arg(d_1) = \arg(d_2) + 270^\circ$. $d_x = d_1$ verifica la condición C4.1, puesto que

$$\arg\left(\frac{v_2}{v_x}\right) = 270^\circ + \phi(A_x) + \arg(n_1) = \phi(A_x) + \arg(n_1) - 90^\circ.$$

Como $\arg(d_2) = \pm 90^\circ$, según lo anterior $\arg(d_1) = 0^\circ$ o $\arg(d_1) = 180^\circ$, lo cual no es posible. Por tanto, n_x es una solución, n_x^* no lo es y $d_x = d_1$ no es una solución.

2. Véase el mismo caso en el teorema 4.4.

3. \Leftarrow Véase las misma implicación del caso 4 en el teorema 4.4.

\Rightarrow Para demostrar esta implicación, basta probar que si la condición C4.4 y la condición del numerador se satisfacen, entonces la solución $n_x = v_x d_x$, $d_x = d_4$, es única. Nótese que si $d_x \neq d_2$ y $d_x \neq d_1$, la condición C4.4 se puede verificar cuando $d_x = d_3$.

Sea n_x el numerador de v_x determinado como $v_x d_4$, verificando la condición C4.4 y la condición del numerador. Además $A_x = \frac{n_x}{S_4}$, donde S_4 es parte del segmento de vértices d_4 y d_1 , y $\arg(d_1 - d_4) = 270^\circ$.

Sea n_x^* el denominador de v_x determinado como $d_3 v_x$. Entonces $A_x = \frac{n_x^*}{S_3}$, donde S_3 es parte del segmento de vértices d_3 y d_4 , $\arg(d_4 - d_3) = 180^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.2 $\arg(n_x^*) = 270^\circ + \arg(n_x)$. Por tanto $n_x^* = \rho e^{j3\frac{\pi}{2}} n_x = \rho n_{xI} - j\rho n_{xR}$.

Como v_x es el mismo vértice $\arg\left(\frac{n_x}{d_3}\right) = \arg\left(\frac{n_x^*}{d_4}\right)$, de donde se deduce que $\arg(d_3) = \arg(d_4) + 270^\circ$. Sea $\alpha = \arg(d_4)$, entonces $\alpha + 270^\circ = \arg(d_3) = \arg(v_x) + \arg(n_x^*) = \arg(v_x) + 180^\circ - \phi(A_x)$. Por tanto $\alpha = \arg(v_x) - \phi(A_x) + 270^\circ$, y como el argumento de d_4 verifica $d_{4I} = d_{1R} \tan(\alpha) > d_{1I}$ (por la normalización), es decir, la condición C4.4 se satisface.

Si $d_x = d_3$ entonces $d_3 = d_{3R} + jd_{3I} = jd_{1R} \tan(\arg(v_x) + 180^\circ - \phi(A_x))$, y el numerador n_x^* puede calcularse mediante la expresión

$$n_x^* = d_3 v_x = j n_{1R} \tan(\arg(v_x) - \varphi(S_x) + 180^\circ) v_x.$$

Si $d_x = d_3$, entonces $\arg(d_3) = \arg(d_4) + 270^\circ$. En este caso $\arg(d_3) = 90^\circ$ o $\arg(d_3) = 270^\circ$, entonces $\arg(d_4) = 0^\circ$ o $\arg(d_4) = 180^\circ$, lo que no es posible porque $d_{4I} = d_{3I} \neq 0$. Por tanto, n_x es una solución, n_x^* no lo es y $d_x = d_3$ no es una solución.

4. Si $d_x \neq d_2, d_x \neq d_1$ y $d_x \neq d_4$ entonces debe ser $d_x = d_3$.

■

5.11. B. $d_{2I} = 0, d_{2R} \neq 0$.

Teorema 5.11

[Sucesor] Sean A_1 un arco completo de la frontera del conjunto de valores, con vértices $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$ y $v_2 = \frac{n_1}{d_2}$, el segmento de la frontera sucesor a A_1 , de vértices $v_2 = \frac{n_1}{d_2}$ y $v_{2suc} = \frac{n_{2\lambda}}{d_2}$, y el segmento de la frontera predecesor a A_1 , con vértices $v_{1pred} = \frac{n_{4\lambda}}{d_1}$ y $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$, todos en sentido antihorario. Sea A_x un arco de la frontera de vértices $v_{xsuc} = \frac{n_x}{d_{xsuc}}$ y $v_x = \frac{n_x}{d_x}$, en sentido antihorario, donde v_x es un vértice perteneciente a la intersección de un segmento de la frontera y el arco A_x . Entonces:

1. $\arg\left(\frac{v_2}{v_x}\right) = \phi(A_x) + \arg(n_1) - 90^\circ$ (condición C4.1) y el numerador n_x de v_x determinado como d_2v_x satisface la condición del numerador (lema 4.4), si y solo si $d_x = d_2$, y no puede ser otro polinomio asignado.
2. Cuando $d_x \neq d_2$, $\arg\left(\frac{v_1}{v_x}\right) = \phi(A_x) + \arg(n_1)$ (condición C4.2) y el numerador n_x de v_x determinado como d_1v_x satisface la condición del numerador (lema 4.4), si y solo si $d_x = d_1$, y no puede ser otro polinomio asignado.
3. Cuando $d_x \neq d_1$ y $d_x \neq d_2$, $\tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 180^\circ\right) d_{2R} > d_{2I}$ (condición C4.3), y el numerador n_x de v_x determinado como $n_x = d_{2R} \left[1 + j \tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 180^\circ\right)\right] v_x$ satisface la condición del numerador (lema 4.4), si y solo si $d_x = d_3 = d_{2R} \left[1 + j \tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 180^\circ\right)\right]$, y no puede ser otro polinomio asignado.
4. Cuando $d_x \neq d_1$, $d_x \neq d_2$ y $d_x \neq d_3$, $\tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 270^\circ\right) d_{1R} > d_{1I}$ (condición C4.4), y el numerador n_x de v_x determinado como $n_x = d_{1R} \left[1 + j \tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 270^\circ\right)\right] v_x$ satisface la condición del numerador (lema 4.4), si y solo si $d_x = d_4 = d_{1R} \left[1 + j \tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 270^\circ\right)\right]$.

Demostración:

A partir del arco completo A_1 , aplicando la normalización (lema 4.3) se obtienen los valores de n_1 , $d_1 = \frac{n_1}{v_1}$, $d_2 = \frac{n_1}{v_2}$, $n_{4\lambda} = d_1v_{1pred}$ y $n_{2\lambda} = d_2v_{2suc}$. El valor de v_x es conocido.

1. \Leftarrow Véase el mismo caso en el teorema 4.4.

\Rightarrow Para demostrar esta implicación, basta probar que si la condición C4.1 y la condición del numerador se satisfacen, entonces la solución $n_x = d_2v_x$, $d_x = d_2$, es única. Nótese que la condición C4.1 se puede cumplir cuando a) $d_x = d_3$, b) $d_x = d_4$ o c) $d_x = d_1$, y que en cada caso, el valor del numerador n_x determinado, verifica la condición del numerador.

Sea n_x el numerador de v_x determinado como d_2v_x , verificando la condición C4.1 y la condición del numerador. Además $A_x = \frac{n_x}{S_2}$, donde S_2 es parte del segmento de vértices d_2 y d_3 , y $\arg(d_3 - d_2) = 90^\circ$.

a) Sea n_x^* el numerador de v_x determinado como d_3v_x . Entonces $A_x = \frac{n_x^*}{S_3}$, donde S_3 es parte del segmento de vértices d_4 y d_3 , $\arg(d_4 - d_3) = 180^\circ$ (por la

normalización), y por la proposición 4.2 $\arg(n_x^*) = 180^\circ - \phi(A_x)$. Como v_x es el mismo vértice, entonces $\arg\left(\frac{n_x^*}{d_3}\right) = \arg\left(\frac{n_x^*}{d_2}\right)$, de donde se deduce que $\arg(d_3) = \arg(d_2) + 90^\circ$. $d_x = d_3$ verifica la condición C4.1, puesto que

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{v_2}{v_x}\right) &= \arg(d_2) + 90^\circ - \arg(d_2) + \arg(n_1) - 180^\circ + \phi(A_x) \\ &= \arg(n_1) + \phi(A_x) - 90^\circ. \end{aligned}$$

Sea $\alpha = \arg(d_2)$, $\alpha = 0^\circ$ o $\alpha = 180^\circ$. Entonces $\arg(d_3) = 90^\circ$ o $\arg(d_3) = 270^\circ$, lo que no es posible porque $d_{3R} = d_{2R} \neq 0$. Por tanto, n_x es una solución, n_x^* no lo es y $d_x = d_3$ no es una solución.

b) Véase el mismo caso en el teorema 4.4.

c) Sea n_x^* el numerador de v_x determinado como $d_1 v_x$. Entonces $A_x = \frac{n_x^*}{S_1}$, donde S_1 es parte del segmento de vértices d_2 y d_1 , $\arg(d_2 - d_1) = 0^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.2 $\arg(n_x^*) = -\phi(A_x)$. Como v_x es el mismo vértice, entonces $\arg\left(\frac{n_x^*}{d_1}\right) = \arg\left(\frac{n_x^*}{d_2}\right)$, de donde se deduce que $\arg(d_1) = \arg(d_2) + 270^\circ$. $d_x = d_1$ verifica la condición C4.1, puesto que

$$\arg\left(\frac{v_2}{v_x}\right) = 270^\circ + \phi(A_x) + \arg(n_1) = \phi(A_x) + \arg(n_1) - 90^\circ.$$

Sea $\alpha = \arg(d_2)$, $\alpha = 0^\circ$ o $\alpha = 180^\circ$. Entonces $\arg(d_1) = 270^\circ$ o $\arg(d_1) = 90^\circ$, lo que no es posible porque $d_{1I} = d_{2I} = 0$. Por tanto, n_x es una solución, n_x^* no lo es y $d_x = d_1$ no es una solución.

2. \Leftarrow Véase el mismo caso en el teorema 4.4.

\Rightarrow Para demostrar esta implicación, basta probar que si la condición C4.2 y la condición del numerador se satisfacen, entonces la solución $n_x = d_1 v_x$, $d_x = d_1$, es única. Nótese que si $d_x \neq d_2$, la condición C4.2 se puede cumplir también cuando a) $d_x = d_3$ o b) $d_x = d_4$, y en cada caso, el valor del numerador n_x determinado verifica la condición del numerador.

Sea n_x el numerador de v_x determinado como $d_1 v_x$, verificando la condición C4.2 y la condición del numerador. Además $A_x = \frac{n_x}{S_1}$, donde S_1 es parte del segmento de vértices d_1 y d_2 , y $\arg(d_2 - d_1) = 0^\circ$.

a) Véase el mismo caso en el teorema 4.4.

b) Sea n_x^* el numerador de v_x determinado como $d_4 v_x$. Entonces $A_x = \frac{n_x^*}{S_4}$, donde S_4 es parte del segmento de vértices d_4 y d_1 , $\arg(d_1 - d_4) = 270^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.2 $\arg(n_x^*) = 270^\circ - \phi(A_x)$. Como v_x es el mismo vértice, entonces $\arg\left(\frac{n_x}{d_1}\right) = \arg\left(\frac{n_x^*}{d_4}\right)$, de donde se deduce que $\arg(d_4) = \arg(d_1) + 270^\circ$. $d_x = d_4$ verifica la condición C4.2, puesto que

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{v_1}{v_x}\right) &= \arg(d_1) + 270^\circ - \arg(d_1) + \arg(n_1) - 270^\circ + \phi(A_x) \\ &= \arg(n_1) + \phi(A_x). \end{aligned}$$

Sea $\alpha = \arg(d_1)$, $\alpha = 0^\circ$ o $\alpha = 180^\circ$. Entonces $\arg(d_4) = 270^\circ$ o $\arg(d_4) = 90^\circ$. Esto no es posible porque $d_{4I} \neq 0$ puesto que $d_{1I} = 0$. Por tanto, n_x es una solución, n_x^* no lo es y $d_x = d_4$ no es una solución.

3. Véase el mismo caso en el teorema 4.4.

4. Véase el mismo caso en el teorema 4.4.

■

5.12. C. $d_{1R} = 0$, $d_{1I} \neq 0$.

Teorema 5.12

[Sucesor] Sean A_1 un arco completo de la frontera del conjunto de valores, con vértices $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$ y $v_2 = \frac{n_1}{d_2}$, el segmento de la frontera sucesor a A_1 , de vértices $v_2 = \frac{n_1}{d_2}$ y $v_{2suc} = \frac{n_{2\lambda}}{d_2}$, y el segmento de la frontera predecesor a A_1 , con vértices $v_{1pred} = \frac{n_{4\lambda}}{d_1}$ y $v_1 = \frac{n_1}{d_1}$, todos en sentido antihorario. Sea A_x un arco de la frontera de vértices $v_{xsuc} = \frac{n_x}{d_{xsuc}}$ y $v_x = \frac{n_x}{d_x}$, en sentido antihorario, donde v_x es un vértice perteneciente a la intersección de un segmento de la frontera y el arco A_x . Entonces:

1. $\arg\left(\frac{v_2}{v_x}\right) = \phi(A_x) + \arg(n_1) - 90^\circ$ (condición C4.1) y el numerador n_x de v_x determinado como $d_2 v_x$ satisface la condición del numerador (lema 4.4), si y solo si $d_x = d_2$, y no puede ser otro polinomio asignado.
2. Cuando $d_x \neq d_2$, $\arg\left(\frac{v_1}{v_x}\right) = \phi(A_x) + \arg(n_1)$ (condición C4.2) y el numerador n_x de v_x determinado como $d_1 v_x$ satisface la condición del numerador (lema 4.4), si y solo si $d_x = d_1$, y no puede ser otro polinomio asignado.

3. Cuando $d_x \neq d_1$ y $d_x \neq d_2$, $\tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 180^\circ\right) d_{2R} > d_{2I}$ (condición C4.3), y el numerador n_x de v_x determinado como $n_x = d_{2R} \left[1 + j \tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 180^\circ\right)\right] v_x$ satisface la condición del numerador (lema 4.4), si y solo si $d_x = d_3 = d_{2R} \left[1 + j \tan\left(\arg\left(\frac{1}{v_x}\right) - \phi(A_x) + 180^\circ\right)\right]$, y no puede ser otro polinomio asignado.
4. Cuando $d_x \neq d_1, d_x \neq d_2$ y $d_x \neq d_3$, el numerador n_x de v_x determinado como $d_1 v_{xsuc}$ satisface la condición del numerador (lema 4.4), si y sólo si $d_x = d_4 = d_1 \frac{v_{xsuc}}{v_x}$.

Demostración:

A partir del arco completo A_1 , aplicando la normalización (lema 4.3) se obtienen los valores de $n_1, d_1 = \frac{n_1}{v_1}, d_2 = \frac{n_1}{v_2}, n_{4\lambda} = d_1 v_{1pred}$ y $n_{2\lambda} = d_2 v_{2suc}$. El valor de v_x es conocido.

1. \Leftarrow Véase el mismo caso en el teorema 4.4.

\Rightarrow Para demostrar esta implicación, basta probar que si la condición C4.1 y la condición del numerador se satisfacen, entonces la solución $n_x = d_2 v_x, d_x = d_2$, es única. Nótese que la condición C4.1 se puede cumplir cuando a) $d_x = d_3$, b) $d_x = d_4$ o c) $d_x = d_1$, y que en cada caso, el valor del numerador n_x determinado, verifica la condición del numerador.

Sea n_x el numerador de v_x determinado como $d_2 v_x$, verificando la condición C4.1 y la condición del numerador. Además $A_x = \frac{n_x}{S_2}$, donde S_2 es parte del segmento de vértices d_2 y d_3 , y $\arg(d_3 - d_2) = 90^\circ$.

a) Véase el mismo caso en el teorema 4.4.

b) Véase el mismo caso en el teorema 4.4.

c) Sea n_x^* el numerador de v_x determinado como $d_1 v_x$. Entonces $A_x = \frac{n_x^*}{S_1}$, donde S_1 es parte del segmento de vértices d_2 y d_1 , $\arg(d_2 - d_1) = 0^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.2 $\arg(n_x^*) = -\phi(A_x)$. Como v_x es el mismo vértice, entonces $\arg\left(\frac{n_x^*}{d_1}\right) = \arg\left(\frac{n_x}{d_2}\right)$, de donde se deduce que $\arg(d_1) = \arg(d_2) + 270^\circ$. $d_x = d_1$ verifica la condición C4.1, puesto que

$$\arg\left(\frac{v_2}{v_x}\right) = 270^\circ + \phi(A_x) + \arg(n_1) = \phi(A_x) + \arg(n_1) - 90^\circ.$$

Sea $\alpha = \arg(d_1)$, $\alpha = 90^\circ$ o $\alpha = 270^\circ$. Entonces $\arg(d_2) = 180^\circ$ o $\arg(\bar{d}_2) = 0^\circ$, lo que no es posible porque $d_{2I} = d_{1I} \neq 0$. Por tanto n_x es una solución, n_x^* no lo es, y $d_x = d_1$ no es una solución.

2. \Leftarrow Véase el mismo caso en el teorema 4.4.

\Rightarrow Para demostrar esta implicación, basta probar que si la condición C4.2 y la condición del numerador se satisfacen, entonces la solución $n_x = d_1 v_x$, $d_x = d_1$, es única. Nótese que si $d_x \neq d_2$, la condición C4.2 se puede cumplir también cuando a) $d_x = d_3$ o b) $d_x = d_4$, y en cada caso, el valor del numerador n_x determinado verifica la condición del numerador.

Sea n_x el numerador de v_x determinado como $d_1 v_x$, verificando la condición C4.2 y la condición del numerador. Además $A_x = \frac{n_x}{S_1}$, donde S_1 es parte del segmento de vértices d_1 y d_2 , y $\arg(d_2 - d_1) = 0^\circ$.

a) Véase el mismo caso en el teorema 4.4.

b) Sea n_x^* el numerador de v_x determinado como $d_4 v_x$. Entonces $A_x = \frac{n_x^*}{S_4}$, donde S_4 es parte del segmento de vértices d_4 y d_1 , $\arg(d_1 - d_4) = 270^\circ$ (por la normalización), y por la proposición 4.2 $\arg(n_x^*) = 270^\circ - \phi(A_x)$. Como v_x es el mismo vértice, entonces $\arg\left(\frac{n_x}{d_1}\right) = \arg\left(\frac{n_x^*}{d_4}\right)$, de donde se deduce que $\arg(d_4) = \arg(d_1) + 270^\circ$. $d_x = d_4$ verifica la condición C4.2, puesto que

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{v_1}{v_x}\right) &= \arg(d_1) + 270^\circ - \arg(d_1) + \arg(n_1) - 270^\circ + \phi(A_x) \\ &= \arg(n_1) + \phi(A_x). \end{aligned}$$

Sea $\alpha = \arg(d_1)$, $\alpha = 90^\circ$ o $\alpha = 270^\circ$. Entonces $\arg(d_4) = 0^\circ$ o $\arg(d_4) = 180^\circ$. Por tanto $d_4 = (0, 0)$ no puede ser una solución, pues el vértice v_x no es cero.

3. Véase el mismo caso en el teorema 4.4.

4. \Leftarrow Si $d_x = d_4$ entonces $A_x = \frac{n_x}{S_4}$, donde S_4 es parte del segmento de vértices d_4 y d_1 , verificándose que $\arg(d_1 - d_4) = 270^\circ$ (por la normalización). Como $d_4 = d_1 \frac{v_{xsuc}}{v_x}$ y $n_x = d_4 v_x$, sustituyendo se tiene que $n_x = d_1 v_{xsuc}$.

\Rightarrow Para demostrar esta implicación, basta probar que si $n_x = d_1 v_{xsuc}$, verifica la condición del numerador, entonces $d_x = d_4 = d_1 \frac{v_{xsuc}}{v_x}$, lo cual es evidente.

■

Conclusiones y futuros desarrollos.

Se ha conseguido el objetivo inicial de la tesis que aborda la identificación de intervalos de planta mediante el desarrollo de algoritmos de identificación eficaces, utilizando inicialmente cinco vértices de la frontera del conjunto de valores en un cuadrante, y mejorando dicho algoritmo al establecer como condición necesaria para la identificación, la existencia de un elemento de la frontera (arco o segmento) completo en un cuadrante. Se han evitado mallados en los parámetros de perturbación y se ha disminuido el coste computacional, pues los algoritmos están contruidos utilizando operaciones matemáticas elementales.

A continuación, se enumeran los diferentes resultados conducentes al objetivo propuesto, todos ellos aportaciones originales de esta tesis.

- Se ha caracterizado la frontera de un conjunto de valores de una familia de intervalos, obtenida en lazo abierto, para una frecuencia particular (teorema 3.1 y lema 3.3).
- Se ha determinado la propiedad de «continuidad» segmento-arco-segmento de la frontera del conjunto de valores (teorema 3.4), demostrando que dos elementos de la frontera del conjunto de valores se cortan (salvo vértices) si y solo si el punto de intersección está en un eje (teorema 3.3),[Hernández et al., 2011].
- A partir del concepto «conjunto ordenado de vértices» (definición 3.3), se han caracterizado los vértices de la frontera de un conjunto de valores de un intervalo de plantas, en el mismo cuadrante (teorema 3.5),[Hernández et al., 2011].
- Se ha establecido una condición suficiente para determinar los valores de los polinomios de Kharitonov asociados a un conjunto de valores de un intervalo de plantas (corolario 3.1),[Hernández et al., 2011]. Esta condición suficiente ha permitido asignar los polinomios numerador y denominador de los vértices del conjunto de valores, de modo que forman un «conjunto ordenado de vértices».

- Se ha determinado el valor de uno de los polinomios asignados, de modo que satisface la condición suficiente establecida para obtener los valores de los polinomios de Kharitonov asociados al conjunto de valores. El teorema 3.6 determina el valor de un polinomio asignado del numerador, y el teorema 3.7 determina el valor de un polinomio asignado del denominador [Hernández et al., 2011].
- Se ha establecido un algoritmo para la **identificación**, obteniendo los valores de los polinomios de Kharitonov asociados a partir de un conjunto de valores con **al menos 5 vértices en un mismo cuadrante**. Este algoritmo es de bajo coste computacional, ya que consiste de multiplicaciones y/o divisiones para cada conjunto de valores. (**sección 3.4, pág. 108**), [Hernández et al., 2011].
- Se ha construido un sistema de ecuaciones que relaciona los polinomios de Kharitonov obtenidos según el algoritmo propuesto para cada conjunto de valores, a diferentes frecuencias (sección 3.5). Las soluciones del sistema de ecuaciones son los valores de los parámetros de los polinomios numerador y denominador de la familia de funciones de transferencia que originó los conjuntos de valores a las distintas frecuencias ([Hernández et al., 2011]). En el caso teórico en el que la frontera sea conocida, el algoritmo y el sistema de ecuaciones proporcionan exactamente el intervalo de plantas.
- Se ha establecido una condición necesaria y suficiente para determinar los polinomios asignados de los vértices de la frontera de un conjunto de valores (teorema 4.5): la existencia de al menos un arco o un segmento completo de la frontera del conjunto de valores en un cuadrante. Se logra así mejorar los resultados anteriores, de modo que es posible identificar un polinomio asignado del conjunto de valores a partir de dos vértices en un cuadrante. El lema 4.1 determina el valor del polinomio asignado en el caso de existir un segmento completo, y el lema 4.3 para el caso de un arco.
- Se ha demostrado como caracterizar y calcular los polinomios numerador y denominador de cualquier vértice de la frontera de un conjunto de valores, en cualquier cuadrante, a partir de la información obtenida de un segmento (respectivamente arco) de la frontera que contenga dicho vértice, y del segmento (respectivamente arco) inicial completo utilizado para determinar un polinomio asignado (teoremas 4.1 al 4.4).
- Se ha establecido un algoritmo para la **identificación**, de modo que, dado un

conjunto de valores con **al menos un segmento o un arco de la frontera en un cuadrante**, obtiene los valores de los polinomios de Kharitonov asociados (**sección 4.3, pág. 170**).

- Se han generalizado (capítulo 5) los resultados establecidos en el capítulo 4, en cuanto a la identificación de un polinomio asignado, contemplando la posibilidad de que, o bien la parte real, o bien la parte imaginaria del polinomio asignado obtenido mediante la normalización, sea igual a cero.

Futuras investigaciones.

Como todo trabajo de investigación, las principales conclusiones y aportaciones originales abren la puerta a nuevos trabajos y desarrollos, que se pueden concretar en las siguientes futuras líneas de investigación:

- Una forma de estudiar la estabilidad robusta de una familia parametrizada de polinomios es verificar que su conjunto de valores excluye al origen. El Teorema de la Aplicación demuestra que el conjunto de valores de una familia de intervalos de polinomios multilineales está contenido en el recubrimiento convexo de sus vértices. Una condición suficiente para que el conjunto de valores excluya al cero es que el recubrimiento convexo lo haga. Ahora bien, el conjunto de valores puede no ser convexo, por lo que esta aproximación introduce cierto conservadurismo.

El Algoritmo AAS [Willson et al., 1999] proporciona un método para determinar el recubrimiento convexo del conjunto de valores de una familia de funciones de transferencia con incertidumbres paramétricas. Este método supone menor coste computacional que otros anteriores, como puede ser el Teorema de la Aplicación Generalizado. El conjunto de valores de una familia de funciones de transferencia con incertidumbres paramétricas puede no ser convexo, por lo que dicha aproximación resultará, en algunos casos, poco optimizada.

Es de interés un método para aproximar la frontera del conjunto de valores, tanto de familia de polinomios como de familia de funciones de transferencia, con menor coste computacional y menos conservadurismo que los anteriores, ya que la convexidad, que tanto constriñe a estos métodos, no va a ser exigible.

En esta línea, se puede aportar una aproximación nueva a las diferentes aplicaciones obtenidas a partir del Teorema de la Aplicación Generalizado, principalmente para el estudio de la estabilidad robusta de familia de funciones de transferencia con incertidumbres, considerando no el recubrimiento convexo, sino un conjunto más aproximado a la frontera del conjunto de valores de la familia.

- En [Nusret, 2002] se introduce un método para el cálculo de la respuesta en frecuencia de funciones de transferencia cuyo numerador y denominador son polinomios con incertidumbres polinomiales e independientes. Tomando como base este método, se pretende extraer propiedades de la frontera de los conjuntos de valores asociados para extender el trabajo realizado en esta tesis a incertidumbres más complejas.

Bibliografía

- [Aguilar and Cerrada, 2001] Aguilar, J. and Cerrada, M. (2001). Genetic programming-based approach for system identification. *Proceedings (CD) of WSES on Evolutionary Computation EC01, Tenerife, España.*
- [Barlett et al., 1988] Barlett, A., Hollot, C., and Huang, L. (1988). Root locations of an entire polytope of polynomials: it suffices to check the edges. *Mathematics of Control, Signals and Systems.*, 1:61–71.
- [Barmish et al., 1992] Barmish, B., Hollot, C., and Kraus, J. (1992). Extreme points results for robust stabilization of interval plants with first order compensators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37:707–714.
- [Barmish and Kang, 1993] Barmish, B. and Kang, H. (1993). A survey of extreme points results for robustness of control systems. *Automática*, 29,1:13 – 35.
- [Bartlett et al., 1988] Bartlett, A., Hollot, C., and Lin, H. (1988). Root location of an entire polytope of polynomials: it suffices to check the edge. *Mathematics of Controls, Signals and Systems.*, 1:61–71.
- [Bartlett et al., 1993] Bartlett, A., Tesi, A., and Vicino, A. (1993). Frequency response of uncertain systems with intervals plants. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 38:929 – 933.
- [Bhattacharyya et al., 1995] Bhattacharyya, S., Chapellat, H., and Keel, L. (1995). *Robust Control. The parametric approach.* Prentice Hall.
- [Bialas and Garloff, 1985] Bialas, S. and Garloff, J. (1985). Stability of polynomials under coefficient perturbation. *IEEE Transactions on Automatic Control.*, 30:310–312.

- [Chapellat and Bhattacharyya, 1989] Chapellat, H. and Bhattacharyya, S. (1989). A generalization of kharitonov's theorem: robust stability of interval plants. *IEEE Transactions on Automatic Control.*, 3:306–311.
- [Churchill and Brown, 1992] Churchill, V. and Brown, J. (1992). *Variable compleja y aplicaciones*. Mac GrawHill.
- [Conway, 1984] Conway, J. (1984). *Functions of one complex variable*. Springer - Velarg.
- [Dasgupta, 1988] Dasgupta, S. (1988). Kharitonov's theorem revisited. *System and Control Letters.*, 11:381–384.
- [Djafaris, 1993] Djafaris, T. (1993). To stabilize an interval plant family it suffices to simultaneously stabilize sixty four polynomials. *IEEE Transaction on automatic control.*, 38(5):760–764.
- [Doyle, 1982] Doyle, J. (1982). Analysis of feedback systems with structured uncertainties. *IEEE Proc. Part D.*, pages 242–250.
- [Doyle et al., 1988] Doyle, J., Glover, K., and Stein, G. (1988). Space state solutions to standar h_2 and h_∞ control problems. *Proc. American Control Conf.*, pages 1691–1696.
- [Doyle and Stein, 1981] Doyle, J. and Stein, G. (1981). Multivariable feedback design: concepts for classical/modern synthesis. *IEEE Transaction on Automatic Control.*, 26:4–16.
- [Francis, 1987] Francis, B. (1987). A course in h_∞ control theory. *Lecture Notes in Control and Information Sciences.*, 88.
- [Frazer and Duncan, 1929] Frazer, R. and Duncan, W. (1929). On the criteria for the stability of small motions. *Proc. of the Royal Society.*, 124:642–654.
- [Ghosh, 1985] Ghosh, B. (1985). Some new results on the simultaneous stabilizability of a family of single input single output systems. *Systems and Control Letters.*, 6:39–45.
- [Glover and Doyle, 1988] Glover, K. and Doyle, J. (1988). Space state formulae for all stabilizing controllers that satisfy and h_∞ norm bound and relations to risk sensitivity. *System and Control Letters.*, 66:167–172.

- [Hernández, 1994] Hernández, R. (1994). *Síntesis de Controladores Robustos frente a Perturbaciones Estructuradas. Tesis Doctoral*. PhD thesis, UNED. Departamento de Informática y Automática.
- [Hernández, 1995] Hernández, R. (1995). On the sixty-four polynomials of djaferis to stabilize an interval plant. *IEEE Transaction on automatic control.*, 40(12):2122–2127.
- [Hernández, 1996a] Hernández, R. (1996a). Comparasion between the thirty-two virtual vertices and the ghosh polymonials to stabilize a interval plant. *IFAC. 13th Triennial World Congress. San Francisco.*, 2d-20:487–492.
- [Hernández, 1996b] Hernández, R. (1996b). Kharitonov’s theorem extension to interval polynomials which can drop in degree. a nyquist approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41:1009–1012.
- [Hernández, 1998] Hernández, R. (1998). On the thirty-two virtual polynomials to stabilize an interval plant. *IEEE Transaction on automatic control.*, 43(10):1460–1465.
- [Hernández, 1999] Hernández, R. (1999). Comparasion between the extreme point results to stabilize an interval plant. *IFAC. 14th Triennial World Congress. Beijing, China.*, G-2e-08-1:109–114.
- [Hernández, 2002] Hernández, R. (2002). Synthesis based on extreme point results: stabilization of and edge. *The 4th Asian Control Conference. Singapore. September 2002.*
- [Hernández et al., 2011] Hernández, R., García, J., and de Madrid, A. (2011). Interval plant identification from value set with five vertices in a quadrant. *International Journal of Robust and Nonlinear Control. DOI:10.1002/rnc.1574*, 21:21–43.
- [Hollot and Yang, 1990] Hollot, C. and Yang, F. (1990). Robust stabilization of interval plants using lead or lag compensators. *Systems and Control Letters.*, 14:9–12.
- [Kharitonov, 1978] Kharitonov, V. (1978). On a generalization of a satability criterion. *Izvestiya akademii Nauk Kazakhkogo SSR Seriya Fizika Materiay.*, 1:53–57.
- [Leach, 2010] Leach, S. (2010). Singular value decomposition. a primer. *Departament of Computer Science. Bown University.*
- [LJung, 1999] LJung, L. (1999). *System Identification. Theory for the user*. Prentice Hall.

- [Marden, 1949] Marden, M. (1949). The geometry of the zeros of a polynomial in a complex variable. *American Mathematical Society*.
- [Marsden, 1983] Marsden, J. (1983). *Basic Complex Analysis*. Freeman.
- [Mikhailov, 1938] Mikhailov, A. (1938). Method of harmonic analysis in control theory. *Avtomatika i Telemekhanika.*, 3:27–81.
- [Mirsky, 1990] Mirsky, J. (1990). *An introduction to Linear Algebra*. Dover Publications, Inc. New York.
- [Nehari, 1975] Nehari, Z. (1975). *Conformal mapping*. New York: Dover Publications.
- [Nusret, 2002] Nusret, T. (2002). Computation of the frequency response of multilinear affine systems. *IEEE Transactions on Automatic Control.*, 47:1691–1696.
- [Parrilo and Sanchez, 2001] Parrilo, P. and Sanchez, R. (2001). Robust identification with mixed parametric/nonparametric models and time/frequency-domain experiments: Theory and an application. *IEEE Transaction on Control Systems Technology*, 9:608 – 614.
- [vanOverschee and deMoor, 1996] vanOverschee, P. and deMoor, B. (1996). *Subspace Identification for Linear Systems*. Kluwer Academic Publishers.
- [Willson et al., 1999] Willson, B., Eryilmaz, B., and Shafai, B. (1999). An adaptive angular sweep algorithm for value set construction. *IEEE Transaction on automatic control*, 44.
- [Wilson et al., 1997] Wilson, H., Shafai, B., and Eryilmaz, B. (1997). Improving control design for parametric uncertainty. *International Journal Control*, 66(6):863 – 883.
- [Zadeh and Desoer, 1963] Zadeh, L. and Desoer, C. (1963). *Linear System Theory*. McGraw-Hill.
- [Zames and Francis, 1981] Zames, G. and Francis, B. (1981). Model reference transformations, multiplicative seminorms and approximate inverses. *IEEE Transaction on Automatic Control.*, 26:301–320.
- [Zeheb, 1989] Zeheb, E. (1989). Necessary and sufficient conditions for root clustering of a polytope of polynomials in a simply connected domain. *IEEE Transactions on Automatic Control.*, 34:995–998.